

محمد حمیدی

شرفِ نسا

مفول دس ریاضی کاتون

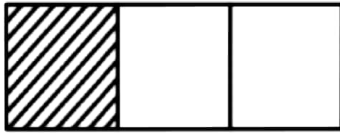
طراح و مؤلف در ریاضی و علم از موزن انجمن علمی کابل

دکتری ریاضی

مؤلف و مترجم کتاب ریاضی و حساب

تقدیم به سرکارِ خودامیزان

۱- در شکل زیر مستطیل بزرگ از ۳ مربع یکسان تشکیل شده است. اگر مساحت مستطیل بزرگ از $\frac{2}{3}$ مساحت یکی از مربع‌ها ۱۴ واحد بیشتر باشد، اختلاف طول و عرض مستطیل بزرگ کدام است؟



۲√۶ (۱) ✓

√۶ (۲)

۲√۳ (۳)

√۳ (۴)

قطع مربع را x بگیریم، پس طول و عرض مستطیل بزرگ به ترتیب $3x$ و x هستند.

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = (3x)(x) = 3x^2$$

مساحت مستطیل بزرگ و هر مربع را مساوی می‌کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = x^2$$

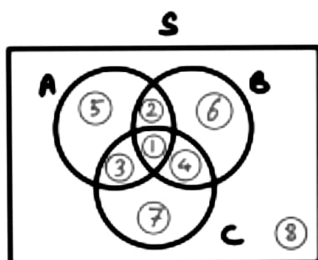
$$3x^2 = \frac{2}{3}x^2 + 14 \xrightarrow{\times 3} 9x^2 = 2x^2 + 42 \rightarrow 7x^2 = 42 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6}$$

مساحت مستطیل از $\frac{2}{3}$ مساحت هر مربع، ۱۴ واحد بیشتر است. پس، $\frac{2}{3}x^2$ و $3x^2$

$$\frac{\text{طول}}{3x} - \frac{\text{عرض}}{x} = 2x = 2\sqrt{6}$$

اختلاف طول و عرض مستطیل برابر است با:

- ۲- مجموعه $(A - B) - (C - B)$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟
- (۱) $(B - C) - A$
- (۲) $A - (B \cup C)$
- (۳) $B - (A \cup C)$
- (۴) $(A - B) - C$ ✓



روی نمودارون سه مجموعه A و B و C را نشان می‌دهیم و آن را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنیم:

مجموعه داده شده در صورت سوال را بر حسب نواحی می‌نویسیم:

$$(A - B) - (C - B) = \{5, 3\} - \{3, 7\} = \{5\}$$

برای هر چهار مجموعه داده شده در گزینه‌ها، همین کار را انجام می‌دهیم. هر کدام در نقطه ناهمپوشی باشد، جواب است!

① $(B - C) - A = \{2, 7\} - \{5, 2, 1, 3\} = \{2\}$ ✗

② $A - (B \cup C) = \{5, 2, 1, 3\} - (\{2, 3, 4, 7\} - \{5, 2, 1, 3, 8\}) = \{5, 2, 1, 3\} - \{2, 4\} = \{5, 1, 3\}$ ✗

③ $B - (A \cup C) = \{2, 3, 4, 7\} - \{2, 3, 4, 5, 7\} = \{4\}$ ✗

④ $(A - B) - C = \{5, 3\} - \{1, 3, 4, 7\} = \{5\}$ ✓

۳- تابع با ضابطه $f(x) = (5x^2 - (ax+1)(x-b))c$ ثابت است. اگر $f(x+y) = f(x)f(y) - 2$ باشد، مقدار مثبت c

کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱) ✓

تابع f را ساده کنیم:

$$f(x) = (5x^2 - \underbrace{(ax+1)(x-b)}_{ax^2 - abx + x - b})c = (\underbrace{5x^2 - ax^2}_{\text{نکتوراز } x^2} + \underbrace{abx - x + b}_{\text{نکتوراز } x})c =$$

$$((5-a)x^2 + (ab-1)x + b)c$$

$$\begin{cases} 5-a=0 \rightarrow a=5 \\ ab-1=0 \rightarrow 5b-1=0 \rightarrow b=\frac{1}{5} \end{cases}$$

چون f ثابت است، باید ضرایب x^2 و x صفر باشد.

