توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۸}}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\times ۱۶^{-\frac{۳}{۴}}}$ کدام است؟

۱) $۱۶\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt[۳]{۲}$

حل: به جای ۸، $۲^۳$ قرار میدیم و به جای ۱٦، $۲^٤$. و از ویژگی‌هایی ضرب و تقسیم عبارت‌های رادیکالی استفاده میکنیم:

$$\frac{\sqrt[۳]{۲\times ۲^{\frac{۳}{۲}}}}{\sqrt[۳]{۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}\times (۲^٤)^{-\frac{۳}{٤}}}}=\frac{\sqrt[۳]{۲^{\frac{۵}{۲}}}}{\sqrt[۳]{۲^{\frac{۳}{۲}}\times ۲^{-۳}}}=\sqrt[۳]{\frac{۲^{\frac{۵}{۲}}}{۲^{\frac{۳}{۲}}}}\times ۲^۳=\sqrt[۳]{۲^{(\frac{۵}{۲}-\frac{۳}{۲})}}\times ۸=۸\sqrt[۳]{۲}$$

۱۱۲- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که در هر دسته، کوچک‌ترین عضو $\frac{۱}{۳}$ بزرگ‌ترین عضو دسته است. میانگین اعضای دسته پنجم، کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۴۰/۵ ۳) ۲۴۲ ۴) ۲۴۲/۵

حل: اعداد طبیعی که همون ۱،۲،۳،٤،۵،٦،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،... هستند. دسته اول اگه با ۱ شروع بشه باید به ۳ ختم بشه. چون در صورت سوال گفته که کوچکترین عضو $\frac{۱}{۳}$ بزرگترین عضو دسته است. دسته دوم با ٤ شروع میشه که به ۱۲ باید ختم بشه. دسته سوم با ۱۳ شروع میشه که به ۳۹ باید ختم بشه. دسته چهارم با ٤۰ شروع میشه و به ۱۲۰ ختم میشه و اما دسته پنجم با ۱۲۱ شروع میشه و به ۳٦۳ ختم میشه. میانگین اعداد این دسته برابر با عدد وسطی میشه یا میانگین دو عدد وسط (چون در واقع یه دنباله حسابی داریم). میانگین این دو عدد برابر با $\frac{۱۲۱+۳٦۳}{۲}=\frac{٤۸٤}{۲}=۲٤۲$. پس گزینه ۳ درسته.

۱۱۳- در یک دنباله هندسی، جملهٔ سوم جذر جملهٔ چهارم و جملهٔ پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چقدر از $\frac{۱}{۲}$ کمتر است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{٦}$

حل: طبق اطلاعات مسئله $t_۳=\sqrt{t_٤}$ و $t_۵=۲۷$ میشه. اول بریم $t_۱$ رو بدست بیاریم. جملات سوم و چهارم رو بر حسب جمله پنجم که معلوم است (۲۷ شده) بازنویسی میکنیم. پس $t_۵=t_۳q^۲$ و $t_۵=t_٤q$ میشه. پس $t_۳=\frac{۲۷}{q^۲}$ و $t_٤=\frac{۲۷}{q}$. این دو رو در رابطه اول جایگذاری میکنیم، پس:

$$t_۳=\sqrt{t_٤}\Rightarrow \frac{۲۷}{q^۲}=\sqrt{\frac{۲۷}{q}}\Rightarrow \left(\frac{۲۷}{q^۲}\right)^۲=\frac{۲۷}{q}\Rightarrow \frac{۲۷\times ۲۷}{q^٤}=\frac{۲۷}{q}\Rightarrow \frac{۲۷}{q^۳}=۱\Rightarrow q^۳=۲۷=۳^۳\Rightarrow q=۳$$

حالا که $q=۳$ شده و $t_۵=۲۷$ هست، میتونیم جمله اول رو از رابطه $t_۵=t_۱q^٤$ بدست بیاریم. پس:

$$t_1 = \frac{۲۷}{۸۱} = \frac{۱}{۳}$$

در صورت سوال گفته این مقدار چقدر از $\frac{۱}{۲}$ کمتره که بنابریان باید این دو مقدار رو از هم منها کنیم. پس:

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{٦}$$

۱۱۴- اگر $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-۴} = ۲$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-۴} - ۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{a}{۴}$ ۴) $\frac{a}{۲}$

حل: دو عبارت $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-٤}$ و $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-٤}$ مزودج هم هستن. اول در همدیگه ضربشون کنیم:

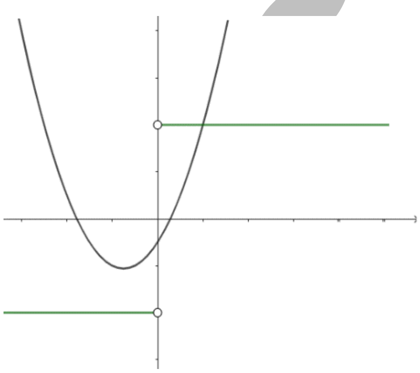
$$\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-٤}\right)\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-٤}\right) = (x+a) - (x-٤) = a + ٤$$

ضربشون $a + ٤$ شده، یکی هم که ۲ شده، پس اون یکی برابر با $۲ + \frac{a}{۲} = \frac{a+٤}{۲}$ میشه. پس عبارت خواسته شده برابر با $\frac{a}{۲}$ میشه.

