

۱- اگر $x+1$ ، $x-1$ ، $2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\checkmark$ -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

$$r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 + x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب قدرنسبت} = \frac{\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})} \times \frac{-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})} = \frac{-2}{4-2} = -1$$

۳- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

- (۱) $13/75$ (۲) $14/25$ (۳) $\checkmark$ $23/25$ (۴) $24/75$

$$x = \frac{-a}{-10} = 2/5 \Rightarrow a = 25 \quad y = -5x^2 + 25x - 8$$

$$y = -5\left(\frac{5}{10}\right)^2 + 25\left(\frac{5}{10}\right) - 8 = -\frac{125}{20} + \frac{125}{4} - 8 = \frac{125}{4} - 8 = \frac{93}{4} = 23,25$$

۴- اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $2-x^{14}$ بر x^2+x+1 باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$)

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) $\checkmark$ ۴

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -(x+1) \Rightarrow x^{14} = ((x^2)^7) \times x^2 = ((-(x+1))^7) \times (-x-1)$$

$$= (x^2 + 2x + 1)^7 \times (-x-1) = (-x^2 - 2x - 1)^7 (-x-1) = -x^7(x+1) = -x^7 \times x(x+1) =$$

$$= (x+1)^7 x = (x^2 + 2x + 1)x = x^3 = -x-1 \quad 2-x^{14} = 2+x+1 = 3+x \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} 4 \quad \textcircled{4}$$



- ۵- برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگ‌تر از -3 است؟
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

$$f(-3) > 0 \Rightarrow 18 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3$$



$$\Delta > 0 \Rightarrow 49 - 4(2)(m) > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8}$$

$$\Rightarrow m = 4, 5, 6$$

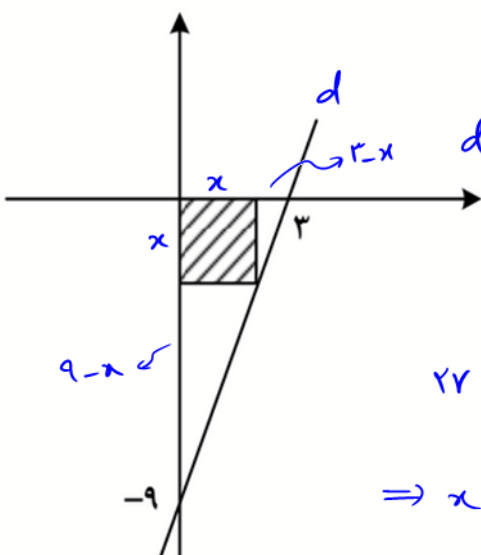
- ۶- در شکل زیر، قطر مربع هاشور خورده، کدام است؟

(۱) $2,5\sqrt{2}$

(۲) $3,5\sqrt{2}$

(۳) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$

(۴) $\frac{9}{\sqrt{2}}$



$$d \text{ معادله } y = 3x - 9$$

$$S = \frac{3x \cdot 9}{2} = x^2 + \frac{(3-x)x}{2} + \frac{(9-x)x}{2}$$

$$27 = 2x^2 + 3x - x^2 + 9x - x^2 \Rightarrow 12x = 27$$

$$\Rightarrow x = \frac{27}{12} \Rightarrow \text{قطر مربع} = \frac{9}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

- ۷- در یک مستطیل، نقاط $A(5,2)$ و $C(4,-1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x - 3y = 3$ واقع‌اند. اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

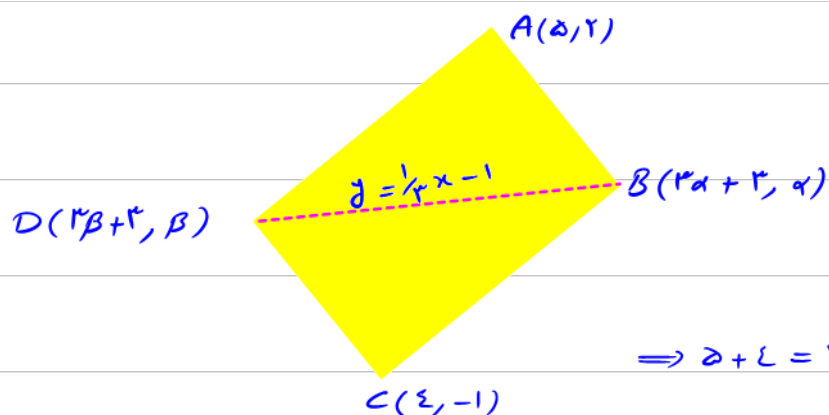
$$y = \frac{1}{3}x - 1$$

(۴) $1,5$

(۳) ۱

(۲) $3,5$

(۱) ۳



$$\frac{a-2}{3a-2} \times \frac{a+1}{3a-1} = -1$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = -9a^2 + 9a - 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow 2 + 1 = 3 + x_B \Rightarrow x_B = 2$$

