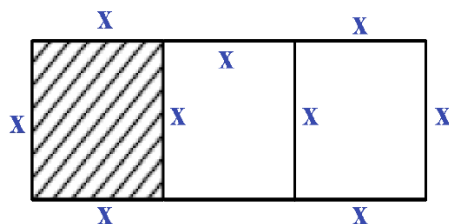


۱- در شکل زیر مستطیل بزرگ از ۳ مربع یکسان تشکیل شده است. اگر مساحت مستطیل بزرگ از $\frac{2}{3}$ مساحت یکی

از مربع‌ها ۱۴ واحد بیشتر باشد، اختلاف طول و عرض مستطیل بزرگ کدام است؟



(۱) $2\sqrt{6}$ ✓

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) $2\sqrt{3}$

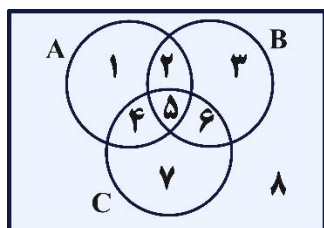
(۴) $\sqrt{3}$

مربع $S = x^2$

مستطیل بزرگ $S = 3x^2$

مستطیل بزرگ $S = 14$ مربع $S = \frac{2}{3} \rightarrow 3x^2 - \frac{2}{3}x^2 = 14 \rightarrow \frac{7}{3}x^2 = 14 \rightarrow x^2 = \frac{3 \times 14}{7} = 6 \rightarrow x = \sqrt{6}$

اختلاف طول و عرض مستطیل بزرگ $= 3x - x = 2x = 2\sqrt{6}$



$A = \{1, 2, 4, 5\}$

$B = \{2, 3, 5, 6\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$

۲- مجموعه $(A - B) - (C - B)$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

(۲) $A - (B \cup C')$

(۱) $(B - C) - A$

(۴) $(A - B) - C$ ✓

(۳) $B - (A \cup C)$

سوال: $A - B = \{1, 4\}$ $C - B = \{4, 7\} \Rightarrow (A - B) - (C - B) = \{1, 4\} - \{4, 7\} = \{1\}$

(۱): $B - C = \{2, 3\}$ $(B - C) - A = \{2, 3\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{3\}$ ✗

(۲): $C' = \{1, 2, 3, 8\} \rightarrow B \cup C' = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\} \rightarrow A - (B \cup C') = \{1, 2, 4, 5\} - \{1, 2, 3, 5, 6, 8\} = \{4\}$ ✗

(۳): $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow B - (A \cup C) = \{2, 3, 5, 6\} - \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} = \{3\}$ ✗

(۴): $(A - B) = \{1, 4\} \rightarrow (A - B) - C = \{1, 4\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1\}$ ✓

۳- تابع با ضابطه $f(x) = (\Delta x^2 - (ax + 1)(x - b))c$ ثابت است. اگر $f(x + y) = f(x)f(y) - 2$ باشد، مقدار مثبت c کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱) ✓

$$f(x) = \Delta x^2 - (ax^2 - abx + x - b)c \Rightarrow \underbrace{(\Delta - a)}_{\substack{\Delta - a = 0 \\ a = \Delta}} x^2 + \underbrace{(ab - 1)}_{\substack{\Delta b - 1 = 0 \\ b = \frac{1}{\Delta}}} x + bc \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{\Delta} c}$$

$$f(x + y) = f(x)f(y) - 2 \rightarrow \frac{1}{\Delta} c = \frac{1}{\Delta} c^2 - 2 \xrightarrow{\times \Delta} c^2 - \Delta c - \Delta \cdot 2 = 0 \rightarrow (c - 10)(c + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} c = 10 \\ c = -5 \end{cases}$$

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} [1 - x] & \text{مثبت } x|x| \\ [1 + 2x] & \text{منفی } x|x| \end{cases}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{\pi}) + f(-1/7)$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۴ (۳) ✓

-۳ (۲)

-۲ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} [1 - x] & \text{مثبت } x|x| \\ [1 + 2x] & \text{منفی } x|x| \end{cases}$$

$$x = \sqrt{\pi} \rightarrow x|x| \text{ مثبت} \Rightarrow f(\sqrt{\pi}) = [1 - \sqrt{\pi}] = [1 - 1/8] = [-0/8] = -1$$

$$x = -1/7 \rightarrow x|x| \text{ منفی} \Rightarrow f(-1/7) = [1 + 2(-1/7)] = [1 - 2/7] = [-2/7] = -3$$

$$f(\sqrt{\pi}) + f(-1/7) = -1 - 3 = \boxed{-4}$$

۵- نقاط متمایز $(1, 3a)$ ، $(-1, a)$ و $(a, 3)$ روی یک خط قرار دارند. مقدار a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۳

$$A(a, 3) \quad B(-1, a) \quad C(1, 3a) \xrightarrow{\text{شیب خط } AB \text{ با خط } BC \text{ برابر است}} m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{a-3}{-1-a} = \frac{3a-a}{1+1} \Rightarrow 2a-6 = -2a-2a^2 \Rightarrow 2a^2+4a-6=0$$

