

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

مرحله چهارم

پایه دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۶ / شهریور / ۱۴۰۳

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

ویژگی‌های برنامہ اہرہ دی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۱۴۰۳-۰۴

- ۱- دورہ دروس پایه دہم
- ۲- دورہ دروس پایه یازدہم
- ۳- مطالعہ بخشی از دروس پایه دوازدهم
- ۴- امکان انتخاب فرایند ترکیبی ہر کدام از موارد فوق

پایہ	مرحلہ	اول ۱۳ تیر	دوم ۱۶ مرداد	سوم ۲۶ مرداد	چہارم ۱۶ شهریور	پنجم ۱۶ آبان
دہم	-	✓	✓	✓	✓	✓
یازدہم	✓	✓	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	-	-	✓	✓	-

با توجہ بہ موارد فوق دفتر چہ آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شدہ است.

ہر داوطلب باید در جلسہ آزمون بہ یک یا دو قسمت (کہ قبلاً در پنل کار بری انتخاب کردہ است) پاسخ دہد.

آزمون تعیین سطح (جامع پایه یازدہم) در تاریخ ۱۳ تیر ۱۴۰۳ برگزار شدہ است؛ چنانچہ نتوانستید در این آزمون شرکت کنید، امکان برگزاری این آزمون بہ صورت آنلاین فرہم است.

آزمون مرحلہ چہارم (ہمین دفتر چہای کہ در دست دارید) ادامہ پیشروی پایه دہم و یازدہم و پیشروی پایه دوازدهم است.

در آزمون مرحلہ پنجم بہ دورہ پایه های دہم و یازدہم پرداختہ می شود.

در برنامہ شروع مجدد دوازدهم از مہر، تمامی سرفصل‌های پایه دوازدهم، مجدد از مہر، در برنامہ اہرہ دی دیدہ شدہ است.

شروع مجدد دوازدهم از مہر



پایه دهم

چنان چه پایه دهم ادر پندل کاربری خود انتخاب کرده اید، به سوالات این دفتر چه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

بودجه بندی دروس	هندسه	حسابان و ریاضیات پایه
	هندسه (۱) فصل ۳ صفحة ۵۳ تا ۷۶	ریاضی (۱) فصل ۱ و فصل ۲ صفحة ۱ تا ۴۶
	شیمی	فیزیک
	شیمی (۱) فصل ۲ (از ابتدای چه بر سر هواکره می آوریم؟) و فصل ۳ (تا ابتدای محلول و مقدار حل شونده ها) صفحة ۶۴ تا ۹۲	فیزیک (۱) فصل ۴ صفحة ۸۳ تا ۱۲۶

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۳۰ دقیقه	۱۵	۱	۱۵	ریاضی
۲۰ دقیقه	۲۵	۱۶	۱۰	هندسه
۳۰ دقیقه	۴۵	۲۶	۲۰	فیزیک
۲۰ دقیقه	۶۰	۴۶	۱۵	شیمی
۱۰۰ دقیقه		۶۰ سؤال		مجموع

ریاضی دهم

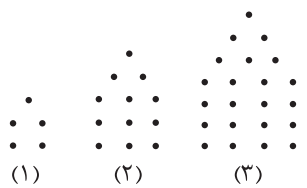
۱- اگر $n(A) = 22$ ، $n(A \cup B) = 28$ و $n(A - B) = 3n(B - A)$ باشد، $n(B)$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۲- تعداد اعضای مجموعه A ، ۱۰ عضو بیشتر از تعداد اعضای مجموعه B است. اگر مجموعه $A \cup B$ دارای ۲۲ عضو باشد، حداقل تعداد اعضای B کدام است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۳- در الگوی شکل مقابل، تعداد نقاط شکل n م برابر $n^2 + 8n + 1$ است. مقدار n کدام است؟



- ۹ (۱) ۱۱ (۲)

- ۱۰ (۳) ۱۳ (۴)

۴- در الگوی درجه دوم $2, 7, m, 29, \dots$ ، مجموع جمله‌های پانزدهم و شانزدهم کدام است؟

- ۸۴۷ (۱) ۸۲۷ (۲) ۹۱۳ (۳) ۹۳۳ (۴)

۵- در یک الگوی خطی، جمله سوم برابر ۲۲ و مجموع جمله‌های هفتم و دهم ۱۲۱ است. جمله اول این الگو کدام است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۶- جمله‌های الگوی $a_n = 3n - 2$ را به صورت $\dots, \{19, 22, 25, 28\}, \{10, 13, 16\}, \{4, 7\}, \{1\}$ دسته‌بندی کرده‌ایم. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو دسته دهم کدام است؟

- ۲۷ (۱) ۳۳ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۷- دنباله $1, 4a - 1, 7a - 1, \dots$ حسابی و دنباله $a, a + 3, a + b, \dots$ هندسی است. مقدار b کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴)

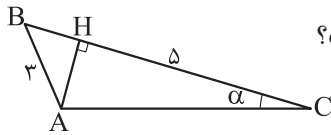
۸- در یک دنباله حسابی غیر ثابت با قدرنسبت d و جمله عمومی a_n ، تساوی $2a_7 = (2a_3 + a_7)a_1$ برقرار است. جمله پنجم این دنباله چند برابر d است؟

- ۴ یا ۲ (۱) ۵ یا ۲ (۲) ۴ یا ۳ (۳) ۵ یا ۳ (۴)

۹- در مثلث ABC ، $\tan \hat{A} = \frac{3}{4}$ و $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$ است. اگر $BC = 30$ باشد، مساحت این مثلث کدام است؟

- ۲۸۸ (۱) ۳۱۲ (۲) ۲۴۶ (۳) ۳۲۴ (۴)

محل انجام محاسبات



۱۰- در مثلث ABC ، زاویه A برابر 13° است. حاصل $\cot \alpha \cdot \cos(\alpha + 40^\circ)$ کدام است؟

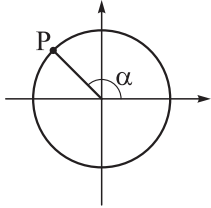
$$\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

۱۱- نقطه $P(x-1, 2x)$ مطابق شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟



$$-\frac{25}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{25}{12} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۴)$$

$$-\frac{7}{12} \quad (۳)$$

۱۲- اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

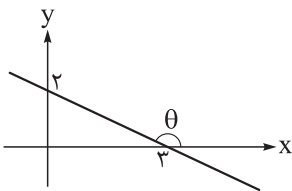
$$\frac{4}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{8}{9} \quad (۱)$$

۱۳- با توجه به شکل مقابل، حاصل عبارت $T = \sqrt{13}(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)$ کدام است؟



$$-\frac{19}{13} \quad (۲)$$

$$\frac{19}{13} \quad (۱)$$

$$-\frac{35}{13} \quad (۴)$$

$$\frac{35}{13} \quad (۳)$$

۱۴- اگر $90^\circ < \theta < 135^\circ$ و $(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta) = \frac{32}{25}$ باشد، حاصل $\tan \theta + \cot \theta$ کدام است؟

$$-\frac{25}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{25}{8} \quad (۳)$$

$$-\frac{25}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{25}{4} \quad (۱)$$

۱۵- اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{9}$ و $135^\circ < x < 180^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$

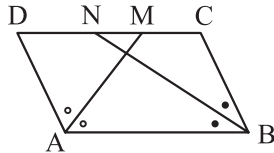
محل انجام محاسبات

هندسه دهم

۱۶- تعداد اضلاع یک چندضلعی محدب، با تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است. اگر تعداد قطرهای چندضلعی محدب برابر 170 باشد، از هر رأس n ضلعی چند قطر می‌گذرد؟

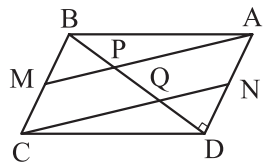
- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۷- مطابق شکل، نیمسازهای دو زاویه A و B ، ضلع CD از متوازی‌الاضلاع را در نقاط M و N قطع کرده‌اند. طول MN برابر با کدام گزینه است؟



- (۱) $AB - BC$
 (۲) $\frac{AB - BC}{2}$
 (۳) $\frac{AB + CD}{4}$
 (۴) $2AD - AB$

۱۸- مطابق شکل، M و N وسط ضلع‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. اگر $\hat{A}DB = 90^\circ$ ، $MC = 3/5$ و $CD = 25$ ،



آن‌گاه طول ضلع AP کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$
 (۲) $\sqrt{15}$
 (۳) $10\sqrt{3}$
 (۴) $\sqrt{305}$