$$\Rightarrow x_B - x_D = 3$$

$$\Rightarrow 9 = 6 + x_D \Rightarrow x_D = 3$$

۸- ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ است. برای چند مقدار a $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است؟

۱ (۴) ۲ (۳) ✓ ۳ (۲) ۴ (۱)

در این همواره $2 + |a| \geq 2$ $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow |a| \leq 0 \Rightarrow 1 - |a| \geq 1 \Rightarrow$ حالت اول

$a = 0 \Rightarrow f(1) = f(2) \Rightarrow$ برابریست.

در صورت دوم $\Rightarrow 1 - |a| < 1 \Rightarrow |a| > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(1 - |a|) - 1 = (2 + |a|)^2 - (2 + |a|) - 7 \Rightarrow 1 - 2|a| = |a|^2 + 2 + 2|a| - 2 - |a| - 7$

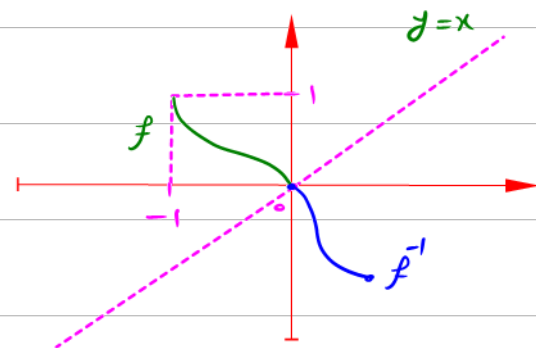
$\Rightarrow |a|^2 + 2|a| - 6 = 0 \Rightarrow (|a| - 1)(|a| + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -3 \text{ دور } \end{cases}$

۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$ در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟

۱ (۴) ✓ ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

دامنه $1 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ $1 - \sqrt{1 + x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 + x} \leq 1 \Rightarrow 1 + x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$

$D_f = [-1, 0]$ $f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1-\sqrt{1+x}}} < 0$ تدریجاً



۱۰- اگر $\log(2-x) - \log \frac{1}{(x-2)^2} = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}(-x)$ کدام است؟

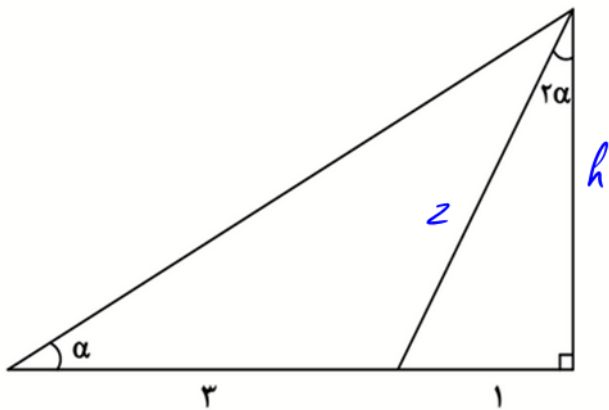
- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

$$\log(2-x) + \log(x-2)^2 = 3 \Rightarrow \log(2-x) + \log(2-x)^2 = 3 \rightarrow \log(2-x) = t$$

$$t + 2t = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log 2-x = 1 \Rightarrow 2-x = 10 \rightarrow x = -8$$

$$\log_{\sqrt{2}}(-x) = \log_{\sqrt{2}} 10 = \log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}} = 1$$

۱۱- در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟



$$\tan \alpha = \frac{h}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{1}{h} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{h/2}{1 - h^2/4} \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2} \Rightarrow \frac{h^2}{4} = 1 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{4} = 1 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$$

$$z^2 = h^2 + 1 \Rightarrow z^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow z = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{h}{z} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$ (۵) $\frac{1}{5}$

۱۲- اگر $3\sin^2 x + a\cos^2 x = 4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟

$\frac{1}{3-a}$ (۴)

$\frac{1}{a-3}$ (۳)

$\frac{1}{4-a}$ (۲)