سه نقطه متمایز نیستند \times $\left\{ \begin{array}{l} a=1 \Rightarrow A(1, 3) \quad B(-1, 1) \quad C(1, 3) \\ a=-3 \Rightarrow A(-3, 3) \quad B(-1, -3) \quad C(1, -9) \end{array} \right.$ سه نقطه متمایز هستند \checkmark
جمع ضرایب صفر است

۶- رابطه‌های زیر، تابع هستند. اگر مجموعه A برد تابع $f-g$ باشد، مجموع مقادیر اعضای A کدام است؟

$$f = \left\{ \left(7, \frac{k}{2} - 1 \right), \left(-\frac{5}{2}, 1 - k \right), (5, 2), \left(7, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (1) \quad -\frac{1}{2}$$

$$g = \left\{ (5, n), \left(-\frac{5}{2}, \frac{n-1}{2} \right), (4, 3-2n^2), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right\} \quad (2) \quad \frac{7}{2} \checkmark$$

$$(3) \quad \frac{11}{6}$$

$$(4) \quad -\frac{7}{6}$$

$$f: \frac{k}{2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{k}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow k = 3 \rightarrow f = \left\{ \left(7, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{5}{2}, -2 \right), (5, 2) \right\}$$

$$g: \frac{n-1}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow n = -3 \rightarrow g = \left\{ (5, -2), \left(-\frac{5}{2}, \frac{-3}{2} \right), (4, -5) \right\}$$

$$f-g = \left\{ (5, 2 - (-2)), \left(-\frac{5}{2}, -2 - \left(\frac{-3}{2} \right) \right) \right\} = \left\{ (5, 4), \left(-\frac{5}{2}, \frac{-1}{2} \right) \right\} \xrightarrow{f-g \text{ برد}} R_{f-g} = \left\{ 4, \frac{-1}{2} \right\} \rightarrow \text{مجموع} = 4 + \frac{-1}{2} = \frac{7}{2}$$

۷- هر دو ریشه معادله $(2a+1)x^2 - 4ax + 2a - 1 = 0$ مثبت هستند. کدام مقدار زیر می تواند باشد؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{3}{10}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ ✓ (۴) $\frac{3}{8}$

برای اینکه دو ریشه داشته باشد و هر دو مثبت باشند، سه شرط داریم: $\Delta > 0$ ، $S > 0$ ، $P > 0$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{2a-1}{2a+1} > 0$$

با جایگذاری گزینه ها در نامعادله حاصلضرب ریشه ها ($P = \frac{c}{a} > 0$) می توان مقدار a مناسب را به دست آورد:

(۱): $P = \frac{2(\frac{1}{4})-1}{2(\frac{1}{4})+1} < 0$ ✗ (۲): $P = \frac{2(-\frac{2}{3})-1}{2(-\frac{2}{3})+1} < 0$ ✗ (۳): $P = \frac{2(-\frac{2}{3})-1}{2(-\frac{2}{3})+1} > 0$ ✓ (۴): $P = \frac{2(\frac{3}{8})-1}{2(\frac{3}{8})+1} < 0$ ✗

۸- معادله $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{x}{x-2}$ دارای چند جواب منفی است؟

(۱) ۱ ✓ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$\frac{\times x^2 - 2x}{x^2 - 2x} \rightarrow x^2 - 2x + 3 - (x^2 - 2x) = x^2 \rightarrow 3 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \text{یک جواب منفی}$$

۹- در داده های ۱، ۱۷، ۱۰/۵، ۵، ۹، ۱۱، ۴، ۱۱/۵، ۱۵، حاصل ضرب میانه و میانگین کدام است؟

