

# پاسخ تشریحی سوالات ریاضی کنکور تجربی تیر ۱۴۰۳

یحیی علی پناه

۰۹۱۴۱۸۰۲۰۳۳

<https://t.me/iranscondmath>

تیر ماه ۱۴۰۳

۱۱۱- حاصل عبارت  $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2} \times 16^{-\frac{3}{4}}}}$  کدام است؟

۱۸ $\sqrt[3]{2}$  (۴)

۱۸ $\sqrt{2}$  (۳)

۱۶ $\sqrt[3]{2}$  (۲)

۱۶ $\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ ۱۱۱- گزینه ۴.

$$\frac{\sqrt[3]{2 \times 2^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-3}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-3}} = 2^{\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + 3} = 2^{\frac{10}{6}} = 18\sqrt[3]{2}$$

۱۱۲- اعداد طبیعی طوری دسته بندی شده اند که در هر دسته، کوچک ترین عضو  $\frac{1}{3}$  بزرگ ترین عضو دسته است. میانگین

اعضای دسته پنجم، کدام است؟

۲۴۲/۵ (۴)

۲۴۲ (۳)

۲۴۰/۵ (۲)

۲۴۰ (۱)

پاسخ ۱۱۲- گزینه ۳.

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, \dots, 12\}, A_3 = \{13, \dots, 39\}, A_4 = \{40, \dots, 120\}, A_5 = \{121, \dots, 362\}$$

میانگین یک دسته از اعداد متوالی، برابر است با میانگین ابتدا و انتهای دسته.

$$\frac{121 + 362}{2} = 242$$

۱۱۳- در یک دنباله هندسی، جمله سوم جذر جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چقدر از  $\frac{1}{4}$  کمتر است؟

$\frac{1}{6}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{5}{2}$  (۱)

پاسخ ۱۱۳- گزینه ۴.

$$a_3 = \sqrt{a_4} \Rightarrow a_3^2 = a_4 \Rightarrow a_1^2 r^6 = a_1 r^4 \Rightarrow a_1 r = 1 \quad (*)$$

$$a_5 = 27 \quad (*) \Rightarrow a_1 r^4 = (a_1 r) r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \quad (*) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

۱۱۴- اگر  $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\frac{a}{4}$  (۴)  $\frac{a}{2}$

پاسخ ۱۱۴- گزینه ۴.

$$A = \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2 \Rightarrow A + 2 = \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4}$$

طرفین رابطه اخیر را در مزدوج عبارت سمت راست ضرب میکنیم.

$$(A + 2)(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4}) = x + a - x + 4 = a + 4$$

از فرض سوال داریم:

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$$

پس:

$$(A + 2) \times 2 = a + 4 \Rightarrow A = \frac{a}{2}$$

۱۱۵- بازه  $(0, \frac{1}{2})$ ، بزرگترین بازه‌ای است که نمودار تابع  $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$  پایین نمودار تابع  $y = \frac{x}{|x|}$  قرار می‌گیرد.

مقدار  $c$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{3}{8}$

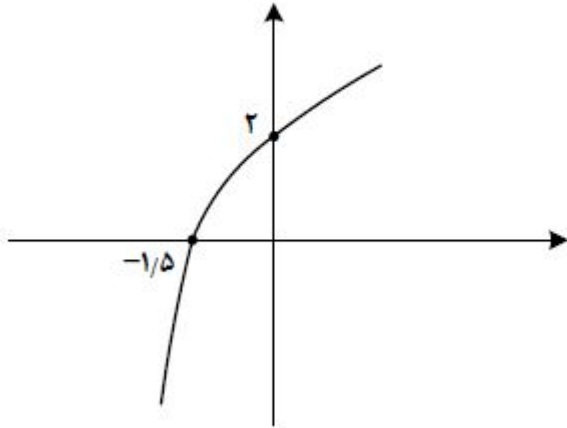
پاسخ ۱۱۵- گزینه ۳.

$$2x^2 + \frac{3}{2}x + c < \frac{x}{|x|}, \quad 0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{|x|} = 1$$

این دو نمودار هم‌دیگر را در نقطه  $x = \frac{1}{2}$  قطع می‌کنند.

