

۱- اگر $x+1$ ، $x-1$ ، $2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

متوسط

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

$$x+1, x-1, 2x+1, x$$

$$a_8, a_7, a_6, a_5$$

$$\frac{a_8}{a_6} = \frac{a_7}{a_5} \Rightarrow \frac{x}{2x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 2x^2 - x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$q = \frac{a_7}{a_6} = \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

۳- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

ساده

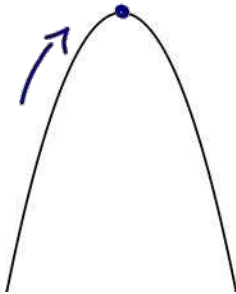
۲۴/۷۵ (۴)

۲۳/۲۵ (۳)

۱۴/۲۵ (۲)

۱۳/۷۵ (۱)

$$x_g = -\frac{b}{2a} = \frac{a}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 25$$



$$y_g = y\left(\frac{1}{5}\right) = -5 \times \frac{1}{25} + 25 \times \frac{1}{5} - 8 = 13/25$$

۴- اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $2 - x^{14}$ بر $x^2 + x + 1$ باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$)

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۴

مشاور

$$2 - x^{14} = (x^2 + x + 1) Q(x) + r(x)$$

$$\Rightarrow (x-1)(2 - x^{14}) = \underbrace{(x^3 - 1)}_{=0} Q(x) + (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow x^{14} = 2 \Rightarrow (x^3)^4 = 1 \Rightarrow x^{14} = x^2$$

$$\Rightarrow (x-1)(2 - x^2) = (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^3} - x^2 + x^2 - 2 = (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{(x-1)}(x+3) = \cancel{(x-1)}r(x) \Rightarrow r(x) = 1x + 3$$

۵- برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگ تر از -3 است؟ (شوار)

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) ۴

$$\alpha, \beta > -3 \Rightarrow 3 > -2, \Delta > 0$$

$$-\frac{7}{2} > -2 \quad \checkmark \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad 49 - 8m > 0$$

$$\Rightarrow m < \frac{49}{8} = 6,125$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + 3 > 0 \\ \beta + 3 > 0 \end{array} \right\} (\alpha + 3)(\beta + 3) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 > 0$$

$$\frac{m}{2} + 3\left(-\frac{7}{2}\right) + 9 > 0$$

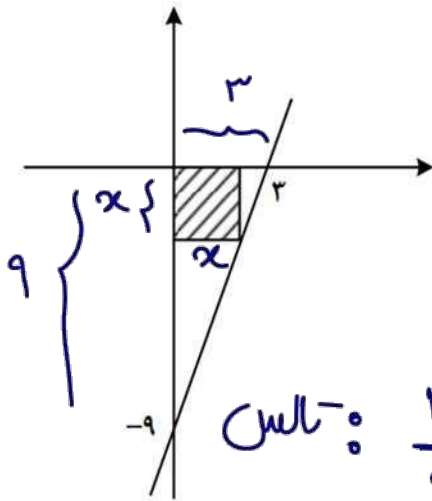
$$\frac{m}{2} - \frac{3}{2} > 0$$

$$m > 3$$

$$\Rightarrow m = 4, 5, 6$$

۶- در شکل زیر، قطر مربع هاشور خورده، کدام است؟

ساده



(۱) $2,5\sqrt{2}$

(۲) $3,5\sqrt{2}$

(۳) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$

(۴) $\frac{9}{\sqrt{2}}$

حس: $\frac{3}{x} = \frac{9}{9-x}$

$\Rightarrow 27 - 3x = 9x \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

قطر = $x\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$

۷- در یک مستطیل، نقاط $A(5, 2)$ و $C(4, -1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x - 3y = 3$ واقع اند.

اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

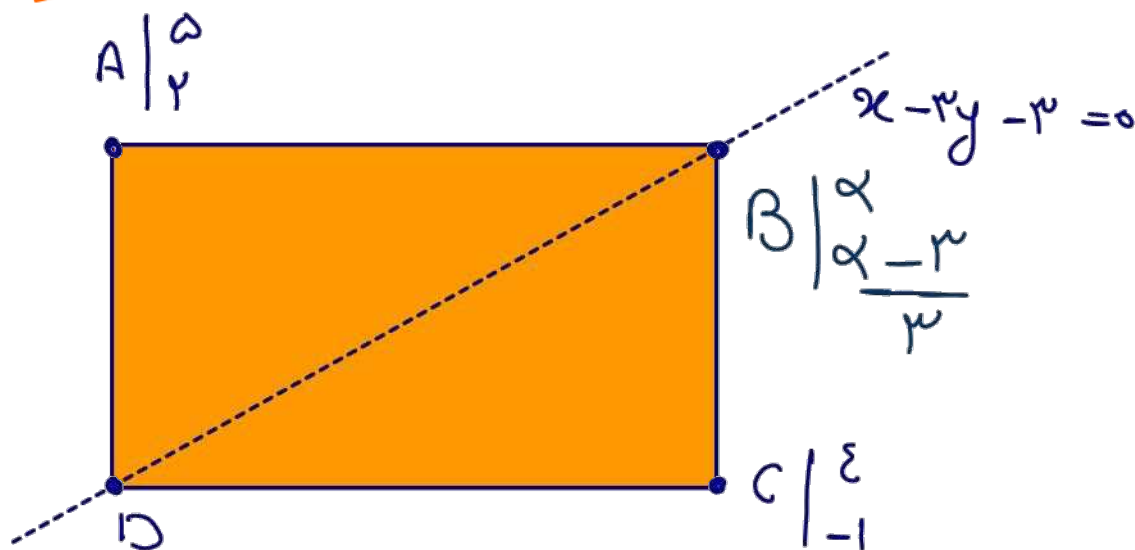
۳/۵ (۲)