(۱) ۶۳ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۹۸ ✓

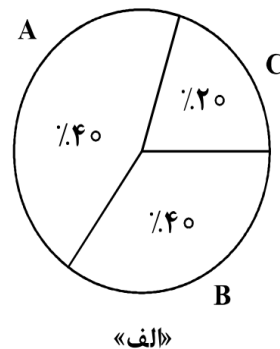
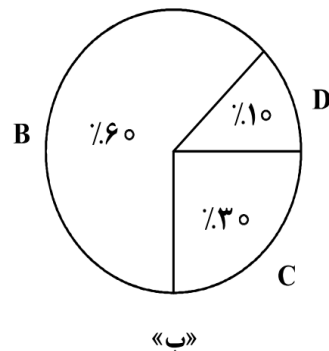
۱۷ و ۱۵ و ۱۱/۵ و ۱۱ و ۱۰/۵ و ۹ و ۵ و ۴ و ۱
میانه

داده ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ می چینیم:

$$\bar{x} = \frac{1 + 4 + 5 + 9 + 10/5 + 11 + 11/5 + 15 + 17}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3} \rightarrow \text{میانگین} \times \text{میانه} = 10/5 \times \frac{28}{3} = \frac{21}{2} \times \frac{28}{3} = 98$$

۱۰- اگر زاویه مربوط به داده «A» در یک نمودار دایره‌ای شامل چهار داده A، B، C و D برابر ۱۳۵ درجه باشد، کدام

عدد زیر، مجموع فراوانی نمودار «ب» است؟



۱۶ (۱)

۱۵ (۲)

۱۰ (۳) ✓

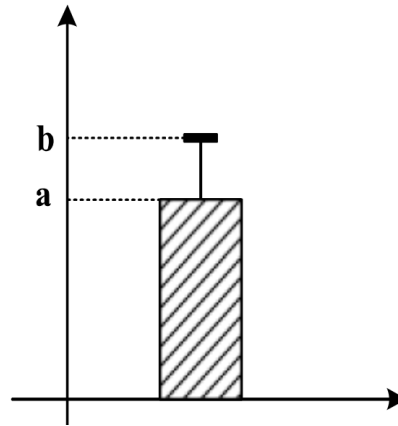
۹ (۴)

با توجه به نمودارها، کمترین فراوانی مربوط به داده D است. آن را f در نظر گرفته و بقیه داده‌ها را بر حسب آن به دست می‌آوریم.

نمودار ب: فراوانی داده D: f و فراوانی داده B: $۶f$ و فراوانی داده C: $۳f$ $\xrightarrow{\text{مجموع فراوانی نمودار ب}}$ $f + ۳f + ۶f = ۱۰f$

از آنجاییکه تعداد فراوانی باید عددی طبیعی باشد، عدد $۱۰f$ باید مضربی از ۱۰ باشد که فقط گزینه ۳ مضرب ۱۰ است.

۱۱- داده‌های ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، a و b ، مربوط به سن دوستان مریم است که در تولد ۲۲ سالگی اش (مهمانی اول) شرکت داشتند و نمودار زیر نشان‌دهنده دو شاخص سن افراد حاضر در این مهمانی است. مریم ۱۰ سال بعد، زمانی که صاحب فرزند شد، تصمیم می‌گیرد به اتفاق پدربزرگ و مادربزرگش یک مهمانی (مهمانی دوم) ترتیب دهد و همه دوستانش که در مهمانی اول حضور داشتند را دعوت کند. اگر واریانس سن افراد در مهمانی اول ۴ باشد، مقدار شاخص مرکزی مناسب برای سن افراد در مهمانی دوم، کدام است؟



۳۴/۵ (۱) ✓

۳۴ (۲)

۳۳/۵ (۳)

۳۵ (۴)

مهمانی اول: باید حواسمان باشد در مهمانی اول خود مریم (با ۲۲ سال سن) نیز حضور دارد و ۷ نفر حضور دارند.

طول میله خطا برابر انحراف معیار است و انحراف معیار برابر جذر واریانس است. بنابراین انحراف معیار برابر ۲ است.

$$\bar{x} = a = \frac{a+b+21+22+23+25+27}{7} \rightarrow 6a - b = 118$$

طول مستطیل برابر میانگین است:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 6a - b = 118 \end{cases} \rightarrow a = 24 \quad b = 26$$

مهمانی دوم: در این مهمانی ۱۰ نفر حضور دارند (فرزند مریم و پدربزرگ و مادربزرگ او اضافه شده اند که هر سه داده دور افتاده به حساب می‌آیند). سن مریم و دوستانش نیز

۱۰ سال بیشتر شده است. بنابراین داده‌های جدید به این شکل هستند:

پدربزرگ . مادربزرگ . ۳۶ . ۳۷ . ۳۴ . ۳۵ . ۳۳ . ۳۲ . ۳۱ . فرزند مریم

میانگین = $\frac{24+35}{2} = 34/5$

شاخص مرکزی مناسب در حالتی که داده دور افتاده داریم، میانگین است و میانگین این ۱۰ داده ۳۴/۵ است.