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

۱۱۶- شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 - \log_c(ax - b)$  است. اگر  $b + c = -\frac{3}{2}$  باشد، حاصل  $(a + c)b$  کدام است؟



- (۱)  $-\frac{3}{5}$   
(۲)  $-3$   
(۳)  $-\frac{2}{5}$   
(۴)  $-2$

پاسخ ۱۱۶- گزینه ۳.

$$A(-1.5, 0) \Rightarrow 0 = 1 - \log_c(-1.5a - b) \Rightarrow \log_c(-1.5a - b) = 1$$

$$\Rightarrow -1.5a - b = c \Rightarrow b + c = -1.5a$$

با توجه به فرض سوال  $b + c = -\frac{3}{2}$  پس  $a = 1$

$$B(0, 2) \Rightarrow 2 = 1 - \log_c(-b) \Rightarrow \log_c(-b) = -1 \Rightarrow -b = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow bc = -1, \quad s = b + c = \frac{3}{2}, \quad p = bc = -1 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 0.5, \quad c > 0 \Rightarrow c = 0.5, b = -2 \Rightarrow (a + c)b = (1 + 0.5) \times (-2) = -3$$

۱۱۷- اگر نقطه  $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$  روی تابع وارون تابع  $y = \frac{x}{a + a|x|}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{27}$   
(۲)  $5$   
(۳)  $3$   
(۴)  $\frac{3}{5}$

پاسخ ۱۱۷- گزینه ۳.

$$-\frac{1}{8} = \frac{-\frac{3}{5}}{a + \frac{3}{5}a} \Rightarrow -\frac{1}{8} = \frac{-3}{8a} \Rightarrow a = 3$$

۱۱۸- اگر  $\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}} - \text{tg}\alpha = -\frac{1}{\cot\alpha}$  و  $\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\cot\alpha}$  باشد، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

(۱) چهارم (۲) سوم (۳) دوم (۴) اول

پاسخ ۱۱۸ - گزینه ۲.  
از رابطه اول داریم:

$$\frac{1}{|\cos\alpha|} - \frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \tan\alpha \Rightarrow \frac{-\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha < 0$$

از رابطه دوم داریم:

$$\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow |\sin\alpha| = -\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha < 0$$

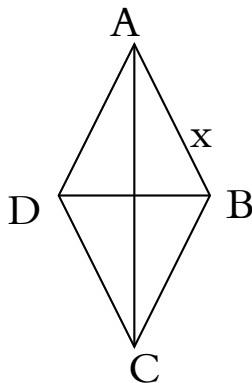
پس انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم است.

۱۱۹- در یک لوزی، اندازه هر ضلع برابر جذر حاصل ضرب طول قطرهای است. اگر  $A$  و  $B$  دو زاویه مجاور لوزی باشند، مقدار مثبت تانژانت  $(\frac{A-B}{2})$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۳

پاسخ ۱۱۹ - گزینه ۱.

فرض کنیم در لوزی، طول قطر  $AC$  برابر  $a$  و قطر  $BD$  برابر  $b$  و طول اضلاع لوزی برابر  $x$  باشد.



مساحت مثلث  $ABD$  را به دو روش حساب می‌کنیم.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} ab \right) = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \sin(A)$$

طبق فرض سوال  $ab = x^2$ ، پس:

$$\sin(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 30^\circ \Rightarrow B = 150^\circ \Rightarrow \left| \tan\left(\frac{30^\circ - 150^\circ}{2}\right) \right| = \left| \tan(-60^\circ) \right| = \sqrt{3}$$

۱۲۰- اختلاف جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos 2x = 3 \sin x - 1$  که در بازه  $[0, \pi]$  قرار دارند، کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}$  (۴)       $\frac{\pi}{6}$  (۳)       $\frac{\pi}{3}$  (۲)       $\frac{5\pi}{6}$  (۱)

پاسخ ۱۲۰- گزینه ۴.

$$1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 1 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}, \sin x = -2 \quad \times$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