۱۱۵- بازه $(\circ, \frac{۱}{۲})$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y = ۲x^۲ + \frac{۳}{۲}x + c$ پایین نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

حل: تابع $\frac{|x|}{x}$ که خیلی معروفه! برای اعداد مثبت ۱ میشه و برای اعداد منفی ۱-. در صفر هم که تعریف نشده است. چون بازه جواب برابر با $\left(۰, \frac{۱}{۲}\right)$ شده، پس این تابع در این بازه برابر با ۱ بوده. شماتیک مسئله به صورت زیر میشه. تابع درجه دوم هم رو به بالا هست (چون ضریب $x^۲$ مثبته).



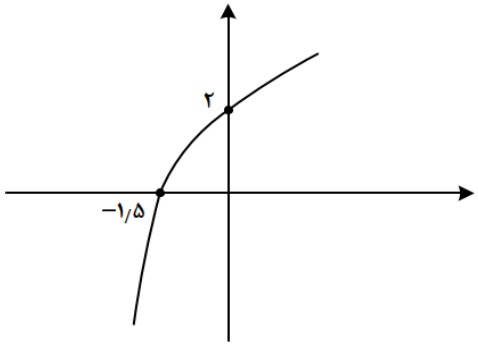
حالا تابع درجه دوم در این بازه باید پایینتر از این خط قرار بگیره. پس: $۲x^۲ + \frac{۳}{۲}x + c < ۱$. در واقع باید نامعادله $۲x^۲ + \frac{۳}{۲}x + c - ۱ < ۰$ رو حل کنیم. در $x = \frac{۱}{۲}$ این دو تابع باید با هم برابر بشن. پس:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right) + c = ۱ \Rightarrow \frac{۲}{٤} + \frac{۳}{٤} + c = ۱ \Rightarrow \frac{۵}{٤} + c = ۱$$

$$\Rightarrow c = -\frac{۱}{٤}$$

۱۱۶- شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ - \log_c(ax-b)$ است. اگر $b+c=-\frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل $(a+c)b$ کدام است؟

۱) $-۳/۵$
۲) -۳
۳) $-۲/۵$
۴) -۲



حل: از نقاط داده شده روی نمودار (عرض از مبدأ و طول از مبدأ) استفاده میکنیم.

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۱ - \log_c(-b) = ۲ \Rightarrow \log_c(-b) = -۱ \Rightarrow c^{-۱} = -b \Rightarrow \frac{۱}{c} = -b \Rightarrow bc = -۱$$

از طرفی $b + c = -\frac{۳}{۲}$ شده که میتونیم از این دو رابطه b و c رو بدست بیاریم.

$$\begin{cases} b + c = -\frac{۳}{۲} \\ bc = -۱ \end{cases} \Rightarrow b - \frac{۱}{b} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow b^۲ + \frac{۳}{۲}b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۲\,, b = \frac{۱}{۲}$$

b که نمیتونه مثبت باشه، چون در اینصورت c منفی میشه و نمیتونه مبنای لگاریتم باشه. پس $b = -۲$ میشه که در اینصورت $c = \frac{۱}{۲}$ میشه.

- برای حل معادله بالا میتونیم b رو حدس بزنیم. اگه نتونیم حدس بزنیم باید معادله درجه دوم رو حل کنیم که میتونیم از تجزیه کردن استفاده کنیم.

برای محاسبه a از طول از مبدأ استفاده میکنیم. پس:

$$x = -۱/۵ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۱ - \log_c\left(-\frac{۳}{۲}a - b\right) = ۰ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}\left(-\frac{۳}{۲}a + ۲\right) = ۱ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}a + ۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$
$$-\frac{۳}{۲}a = \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = ۱$$

پس $(a + c)b = \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)(-۲) = -۳$

۱۱۷- اگر نقطه $\left(-\frac{۱}{۸}, -\frac{۳}{۵}\right)$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۷}$
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

حل: چون نقطه $\left(-\frac{۱}{۸}, -\frac{۳}{۵}\right)$ روی تابع وارون قرار داره، پس نقطه $\left(-\frac{۳}{۵}, -\frac{۱}{۸}\right)$ روی خود تابع قرار داره.
پس:

$$-\frac{۱}{۸} = \frac{-\frac{۳}{۵}}{a+a\left|-\frac{۳}{۵}\right|} = \frac{-\frac{۳}{۵}}{a+\frac{۳}{۵}a} = \frac{-\frac{۳}{۵}}{\frac{۸}{۵}a} = -\frac{۳}{۸a} \Rightarrow -\frac{۱}{۸} = -\frac{۳}{۸a} \Rightarrow a = ۳$$

۱۱۸- اگر $\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}} - \text{tg}\alpha$ و $\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{۱}{\cot\alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

حل: رابطه اول رو به صورت زیر ساده میکنیم:

$$\frac{۱}{|\cos\alpha|} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

حالا از داخل قدر مطلق خود $\cos\alpha$ باید بیرون بیاد یا قرینه‌اش؟! اگه خودش بیرون بیاد این دو عبارت با هم برابر نمیشن، ولی اگه قرینه‌اش بیرون بیاد رابطه برقرار میشه. پس کسینوس باید منفی باشه که در ربع دوم یا سوم قرار میگیره. بریم سراغ رابطه دوم. رابطه دوم هم اگه از داخل قدرمطلق خود سینوس بیاد بیرون که دو عبارت با هم برابر نمیشن و قرینه هم هستن. پس باید منفی بیاد بیرون، یعنی ربع سوم یا چهارم. پس نهایتا برای اینکه هر دو عبارت برقرار باشن، انتهای کمان باید در ربع سوم قرار بگیره.