۱۲- اگر p و $q \sim$ گزاره‌های درست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره به r بستگی دارد؟

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow p \quad (۱) \quad (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$(r \Rightarrow p) \Rightarrow q \quad (۳) \quad (r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p \quad (۴)$$

بررسی گزینه‌ها:

$$(۱): (F \Rightarrow r) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T \quad \times$$

انتفای مقدم

$$(۲): (T \Rightarrow r) \Rightarrow F \equiv (\sim T \vee r) \Rightarrow F \equiv (F \vee r) \Rightarrow F \equiv r \Rightarrow F \equiv \sim r \vee F \equiv \sim r \quad \checkmark$$

$$(۳): (r \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F \quad \times$$

T (تالی درست)

$$(۴): (r \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F \quad \times$$

T (تالی درست)

مشابه مساله حل شده کتاب درسی دهم:

ابتدا شیب نمودار را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{0 - 18000}{30 - 0} = -600$$

تابع تعداد (N) بر حسب قیمت (P) به صورت

$$N = 18000 - 600P$$

مقابل است:

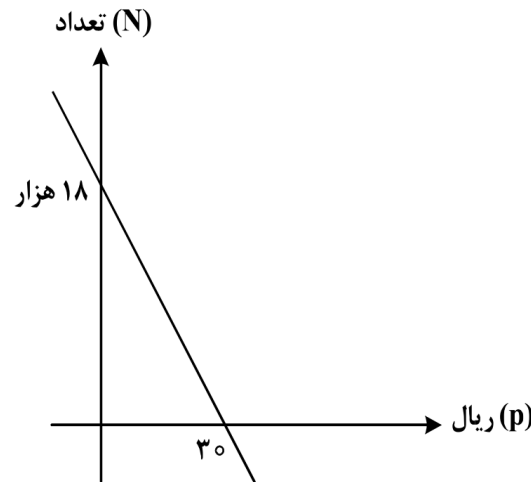
*تابع درآمد کارخانه را به دست آوریم:

$$\text{درآمد} = N \times P$$

$$\xrightarrow{P=30-\frac{N}{600}} \text{درآمد} = N\left(30 - \frac{N}{600}\right)$$

$$\boxed{\text{درآمد} = -\frac{1}{600}N^2 + 30N}$$

۱۳- نمودار زیر، تعداد فروش یک کالا توسط یک بنگاه اقتصادی را با توجه به قیمت آن نشان می‌دهد. اگر هزینه تولید هر واحد از این کالا ۲۵ ریال و هزینه اولیه ۱۸ هزار ریال باشد، بنگاه این کالا را با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود را به دست آورد؟



$$35 \quad (1)$$

$$32/5 \quad (2)$$

$$30 \quad (3)$$

$$27/5 \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\text{هزینه} = \text{هزینه تولید} + \text{هزینه اولیه} = 18000 + 25N \Rightarrow \boxed{\text{هزینه} = 18000 + 25N}$$

* تابع هزینه کارخانه را به دست می‌آوریم:

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = \left(-\frac{1}{600}N^2 + 30N\right) - (18000 + 25N) \Rightarrow \boxed{\text{سود} = -\frac{1}{600}N^2 + 5N - 18000}$$

* تابع سود کارخانه را به دست می‌آوریم:

$$x_s = N_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(5)}{2\left(-\frac{1}{600}\right)} = 1500$$

* تعداد کالایی که کارخانه را به حداکثر سود می‌رساند (x_s تابع سود) را به دست می‌آوریم:

$$P = 30 - \frac{1500}{600} = 30 - 2/5 = 27/5$$

* با استفاده از رابطه $P = 30 - \frac{N}{600}$ قیمت مورد نظر را به دست می‌آوریم:

۱۴- در یک شرکت هیچ کدام از کارکنان با حداقل حقوق ۸۰ میلیون ریالی زیر خط فقر نیستند. میانگین درآمد خانوارهای کشور حداکثر چند میلیون ریال است؟

- ۴۰ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ✓

خط فقر برابر نصف میانگین است: $\text{میانگین} = ۱۶۰ = ۲ \times \text{خط فقر}$ \rightarrow $\frac{\text{میانگین}}{۲} = ۸۰ = \text{خط فقر}$