با جایگذاری در معادله $a=5$ و $b=\frac{1}{5}$ ، ضابطه f به شکل زیر در می آید:

$$f(x) = \left(\underbrace{(5-5)}_0 x^2 + \underbrace{(5 \cdot \frac{1}{5} - 1)}_0 x + \frac{1}{5} \right) c = \left(\frac{1}{5} \right) c = \frac{c}{5}$$

۵۵ مربع تساوی دو طرفه سوال نامده می‌دهیم و حاصل تمام $f(x)$ که $\frac{c}{5}$ قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(x+y)}_{\frac{c}{5}} = \underbrace{f(x)}_{\frac{c}{5}} \underbrace{f(y)}_{\frac{c}{5}} - 2 \rightarrow \frac{c}{5} = \left(\frac{c}{5} \right)^2 - 2 \rightarrow \frac{c}{5} = \frac{c^2}{25} - 2 \xrightarrow{\times 25} 5c = c^2 - 50 \rightarrow$$

$$\frac{c^2 - 5c - 50}{2} = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (c-10)(c+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} c=10 \checkmark (\text{مقدار مثبت}) \\ c=-5 \end{cases}$$

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} [1-x] & x \text{ مثبت} \\ [1+2x] & x \text{ منفی} \end{cases}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{\pi}) + f(-1,7)$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۱

اول باید چک کنیم $\sqrt{\pi}$ و $-1,7$ در کدام دامنه قرار می‌گیرند؟ $|x| > 0$ یا $|x| < 0$

• اگر $\sqrt{\pi}$ را در $|x| > 0$ قرار دهیم به $|\sqrt{\pi}| = \sqrt{\pi}$ می‌رسیم که عددی مثبت است. این رابطه فاصله از صفر است که دامنه «مثبت» است.

$$f(x) = [1-x] \xrightarrow{x=\sqrt{\pi}} f(\sqrt{\pi}) = [1-\sqrt{\pi}] = [1-\underbrace{\sqrt{3,14}}_{1,7\dots}] = [عددی \text{ بین } 0 \text{ و } 1] = -1$$

• اگر $-1,7$ را در $|x| < 0$ قرار دهیم به $|-1,7| = 1,7$ می‌رسیم که عددی منفی است. این رابطه فاصله از صفر است که دامنه «منفی» است.

$$f(x) = [1+2x] \xrightarrow{x=-1,7} f(-1,7) = [1+2(-1,7)] = [1-3,4] = [-2,4] = -3$$

$$f(\sqrt{\pi}) + f(-1,7) = -1 + (-3) = -4 \quad \text{پس:}$$

۵- نقاط متمایز $(1, 3a)$ ، $(-1, a)$ و $(a, 3)$ روی یک خط قرار دارند. مقدار a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ✓ -۳ (۳) ۱ (۴) ۳

شیب خط گذشته از نقاط $A(1, 3a)$ و $B(-1, a)$ را بیابیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a - 3a}{-1 - 1} = \frac{-2a}{-2} = a$$

شیب خط گذشته از نقاط $B(-1, a)$ و $C(a, 3)$ را بیابیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3 - a}{a + 1}$$

چون سه نقطه A ، B و C روی یک خط قرار دارند، پس دو شیب بدست آمده باید برابر باشند:

$$m_{AB} = m_{BC} \rightarrow a = \frac{3 - a}{a + 1} \xrightarrow[\text{درین طرفین}]{\text{ضرب}} a^2 + a = 3 - a \rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \xrightarrow{\text{عوامل}} (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$(a + 3)(a - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \checkmark \\ a = 1 \times \end{cases}$$

به ازای $a = 1$ ، نقاط هر سه نقطه را بنویسیم: $A(1, 3)$ ، $B(-1, 1)$ ، $C(1, 3)$

چون نقاط A و C یکی هستند، پس $a = 1$ رد می شود (سوال گفته سه نقطه متمایز)

۶- رابطه‌های زیر، تابع هستند اگر مجموعه A بُرد تابع $f - g$ باشد. مجموع مقادیر اعضای A کدام است؟

$$f = \left\{ \left(7, \frac{k}{4} - 1 \right), \left(-\frac{5}{4}, 1 - k \right), (5, 2), \left(7, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

$$g = \left\{ (5, n), \left(-\frac{5}{4}, \frac{n-1}{4} \right), (4, 3 - 2n^2), \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2) \checkmark$$

$$\frac{11}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{7}{6} \quad (4)$$