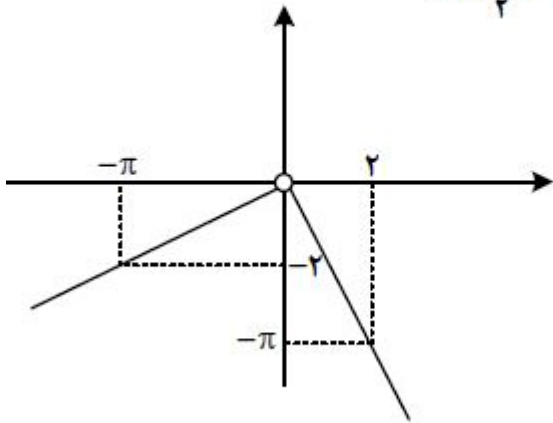
۱۲۱- دوره تناوب  $f(x) = \frac{1}{2} - \sin \frac{2x}{a}$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  است. دوره تناوب  $y = \cos ax$  کدام است؟

$12\pi$  (۴)       $6\pi$  (۳)       $4\pi$  (۲)       $2\pi$  (۱)

پاسخ ۱۲۱- گزینه ۳.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{a}\right|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3}, \quad y = \cos ax \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi$$

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع  $f$  است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} + \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x}$  کدام است؟



- (۱)  $1 - \frac{4}{\pi^2}$   
 (۲)  $\frac{4}{\pi^2} - 1$   
 (۳)  $4\pi - \frac{1}{\pi^2}$   
 (۴)  $4\pi + \frac{1}{\pi^2}$

پاسخ ۱۲۲ - گزینه ۲.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & x < 0, \\ -\frac{\pi}{2}x, & x > 0. \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|\frac{-\pi}{2}| \times \frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{4}{\pi^2} - 1$$

۱۲۳- اگر  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$  باشد، کدام مورد می تواند ضابطه  $f$  باشد؟

- (۱)  $[\frac{2x}{\pi}] - 1$  (۲)  $2[\frac{x}{\pi}] + 1$  (۳)  $2[\frac{x}{\pi}] + 3$  (۴)  $[\frac{3x}{\pi}] - 3$

پاسخ ۱۲۳ - گزینه ۴.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) < 0$$

چون گزینه ها شامل  $[\frac{x}{\pi}]$  می باشد، این عبارت را ظاهر می کنیم.

$$x \rightarrow \pi^- \Rightarrow x < \pi \Rightarrow \frac{x}{\pi} < 1 \Rightarrow \frac{3x}{\pi} < 3 \Rightarrow [\frac{3x}{\pi}] < 3 \Rightarrow [\frac{3x}{\pi}] - 3 < 0$$

۱۲۴- تابع غیر صفر  $f(x) = a[x] + b[x+1]$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. مقدار  $\frac{f(a)}{a}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

پاسخ ۱۲۴ - گزینه ۲.

$$f(x) = a[x] + b[x] + b = (a+b)[x] + b$$

می دانیم تابع شامل عبارت جز صحیح در  $\mathbb{R}$  پیوسته نیست. لذا باید ضریب جز صحیح برابر صفر باشد.

$$a+b=0 \Rightarrow f(x) = b = -a \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

۱۲۵- خط مماس بر منحنی  $f(x) = \sqrt{ax-1}$  در نقطه A از نقاط  $(-1,1)$  و  $(2,2)$  می گذرد. مقدار  $f(5)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳)  $\frac{\sqrt{23}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{32}}{3}$

پاسخ ۱۲۵ - گزینه ۱

معادله خطی که از دو نقطه معلوم می گذرد به صورت  $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$  است. این خط را با منحنی  $f(x)$  قطع می دهیم. چون خط بر منحنی مماس است پس ریشه مضاعف داریم:

$$\sqrt{ax-1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 + (8-9a)x + 25 = 0; \Delta = 0 \Rightarrow (8-9a)^2 = 100 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = 3$$

دقت کنید به ازای  $a = \frac{2}{9}$  مقدار  $f(5)$  تعریف نشده است.