۱۱۹- در یک لوزی، اندازهٔ هر ضلع برابر جذر حاصل‌ضرب طول قطرها است. اگر A و B دو زاویه مجاور لوزی باشند، مقدار مثبت تانژانت $\left(\frac{A-B}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

حل: اندازه اضلاع رو برابر با a فرض میکنیم و اندازه قطرها رو هم b و c در نظر میگیرم. حالا میتونیم از فرمول مساحت لوزی استفاده کنیم. مساحت لوزی با داشتن دو قطر برابر با $\frac{bc}{۲}$ میشه. از طرفی با داشتن دو ضلع برابر با $a^۲\sin\theta$ میشه (θ برابر با زاویه بین دوضلع هست). پس:

$$\frac{bc}{۲} = a^۲\sin\theta$$

از طرفی در صورت سوال گفته شده که $a = \sqrt{bc}$ یا به عبارت دیگه $a^۲ = bc$ میشه. پس $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$. پس زوایه بین دو ضلع برابر با ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه میشه. یعنی $A = ۱۵۰$ و $B = ۳۰$ میشه. پس:

$$\tan\left(\frac{۱۵۰-۳۰}{۲}\right) = \tan\left(\frac{۱۲۰}{۲}\right) = \tan ۶۰ = \sqrt{۳}$$

۱۲۰- اختلاف جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x = 3\sin x - 1$ که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

حل: برای حل این دو معادله چون زوایای x و 2x داریم، پس باید از روابط دو برابر کمان استفاده کنیم. پس به جای $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ رو قرار میدیم. پس:

$$1 - 2\sin^2 x = 3\sin x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

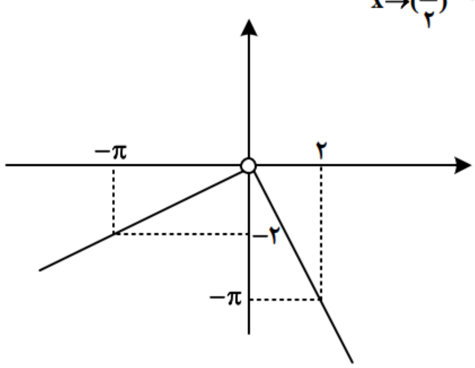
در واقع باید معادله $2t^2 + 3t - 2 = 0$ رو حل کنیم. برای حل این معادله چون ضریب t^2 یک نیست، این ضریب رو در عدد ثابت ضرب میکنیم و معادله رو تبدیل به $t^2 + 3t - 4 = 0$ میکنیم. نهایتا هر دو جواب رو باید بر این ضریب، یعنی ۲ تقسیم کنیم. حالا در اینجا چون مجموع ضرایب صفره، یه ریشه ۱ و ریشه دیگه ۴- میشه. پس ریشه های معادله اصلی برابر با $\frac{1}{2}$ و ۲- هستن. ۲- که قابل قبول نیست، چون سینوس نمیتونه این مقدار رو داشته باشه. پس باید معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ رو حل کنیم. با توجه به خواسته سوال که گفته جواب‌ها در ربع اول و دوم باشن، این دو جواب برابر با $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ میشن که اختلافشون برابر با $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ میشه.

۱۲۱- دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{2} - \sin\frac{2x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. دوره تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 12π

حل: دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{1}{2} - \sin\frac{2x}{a}$ باید برابر با $|a|\pi$ باشه. پس $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{a}\right|} = |a|\pi$ میشه $|a| = \frac{1}{3}$. از طرفی دوره تناوب تابع $y = \cos ax$ هم برابر با $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ میشه.

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}\frac{|f(x)|}{\sin x} + \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sin x}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $1 - \frac{4}{\pi^2}$

۲) $\frac{4}{\pi^2} - 1$

۳) $4\pi - \frac{1}{\pi^2}$

۴) $4\pi + \frac{1}{\pi^2}$

حل: اول معادله این دو خط رو بدست بیاریم. معادله خط سمت راست برابر با $y = -\frac{\pi}{2}x$ میشه و معادله خط سمت چپ هم $y = \frac{2}{\pi}x$ میشه. پس:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\frac{\sin x}{|f(x)|}+\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+}\frac{|f(x)|}{\sin x}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\frac{۱}{|f(x)|}+\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+}\frac{|f(x)|}{(-۱)}$$

پس:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\frac{۱}{\left|f\left(\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-\right)\right|}-\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+}\left|f\left(\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+\right)\right|=\frac{۱}{\frac{\pi^۲}{٤}}-(+۱)=\frac{٤}{\pi^۲}-۱$$

۱۲۳- اگر $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{f(x)}{\sin x}=-\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه f باشد؟

۱) $[\frac{۲x}{\pi}]-۱$ ۲) $۳[\frac{x}{\pi}]+۱$ ۳) $۲[\frac{x}{\pi}]+۳$ ۴) $[\frac{۳x}{\pi}]-۳$

حل: مخرج که ۰^+ میشه، پس صورت باید یه عدد منفی بشه. حالا باید گزینه‌ها رو چک کنیم.