• توزیع مرتب $(7, \frac{k}{4} - 1)$ و $(7, \frac{1}{4})$ در f داریم که مولفه‌های اولشان برابرند. برای آن که تابع باشد باید مولفه‌های دوم این توزیع مرتب برابر باشند:

$$\frac{k}{4} - 1 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} k - 4 = 1 \rightarrow k = 5$$

• توزیع مرتب $(-\frac{5}{4}, \frac{n-1}{4})$ و $(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$ در f داریم که مولفه‌های اولشان برابرند. برای آن که تابع باشد باید مولفه‌های دوم این توزیع مرتب برابر باشند:

$$\frac{n-1}{4} = -\frac{3}{4} \rightarrow n-1 = -3 \rightarrow n = -2$$

با جای‌گذاری $k=5$ و $n=-2$ ، تابع f و g را بنویسیم:

صاف به خاطر تکرار

$$f = \left\{ \left(7, \frac{5}{4} - 1 \right), \left(-\frac{5}{4}, 1 - 5 \right), (5, 2), \left(7, \frac{1}{4} \right) \right\} \xrightarrow{k=5} f = \left\{ \left(-\frac{5}{4}, -2 \right), (5, 2), \left(7, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

صاف به خاطر تکرار

$$g = \left\{ (5, n), \left(-\frac{5}{4}, \frac{n-1}{4} \right), (4, 3 - 2n^2), \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\} \xrightarrow{n=-2} g = \left\{ (5, -2), (4, -5), \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \left\{ -\frac{5}{4}, 5 \right\}$$

اشکال دانه f و g را با هم بنویسیم:

مقدار تابع f و g را در $x=5$ و $x=-\frac{5}{4}$ حساب می‌کنیم:

$$\bullet (f-g)\left(-\frac{5}{4}\right) = f\left(-\frac{5}{4}\right) - g\left(-\frac{5}{4}\right) = -2 - \left(-\frac{3}{4}\right) = -2 + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\bullet (f-g)(5) = f(5) - g(5) = 2 - (-2) = 4$$

پس برد $f-g$ ، مجموعه $\left\{ -\frac{1}{4}, 4 \right\}$ است که مجموع اعضایش برابر است با:

$$-\frac{1}{4} + 4 = -\frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{15}{4}$$

۷- هر دو ریشه معادله $(2a+1)x^2 - fax + 2a-1 = 0$ مثبت هستند. a کدام مقدار زیر می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{2}{10}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{8}$

فرضیه سه رده $\underbrace{(2a+1)}_A x^2 - \underbrace{fa}_B x + \underbrace{2a-1}_C = 0$ را سفت کنیم.

اگر سه رده سه رده در دو دامنه Δ مثبت باشد، باید هر سه شرط زیر را داشته باشد:

① مع ریشه های مثبت باشد (چون جمع در دو مثبت، مثبت) در این جا $S = \frac{b}{A} = \frac{fa}{2a+1} > 0$

② ضرب $\cdot \cdot$ (چون ضرب $\cdot \cdot$) $P = \frac{c}{A} = \frac{2a-1}{2a+1} > 0$

③ دلتا سه رده مثبت باشد (چون Δ همیشه داریم) $\Delta > 0$

شرط ۱ و $\frac{fa}{2a+1} > 0$ را با انشان هر سه گزینه بررسی کنیم اگر لازم شد شرط ۳ را هم بررسی کنیم.

① $a = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{4})+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \checkmark \\ P = \frac{2(\frac{1}{4})-1}{2(\frac{1}{4})+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \times \rightarrow \text{چون } P \text{ منفی شد، پس رد می شود} \end{cases}$

② $a = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(-\frac{1}{5})}{2(-\frac{1}{5})+1} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \times \rightarrow \text{رد می شود و نیازی به چک کردن } P \text{ نیست} \\ \text{😊} \end{cases}$

③ $a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{4})+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \checkmark \\ P = \frac{2(\frac{1}{4})-1}{2(\frac{1}{4})+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \times \end{cases} \rightarrow \text{جواب همین} \rightarrow \text{تنها گزینه ای که هر دو شرط را دارد}$

④ $a = \frac{2}{8} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(\frac{2}{8})}{2(\frac{2}{8})+1} \rightarrow \text{مثبت} \checkmark \\ P = \frac{2(\frac{2}{8})-1}{2(\frac{2}{8})+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = -1 \times \rightarrow \text{چون منفی شد، رد می شود} \end{cases}$

۸- معادله $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{x}{x-2}$ دارای چند جواب منفی است؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱ ✓

درست چیست و در حل این نویسیم $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$ و ساده کنیم.