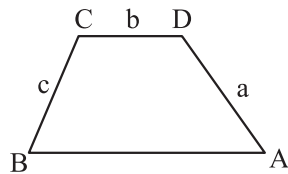
۱۹- در یک دوزنقه متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۳ و ۹ و طول هر ساق ۴ واحد است. اگر وسط‌های دو قاعده و وسط‌های دو قطر این دوزنقه را به طور متوالی به یکدیگر وصل کنیم، آن‌گاه محیط چهارضلعی حاصل کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۲۰- از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳، یک چهارضلعی حاصل شده است. بیشترین فاصله نقاط واقع بر محیط این چهارضلعی، از نقاط واقع بر محیط مستطیل کدام است؟

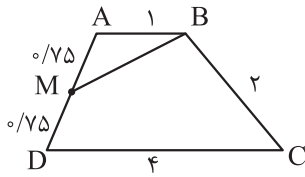
- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
 (۳) $\sqrt{5}$
 (۴) ۲

۲۱- در شکل رسم‌شده، AB و CD موازی هستند و اندازه زاویه D دو برابر اندازه زاویه B و اندازه‌های AD ، BC و CD به ترتیب a ، b و c هستند. اندازه AB کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{4}(a + b + c)$
 (۲) $a + c$
 (۳) $b + c$
 (۴) $a + b$

محل انجام محاسبات



۲۲- مطابق شکل، نسبت مساحت مثلث ABM به مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟

$$\frac{1}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۳)$$

۲۳- در مثلث ABC ، زاویه بین دو میانه AM و BN برابر ۱۲0° است. اگر $BN = ۲AM$ ، آن گاه فاصله نقطه N از میانه AM ، چند برابر طول این میانه است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} - ۱ \quad (۱)$$

۲۴- در مثلث ABC ، اگر $AB = AC = ۲$ ، $\hat{B} = ۷۵^\circ$ و D نقطه‌ای واقع بر ضلع BC باشد، به طوری که $DB = ۲DC$ ، آن گاه مجموع فاصله‌های M از دو ساق کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۲۵- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای که حداقل تعداد نقاط مرزی را دارد، برابر $۹/۵$ است. تعداد نقاط درونی این چندضلعی، چند برابر تعداد نقاط مرزی آن است؟

$$۴ \quad (۴)$$

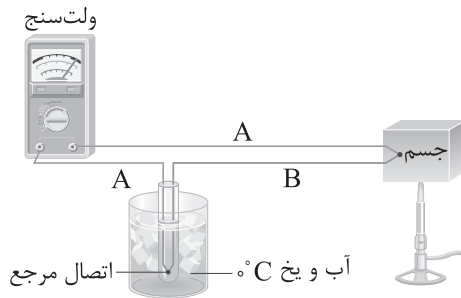
$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

فیزیک دهم

۲۶- شکل زیر، طرح ساده‌ای از کدام وسیله را نشان می‌دهد و کاربرد اصلی این وسیله کدام است؟



(۱) ترموکوپل، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی و وسایل گرمایشی و سرمایشی

(۲) ترموستات، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی و وسایل گرمایشی و سرمایشی

(۳) ترموکوپل، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی

(۴) ترموستات، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی

۲۷- اگر دمای جسمی بر حسب درجه سلسیوس ۵ برابر شود، دمای آن بر حسب درجه فارنهایت ۲۷ واحد کاهش می‌یابد. دمای اولیه این جسم چند کلون بوده است؟ ($^{\circ}\text{C} = 15 / -273 \text{ K} = 0$)

$$276 / 15 \text{ (۴)}$$

$$270 / 15 \text{ (۳)}$$

$$269 / 4 \text{ (۲)}$$

$$276 / 9 \text{ (۱)}$$

۲۸- در شکل زیر، میله فولادی به طول ۲ m بین دو دیواره ثابت قرار دارد و فاصله هر انتهای میله از دیوار مجاورش ۱ mm است. دمای میله، حداقل چند درجه فارنهایت افزایش یابد تا میله با دیواره‌ها تماس پیدا کند؟ (ضریب انبساط طولی فولاد $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ است.)



$$80 \text{ (۲)}$$

$$40 \text{ (۱)}$$

$$144 \text{ (۴)}$$

$$72 \text{ (۳)}$$

۲۹- اگر دمای یک کره فلزی توپر ۱۴۴K افزایش یابد، مساحت سطح آن ۲۴٪ درصد افزایش می‌یابد. اگر دمای همین کره ۱۰۰K افزایش یابد، چگالی آن تقریباً چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

$$45 / 0, \text{ کاهش می‌یابد. (۲)}$$

$$25 / 0, \text{ کاهش می‌یابد. (۱)}$$

$$45 / 0, \text{ افزایش می‌یابد. (۴)}$$

$$25 / 0, \text{ افزایش می‌یابد. (۳)}$$

۳۰- در دمای 20°C ، در ظرفی به گنجایش ۱ L و ضریب انبساط طولی $\frac{1}{K} \times 10^{-4}$ ، از مایعی به ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{K} \times 10^{-3}$ وجود دارد. با افزایش دمای مجموعه، در دمای چند درجه فارنهایت، مایع از ظرف سرریز می‌شود؟

$$207 / 5 \text{ (۲)}$$

$$187 / 5 \text{ (۱)}$$

$$255 / 5 \text{ (۴)}$$

$$223 / 5 \text{ (۳)}$$

۳۱- دمای دو جسم A و B که به ترتیب گرمای Q و ۴Q دریافت کرده‌اند، به یک اندازه افزایش می‌یابد. اگر این دو جسم به ترتیب گرمای ۴Q و Q دریافت کنند، افزایش دمای جسم A چند برابر افزایش دمای جسم B می‌شود؟

$$16 \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{16} \text{ (۳)}$$

$$4 \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

محل انجام محاسبات

۳۲- در دمای معین، چگالی مایع A، ۲ برابر چگالی مایع B، گرمای ویژه مایع A، ۳ برابر گرمای ویژه مایع B و ضریب انبساط حجمی مایع A، نصف ضریب انبساط حجمی مایع B است. اگر دو مایع گرمای یکسانی دریافت کنند، حجم آنها به ترتیب به اندازه ΔV_A و ΔV_B افزایش می‌یابد. ΔV_A ، چند برابر ΔV_B است؟

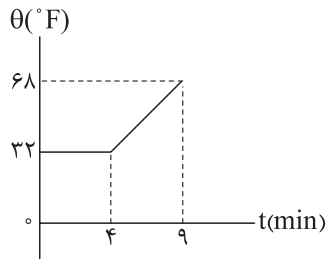
- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱۲ (۴) ۳

۳۳- گرمکنی به توان ۵۰۰ W و بازده ۶۳ درصد را درون ۳۰۰ g آب با دمای 10°C قرار می‌دهیم. دمای آب پس از ۲۰۰ s به چند درجه سلسیوس می‌رسد؟ ($c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$)

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۵ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

۳۴- در فشار ۱ atm، مقداری آب 40°C ، با دریافت گرما به جوش آمده و به طور کامل تبخیر می‌شود. چند درصد از گرمای دریافتی آب صرف تبخیر آن شده است؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}}$ و $L_V = 2268 \text{ J/g}$ تبخیر سطحی ناچیز است.)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۹۰ (۴) ۹۹



۳۵- به مخلوطی از آب و یخ در حال تعادل، با آهنگ ثابت $5/25 \text{ kJ/min}$ گرما می‌دهیم. اگر نمودار دمای مجموعه بر حسب زمان، به شکل مقابل باشد، جرم آب در مخلوط اولیه چند کیلوگرم بوده است؟ ($L_F = 336 \text{ J/g}$ ، $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$)

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{16}$

۳۶- قطعه فلزی به جرم ۶۰۰ g و دمای 100°C را در گرماسنجی با ظرفیت گرمایی 180 J/K که حاوی ۴۵۰ g آب با دمای 20°C است، می‌اندازیم. اگر پس از رسیدن به تعادل گرمایی، دمای مجموعه برابر 25°C شود، گرمای ویژه فلز در SI کدام است؟ (گرمای ویژه آب $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و اتلاف گرما ناچیز است.)

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۲۳۰ (۳) ۴۲۰ (۴) ۴۶۰

۳۷- درون ظرفی ۸۰۰ g آب با دمای 20°C وجود دارد. یک قطعه مسی به جرم ۷۵۰ g و دمای 80°C را در آب درون این ظرف می‌اندازیم. اگر در این فرایند، تا برقراری تعادل گرمایی $3/36 \text{ kJ}$ گرما تلف شود، دمای تعادل مجموعه چند درجه سلسیوس است؟ (گرمای ویژه آب و مس به ترتیب $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و $400 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ است.)