گزینه اول: $x\to\pi^- \Rightarrow [۲^-]=۱-۱=۰$ برابر با صفر مطلق میشه. پس حاصل کسر هم صفر میشه که قابل قبول نیست.

گزینه دوم: $x\to\pi^- \Rightarrow ۳[۱^-]+۱=۰+۱=۱$ میشه که قابل قبول نیست.

گزینه سوم: $x\to\pi^- \Rightarrow ۲[۱^-]+۳=۰+۳=٤$ قابل قبول نیست. پس گزینه آخر درسته.

۱۲۴- تابع غیرصفر $f(x)=a[x]+b[x+۱]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{f(a)}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

حل: اول براکت $[x+۱]$ رو به صورت $[x]+۱$ بازنویسی میکنیم. پس:

$$f(x)=a[x]+b[x]+b=(a+b)[x]+b$$

چون گفته تابع در R پیوسته است، پس $a+b$ باید صفر بشه. پس $a=-b$ میشه و $f(x)=b$ میشه. پس مقدار $\frac{f(a)}{a}=\frac{b}{-b}=-۱$ میشه.

۱۲۵- خط مماس بر منحنی $f(x)=\sqrt{ax-۱}$ در نقطه A از نقاط $(-۱,۱)$ و $(۲,۲)$ می‌گذرد. مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۲۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳۲}}{۳}$

حل: چون معادله مماس از دو نقطه $(-۱,۱)$ و $(۲,۲)$ گذشته، پس بریم معادله خط رو بدست بیاریم. شیب این خط که برابر با $m=\frac{۲-۱}{۲-(-۱)}=\frac{۱}{۳}$ میشه. پس معادله خط به صورت $y=\frac{۱}{۳}x+\frac{٤}{۳}$ میشه. حالا میتونیم از این نکته استفاده کنیم که هر وقت یه خط بر منحنی مماس میشه معادله تقاطع ریشه مضاعف داره:

$\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=\sqrt{ax-1} \Rightarrow \frac{(x+4)^2}{9}=ax-1 \Rightarrow (x+4)^2=9ax-9$

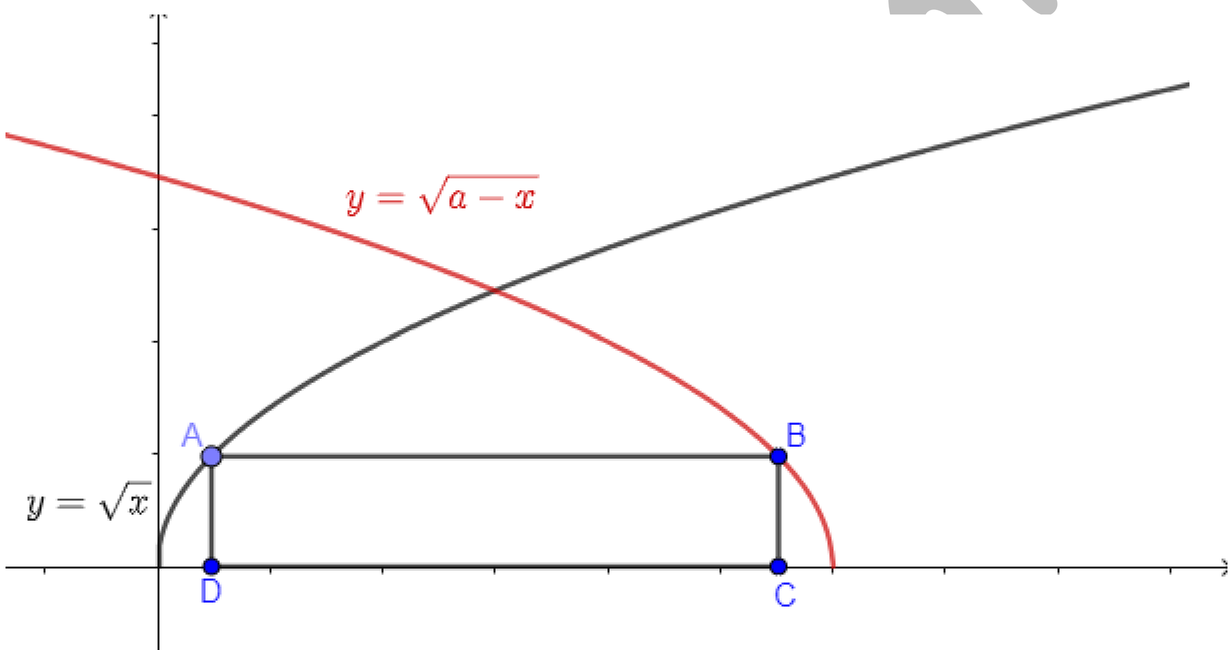
$x^2+(8-9a)x+25=0 \Rightarrow 8-9a=\pm 10 \Rightarrow a=2\,, a=-\frac{2}{9}$

قابل قبول هست که در اینصورت $f(5)=\sqrt{2x-1}=\sqrt{9}=3$

۱۲۶- اگر مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y=\sqrt{x}$ و دیگری بر $y=\sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

حل: شماتیک مسئله به صورت زیر میشه:



اگه طول نقطه A رو برابر با x فرض کنیم، عرضش برابر با $\sqrt{x}$ میشه. پس عرض نقطه B هم برابر با همین مقدار میشه و نهایتا طول نقطه B برابر با $\sqrt{a-x_B}=\sqrt{x}$ یا $x_B=a-x$ میشه. برای محاسبه مساحت مستطیل باید تابع مساحت رو در بیاریم که برابر میشه با حاصلضرب طول در عرض. یعنی:

$$S=AB\times AD=(a-x-x)\sqrt{x}=(a-2x)\sqrt{x}$$

حالا باید ماکزیمم این تابع رو بدست بیاریم. هم میشه مشتق زد و هم اینکه از این نکته استفاده کنیم که چون تابع دو ریشه داره، ماکزیممش بین دو ریشه و نزدیکتر به ریشه با توان ضعیفتر رخ میده! پس فاصله دو ریشه که $\frac{a}{2}$ میشه. پس اکسترمم در $\frac{a}{6}$ رخ میده. بنابراین مساحت ماکزیمم برابر است با:

$$S_{max}=\left(a-\frac{a}{3}\right)\sqrt{\frac{a}{6}}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{4a^2}{9}\left(\frac{a}{6}\right)=2 \Rightarrow a^3=27 \Rightarrow a=3$$

۱۲۷- اگر انحراف معیار داده‌های مثبت ۳، 2a و a برابر $\sqrt{۱۴}$ باشد، مقدار $\frac{a}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

حل: میانگین این سه داده برابر با $\frac{a+۲a+۳}{۳} = \frac{۳a+۳}{۳} = a + ۱$ میشه. پس انحراف معیار به صورت زیر بدست میاد:

$$\sigma^۲ = \frac{(a-(a+۱))^۲ + (۲a-(a+۱))^۲ + (۳-(a+۱))^۲}{۳} = \frac{۱+(a-۱)^۲+(a-۲)^۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱۴ = \frac{۱+(a^۲-۲a+۱)+(a^۲-۴a+۴)}{۳} \Rightarrow ۴۲ = ۲a^۲ - ۶a + ۶ \Rightarrow ۲a^۲ - ۶a - ۳۶ = ۰$$

$$a^۲ - ۳a - ۱۸ = ۰ \Rightarrow (a-۶)(a+۳) = ۰ \Rightarrow a = ۶ , a = -۳$$

چون گفته داده‌ها مثبتن، پس $a = ۶$ قابل قبوله و $\frac{a}{۳} = ۲$ میشه.

۱۲۸- چند تابع ثابت با ۴ زوج مرتب می‌توان نوشت، به‌طوری‌که دامنه آن اعداد طبیعی یک رقمی و بُرد آن اعداد زوج نامنفی یک رقمی باشند؟

۱) ۱۰۵۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۶۳۰ ۴) ۵۰۴

حل: مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ میشه و مجموعه اعداد زوج نامنفی یک رقمی $\{۰,۲,۴,۶,۸\}$. برای اینکه تابع ثابتی با ۴ زوج مرتب بسازیم، باید از اعضای مجموعه اول ۴ عضو انتخاب کنیم و برای برد، از مجموعه دوم باید ۱ عضو انتخاب کنیم که به ۵ حالت ممکن است. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۹}{۴} \times \binom{۵}{۱} = \frac{۹}{۴} \times \frac{۸}{۳} \times \frac{۷}{۲} \times \frac{۶}{۱} \times ۵ = ۹ \times ۱۴ \times ۵ = ۹ \times ۷۰ = ۶۳۰$$

۱۲۹- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال یکی از اعداد ظاهرشده، بزرگ‌تر از دیگری است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

حل: در پرتاب دو تاس فضای نمونه ۳۶ عضو داره. در ۶ حالت هر دو تاس اعداد یکسانی دارند. پس برای اینکه یکی از اعداد ظاهر شده بزرگتر از دیگری باشد، باید اعداد روی تاس ها متفاوت باشد که بنابراین ۳۰ حالت ممکن است. پس احتمال برابر با $\frac{۵}{۶} = \frac{۳۰}{۳۶}$ خواهد بود . اما اگر مشخص کرده بود که یک تاس معین عدد بزرگتری داشته باشد، آنگاه ۱۵ حالت داشتیم و جواب $\frac{۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۳۶}$ میشد.

۱۳۰- احتمال کسب مدال دو ورزشکار یک تیم ملی در المپیک به‌ترتیب ۰/۶ و ۰/۴ است. احتمال اینکه فقط یکی از این دو ورزشکار مدال کسب کند، چقدر است؟