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x-2}$$

در فرج کسر استیب از x نگذاریم و عدد $x-2$ را از فرج $x^2 - 2x$ در طرف ساده کنیم؛ به طرفین در $x-2$ کنیم:

$$\frac{3}{x(x-2)} = \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x}{1} \quad \begin{matrix} \text{طرفین} \\ \text{در} \end{matrix} \quad x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

فرج کردیم به ازاں دو جواب درست آمد، منفرجه شوند، پس هر دو جواب قبول اند.

این سه راه فقط یک جواب منفی $(x = -\sqrt{3})$ دارد.

۹- در داده‌های ۱۵، ۱۱/۵، ۴، ۵، ۹، ۱۱، ۵، ۱۰، ۱۷ و ۱، حاصل ضرب میانه و میانگین کدام است؟

۹۸ (۴) ✓

۸۴ (۳)

۷۲ (۲)

۶۳ (۱)

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱، ۴، ۵، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۵، ۱۷

تعداد داده‌ها فرد است پس داده وسط، میانه است:

$$Q_p = 10.5 = \frac{21}{2}$$

حالا برای بدست آوردن میانگین، باید مجموع را بر تعداد تقسیم کنیم:

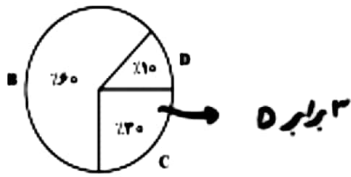
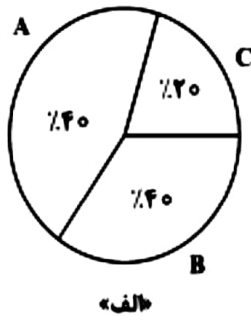
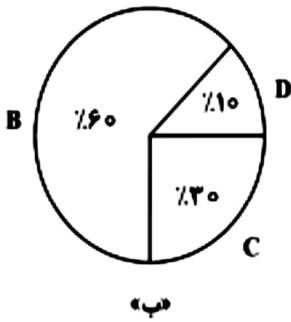
$$\bar{x} = \frac{\overbrace{1+4+5+9}^{19} + \overbrace{10.5+11.5}^{22} + \overbrace{11+15+17}^{43}}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}$$

$$\bar{x} \times Q_p = \frac{28}{3} \times \frac{21}{2} = 98$$

حاصل ضرب میانگین و میانه برابر است!

۱۰- اگر زاویه مربوط به داده «A» در یک نمودار دایره‌ای شامل چهار دایره‌ای شامل داده A، B، C و D برابر ۱۳۵ درجه باشد، کدام عدد زیر، مجموع فراوانی نمودار «ب» است؟

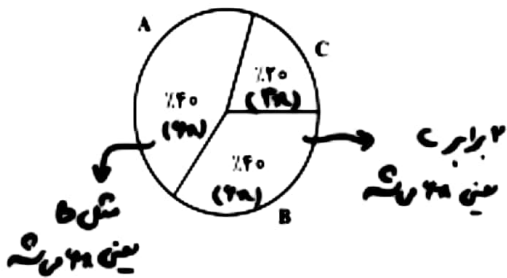
- (۱) ۱۶
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۰ ✓
- (۴) ۹



باقیه به نمودار (ب) که ۳ درصد آن C و ۲ درصدش D است،
نسبت می‌گیریم، فراوانی C، ۳ برابر فراوانی D است.

فرض کنیم فراوانی D و C به ترتیب x و ۳x است.

باقیه به نمودار (الف)، فراوانی A و B را برابر x می‌نویسیم:



پس ترتیب فراوانی A برای A، B، C و D به صورت ۲x، ۲x، ۳x و x است.