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴) ۲۸

محل انجام محاسبات

۳۸- مقداری یخ به جرم m و دمای 0°C را درون ظرف حاوی 900 g آب 20°C می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی، 60% درصد از جرم یخ ذوب شده باشد، m بر حسب گرم کدام است؟ ($c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ، $L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و تبادل گرمایی فقط بین آب و یخ صورت می‌گیرد.)

- (۱) ۷۵۰ (۲) ۶۲۵ (۳) ۳۷۵ (۴) ۲۵۰

۳۹- در چاله کوچکی 800 g آب 0°C قرار دارد. اگر در همین دما بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و باقی‌مانده آن یخ ببندد، جرم آب یخ‌زده چند گرم است؟ (گرمای نهان تبخیر آب در دمای 0°C برابر 2352 kJ/kg و گرمای نهان ذوب یخ برابر 336 kJ/kg است.)

- (۱) ۸۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۷۰۰ (۴) ۷۲۰

۴۰- در کدام یک از موارد زیر، روش انتقال گرما به درستی بیان شده است؟

(الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن: رسانش گرمایی

(ب) سیستم خنک‌کننده موتور اتومبیل: همرفت واداشته

(پ) ذوب کردن برف اطراف توسط کلم اسکانک: تابش گرمایی

(ت) سیستم گرم‌کننده مرکزی در ساختمان‌ها: همرفت طبیعی

- (۱) الف و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) الف و ت

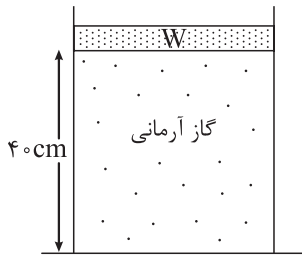
۴۱- در محفظه‌ای به حجم 42 لیتر، 240 g گاز اکسیژن با دمای 7°C قرار دارد. اگر دمای این گاز 70°C افزایش یابد، فشار پیمانه‌ای آن چند برابر می‌شود؟ ($R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ ، فشار هوا 10^5 Pa و جرم مولی گاز اکسیژن 32 g/mol است.)

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۲- یک حباب هوا به حجم 2 cm^3 در ته یک دریاچه به عمق 45 m و دمای 2°C قرار دارد. حباب تا سطح آب که دما در آن جا 27°C است، بالا می‌آید در لحظه‌ای که حباب به سطح آب می‌رسد، حجم آن چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$ ، چگالی آب دریاچه 1 g/cm^3 ، فشار هوای محیط 10^5 Pa و دمای هوای حباب با دمای آب اطراف آن یکسان است.)

- (۱) $0/3$ (۲) $0/6$
(۳) $1/2$ (۴) $2/4$

محل انجام محاسبات



۴۳- مطابق شکل در زیر پیستون آزاد به مساحت 20 cm^2 و وزن $W = 40 \text{ N}$ ، گاز آرمانی با دمای 17°C قرار دارد و فشار هوا 10^5 پاسکال است. اگر روی پیستون وزنه 80 نیوتونی قرار دهیم، وزنه 4 cm پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. در این حالت، دمای گاز چند درجه سلسیوس است؟

(۲) ۷۵

(۱) ۵۸

(۴) ۳۴۸

(۳) ۳۳۱

۴۴- تعداد مولکول‌های موجود در هوای اتاقی به ابعاد 4 m ، 6 m و 3 m در فشار 1 bar و دمای 27°C برابر کدام است؟ ($R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ و عدد آووگادرو برابر 6×10^{23} است.)

(۴) $1/8 \times 10^{27}$ (۳) $1/8 \times 10^{25}$ (۲) $2/4 \times 10^{27}$ (۱) $2/4 \times 10^{25}$

۴۵- دمای گاز آرمانی موجود در مخزنی برابر 91°C است. اگر در حجم ثابت، فشار گاز 25 درصد افزایش یابد، دمای گاز به چند درجه سلسیوس می‌رسد؟




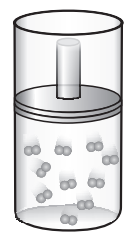
(۴) ۴۵۵

(۳) $227/5$

(۲) ۱۸۲

(۱) $113/75$

۵۱- با توجه به شکل داده شده که ظرف‌های محتوی گازهای مختلف را در دما و فشار یکسان نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟ (هر ذره، معادل 0.5% مول است؛ $N = 14, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

شماره نمونه	۱	۲	۳	۴
گاز	N_2	Ne	CO_2	O_2
ظرف محتوی گاز				

(۱) شمار اتم‌ها در نمونه ۳، برابر $10^{23} \times 3/9$ است.

(۲) حجم گاز نمونه ۴، دو برابر حجم گاز نمونه ۲ است و در شرایط STP، برابر $22/4$ لیتر است.

(۳) چگالی گاز نمونه ۱ در دمای $0^\circ C$ و فشار $1 atm$ ، برابر $1/25$ گرم بر لیتر است.

(۴) در مخلوطی از $4/8$ گرم گاز متان و گاز نمونه ۴، درصد جرمی گاز متان برابر $37/5$ درصد است.

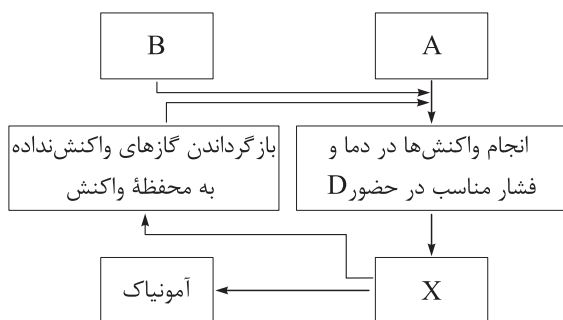
۵۲- کدام مورد درباره مولکول‌های اوزون و اکسیژن، درست است؟ ($O = 16 g.mol^{-1}$)

(۱) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول اوزون، بیشتر از شمار الکترون‌های ناپیوندی در مولکول اکسیژن است.

(۲) اگر دمای مخلوطی مایع از اکسیژن و اوزون به تدریج افزایش یابد، ابتدا مولکول‌های اوزون از مخلوط خارج می‌شوند.

(۳) بر اثر تابش پرتوهای خورشیدی با طول موج بین 100 تا 400 نانومتر به مولکول اوزون، پیوند دوگانه می‌شکند و یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن پدید می‌آید.

(۴) در واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، به ازای مصرف $11/2$ لیتر واکنش‌دهنده در شرایط STP، 24 گرم فرآورده تشکیل خواهد شد.



۵۳- با توجه به شکل مقابل که مربوط به مراحل تهیه آمونیاک

به روش هابر است، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) D فلزی است که مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی

الکترون‌های ظرفیتی آن، برابر 38 است.

(۲) یکی از واکنش‌دهنده‌های آن را می‌توان از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع تأمین کرد.

(۳) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله این واکنش و معادله واکنش سوختن گاز هیدروژن، برابر 2 است.

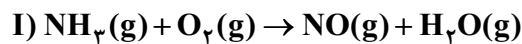
(۴) دمای بخش X، می‌تواند $5/34 -$ باشد.

محل انجام محاسبات

۵۴- اگر در ۱۲۰ گرم سولفیدی از مس، در مجموع ۲/۲۵ مول یون وجود داشته باشد، فرمول شیمیایی آن کدام است و اگر برای تهیه مس خام، ۴۰ گرم از این سولفید را با مقدار کافی از گاز اکسیژن واکنش دهند، چند لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۵ L است، به دست می‌آید؟ ($\text{Cu} = ۶۴, \text{S} = ۳۲ : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) CuS ، ۶/۲۵ (۲) CuS ، ۱۰/۴ (۳) $\text{Cu}_۲\text{S}$ ، ۶/۲۵ (۴) $\text{Cu}_۲\text{S}$ ، ۱۰/۴

۵۵- مطابق واکنش‌های زیر، چند لیتر گاز آمونیاک در شرایط STP باید با گاز اکسیژن واکنش دهد تا اکسید نیتروژن به دست آمده با ۳۴/۵ گرم گاز متان به طور کامل واکنش دهد؟ (معادله واکنش‌ها موازنه شود، $\text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱ : \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) ۳۴/۵ (۲) ۶۲/۶ (۳) ۹۵/۲ (۴) ۴۸/۳

۵۶- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- الف) در میان منابع آب در کره زمین، کوه‌های یخ سهم بیشتری از آب‌های زیرزمینی دارند.
 ب) آب‌های موجود در کره زمین در صورت مسطح بودن آن، همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ متر می‌پوشانند.
 پ) مقدار یون‌های تک‌اتمی و محلول در آب دریا، به میزان قابل توجهی بیشتر از یون‌های چنداتمی است.
 ت) مجموع جرم یون‌های فلزهای قلیایی در هر کیلوگرم آب دریا، کم‌تر از این مقدار برای یون‌های فلزهای قلیایی خاکی است.

(۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۵۷- کدام گزینه درباره آمونیوم سولفات، درست است؟

- (۱) نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن، با این نسبت در منیزیم کربنات برابر است.
 (۲) مدل فضاپرکن آنیون سازنده آن با یون نیترات مشابه است.
 (۳) نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در یک واحد فرمولی آن، برابر ۳/۷۵ است.
 (۴) شمار پیوندهای اشتراکی هر اتم نیتروژن در آن، با شمار پیوندهای اشتراکی اتم نیتروژن در آمونیاک برابر است.

۵۸- با توجه به جدول زیر، شمار اتم‌ها در هر واحد فرمولی از کدام ترکیب، درست نوشته شده است؟

نام	کلسیم یدید	آهن (II) اگزالات	سدیم برمیت	آلومینیم آرسنات
فرمول شیمیایی	$\text{Ca}(\text{IO}_۳)_۲$	$\text{FeC}_۲\text{O}_۴$	$\text{NaBrO}_۳$	$\text{AlAsO}_۴$

(۱) آمونیوم آرسنات - ۱۰ (۲) نقره اگزالات - ۸ (۳) گالیم برمیت - ۹ (۴) روبیدیم یدید - ۵

۵۹- شمار یون‌های حاصل از انحلال یک گرم منیزیم نیتريد (۱۰۰g.mol^{-1}) در آب کافی، با شمار یون‌های حاصل از انحلال کدام نمونه در آب کافی برابر است؟

(۱) ۱/۶ گرم مس (II) سولفات (۱۶۰g.mol^{-1}) (۲) ۱۰ گرم آهن (III) سولفات (۴۰۰g.mol^{-1})
 (۳) ۴ گرم آمونیوم نیترات (۸۰g.mol^{-1}) (۴) ۲/۸۵ گرم باریم هیدروکسید (۱۷۱g.mol^{-1})

محل انجام محاسبات

۶۰- کدام مطلب نادرست است؟

- ۱) در واکنش‌های انجام‌شده در زیست‌کره، درشت‌مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.
- ۲) در هر واحد فرمولی از آمونیوم کربنات، ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.
- ۳) در معادله واکنش بین محلول‌های سدیم فسفات و کلسیم کلرید، ۴ ترکیب یونی با نسبت شمار کاتیون به آنیون متفاوت وجود دارد.
- ۴) با وجود تبخیر حجم زیادی از آب دریاها در طول سال، جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است.

پایه یازدهم

چنانچه پایه یازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده اید، به سوالات این دفتر چه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

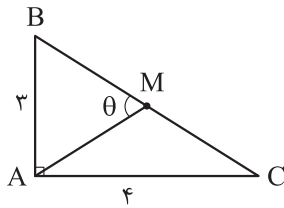
بودجه بندی دروس

هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حسابان و ریاضیات پایه
هندسه (۲) فصل ۲ (درس ۱ از ابتدای تجانس) و فصل ۳ (درس ۱) صفحه ۴۳ تا ۶۳	آمار و احتمال: فصل ۲ (درس ۳ و ۴) و فصل ۳ (درس ۱ و ۲) صفحه ۴۸ تا ۸۶ ریاضی (۱): فصل ۷ (درس ۲ و ۳) صفحه ۱۵۲ تا ۱۷۰	حسابان (۱) فصل ۴ صفحه ۹۱ تا ۱۱۲
شیمی	فیزیک	
شیمی (۲) فصل ۲ (تا ابتدای آنتالپی، همان محتوای انرژی است.) صفحه ۶۵ تا ۹۸	فیزیک (۲) فصل ۲ (از ابتدای ترکیب مقاومت ها) و فصل ۳ صفحه ۷۰ تا ۱۰۸	

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۲۵ دقیقه	۷۵	۶۱	۱۵	حسابان
۲۰ دقیقه	۸۵	۷۶	۱۰	آمار و احتمال
۲۰ دقیقه	۹۵	۸۶	۱۰	هندسه
۳۰ دقیقه	۱۱۵	۹۶	۲۰	فیزیک
۲۰ دقیقه	۱۳۰	۱۱۶	۱۵	شیمی
۱۱۵ دقیقه		۷۰ سؤال		مجموع

حسابان یازدهم

۶۱- میانه AM در مثلث قائم‌الزاویه ABC رسم شده است. مقدار $\cos \theta$ کدام است؟



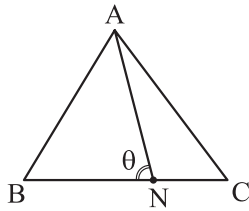
○ / ۲۵ (۱)

○ / ۲۸ (۲)

○ / ۲۴ (۳)

○ / ۳۲ (۴)

۶۲- مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. اگر $BN = 2NC$ ، مقدار $\cos \theta$ کدام است؟



$\frac{\sqrt{7}}{14}$ (۲)

$\frac{\sqrt{7}}{28}$ (۱)

$\frac{1}{3\sqrt{7}}$ (۴)

$\frac{3}{2\sqrt{7}}$ (۳)

۶۳- اگر $\cos \alpha = \frac{-1}{4}$ و $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار $\cos 2\beta$ کدام است؟

$\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴)

$\pm \frac{1}{4}$ (۳)

$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ (۱)

۶۴- مقدار عبارت $A = \sin 54^\circ \cos 72^\circ$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۱)

۶۵- اگر $\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{-1}{2} \end{cases}$ ، مقدار $\sin(x+y)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

۶۶- مقدار عبارت $A = \sqrt{\frac{1}{\sin 15^\circ}} + \sqrt{\frac{1}{\cos 15^\circ}}$ کدام است؟

$\sqrt{4+4\sqrt{6}}$ (۴)

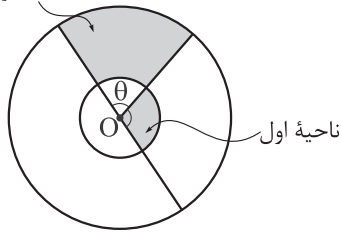
$\sqrt{2+4\sqrt{6}}$ (۳)

$\sqrt{4+2\sqrt{6}}$ (۲)

$\sqrt{2+2\sqrt{6}}$ (۱)

محل انجام محاسبات

ناحیه دوم



۶۷- شعاع دایره کوچکتر نصف شعاع دایره بزرگتر است و مساحت ناحیه اول

نصف مساحت ناحیه دوم است. مقدار θ کدام است؟

$$\frac{3\pi}{5} \quad (2) \qquad \frac{\pi}{5} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{5} \quad (4) \qquad \frac{4\pi}{5} \quad (3)$$

۶۸- هرگاه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\sin 2\theta - \cos \theta = \cos 2\theta + \sin \theta$ مقدار $\cos 4\theta$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \qquad -\frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

۶۹- مقدار عبارت $A = (1 - \sin \frac{3\pi}{8})(1 - \cos \frac{3\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (4) \qquad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) \qquad \frac{1}{8} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \quad (1)$$

۷۰- هرگاه $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ مقدار $\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ کدام است؟

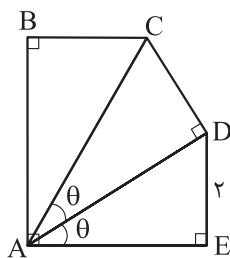
$$\frac{3}{4} \quad (4) \qquad -\frac{3}{4} \quad (3) \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

۷۱- اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ مقدار $\sin^2(\frac{\pi}{4} - 2x)$ کدام است؟

$$\frac{1}{50} \text{ یا } \frac{1}{25} \quad (4) \qquad \frac{24}{25} \text{ یا } \frac{1}{24} \quad (3) \qquad \frac{24}{25} \text{ یا } \frac{1}{25} \quad (2) \qquad \frac{49}{50} \text{ یا } \frac{1}{50} \quad (1)$$

۷۲- هرگاه $3 = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$ و x در ناحیه اول باشد. مقدار $(\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

$$24 \quad (4) \qquad 48 \quad (3) \qquad 12 \quad (2) \qquad 16 \quad (1)$$



۷۳- در شکل روبه‌رو، طول ضلع AB کدام است؟

$$4\sqrt{3} \quad (1)$$

$$6\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

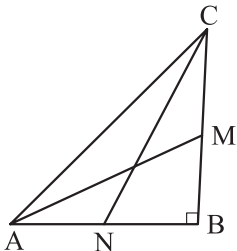
$$4 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۷۴- اگر $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$ باشد و شرط $\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta$ برقرار باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۳) -1 (۴) -4

۷۵- در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، نیمساز زاویه‌های حاده رسم شده است، به طوری که