۱) ۰/۵۲ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۴۸ ۴) ۰/۳۶

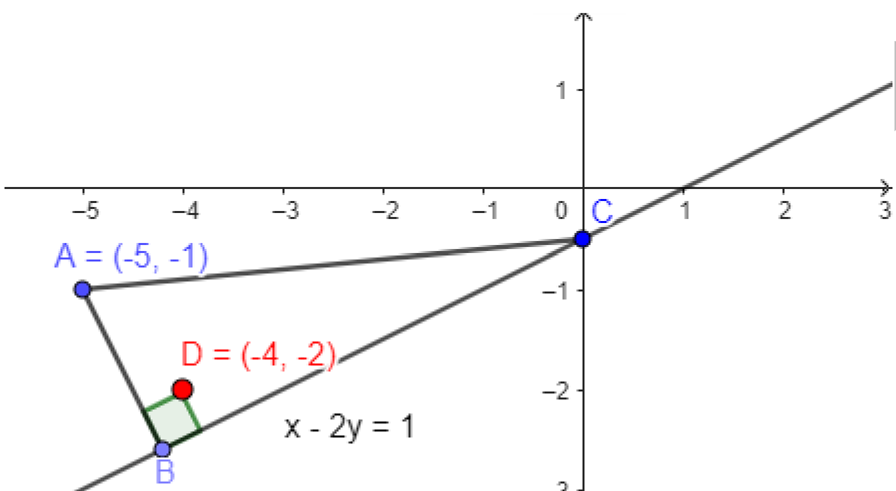
حل: وقتی گفته فقط یکی مدال کسب کنند، یعنی $P(A-B)+P(B-A)$ یا به عبارت دیگه یعنی اجتماعشون منهای اشتراکشون یا به بیان ریاضی برابر است با $P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$. چون پدیده‌ها مستقل هستند، اشتراک برابر با حاصلضرب احتمال‌ها میشه. پس:

$$۰/٤+۰/٦-۲(۰/٤)(۰/٦)=۱-۰/٤۸=۰/۵۲$$

۱۳۱- نقطه $A(-۵,-۱)$ یک رأس مثلثی است که یک ضلع آن روی خط $x-۲y=۱$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از این خط بوده و نقطه $(-۴,-۲)$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه سوم محورهای مختصات کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۲ ۳) ۶ ۴) ۶/۴

حل: شماتیک مسئله به صورت زیر میشه:



برای محاسبه مساحت این مثلث میتونیم طول اضلاع قائمه رو بدست بیاریم. پس:

$$BC=\frac{|-۵-۲(-۱)-۱|}{\sqrt{۱+٤}}=\frac{٤}{\sqrt{۵}}$$

برای محاسبه طول BC یا باید مختصات نقطه B رو بدست بیاریم و بعدش با استفاده از فرمول فاصله، فاصله رو تا نقطه $C=\left(۰,-\frac{۱}{۲}\right)$ بدست بیاریم یا اینکه اول فاصله AC رو بدست بیاریم و با استفاده از فیثاغورس طول ضلع BC رو بدست بیاریم.

$$AC=\sqrt{۵^۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲}=\sqrt{۲۵+\frac{۱}{٤}}$$

پس طبق فیثاغورس داریم: $BC^۲=AC^۲-AB^۲=۲۵+\frac{۱}{٤}-\frac{۱٦}{۵}=۲۲+\frac{۱}{۲۰}=\frac{٤٤۱}{۲۰}\Rightarrow BC=\frac{۲۱}{\sqrt{۲۰}}$.

مساحت این مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\left(\frac{٤}{\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۲۱}{\sqrt{۲۰}}\right)=\frac{٤۲}{\sqrt{۱۰۰}}=٤/۲$$

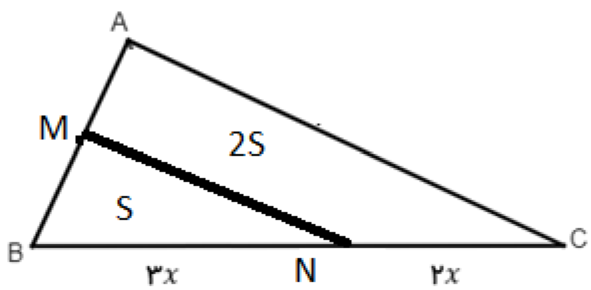
۱۳۲- نقاط M و N به‌ترتیب روی اضلاع AB و BC در مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر ۲BN = ۳NC و مساحت مثلث ABC، ۳ برابر مساحت مثلث BMN باشد، مقدار $\frac{BM}{AM}$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵　　۲) ۰/۸　　۳) ۱/۲۵　　۴) ۱/۴

حل: شکل مسئله به صورت زیره. میتونیم رابطه مساحت رو برای دو مثلث BMN و ABC بنویسیم. پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times AB\times ۵x\times\sin B}{\frac{۱}{۲}\times BM\times ۳x\times\sin B}=۳\Rightarrow\frac{AB}{BM}=\frac{۹}{۵}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}}\frac{AB-BM}{BM}=\frac{٤}{۵}$$

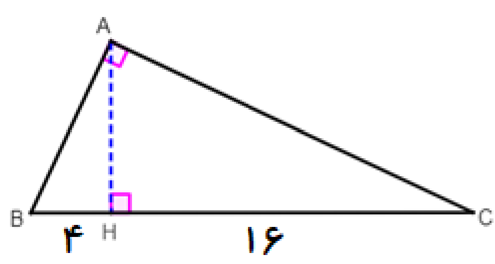
$$\Rightarrow\frac{AM}{BM}=\frac{٤}{۵}\Rightarrow\frac{BM}{AM}=\frac{۵}{٤}=۱/۲۵$$



۱۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، نقطه H، نقطه تلاقی ارتفاع وارد بر وتر است. اگر طول وتر ۲۰ و کمترین فاصله H از رأس‌های مجاورش ۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمه این مثلث کدام است؟

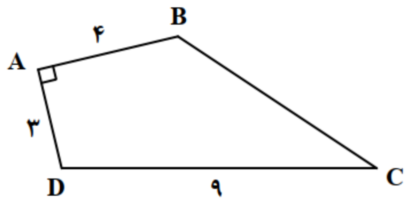
۱) ۲　　۲) ۳　　۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