۱۲۶- اگر مساحت بزرگترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور  $x$ ها و دو رأس دیگر آن، یکی بر  $y = \sqrt{x}$  و دیگری بر  $y = \sqrt{a-x}$  واقع است برابر  $\sqrt{2}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

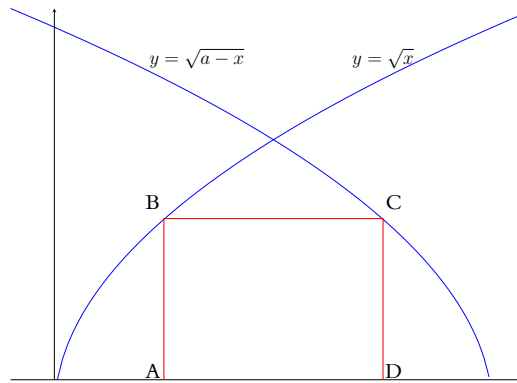
۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ ۱۲۶ - گزینه ۳.



در مستطیل  $ABCD$  فرض کنیم  $A(x, 0)$  باشد. با تغییر  $x$  مساحت مستطیل تغییر می‌کند. عرض دو نقطه  $B(x, \sqrt{x})$  و  $C(x_1, \sqrt{a-x_1})$  برابرند پس:

$$\sqrt{x} = \sqrt{a-x_1} \Rightarrow x = a-x_1 \Rightarrow x_1 = a-x$$

در نتیجه  $D(a-x, 0)$  و طول  $AD$  برابر است با  $a-2x$

$$S_{ABCD} = AB \times AD \Rightarrow S(x) = \sqrt{x}(a-2x)$$

$$S'(x) = \frac{a-2x}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow a-2x = 4x \Rightarrow x = \frac{a}{6}$$

$$S\left(\frac{a}{6}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{6}}\left(a - \frac{a}{3}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{6}\left(\frac{2a}{3}\right) = 2 \Rightarrow a = 3$$

۱۲۷- اگر انحراف معیار داده‌های مثبت ۳،  $2a$  و  $a$  برابر  $\sqrt{14}$  باشد، مقدار  $\frac{a}{3}$  کدام است؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ ۱۲۷ - گزینه ۲.

$$\bar{x} = a + 1 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1 + (1-a)^2 + (a-2)^2}{3} = 14$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 18 = 0 \Rightarrow a = 6, -2$$

با توجه به گزینه‌ها،  $\frac{a}{3} = 2$

۱۲۸- چند تابع ثابت با ۴ زوج مرتب می توان نوشت، به طوری که دامنه آن اعداد طبیعی یک رقمی و برد آن اعداد زوج نامنفی یک رقمی باشند؟

- (۱) ۱۰۵۰ (۲) ۸۴۰ (۳) ۶۳۰ (۴) ۵۰۴

پاسخ ۱۲۸ - گزینه ۳.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R = \{0, 2, 4, 8\}$$

$$\binom{9}{4} \times 5 = 630$$

۱۲۹- دو تاس را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال یکی از اعداد ظاهر شده، بزرگ تر از دیگری است؟

- (۱)  $\frac{7}{12}$  (۲)  $\frac{5}{12}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

پاسخ ۱۲۹ - گزینه ۴.

کافیست احتمال اینکه اعداد ظاهر شده مساوی نباشند را بدست آوریم.  $1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

۱۳۰- احتمال کسب مدال دو ورزشکار یک تیم ملی در المپیک به ترتیب  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{4}$  است. احتمال اینکه فقط یکی از این دو ورزشکار مدال کسب کند، چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{52}$  (۲)  $\frac{1}{76}$  (۳)  $\frac{1}{48}$  (۴)  $\frac{1}{36}$

پاسخ ۱۳۰ - گزینه ۱.

$$P(A).P(B') + P(A')P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{36} + \frac{3}{16} = \frac{19}{72}$$

۱۳۱- نقطه  $A(-5, -1)$  یک رأس مثلثی است که یک ضلع آن روی خط  $x - 2y = 1$  قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس  $A$  از این خط بوده و نقطه  $(-4, -2)$  داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه سوم محورهای مختصات کدام است؟