کدام است؟ $AM = 3$ و $CN = 2 + \sqrt{5}$ ، طول ضلع BN کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال یازدهم

۷۶- در کدام گزینه متغیرهای «کیفی اسمی - کمی پیوسته - کمی گسسته» به ترتیب از راست به چپ درست نوشته شده‌اند؟

(۱) تعداد اعضای یک کلاس - رنگ اتومبیل - گروه خونی

(۲) رنگ اتومبیل - شاخص توده بدن - تعداد فرزندان

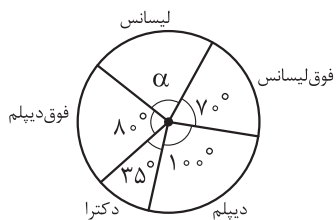
(۳) مزه غذا - تعداد داوطلبان کنکور - تعداد غایب‌های یک کلاس

(۴) شاخص توده بدن - تعداد فرزندان - رنگ اتومبیل

۷۷- نمودار دایره‌ای توزیع مدرک تحصیلی در بین کارمندان یک شرکت دولتی به صورت زیر است. اگر تعداد لیسانس‌ها

۳۰ نفر باشد، در نمودار بافت‌نگاشت فراوانی مدرک تحصیلی کارمندان این شرکت، بلندی مستطیل کارمندان دارای

مدرک دکترا کدام است؟



۱۵ (۲)

۱۶ (۱)

۱۳ (۴)

۱۴ (۳)

۷۸- اگر میانگین داده‌های جدول مقابل، برابر $\frac{1}{3}$ باشد، میانگین داده‌هایی که k واحد از

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۵	۴	۳	k	$k+1$

این داده‌ها بزرگ‌تر و فراوانی آن‌ها مشابه همین داده‌ها باشد، کدام است؟

$11\frac{1}{3}$ (۴)

۱۱ (۳)

$10\frac{1}{3}$ (۲)

۱۰ (۱)

۷۹- خانواده‌ای دارای سه فرزند است. اگر این خانواده لااقل یک دختر داشته باشد، با چه احتمالی فرزند بزرگ این

خانواده پسر نیست؟

$\frac{4}{7}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۸۰- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم عدد روشده در یکی از تاس‌ها دو برابر دیگری است. با کدام احتمال مجموع دو

عدد روشده اول است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

۸۱- در دو جعبه به ترتیب ۱۴ و ۹ سیب موجود است. در جعبه اول ۱۲ سیب سالم و در جعبه دوم ۷ سیب سالم موجود

است. از جعبه اول x سیب و از جعبه دوم y سیب به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آن که به

تصادف یک سیب سالم از جعبه جدید برداریم $\frac{157}{189}$ است. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

محل انجام محاسبات

۸۲- برای سه پیشامد مستقل A ، B و C داریم $P(C) = 2P(B) = 4P(A)$. اگر احتمال آن که فقط یکی از آن‌ها رخ دهد، سه برابر احتمال آن باشد که هر سه با هم رخ می‌دهند، چه قدر احتمال دارد که فقط پیشامد C رخ دهد؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \qquad \frac{3}{8} \quad (2) \qquad \frac{1}{4} \quad (3) \qquad \frac{1}{8} \quad (4)$$

۸۳- با دیدن n داده، حسین و رسول میانگین داده‌ها را به ترتیب ۴۱ و ۴۴ تخمین می‌زنند. انحراف داده‌ها از میانگین‌های حسین و رسول به ترتیب ۹۰ و ۳۶ است. اگر از این داده‌ها به اندازه میانگین اعداد حدس زده شده توسط حسین و رسول کم کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر کدام می‌شود؟

$$\frac{3}{2} \quad (1) \qquad \frac{5}{2} \quad (2) \qquad \frac{7}{2} \quad (3) \qquad \frac{9}{2} \quad (4)$$

۸۴- کیسه‌ای شامل ۲ مهره سیاه و ۵ مهره سفید است. از این کیسه به تصادف ۳ مهره انتخاب می‌کنیم و سپس به تعداد مهره‌های سفید خارج شده از کیسه، سکه پرتاب می‌کنیم. اگر تمام سکه‌های پرتاب شده رو آمده باشند، با کدام احتمال هر ۳ مهره خارج شده از کیسه، سفید بوده است؟

$$\frac{1}{7} \quad (1) \qquad \frac{3}{14} \quad (2) \qquad \frac{2}{7} \quad (3) \qquad \frac{5}{14} \quad (4)$$

۸۵- عدد a را به تصادف از بین اعداد صحیح انتخاب می‌کنیم. اگر معادله $ax^2 - (a+1)x + a + 8 = 0$ دارای دو ریشه ناهم‌علامت باشد، چه قدر احتمال دارد دقیقاً یکی از ریشه‌های این معادله عددی صحیح باشد؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \qquad \frac{2}{7} \quad (2) \qquad \frac{2}{9} \quad (3) \qquad \frac{2}{7} \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۸۶- کدام تبدیل هیچ‌گاه نمی‌تواند همانی باشد؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس

۸۷- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تبدیل «تجانس انقباضی معکوس» درست است؟

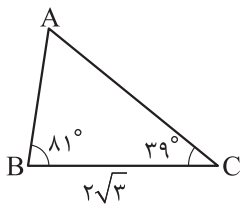
الف) شیب خط را لزوماً حفظ می‌کند.

ب) شکل و تصویر آن، هم‌نهشت هستند.

پ) جهت شکل حفظ می‌شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۸۸- با توجه به شکل، شعاع دایره‌گذرنده از سه نقطه A، B و C کدام است؟


 (۱) $\sqrt{3}$

(۲) ۲

 (۳) $2\sqrt{3}$

(۴) ۴

 ۸۹- در تجانس انبساطی مستقیم به مرکز O، نقطه A' تصویر نقطه A و نقطه M وسط AA' است. اگر $\frac{MA'}{MO} = \frac{1}{2}$ است، آن‌گاه نسبت تجانس کدام است؟

(۴) ۲

 (۳) $\frac{1}{75}$

 (۲) $\frac{1}{5}$

 (۱) $\frac{1}{25}$

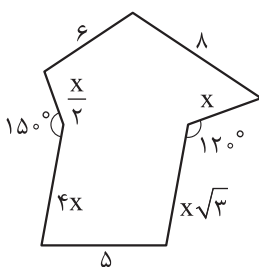
 ۹۰- یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در تجانسی که مرکز آن نقطه هم‌رسی میانه‌ها و نسبت تجانس آن $\frac{1}{4}$ - است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیه بین مثلث و تصویرش برابر $3\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه محیط مثلث اولیه کدام است؟

(۴) ۱۸

(۳) ۹

(۲) ۱۲

(۱) ۱۵

 ۹۱- مساحت شکل زیر را افزایش می‌دهیم به طوری که محیط آن تغییر نکند. اگر میزان افزایش مساحت برابر 120 باشد، آن‌گاه x کدام است؟

 (۱) $4\sqrt{3}$

(۲) ۴

(۳) ۶

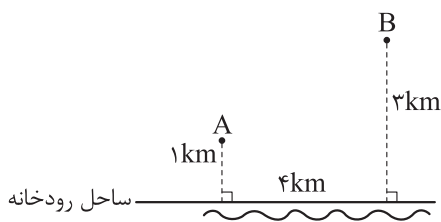
 (۴) $3\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات

۹۲- نقاط $A(4,5)$ ، $B(-1,1)$ و $M(\alpha, \alpha)$ مفروض‌اند. در حالتی که محیط مثلث ABM حداقل مقدار ممکن است، مساحت آن کدام است؟

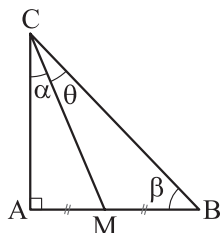
- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{10}$

۹۳- مطابق شکل می‌خواهیم از نقطه A به نقطه B ، جاده‌ای احداث کنیم که یک کیلومتر از آن در ساحل رودخانه باشد. کم‌ترین طول ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟

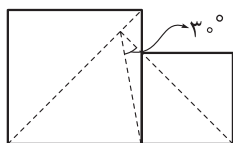


- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹۴- در شکل مقابل حاصل $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \theta}$ کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



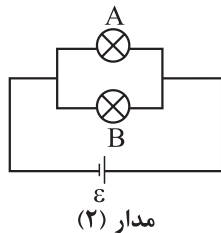
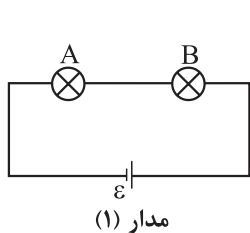
۹۵- با توجه به شکل، نسبت مساحت‌های دو مربع کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