حل: اول شکل این مثلث رو به صورت زیر رسم میکنیم.



$$AB^{۲}=BH\times BC=٤\times ۲۰\ ,AC^{۲}=CH\times BC=۱٦\times ۲۰\ \Rightarrow\frac{AC^{۲}}{AB^{۲}}=\frac{۱٦}{٤}=٤\ \Rightarrow\frac{AC}{AB}=۲$$

۱۳۴- در چهارضلعی $ABCD$، از نقاط B و D دو پاره‌خط به‌ترتیب موازی AD و AB طوری رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M (درون چهارضلعی) قطع کنند. اگر $B\hat{D}C = ۲B\hat{D}M$ باشد، فاصله نقطه M از وسط ضلع BC چقدر است؟



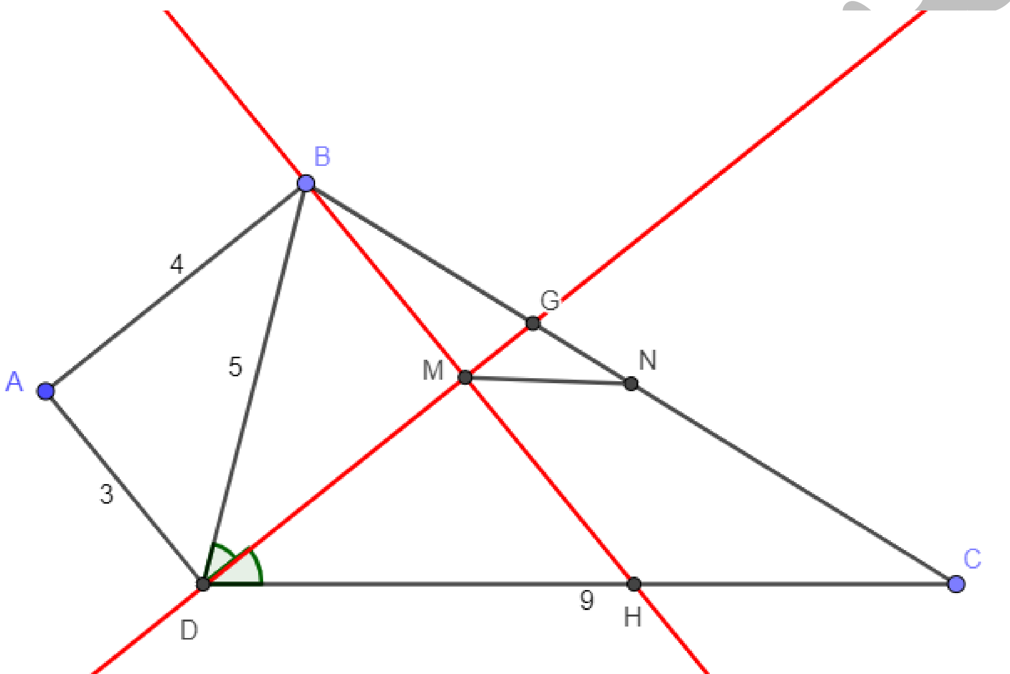
۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

حل: مثلث BDH رو در نظر بگیر. زاویه M که قائمه‌اس. از طرفی DM هم نیمسازه. پس دو مثلث BDM و MDH هم نهشت هستن و DH=BD=۵ میشه. پس HC برابر با ٤ میشه. چون این دو مثلث هم نهشت هستن، Mوسط BH قرار میگیره و از طرفی در مسئله گفته شده که به وسط BC وصل کنیم. پس در مثلث BHC تالس با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ داریم. یعنی MN نصف HC میشه که برابر با ۲ میشه.



۱۳۵- نقاط $F(\circ,\circ)$ و $F'(a,\circ)$ کانون‌های یک بیضی و $A(\circ,-۱)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ باشد، مقدار a کدام است؟

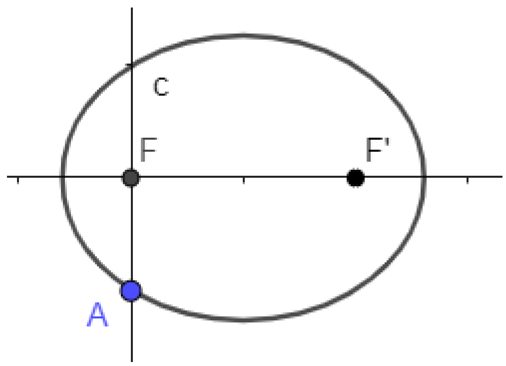
۱) $۲\sqrt{۵}$

۲) $-۲\sqrt{۵}$

۳) $-۴\sqrt{۵}$

۴) $۴\sqrt{۵}$

حل: چون عرض کانون‌ها یکسانه، پس بیضی افقیه. ساختار بیضی به صورت زیر میشه:



با توجه به شکل طول کوتاهترین وتر کانونی برابر با ۲ میشه که میدونستیم طول این وتر برابر با $\frac{2b^2}{a}$ میشه.

پس $\frac{b^2}{a}=1$. از طرفی خروج از مرکز بر حسب a و b برابر با $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ میشه. پس:

$$1-\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow b^2=5a^2\,,b^2=a \Rightarrow a=5a^2 \Rightarrow a=5\,,b=\sqrt{5}$$

پس $c^2=a^2-b^2=25-5=20 \Rightarrow c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. در مسئله از ما مقدار a رو خواسته که در واقع در اینجا همون $2c$ میشه (یا فاصله کانونی)، پس $4\sqrt{5}$ جواب میشه.