$\frac{1}{a-4}$ (۱) ✓

$$3\sin^2 x + a(1 - \sin^2 x) = 4 \Rightarrow (3-a)\sin^2 x = 4-a \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4-a}{3-a}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{3-a}{4-a} - 1 = \frac{-1}{4-a} = \frac{1}{a-4}$$

۱۳- در مثلث ABC، اگر $\tan(B-C) = \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B \cos C}$ کدام است؟

$\tan C$ (۴) ✓

$\tan B$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-1 (۱)

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow B+C=180^\circ-A \quad B-C=90^\circ$$

$$B=90^\circ, C=45^\circ, A=45^\circ \Rightarrow \frac{1-2\cos(135^\circ)}{4 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \tan 45^\circ = \tan C$$

۱۴- تعداد جوابهای معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - (x + \frac{\pi}{4})) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{3\pi}{4} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{3}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{3}$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

k	x
0	$-\frac{\pi}{4}$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-4 \quad (2) \checkmark$$

$$-2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2 \Rightarrow \frac{bcx^2 + (b+c)x + 1}{x} = 2 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\text{H.P.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{rbcx + (b+c)}{2\sqrt{(bx+1)(cx+1)}}}{1} = \frac{b+c}{2} = 2 \Rightarrow b+c=4$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -b-c = -4$$

۱۶- برای چند مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a+1}$ یک مجانب قائم دارد؟

$$7 \quad (4)$$

$$5 \quad (3) \checkmark$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4(3)(-3) = 100 \Rightarrow x = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

مخرج دارا یک ضابطه باشد.

$$\Delta = (1-a)^2 - 4a(a+1) = 1 + a^2 - 2a - 4a^2 - 4a = -3a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12 = 48 \quad a = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{-3} = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \text{قوی}$$

$$\text{مخرج دارا یک ضابطه باشد} \Rightarrow a = 0 \quad \text{قوی}$$

مخرج دارا یک ضابطه باشد اما این از ریشه که با صحت میخورد.

$$\Delta = (1-a)^2 - 4a(a+1) > 0 \Rightarrow -3a^2 - 6a + 1 > 0$$

$$x=3 \rightarrow 9a + 3 - 3a + a + 1 = 0 \Rightarrow 7a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{7} \quad \text{قوی}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{9}a - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \text{و } \delta$$

۱۷- به ازای مقادیر طبیعی c ، تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > c \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام می تواند مقدار $\left[\frac{a}{b}\right]$ باشد؟

(۱) -۱ ✓ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & -c \leq x \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & x > c \text{ و } x < -c \end{cases}$$

برای $x=c$ (نقطه)

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = |c-1| \quad (1)$$

$$\Rightarrow ac^2 + bc + 2 = |c-1|$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = ac^2 + bc + 2$$

برای $x=-c$ (نقطه)

$$f(-c) = \lim_{x \rightarrow (-c)^+} f(x) = |-c-1| \quad \lim_{x \rightarrow (-c)^-} f(x) = ac^2 - bc + 2 \Rightarrow ac^2 - bc + 2 = |-c-1| \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] = -1$$

۱۸- اگر $f(x) = \frac{\lambda + \cos^3 x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2g'(\frac{\sqrt{3}}{2})$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ ✓ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(x) = \frac{(2 + \cos x)(1 + \cos^2 x - \cos x)}{(2 + \cos x)(2 - \cos x)} \Rightarrow f - 2g = \frac{1 + \cos^2 x - \cos x}{2 - \cos x} - \frac{2}{2 - \cos x}$$

$$f - 2g = \frac{\cos x (\cos x - 1)}{(2 - \cos x)} \xrightarrow{\text{ساده}} f - 2g' = \sin x \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{3}}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

- ۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟
- (۱) صفر (۲) بیش از ۲ (۳) ۲ (۴) ۱ ✓

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \\ m(x-a)^{m-1} \end{cases} \Rightarrow \underline{m=1}$$

- ۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۵ ✓ (۳) ۴ (۴) ۳

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x(1+x)} & x \leq -1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}} & -1 < x < 1 \\ \frac{1+2x}{2\sqrt{x(1+x)}} & x < -1 \end{cases}$$

نقاط بحرانی: $x=0, x=1, x=-1, x=\frac{1}{2}$

تعداد ماکزیمم نسبی: $m=1$ ، تعداد مینیمم نسبی: $n=0$ ، تعداد نقاط بحرانی: $k=2$

$$\Rightarrow m+n+k=1+0+2=3$$