محل انجام محاسبات

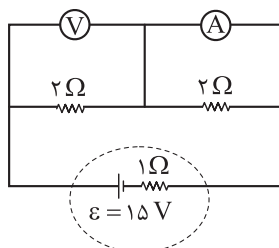
فیزیک یازدهم

۹۶- لامپ‌های A و B را به صورت شکل‌های زیر به دو سر باتری آرمانی بسته‌ایم. اگر در مدار (۱) توان مصرفی لامپ A دو برابر توان مصرفی لامپ B باشد، در مدار (۲)، توان مصرفی لامپ A چند برابر توان مصرفی لامپ B است؟



۴ (۱)

۲ (۲)

 $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

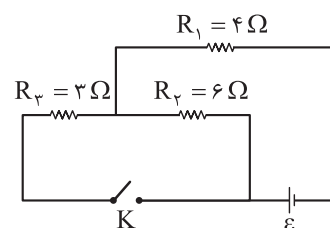
۹۷- در مدار شکل مقابل، به ترتیب، مقدارهایی که ولت‌سنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهند، چند ولت و چند آمپر است؟

۳ ، ۱۰ (۲)

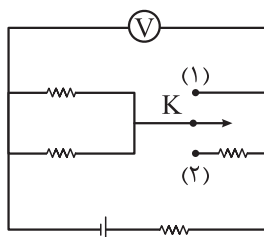
۳ ، ۶ (۱)

۵ ، ۱۰ (۴)

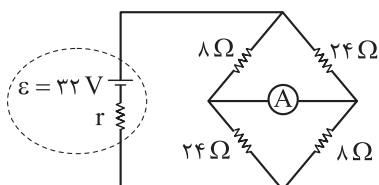
۵ ، ۶ (۳)



۹۸- در مدار شکل مقابل با بستن کلید K، توان مصرفی مقاومت الکتریکی R_3 چند برابر می‌شود؟

 $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۱) $\frac{25}{81}$ (۴) $\frac{25}{9}$ (۳)

۹۹- در مدار شکل مقابل، منبع نیروی محرکه، آرمانی و تمام مقاومت‌ها مشابه‌اند. ابتدا کلید در حالت (۱) قرار دارد. اگر کلید در حالت (۲) قرار گیرد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند برابر می‌شود؟

 $\frac{9}{5}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۱) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$ (۳)

۱۰۰- در مدار شکل مقابل، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، A است. اگر آمپرسنج را برداشته و به جای آن یک ولت‌سنج آرمانی قرار دهیم، ولت‌سنج چند ولت را نشان می‌دهد؟

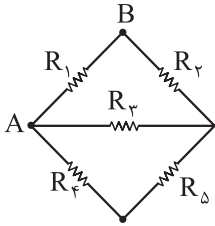
۱۶ (۲)

۱۲/۸ (۱)

۳۲ (۴)

۲۵/۶ (۳)

محل انجام محاسبات



۱۰۱- در مدار شکل مقابل، اگر دو سر یک منبع نیروی محرکه آرمانی به دو نقطه A و B وصل باشد، توان مصرفی تمام مقاومت‌ها برابر می‌شود. در این حالت، مقاومت معادل مدار چند برابر R_1 است؟

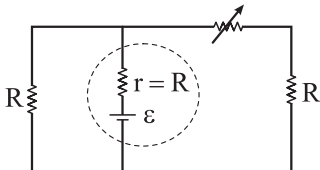
$$\frac{5}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

۱۰۲- در مدار شکل زیر، با افزایش مقاومت الکتریکی رئوستا، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن و توان خروجی باتری، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کنند؟



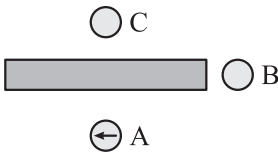
(۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۲) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۱۰۳- در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای و سه عقربه مغناطیسی در یک صفحه قرار دارند. با توجه به جهت گیری عقربه مغناطیسی A، عقربه‌های مغناطیسی B و C به ترتیب از راست به چپ چه جهتی را نشان می‌دهند؟

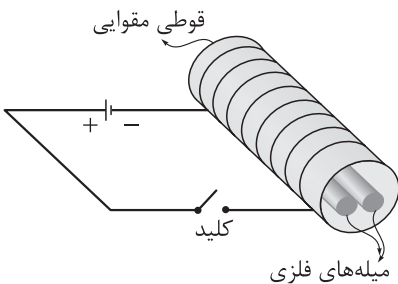


(۱) ← ، →

(۲) ← ، ←

(۳) → ، →

(۴) → ، ←



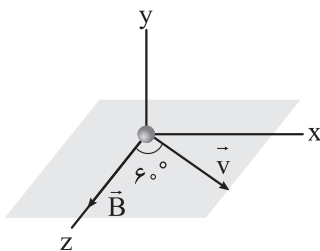
۱۰۴- در شکل مقابل، دو میله فلزی بلند، درون سیم‌لوله‌ای که دور یک قوتی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیم‌لوله، دو میله از یکدیگر دور می‌شوند و وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه باز می‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟

(۱) مواد دیامغناطیسی

(۲) مواد پارامغناطیسی

(۳) مواد فرومغناطیس نرم

(۴) مواد فرومغناطیس سخت



۱۰۵- در شکل مقابل، میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 200 \text{ G}$ در جهت محور z است. در یک لحظه، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 5 \text{ nC}$ با تندی $v = 20 \text{ m/s}$ در جهتی حرکت می‌کند که با میدان مغناطیسی زاویه 60° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر ذره در این لحظه بر حسب نیوتون کدام است؟

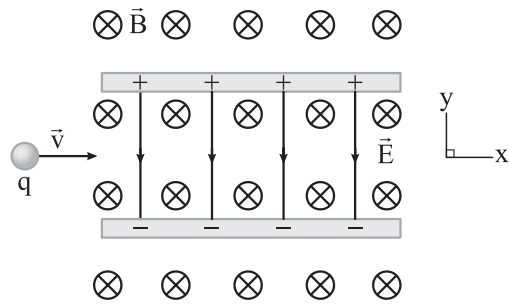
$$F = (\sqrt{3} \times 10^{-10}) \vec{j} \quad (۲)$$

$$F = (\sqrt{3} \times 10^{-9}) \vec{j} \quad (۱)$$

$$F = -(\sqrt{3} \times 10^{-10}) \vec{j} \quad (۴)$$

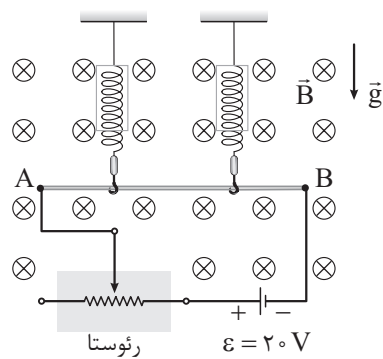
$$F = -(\sqrt{3} \times 10^{-9}) \vec{j} \quad (۳)$$

محل انجام محاسبات



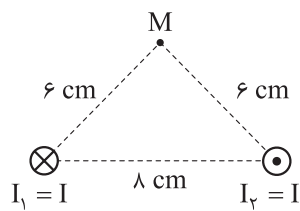
۱۰۶- در شکل مقابل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -50 \mu\text{C}$ و جرم 2 g با سرعت $\vec{v} = (800 \text{ m/s})\vec{i}$ وارد فضایی می‌شود که در آن میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} و میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} وجود دارد. اگر اندازه این میدان‌ها به ترتیب 2000 N/C و $1/8 \text{ T}$ باشد، شتاب ذره بلافاصله پس از ورود به این فضا بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (از نیروی وزن ذره چشم‌پوشی کنید.)

- (۱) $140 \vec{j}$
- (۲) $-140 \vec{j}$
- (۳) $860 \vec{j}$
- (۴) $-860 \vec{j}$



۱۰۷- در شکل مقابل، سیم رسانای AB به طول 8 cm توسط دو نیروسنج مشابه به طور افقی قرار گرفته است. میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} عمود بر صفحه و اندازه آن 500 G است. در حالتی که مقاومت الکتریکی رؤستا برابر 2Ω است، هر یک از نیروسنج‌ها 6 N را نشان می‌دهند. اگر مقاومت الکتریکی رؤستا 2 برابر شود، مقداری که هر یک از نیروسنج‌ها نشان می‌دهد، به چند نیوتون می‌رسد؟ (مقاومت الکتریکی سیم‌ها ناچیز و مولد آرمانی است.)