۱۳۶- رابطه $f=\{(7,1-3n^2),(1,-1),(2,n),(7,-2n),(\frac{1}{n},2)\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۲، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) -1 ۴) ۱

حل: چون رابطه داده شده تابع هست، پس به ازای یه ورودی یکسان، نباید دو خروجی متفاوت بگیریم. یعنی اگه مولفه‌های اول با هم برابر باشن، مولفه‌های دوم هم با هم برابر باشن، پس:

$$(7,1-3n^2)=(7,-2n) \Rightarrow 1-3n^2=-2n \Rightarrow 3n^2-2n-1=0 \Rightarrow n=1\,,n=-\frac{1}{3}$$

اگه $n=1$ باشه دو مولفه $(1,-1)$ و $(1,2)$ رو خواهیم داشت که شرط تابع بودن نقض میشه. پس $n=-\frac{1}{3}$ میشه. پس $\left(2,\frac{-1}{3}\right)$ یکی از مولفه‌ها میشه. بنابراین مقدار این تابع در ۲، برابر با $\frac{-1}{3}$ میشه.

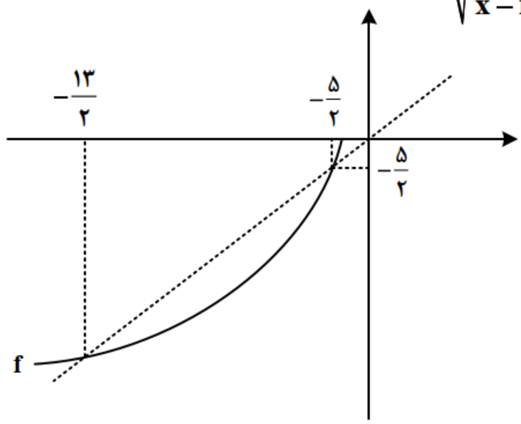
۱۳۷- شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y=\sqrt{\dfrac{f^{-1}(x)}{x-f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۵



حل: میدونیم که تابع و معکوسش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه آینه‌ای هستن. میتونیم رسمش کنیم. اگه رسم کنی میبینی که در بازه $\left(-\frac{13}{2},-\frac{5}{2}\right)$ تابع معکوس بالاتر از خط $y=x$ قرار میگیره. پس حاصل $x-f^{-1}(x)$ منفی میشه. از طرفی مقادیر خود این تابع هم منفی هستن که عبارت زیر رادیکال معنا دار میشه. در خارج از این بازه مخرج مثبت میشه و صورت منفی که منجر بمیشه عبارت زیر رادیکال منفی بشه و بی معنی. پس دامنه این تابع شامل اعداد صحیح ۳-، ٤-، ۵-، ٦- هست.

۱۳۸- سهمی $y=2ax^2-5x+18a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

حل: هر گاه خطی بر یک منحنی مماس شود، معادله تقاطع دارای ریشه مضاعف است. پس منحنی داده شده رو با خط $y=x$ تلاقی میدیم. پس:

$$2ax^2-5x+18a=x \Rightarrow 2ax^2-6x+18a=0 \Rightarrow \Delta'=0 \Rightarrow 9-(2a)(18a)=0$$

$$36a^2=9 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

اگر $a=\frac{1}{2}$ باشد معادله تقاطع تبدیل به $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ میشه که ریشه مثبت میشه و روی نیمساز ناحیه سوم نمیتونه قرار بگیره. پس $a=-\frac{1}{2}$ بوده.

۱۳۹- دامنه تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ برابر $[b,c]$ است. اگر $k=2a^2-a-5$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر a کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۲/۵- ۴) ۲/۵

حل: چون دامنه دو تابع $f(x)$ و $f(kx)$ یکسان شدن و هیچ تغییری نکرده، پس $k=1$ بوده. یعنی:

$$2a^2-a-5=1 \Rightarrow 2a^2-a-6=0 \Rightarrow a_1a_2=\frac{-6}{2}=-3$$

۱۴۰- در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^۲ + x + ۲a$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است؟

۱) ۳ ۲) هیچ مقدار a ۳) ۲ ۴) ۱

حل: بیشترین مقدار سهمی در رأس رخ میده، اما در صورتیکه جهت سهمی رو به پایین باشه. طول رأس این سهمی برابر است با $x = -\frac{۱}{۲a}$. پس:

$$y_s = a\left(-\frac{۱}{۲a}\right)^۲ + \left(-\frac{۱}{۲a}\right) + ۲a = \frac{۱}{۴a} - \frac{۱}{۲a} + ۲a = ۲a - \frac{۱}{۴a} = \frac{۸a^۲ - ۱}{۴a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$۸a^۲ + ۲a - ۱ = ۰$$

چون ضرایب a و c برای معادله درجه دوم مختلف هستن، پس این معادله یه ریشه مثبت داره و یه ریشه منفی.

اگه $a < ۰$ باشه، سهمی رو پایینه و ماکزیمم داره.

مهندس سید امید شفیعی

دانش آموخته مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران

در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

مدرس کنکور و دانشگاه

ایمیل: shafiei.omid.seyed@gmail.com