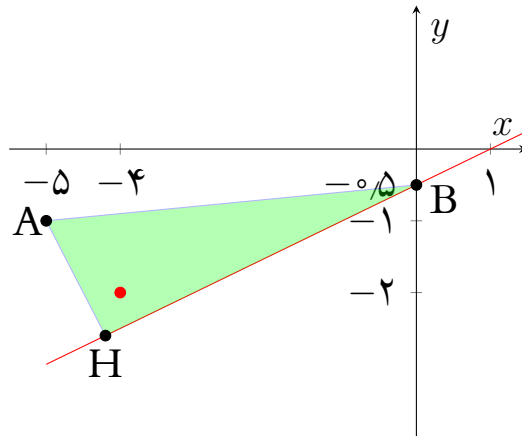
۴) ۶/۴

۳) ۶

۲) ۴/۲

۱) ۴

پاسخ ۱۳۱ - گزینه ۲ .



اگر  $B$  به صورت  $B(0, -0.5)$  باشد مثلث بیشترین مساحت را دارد.

$$|AB| = \sqrt{25 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{101}}{2}, \quad |AH| = \frac{|-5 + 2 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$|BH|^2 = |AB|^2 - |AH|^2 \Rightarrow |BH| = \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{1}{2}|AH||BH| = \frac{42}{10} = 4.2$$

۱۳۲- نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و BC در مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر  $2BN = 3NC$  و مساحت مثلث

ABC، ۳ برابر مساحت مثلث BMN باشد، مقدار  $\frac{BM}{AM}$  کدام است؟

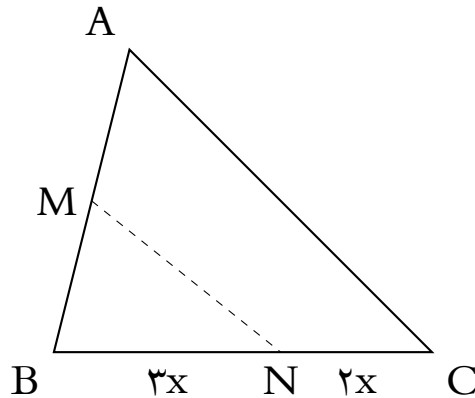
۱/۴ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۷۵ (۱)

پاسخ ۱۳۲ - گزینه ۳.



$$S_{ABC} = 3S_{MBN} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = 3 \times \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin B$$

$$\Rightarrow AB \cdot BC = 3BM \cdot BN$$

$$\Rightarrow AB(5x) = 3BM(3x)$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{5}{4} = 1/25$$

۱۳۳- در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ، نقطه  $H$ ، نقطه تلاقی ارتفاع وارد بر وتر است. اگر طول وتر  $20$  و کمترین فاصله  $H$  از رأس‌های مجاورش  $4$  باشد، نسبت طول اضلاع قائمه این مثلث کدام است؟

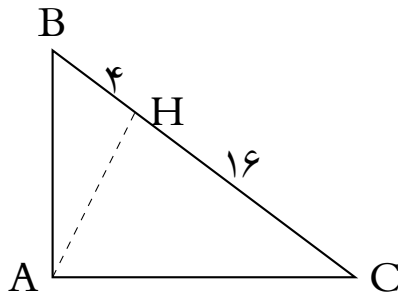
$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ ۱۳۳ - گزینه ۱.

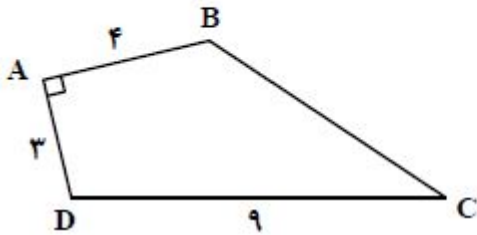


$$AH^2 = BH \cdot CH = 64 \Rightarrow AH = 8$$

دو مثلث  $ABH$  و  $ABC$  متشابه هستند.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH} = \frac{8}{4} = 2$$