- (۱) 8
- (۲) 7
- (۳) 5
- (۴) 3



۱۰۸- در شکل روبه‌رو، دو سیم موازی بسیار بلند و حامل جریان I ، عمود بر صفحه قرار دارند. بردار میدان مغناطیسی حاصل از هر یک از دو سیم در نقطه M ، در کدام شکل درست است؟

- (۱)
- (۲)
- (۳)
- (۴)

محل انجام محاسبات

۱۰۹- اندازه میدان مغناطیسی دور سر انسان حدود $3 \times 10^{-8} \text{ G}$ اندازه گیری شده است. اگر چه جریان هایی که این میدان را به وجود می آورند بسیار پیچیده اند، ولی با در نظر گرفتن این جریان ها به صورت تک حلقه ای دایره ای به قطر 16 cm می توان بزرگی جریان الکتریکی را تخمین زد. جریان الکتریکی لازم برای ایجاد این میدان در مرکز حلقه چند آمپر است؟

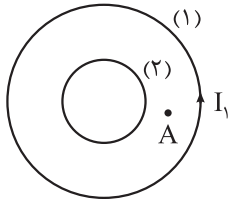
$$\left(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}} \right)$$

$$7/68 \times 10^{-7} \text{ (۴)}$$

$$7/68 \times 10^{-11} \text{ (۳)}$$

$$3/84 \times 10^{-7} \text{ (۲)}$$

$$3/84 \times 10^{-11} \text{ (۱)}$$



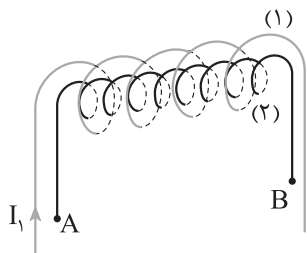
۱۱۰- در شکل مقابل، دو حلقه هم مرکز و حامل جریان الکتریکی در صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی خالص در نقطه A برابر صفر باشد، جهت جریان عبوری از حلقه (۲) و جهت میدان مغناطیسی خالص در مرکز حلقه ها به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۲) پادساعتگرد، (۱)

(۱) پادساعتگرد، (۳)

(۴) ساعتگرد، (۲)

(۳) ساعتگرد، (۱)



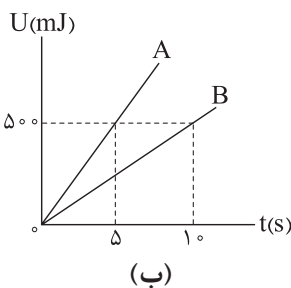
۱۱۱- در شکل مقابل، دو سیم لوله (۱) و (۲) هم محورند و طول برابر دارند. تعداد دور سیم لوله ها به ترتیب برابر ۳۰۰ و ۴۰۰ است. اگر جریان عبوری از سیم لوله (۱) برابر $I_1 = 1/2 \text{ A}$ باشد، از سیم لوله (۲) جریان چند آمپری و در چه جهتی عبور کند تا میدان مغناطیسی برآیند ناشی از دو سیم لوله در نقطه ای روی محور آن ها برابر صفر شود؟

(۲) از A به B، $1/6$

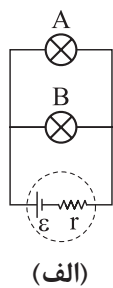
(۱) از A به B، $0/9$

(۴) از B به A، $1/6$

(۳) از B به A، $0/9$



(ب)



(الف)

۱۱۲- نمودار انرژی الکتریکی مصرفی دو لامپ A و B که در مدار شکل (الف) قرار دارند، بر حسب زمان، به شکل (ب) است. توان خروجی باتری در مدار شکل (الف) چند وات است؟

$$0/15 \text{ (۲)}$$

$$150 \text{ (۱)}$$

$$1/30 \text{ (۴)}$$

$$100/3 \text{ (۳)}$$

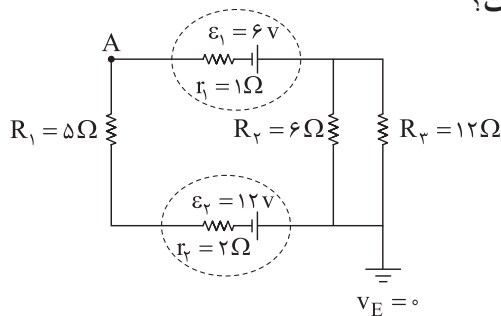
۱۱۳- در مدار شکل زیر، پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر چند ولت است؟

$$8/5 \text{ (۱)}$$

$$-8/5 \text{ (۲)}$$

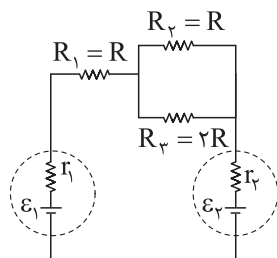
$$15/5 \text{ (۳)}$$

$$-15/5 \text{ (۴)}$$

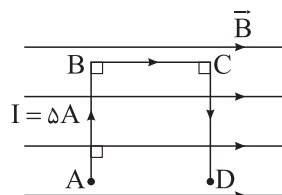


محل انجام محاسبات

۱۱۴- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری (۱) برابر 200 W و توان مصرفی مقاومت R_2 برابر 40 W است. کدامیک از موارد زیر درباره باتری (۲) درست است؟



- (۱) در هر دقیقه، 3 kJ انرژی الکتریکی به این باتری وارد می‌شود.
- (۲) در هر دقیقه، 3 kJ انرژی الکتریکی از این باتری خارج می‌شود.
- (۳) در هر دقیقه، 21 kJ انرژی الکتریکی به این باتری وارد می‌شود.
- (۴) در هر دقیقه، 21 kJ انرژی الکتریکی از این باتری خارج می‌شود.



۱۱۵- در شکل مقابل، سیم حامل جریان الکتریکی $I = 5\text{ A}$ ، در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 200\text{ G}$ قرار دارد. نیروی مغناطیسی خالص وارد بر این سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($AB = BC = CD = 40\text{ cm}$)

(۲) 0.08 N ، \otimes

(۱) 0.04 N ، \otimes

(۴) صفر

(۳) 0.08 N ، \odot

محل انجام محاسبات

شیمی یازدهم

۱۱۶- کدام مطلب درست است؟

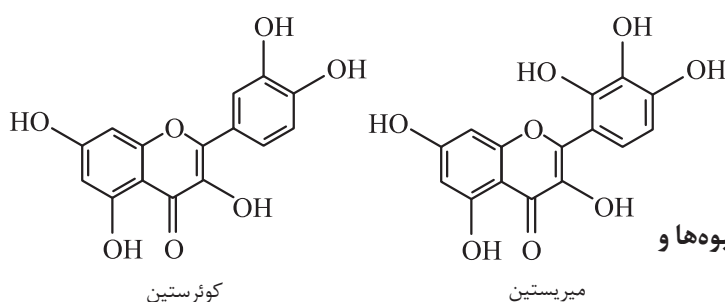
- ۱) ویتامین‌ها افزون بر تأمین مواد اولیه برای سوخت‌وساز یاخته‌ها، منبعی برای تأمین انرژی آن‌ها نیز هستند.
- ۲) انرژی حاصل از اکسایش یک گرم چربی، بیشتر از دو گرم کربوهیدرات است.
- ۳) مصرف موادی که درصد کربوهیدرات بیشتری دارند، برای فعالیت‌های فیزیکی که در مدت طولانی‌تر انجام می‌شوند، مناسب‌تر است.
- ۴) پروتئین‌ها در بدن به گلوکز شکسته شده و گلوکز حاصل از آن‌ها در خون حل می‌شود.

۱۱۷- مولکول‌های بنزالدهید و ۲- هیتانول در کدام مورد مشابه نیستند؟

- ۱) داشتن گروه کربونیل
- ۲) نسبت شمار اتم‌های کربن به اکسیژن
- ۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی
- ۴) نسبت شمار پیوندهای C—H به C—C

۱۱۸- در کدام گزینه مقایسه‌ی درستی انجام نشده است؟

- ۱) گرمای سوختن مولی: اتان < اتن < اتانول
- ۲) انرژی حاصل از سوختن یک گرم ماده: متان < اتان < پروپان
- ۳) ارزش سوختی: پروتئین = کربوهیدرات > چربی
- ۴) تفاوت آنتالپی سوختن: $\Delta H(C_3H_8(g)) - \Delta H(C_2H_6(g)) = \Delta H(C_3H_8(g)) - \Delta H(C_2H_4(g))$



۱۱۹- کوئرستین و میریستین دو فلاونوئید با خاصیت آنتی‌اکسیدانی هستند که به عنوان بازدارنده، با رادیکال‌های آزاد در بدن مقابله می‌کنند. با توجه به ساختار آن‌ها، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