باقیه به اینکه تعداد فراوانی باید عدول طبیعی باشد، پس x صفا عدول طبیعی است، یعنی x باید ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ باشد.

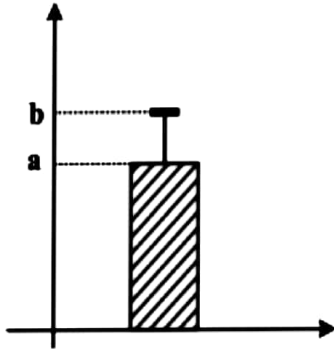
$$f_A + f_C + f_D = 2x + 3x + x = 1.0x$$

فراوانی که داده‌ها نمودار (ب) را تشکیل می‌دهد:

از حاکم x، اعداد ۱، ۲، ۳، ... قرار دهیم، مقدار ۱.۰x برابر با ۱۰، ۲۰، ۳۰، ... می‌شود که در این گزینه فقط ۱۰ را داریم.

بهر چه در صورت سوال قید می‌شود، نظام عددی می‌تواند مجموع فراوانی داده‌ها نمودار (ب) باشد.

۱۱- داده‌های ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷ و b و a مربوط به سن دوستان مریم است که در تولد ۲۲ سالگی‌اش (مهمانی اول) شرکت داشتند و نمودار زیر نشان‌دهنده دو شاخص سن افراد حاضر در این مهمانی است. مریم ۱۰ سال بعد، زمانی که صاحب فرزند شد، تصمیم می‌گیرد به اتفاق پدر بزرگ و مادر بزرگش یک مهمانی (مهمانی دوم) ترتیب دهد و همه دوستانش که در مهمانی اول حضور داشتند را دعوت کند. اگر واریانس سن افراد در مهمانی اول ۴ باشد، مقدار شاخص مرکزی مناسب برای سن افراد در مهمانی دوم، کدام است؟



- ۳۴/۵ (۱) ✓
- ۳۴ (۲)
- ۳۳/۵ (۳)
- ۳۵ (۴)

• مهمانی اول: واریانس سن افراد حاضر در مهمانی اول $\sigma^2 = 4$ بوده پس انحراف معیار سن $\sigma = 2$ است.

طول میله سنی $b - a$ برابر با انحراف معیار است: $b - a = 2 \rightarrow b = a + 2$

از فرض مسئله ۷ داده $a, b, 21, 23, 25, 27$ و (22) باید برابر با ارتفاع مستطیل (یعنی a) باشد پس:

$$a = \frac{a + b + \overbrace{21 + 23 + 25 + 27}^{118} + 22}{7} \quad b = a + 2 \quad a = \frac{a + a + 2 + 118}{7} \rightarrow a = \frac{2a + 120}{7} \quad \begin{matrix} \text{مجموع} \\ \text{داده‌ها} \end{matrix}$$

$$7a = 2a + 120 \rightarrow 5a = 120 \rightarrow a = 24 \rightarrow b = a + 2 = 26$$

• مهمانی دوم: به سن همه افراد حاضر در مهمانی اول اضافه شود. نسبتاً فرزند، پدر بزرگ و مادر بزرگ هم در این مهمانی حضور دارند:

$$32, \frac{a+10}{34}, \frac{b+10}{36}, 31, 33, 35, 37, M, P, B$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 مادر بزرگ پدر بزرگ بچه مریم

در این داده‌ها M و P و B نسبت به مقیاس مرکزی مناسب هستیم. چون سن فرزند، مادر بزرگ و پدر بزرگ باقیه فاصله دارد پس آن‌ها را نادیده بگیریم و باید میانگین را به عنوان مقیاس مرکزی مناسب انتخاب کنیم.

داده‌ها را مرتب می‌کنیم: $B, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, M, P$
 دورانده وسط

$$Q_2 = \frac{34 + 35}{2} = 34.5$$

پس میانگین برابر با میانگین دورانده وسط است:

۱۲- اگر p و $q \sim r$ گزاره‌های درست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره به r بستگی دارد؟

- (۱) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow p$
 (۲) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ ✓
 (۳) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$
 (۴) $(r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p$

p و q درست اند پس p درست و q نادرست است. r هم که دلخواه است.
 هرگاه لازم شد از هم‌ارزی تبدیل گزاره شرطی به مفولی استفاده می‌کنیم و ارزش گزاره‌ها را بر چهار گزینه را با هم می‌کنیم. هر کدام هم ارزش r (۲ یا ۴) شد جواب است.