۱۳۴- در چهارضلعی ABCD، از نقاط B و D دو پاره خط به ترتیب موازی AD و AB طوری رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطه M (درون چهارضلعی) قطع کنند. اگر  $\widehat{BDC} = 2\widehat{BDM}$  باشد، فاصله نقطه M از وسط ضلع BC چقدر است؟



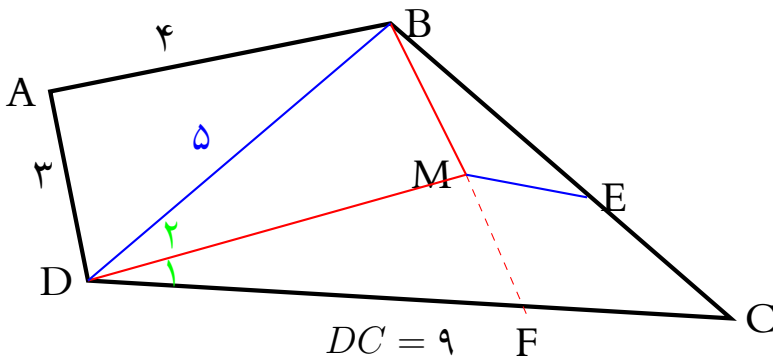
(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) ۳

پاسخ ۱۳۴ - گزینه ۲.



چون زاویه  $A = 90^\circ$  پس  $ABMD$  مستطیل است و  $DM = 4$ ،  $BM = 3$  است و چون  $D_1 = D_2$  لذا دو مثلث قائم الزاویه  $MDB$  و  $MDF$  همنهشت هستند پس  $BM = MF = 3$  در نتیجه  $DF = 5$  پس  $FC = 4$ . درمثلث  $BFC$ ،  $ME$  وسط دو ضلع را به هم وصل کرده پس برابر نصف قاعده است.  $ME = 2$ .

۱۳۵- نقاط  $F(0,0)$  و  $F'(a,0)$  کانون‌های یک بیضی و  $A(0,-1)$  یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی

برابر  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

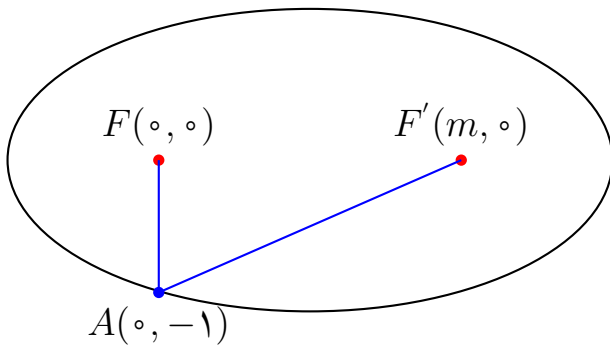
$4\sqrt{5}$  (۴)

$-4\sqrt{5}$  (۳)

$-2\sqrt{5}$  (۲)

$2\sqrt{5}$  (۱)

پاسخ ۱۳۵ - گزینه ۴.



طول قطر بزرگ را  $2a$  نشان می‌دهیم و برای پرهیز از مشابهت حروف، کانون را به صورت  $F'(m,0)$  نمایش دادیم. هدف محاسبه  $m$  است.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad c = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{m}{2a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2a = \frac{m\sqrt{5}}{2}$$

$$AF + AF' = 2a \Rightarrow 1 + \sqrt{m^2 + 1} = \frac{m\sqrt{5}}{2}$$

$$m^2 + 1 = \frac{1}{4}(5m^2 - 4\sqrt{5}m + 4) \Rightarrow m = 0, 4\sqrt{5} \Rightarrow m = 4\sqrt{5}.$$

۱۳۶- رابطه  $f = \{(7, 1-3n^2), (1, -1), (2, n), (7, -2n), (\frac{1}{n}, 2)\}$  تابع است. مقدار تابع  $f$  در ۲، کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