۱۵- با حروف کلمه «پارسی» چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت به طوری که در نوشتن آن فقط یک حرف، نقطه دار ظاهر شود؟

- ۷۲ (۱) ۳۶ (۲) ۲۴ (۳) ✓ ۱۲ (۴)

برای آنکه یک حرف نقطه دار ظاهر شود، حرف «ی» باید در آخر بیاید:

حرف اول	حرف دوم	حرف سوم	حرف چهارم	حرف آخر
پ ا ر س	ا ر س	ر س	س	ی
۴	۳	۲	۱	۱

تعداد انتخاب = $۱ \times ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴$

۱۶- حسن و علی قرار است هر کدام به ۳ سؤال از ۶ سؤالی که روی برگه ای نوشته شده، پاسخ دهند. به طوری که برای

همه سؤالات پاسخ تهیه شود. با کدام احتمال شماره سؤالات حسن متوالی است؟

- $\frac{۱}{۱۰}$ (۱) $\frac{۱}{۵}$ (۲) ✓ $\frac{۱}{۲۰}$ (۳) $\frac{۱}{۴۰}$ (۴)

$$n(S) = \binom{۶}{۳} \binom{۳}{۳} = ۲۰ \times ۱ = ۲۰ \quad A = \{(۱۲۳), (۲۳۴), (۳۴۵), (۴۵۶)\} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

۱۷- در دنباله بازگشتی به صورت $a_{n+1} = \frac{1}{1+2a_n}$ جمله اول $\frac{3}{4}$ است. نسبت جمله دوم به جمله سوم کدام است؟

۰/۶ (۴)

۰/۶۴ (۳)

۰/۷ (۲)

۰/۷۲ (۱) ✓

$$n = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{1+2a_1} = \frac{1}{1+2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{1+2a_2} = \frac{1}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{9}} = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = 0.72$$

۱۸- در یک سالن در ردیف اول ۸، در ردیف دوم ۱۲ و ردیف سوم ۱۶ صندلی قرار دارد. صندلی‌ها با همین نظم در ۱۲ ردیف چیده شده‌اند. اگر بخواهند این سالن را به دو سالن با نصف ظرفیت کنونی تفکیک کنند به طوری که در سالن‌های جدید چیدمان صندلی‌ها دارای همان نظم قبلی ولی با ۴ صندلی در ردیف نخست شروع شود، در سالن‌های جدید چند ردیف صندلی قرار دارد؟

۱۰ (۴)

۹ (۳) ✓

۸ (۲)

۶ (۱)

$$S_n = \frac{n}{2}(2(4) + (n-1)4) = 180 \Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2}(360) = 180 \text{ چینش اولیه:}$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2(8) + (12-1)4) = 360 \text{ چینش اولیه:}$$

$$n(4 + (n-1)2) = 180 \xrightarrow{\div 2} n(2 + n - 1) = 90 \Rightarrow n(n+1) = 90$$

روش ۱: بطور حدسی و یا با جایگذاری گزینه‌ها مشخص می‌شود که: $n = 9$ است.

روش ۲: حل معادله درجه دوم: $n(n+1) = 90 \Rightarrow n^2 + n - 90 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+10) = 0 \Rightarrow n = 9$ قق. $n = -10$ غقق

۱۹- جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۷ و ۴۹ هستند. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۳۴۳ (۴) ✓

۴۹√۷ (۳)

۳۳۶ (۲)

۳۴۳√۷ (۱)

فاصله جمله سوم تا هفتم، برابر فاصله جمله هفتم تا یازدهم است. در واقع جمله هفتم، واسطه هندسی میان جملات سوم و یازدهم است:

$$a_3 \cdot a_7 \cdot a_{11} \rightarrow a_7^2 = a_3 \times a_{11} \rightarrow a_{11} = \frac{a_7^2}{a_3} = \frac{49 \times 49}{7} = 343$$



۲۰- اگر $\frac{a^5 \times 15^3}{3^3 \times \left(\frac{a}{5}\right)^5} = 5^{a+3}$ باشد، مقدار $f(2)$ در تابع $f(x) = \frac{1}{5}a^x - 1$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱) ✓

$$\frac{a^5 \times 3^3 \times 5^3}{3^3 \times a^5 \times 5^{-5}} = 5^a \times 5^5 \rightarrow 5^{a+5} = 5^{a+3} \rightarrow a+5 = a+3 \rightarrow a = -2$$

$$\rightarrow \boxed{a = -2} \rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{5}(-2)^x - 1} \rightarrow f(2) = \frac{1}{5}(-2)^2 - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$