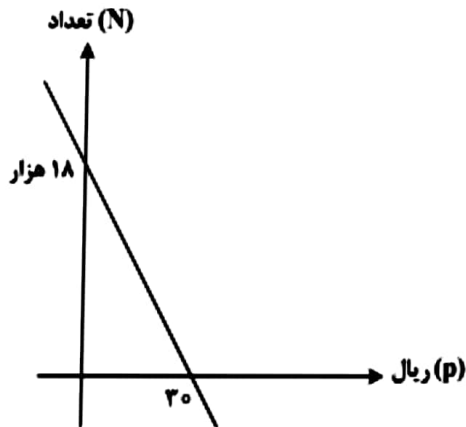
$$\textcircled{1} (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \equiv \underbrace{(F \Rightarrow r)}_T \Rightarrow T \equiv T \quad \times$$

$$\textcircled{2} (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv \underbrace{(T \Rightarrow r)}_{\text{تبدیل به مفولی}} \Rightarrow F \equiv \underbrace{(\sim T \vee r)}_F \Rightarrow F \equiv \underbrace{r \Rightarrow F}_{\text{تبدیل به مفولی}} \equiv \sim r \vee F \equiv \underbrace{(\sim r)}_{\text{به بستگی دارد}} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv \underbrace{(r \Rightarrow T)}_{\text{تبدیل به مفولی}} \Rightarrow F \equiv (\sim r \vee T) \Rightarrow F = T \Rightarrow F = F \quad \times$$

$$\textcircled{4} (r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p \equiv \underbrace{(r \Rightarrow T)}_{\text{تبدیل به مفولی}} \Rightarrow F \equiv (\sim r \vee T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F \quad \times$$

۱۳- نمودار زیر، تعداد فروش یک کالا توسط یک بنگاه اقتصادی را با توجه به قیمت آن نشان می‌دهد. اگر هزینه تولید هر واحد از این کالا ۲۵ ریال و هزینه اولیه ۱۸ هزار ریال باشد، بنگاه این کالا را با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود را به دست آورد؟



- ۳۵ (۱)
- ۳۲٫۵ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۲۷٫۵ (۴) ✓

رابطه بین N و P را باید بنویسیم. خط رسم شده از دو نقطه $A(۳۰, ۰)$ و $B(۰, ۱۸۰۰۰)$ می‌گذرد. شیب را حساب کنیم.

$$m = \frac{18000 - 0}{0 - 30} = \frac{18000}{-30} = -400$$

معادله از مبدأ خط هم که 18000 است. پس معادله این خط به صورت کتابی است:

$$y = \underbrace{-400x}_{\text{شیب}} + \underbrace{18000}_{\text{مبدأ}}$$

حال x و y به ترتیب P و N قرار می‌دهیم.

$$N = -400P + 18000$$

ازت در N به P را برابری N حساب کنیم:

$$400P = 18000 - N \quad \div 400 \quad P = 30 - \frac{N}{400}$$

• از ضرب قیمت فروش در تعداد کالا، درآمد بدست می‌آید: $N(30 - \frac{N}{400}) = 30N - \frac{N^2}{400}$

• مجموع هزینه را می‌نویسیم.

$$\text{مجموع هزینه} = \underbrace{18000}_{\text{هزینه ثابت}} + \underbrace{25N}_{\text{تعداد} \times \text{هزینه هر کالا}}$$

• سود را می‌نویسیم: $\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = (30N - \frac{N^2}{400}) - (18000 + 25N) = \underbrace{(-\frac{1}{400})N^2}_A + \underbrace{5N}_B - \underbrace{18000}_C$

به افتخار طولی این معادله، سود ماکزیمم باشد:

$$N_S = \frac{-B}{2A} = \frac{-5}{2(-\frac{1}{400})} = \frac{5}{\frac{1}{200}} = 1000$$

N بدست آمده را در رابطه $P = 30 - \frac{N}{400}$ قرار می‌دهیم تا قیمت بدست آید: $P = 30 - \frac{1000}{400} = 30 - 2.5 = 27.5$