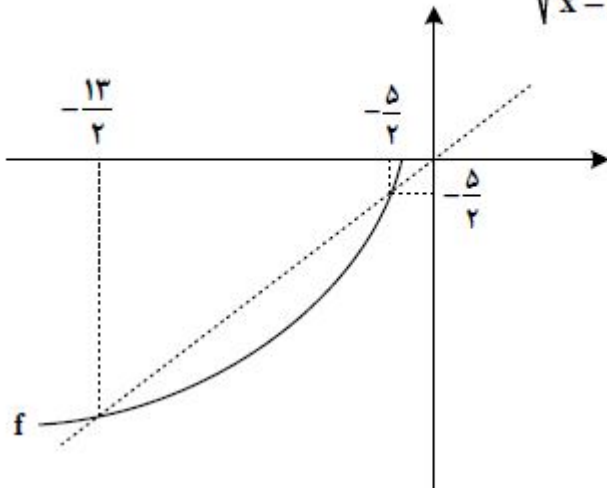
$-\frac{1}{3}$  (۱)

پاسخ ۱۳۶ - گزینه ۱.

$$1 - 3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1 \quad (\times), \quad n = -\frac{1}{3} \quad (\checkmark)$$

$$\Rightarrow f(2) = -\frac{1}{3}$$

۱۳۷- شکل زیر، نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد. دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟



- ۱ (۱)  
۲ (۲)  
۴ (۳)  
۵ (۴)

پاسخ ۱۳۷ - گزینه ۳.

وارون تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن هست و در این شکل تابع در ربع سوم قرار دارد بنابراین  $f^{-1}(x) < x$  چون  $f^{-1}(x)$  بالای خط  $y = x$  قرار دارد پس  $f^{-1}(x) \geq x$  در نتیجه  $x - f^{-1}(x) \leq 0$ .

$$-\frac{13}{2} < x < -\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} > 0$$

$$\{-6, -5, -4, -3\} \subset Z$$

۱۳۸- سهمی  $y = 2ax^2 - 5x + 18a$  در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a، کدام است؟

- ۱)  $-\frac{5}{2}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{5}{2}$

پاسخ ۱۳۸ - گزینه ۲.

معادله سهمی و نیمساز را با هم قطع می‌دهیم. چون نیمساز بر سهمی مماس است، معادله اخیر ریشه مضاعف دارد.

$$2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(2a)(18a) = 36(1 - 4a^2) = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

اگر  $a = \frac{1}{2}$  نمودار سهمی از ناحیه اول و دوم عبور می‌کند و قابل قبول نیست.  $y = (x - \frac{5}{4})^2 + \frac{11}{4}$

اگر  $a = -\frac{1}{2}$  نمودار سهمی از ناحیه سوم و چهارم عبور می‌کند و بر نیمساز ناحیه سوم مماس است.

توجه: این استدلال که (چون سهمی بر نیمساز ناحیه سوم مماس هست لذا طول راس سهمی منفی است. نادرست می‌باشد. برای نمونه:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2$$



۱۳۹- دامنه تابع  $y = f(x)$  و  $y = f(kx)$  برابر  $[b, c]$  است. اگر  $k = 2a^2 - a - 5$  باشد، حاصل ضرب مقادیر  $a$  کدام است؟

(۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۲/۵ (۴) ۲/۵

بر نیمساز ناحیه سوم مماس است و طول راس آن مثبت است.  
پاسخ ۱۳۹ - گزینه ۱.

$$kx = x \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 5 = 0 \Rightarrow p = \frac{-6}{2} = -3$$

۱۴۰- در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف  $a$ ، بیشترین مقدار سهمی  $y = ax^2 + x + 2a$  برابر  $-\frac{1}{4}$  است؟

(۱) ۳ (۲) هیچ مقدار  $a$  (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ ۱۴۰ - گزینه ۴.

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 8a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}$$

سهمی رو به پایین است پس  $a < 0$ . لذا یک مقدار قابل قبول است به شرطی که طول راس سهمی در بازه  $[b, c]$  باشد.

یحیی علی پناه  
کارشناسی : سال ۷۹ دانشگاه خوارزمی  
کارشناسی ارشد : سال ۸۲ دانشگاه تهران  
دکتری : دانشگاه تبریز ۳۳۰۲۰۹۱۲۸۰