۳ (۱)

۱ (۳)

۱/۵ (۴)

تسوار



$$m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$$

$$\frac{\frac{x}{3} - 3}{x - 5} \times \frac{\frac{x}{3}}{x - 4} = -1 \Rightarrow \frac{x - 9}{3(x - 5)} \times \frac{x}{3(x - 4)} = -1$$

$$-x^2 + 9x = 9x^2 - 81x + 180 \Rightarrow 10x^2 - 90x + 180 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow B, D = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

۸- ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است؟

لیستی
دشواری

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

$x \leq 1$ $x > 1$

$$2(1 - |a|) - 1 = a^2 + 2|a| + 2 - |a| - 2 - 7$$

$$\Rightarrow 1 - 2|a| = |a|^2 + 3|a| - 5$$

$$\Rightarrow |a|^2 + 5|a| - 6 = 0 \Rightarrow (|a| - 1)(|a| + 6) = 0$$

$a = \pm 1$ ←

۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می کند؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

با رسم تابع، به طر سوال ۳ بپردازیم.

$$D_f : x \geq -1, 1 - \sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

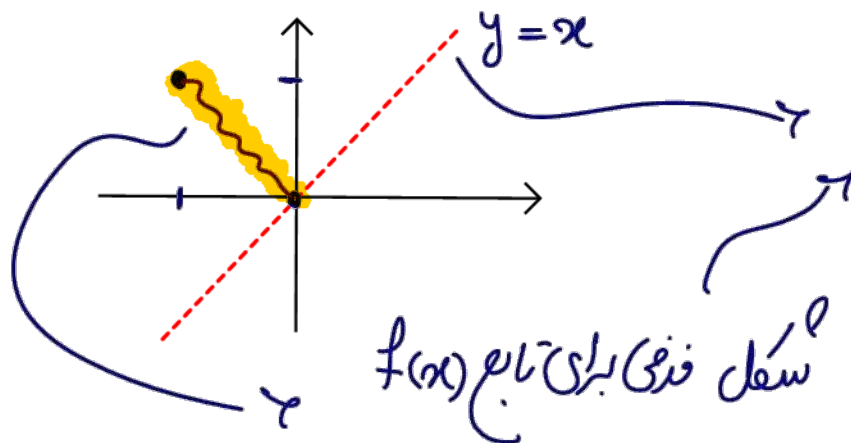
$$\Rightarrow D_f = [-1, 0]$$

$$\sqrt{1+x} \geq 1 - \sqrt{1+x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$$

الیه اندازی

$$\Rightarrow f(-1) = 1, f(0) = 0$$

$$\Rightarrow R_f = [0, 1]$$



همه، تعداد نقاط

برخورد با $y=x$

است که فقط

نقطه (۰،۰) است.

نسبتاً ساده

۱۰- اگر $\log(2-x) - \log \frac{1}{(x-2)^2} = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}(-x)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

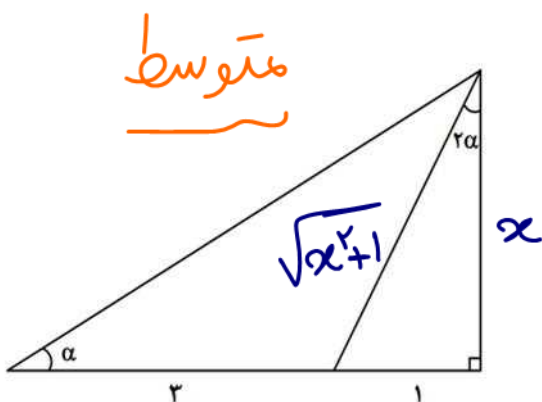
$$x < 2 \quad \swarrow \quad (2) \quad 6$$

$$(1) \quad -6 \quad \downarrow \quad x \neq 2$$

$$\Rightarrow \log_{10} \left(\frac{(2-x)}{\frac{1}{(x-2)^2}} \right) = 3$$

$$\Rightarrow -(x-2)^3 = 1000 \Rightarrow x-2 = -10$$

$$\Rightarrow x = -8 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 8 = 3 \times 2 = 6$$

۱۱- در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{2} \quad , \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$$

ساده

۱۲- اگر $3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟

$$\frac{1}{3-a} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a-3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4-a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{a-4} \quad (1)$$

$$3 \sin^2 x + a(1 - \sin^2 x) = 4$$

$$\Rightarrow (3-a) \sin^2 x = 4 - a$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{4-a}{a-3}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{4-a}{a-3} - 1$$
$$= \frac{1}{a-3}$$

۱۳- در مثلث ABC، اگر $\tan(B-C) = \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B \cos C}$ کدام است؟ ساده!

(۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\tan B$ (۴) $\tan C$

زاویه دهی $B-C = 60^\circ \Rightarrow B = 90^\circ, C = 30^\circ$

$$\frac{1 - 2\cos 120^\circ}{4 \sin 90^\circ \cos 30^\circ} = \frac{1 - 2 \times \frac{-1}{2}}{4 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$

۱۴- تعداد جواب های معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟ متوسط

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(\underbrace{x + \frac{\pi}{4}}_{\pi - \alpha})$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - x$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = (2k+1) \frac{\pi}{3}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + x$$

$$\hookrightarrow \frac{\pi}{3} > -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow -\frac{\pi}{2}$$

نسبتاً ساده

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

$$a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)} = 2x$$

$$\Rightarrow bcx^2 + (b+c)x + 1 = \varepsilon x^2 - \varepsilon ax + a^2$$

$$\Rightarrow b+c = -\varepsilon a$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -\varepsilon$$

(سوال)

۷ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۶- برای چند مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a + 1}$ یک مجانب قائم دارد؟

$$f(x) = \frac{(x-3)(3x+1)}{ax^2 + (1-a)x + a+1}$$

اگر $x=3$ یا $x=-\frac{1}{3}$ یکی از ریشه های خنج باشد صورت ساده شده و خنج یک ریشه خواهد داشت = یک مجانب قائم

$$x=3 \Rightarrow 9a + 3 - 3a + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$$

$$x=-\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{9} + \frac{a}{3} - \frac{1}{3} + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{13}$$

اگر $\Delta = 0$ خنج سه ریشه خنج یک ریشه دارد.

$$(a-1)^2 = 4a(a+1) \Rightarrow 3a^2 + 4a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$a=0 \Rightarrow f(x) = \frac{\dots}{x+1}$$

۱۷- به ازای مقادیر طبیعی c ، تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > c \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام

می تواند مقدار $\left[\frac{a}{b}\right]$ باشد؟

دشوار

(۴) -۴

(۳) -۳

(۲) -۲

(۱) -۱

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & -c \leq x \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & x < -c, x > c \end{cases}$$

$$x=c \stackrel{CGN}{\Rightarrow} c-1 = ac^2 + bc + 2$$

$$x=-c \stackrel{CGN}{\Rightarrow} c+1 = ac^2 - bc + 2$$

$$\left. \begin{aligned} -2bc = 2 &\Rightarrow b = -\frac{1}{c} \\ c-1 = ac^2 + 1 &\Rightarrow a = \frac{c-2}{c^2} \end{aligned} \right\} \frac{a}{b} = \frac{c-2}{c} = \frac{2}{c} - 1$$

$$c=1 \Rightarrow \frac{2}{c} - 1 = 1$$

$$c=2 \Rightarrow \frac{2}{c} - 1 = 0$$

$$c > 2 \Rightarrow -1 < \frac{2}{c} - 1 < 0 \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] = -1$$

۱۸- اگر $f(x) = \frac{\lambda + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

متوسط!

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\hookrightarrow = (f - 2g)'(\frac{7\pi}{6})$$

$$= \left(\frac{(\cancel{\cos x + 1})(\cos^2 x - 2\cos x + 1)}{(2 - \cos x)(2 + \cos x)} - \frac{1}{2 - \cos x} \right)'$$

$$= \left(\frac{\cos x (\cancel{\cos x - 1})}{-(\cancel{\cos x - 1})} \right)' = -(\cos x)'$$

$$= \sin x = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

سوال

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) بیش از ۲

(۱) صفر

چون تابع در $x < a$ و $x > a$ مستقیم زیر است پس
نقطه گوشه $x = a$ است.

✓ پیوسته $f(x)$ $\Rightarrow x = a$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = 0 \Rightarrow f'_+(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow m(a-a)^{m-1} \neq 0 \Rightarrow m = 1$$

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و

k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۳

متوسط

$$x(1-|x|) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ و } 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$\Rightarrow k=3 \Rightarrow 1, 0, -1 = \text{بحرانی}$$

$$f'(x) = \frac{1 \pm 2x}{2\sqrt{x(1-|x|)}} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ و } x = -\frac{1}{2}$$

الستد صم نسبی

عق

$$m+n=1$$