۱۴- در یک شرکت هیچ کدام از کارکنان با حداقل حقوق ۸۰ میلیون ریالی زیر خط فقر نیستند. میانگین درآمد خانوارهای کشور حداکثر چند میلیون ریال است؟

۱۶۰ (۴) ✓

۱۲۰ (۳)

۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

خط فقر برابر با نصف میانگین است: $\bar{x} = \frac{\bar{x}}{2}$

وقتی انوار با حقوق ۸۰ میلیون ریال، زیر خط فقر هستند، یعنی حداکثر خط فقر ۸۰ میلیون ریال بوده، $\bar{x} \leq 80$ خط فقر

$$\frac{\bar{x}}{2} \leq 80 \xrightarrow{\times 2} \bar{x} \leq 160$$

پس میانگین حداقل $\frac{\bar{x}}{2}$ برابر خط فقر داریم:

پس میانگین حداکثر ۱۶۰ میلیون ریال است.

۱۵- با حروف کلمه «پارسی» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که در نوشتن آن فقط یک حرف، نقطه‌دار ظاهر شود؟

۱۲ (۴)

۲۴ (۳)

۳۶ (۲)

۷۲ (۱)

حروفی که می‌توانند نقطه بگیرند دو حرف هستند ، } پ ، هر جای کلمه که باشد
 ی ، هر جای جز حرف آخر باشد

پس برای آن که نقطه یک حرف نقطه دار داشته باشیم باید حرف « ی » آخر باشد :

$$\frac{4}{\text{اول}} \times \frac{3}{\text{دوم}} \times \frac{2}{\text{سوم}} \times \frac{1}{\text{چهارم}} \times \frac{1}{\text{آخر}} = 24$$

پس ۲۴ کلمه دیگر را باید با ۴ حرف بترسانند چنانکه به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ حالت دارند .

۱۶- حسن و علی قرار است هر کدام به ۳ سؤال از ۶ سؤالی که روی برگه‌ای نوشته شده، پاسخ دهند. به طوری که برای همه سؤالات پاسخ تهیه شود. با کدام احتمال شماره سؤالات حسن متوالی است؟

$$\frac{1}{40} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{20} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۲) \checkmark$$

$$\frac{1}{10} \quad (۱)$$

• ۳ سؤال از ۶ سؤال برابر من انتخاب می‌کنیم ، $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 20$

و از ۳ سؤال باقی‌مانده ، ۳ سؤال برابر علی انتخاب می‌کنیم : $\binom{3}{3} = 1$

پس تعداد کل حالت برابر است با : $n(S) = \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 20 \times 1 = 20$

• ۴ حالتی که شماره سؤالات حسن متوالی می‌شود را می‌نویسیم ، $A = \{123, 234, 345, 456\} \rightarrow n(A) = 4$

• پس احتمال وقوع رویداد A برابر است با : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

۱۷- در دنباله بازگشتی به صورت $a_{n+1} = \frac{1}{1+2a_n}$ جمله اول $\frac{3}{4}$ است. نسبت جمله دوم به جمله سوم کدام است؟

۰٫۶ (۴)

۰٫۶۴ (۳)

۰٫۷ (۲)

۰٫۷۲ (۱) ✓

در دنباله $a_{n+1} = \frac{1}{1+2a_n}$ به ترتیب اولی و دوم را می‌نویسیم.

$$\bullet n=1: a_2 = \frac{1}{1+2a_1} = \frac{1}{1+2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$\bullet n=2: a_3 = \frac{1}{1+2a_2} = \frac{1}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{5}{5}+\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{9}} = \frac{2 \times 9}{5 \times 5} = \frac{18}{25} = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = 0.72$$

نسبت جمله دوم به جمله سوم برابر است با ۰٫۷۲

۱۸- در یک سالن در ردیف اول ۸، در ردیف دوم ۱۲ و ردیف سوم ۱۶ صندلی قرار دارد. صندلی‌ها با همین نظم در ۱۲ ردیف چیده شده‌اند. اگر بخواهند این سالن را به دو سالن با نصف ظرفیت کنونی تفکیک کنند به طوری که در سالن‌های جدید چیدمان صندلی‌ها دارای همان نظم قبلی ولی با ۴ صندلی در ردیف نخست شروع شود. در سالن‌های جدید چند ردیف صندلی قرار دارد؟

۱۰ (۴)

۹ (۳✓)

۸ (۲)

۶ (۱)

۸ و ۱۲ و ۱۶ و ...
 $\begin{matrix} \underbrace{} & \underbrace{} \\ +4 & +4 \end{matrix}$

تعداد صندلی‌های ردیف‌های سالن به صورت متوالی است:

اعداد ۸، ۱۲، ۱۶، ... یک دنباله حسابی با $a_1 = 8$ و $d = 4$ است که تعداد سالن $n = 12$ است.

مجموع سالن را حساب کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \rightarrow S_{12} = \frac{12}{2} [2(8) + (12-1)(4)] = 6 [16 + 44] = 6 \times 60 = 360$$

ظرف ظرفیت کنونی برابر است با: $\frac{360}{2} = 180$

تعداد صندلی‌های هر ردیف در سالن جدید به صورت متوالی است (ردیف اول ۴ تا و بعد از آن هم ۴ تا اضافه می‌شود):

۴، ۸، ۱۲، ...

مفروضه پنجم: مجموع چند جمله اول دنباله حسابی با $(a_1 = 4$ و $d = 4)$ برابر با ۱۸۰ است.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \rightarrow 180 = \frac{n}{2} [2(4) + (n-1)(4)] \rightarrow 180 = \frac{n}{2} [8 + 4n - 4] \Rightarrow$$

$$180 = \frac{n}{2} [4n + 4] \Rightarrow 180 = \frac{n}{2} [4(n+1)] \Rightarrow 180 = n [2(n+1)] \xrightarrow{\div 2} 90 = n(n+1)$$

محافظت در مورد سوالی n و $n+1$ برابر با ۹۰ شده پس n باید ۹ باشد.

۹×۱.

۱۹- جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۷ و ۴۹ هستند. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۳۴۳ (۴) ✓

۴۹√۷ (۳)

۳۳۶ (۲)

۳۴۳√۷ (۱)



جملات سوم، هفتم و یازدهم a_3, a_7, a_{11} یک جمله حسابی دارند:

مجموعه جمله بین شان یک است، بین خارج رابطهاش که بین سه جمله مساوی دنباله حسابی برقرار است، بین آن‌ها هم برقرار است.

$$(a_7)^2 = a_3 \times a_{11} \rightarrow 49^2 = 7 \times a_{11}$$

$$(7^2)^2 = 7 \times a_{11} \rightarrow 7^4 = 7 \times a_{11} \rightarrow a_{11} = \frac{7^4}{7} = 7^3 = 343$$

پس ۴۹ هرگز به 7^2 : $a_{11} = \frac{7^4}{7} = 7^3 = 343$

۲۰- اگر $\frac{a^5 \times 15^2}{3^2 \times (\frac{a}{5})^5} = 5^{a+3}$ باشد، مقدار $f(2)$ در تابع $f(x) = \frac{1}{5}a^x - 1$ کدام است؟

- ۵ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۴ (۱) ✓

$$15^2 = (5 \times 3)^2 = 3^2 \times 5^2$$

دو صورت راست کنیم و به صورت توانی بنویسیم:

$$\left(\frac{a}{5}\right)^5 = \frac{a^5}{5^5}$$

شکل داده شده را با جایگذاری دو شکل بالا، ساده تر بنویسیم:

$$\frac{a^5 \times 15^2}{3^2 \times \left(\frac{a}{5}\right)^5} = 5^{a+3} \rightarrow \frac{a^5 \times 3^2 \times 5^2}{3^2 \times \frac{a^5}{5^5}} = 5^{a+3} \rightarrow \left(\frac{a^5}{1} \times \frac{5^5}{a^5}\right) = 5^{a+3} \xrightarrow[\text{توزیع در صورت}]{\text{دور در دور}} 5^5 = 5^{a+3}$$

چون که برابری بین توان آ پایه برابر باشند: $5 = a+3 \rightarrow a=2$

جایگذاری $a=2$ در تابع f به شکل $f(x) = \frac{1}{5}(5^x) - 1$ می شود.

پس x قرار می دهیم ۲: $f(2) = \frac{1}{5}(5^2) - 1 = 5 - 1 = 4$