- این دو ماده خاصیت ضدسرطانی داشته و در میوه‌ها و سبزیجات یافت می‌شوند.
- اگر خاصیت آنتی‌اکسیدانی فلاونوئیدها با شمار گروه‌های هیدروکسیل رابطه مستقیم داشته باشد، میریستین نسبت به کوئرستین، آنتی‌اکسیدان قوی‌تری محسوب می‌شود.
- گروه عاملی موجود در ترکیبی که به عنوان نگهدارنده در توت‌فرنگی یافت می‌شود، در این دو ماده دیده نمی‌شود.
- این دو ترکیب ایزومر یکدیگر بوده و بر اثر سوختن کامل مول‌های برابر از آن‌ها در شرایط یکسان، حجم گاز CO_2 تولیدی نیز برابر خواهد بود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

محل انجام محاسبات

۱۲۰- ارزش سوختی دومین عضو خانواده آلکن‌ها برابر ۴۹ کیلوژول بر گرم است. از سوختن کامل ۱/۵ مول از این آلکن در فشار یک اتمسفر، دمای چند کیلوگرم آب 25°C را می‌توان به دمای جوش رساند؟ (گرمای ویژه آب را $4/2 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$ در نظر بگیرید و $\text{H} = 1$ و $\text{C} = 12$)

$$29/4(4) \quad 18/2(3) \quad 6/5(2) \quad 9/8(1)$$

۱۲۱- با توجه به جدول و معادله داده شده زیر، ΔH واکنش $2\text{CO}(g) + 2\text{NO}(g) \rightarrow 2\text{CO}_2(g) + \text{N}_2(g)$ برابر چند کیلوژول است؟ $\Delta H = +181 \text{ kJ}$ ، $\text{N}_2(g) + \text{O}_2(g) \rightarrow 2\text{NO}(g)$

پیوند	$\text{C}=\text{O}$	$\text{O}=\text{O}$	$\text{C}\equiv\text{O}$
آنتالپی پیوند (kJ.mol^{-1})	۸۰۰	۴۹۵	۱۰۷۲

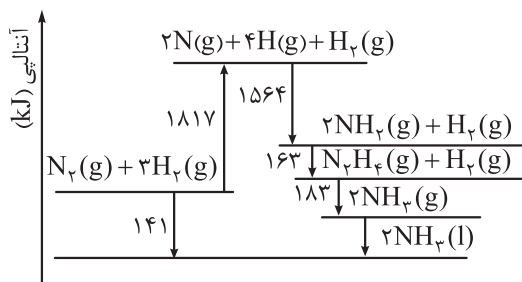
$$-742(1)$$

$$-380(2)$$

$$-561(3)$$

$$-923(4)$$

۱۲۲- طبق نمودار داده شده، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) آنتالپی ذوب آمونیاک در شرایط داده شده، کم تر از

$$24 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ است.}$$

(۲) تفاوت میانگین آنتالپی پیوند $\text{N}-\text{H}$ و $\text{N}-\text{N}$ ، برابر 228 kJ.mol^{-1} است.

(۳) اگر آنتالپی پیوند $\text{H}-\text{H}$ برابر 436 kJ.mol^{-1} باشد، آنتالپی پیوند $\text{N}\equiv\text{N}$ برابر 954 kJ.mol^{-1} است.

(۴) به ازای تولید یک مول گاز آمونیاک از گازهای نیتروژن و هیدروژن، $46/5 \text{ kJ}$ انرژی آزاد می‌شود.

۱۲۳- کدام گزینه نادرست است؟

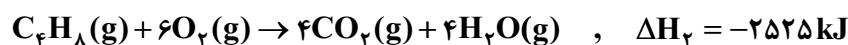
(۱) آنتالپی واکنش $\text{H}_2(g) + \text{I}_2(s) \rightarrow 2\text{HI}(g)$ را نمی‌توان به طور مستقیم با استفاده از آنتالپی پیوند محاسبه کرد.

(۲) آنتالپی واکنش $\text{C}(s, \text{گرافیت}) + \frac{1}{2}\text{O}_2(g) \rightarrow \text{CO}(g)$ را نمی‌توان به روش تجربی اندازه‌گیری کرد.

(۳) در واکنش $\text{H}_2(g) + \text{Cl}_2(g) \rightarrow 2\text{HCl}(g)$ ، آنتالپی به‌دست‌آمده به روش آنتالپی پیوند با داده‌های تجربی تفاوت چندانی ندارد.

(۴) آنتالپی واکنش $\text{NaOH}(aq) + \text{HCl}(aq) \rightarrow \text{NaCl}(aq) + \text{H}_2\text{O}(l)$ را نمی‌توان با استفاده از گرماسنج لیوانی تعیین کرد.

۱۲۴- با توجه به داده‌های زیر، ارزش سوختی ۱- بوتین گازی در دمای اتاق، چند کیلوژول بر گرم است؟ ($\text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



$$48(4)$$

$$47(3)$$

$$46(2)$$

$$45(1)$$

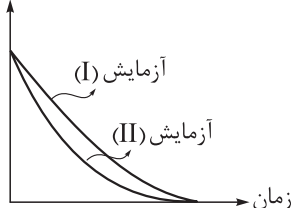
محل انجام محاسبات

۱۲۵- کدام مطلب درباره واکنش کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید در دما و فشار اتاق و در یک ظرف سر باز، نادرست است؟

- (۱) با گذشت زمان، جرم مخلوط واکنش کاهش می‌یابد.
- (۲) با گذشت زمان، جرم گاز آزاد شده در واکنش و سرعت تولید آن، افزایش می‌یابد.
- (۳) سرعت متوسط مصرف اسید در واکنش، دو برابر سرعت متوسط واکنش است.
- (۴) نمودار مول - زمان برای فرآورده یونی واکنش، با نمودار مول - زمان گاز تولید شده، از هر لحاظ یکسان است.

۱۲۶- واکنش $2H_2O_2(l) \rightarrow 2H_2O(l) + O_2(g)$ را یک بار در غیاب KI (آزمایش I) و بار دیگر در حضور KI (آزمایش II) در شرایط یکسان با مول‌های برابر از هیدروژن پراکسید انجام می‌دهیم. در آزمایش (I) پس از گذشت ۵ دقیقه، شمار مول‌های H_2O_2 به ۸۰٪ مقدار اولیه خود می‌رسد، اما در آزمایش (II)، هر دقیقه ۲۰٪ از مقدار اولیه واکنش دهنده مصرف می‌شود. کدام موارد زیر درباره این دو آزمایش، درست است؟

مول واکنش دهنده



(الف) پتاسیم دیدید به عنوان کاتالیزگر عمل کرده و نمودار «مول-زمان» واکنش دهنده در دو آزمایش به صورت مقابل است.

(ب) سرعت متوسط واکنش در ۵ دقیقه ابتدایی در آزمایش (II)، پنج برابر آزمایش (I) است.

(پ) اگر آزمایش (I) با سرعت ثابت ادامه یابد، تفاوت زمانی کامل شدن دو واکنش، برابر ۲۰ دقیقه است.

(ت) اگر مقدار اولیه H_2O_2 برابر ۱/۵ مول باشد، سرعت متوسط واکنش در آزمایش (II)، برابر 18 mol.h^{-1} است.

- (۱) الف - ب (۲) ب - پ (۳) الف - ت (۴) پ - ت

۱۲۷- پس از کامل کردن موازنه معادله زیر، کدام مطلب درست است؟



(۱) سرعت متوسط تولید گاز، ۵ برابر سرعت متوسط مصرف آب است.

(۲) در این واکنش و در یک بازه زمانی معین، رابطه $3\Delta[H_3PO_4] = -5\Delta[HNO_3]$ برقرار است.

(۳) اگر در یک بازه زمانی معین، ۴/۰ مول فسفر سفید (P_4)، مصرف شود، در همان بازه زمانی، ۱/۶ مول فسفریک اسید (H_3PO_4)، تشکیل خواهد شد.

(۴) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش دهنده‌ها با فرآورده‌ها برابر است.

۱۲۸- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) عبارت «پاشیدن و پخش کردن گرد آهن بر روی شعله، سبب سوختن آن می‌شود»، اثر عامل دما روی سرعت واکنش‌ها را نشان می‌دهد.

(ب) محلول بنفش رنگ پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق واکنش نمی‌دهد، اما با گرم شدن، محلول به سرعت بی‌رنگ می‌شود.

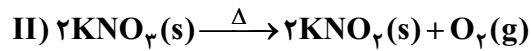
(پ) سینتیک شیمیایی، شاخه‌ای از علم شیمی است که به بررسی آهنگ تغییر شیمیایی در واکنش‌ها و عوامل مؤثر بر این آهنگ می‌پردازد.

(ت) استفاده از براده آهن به جای گرد آهن مانند افزودن مقادیر آب به ظرف واکنش، سبب کاهش سرعت واکنش $Fe(s) + 2HCl(aq) \rightarrow FeCl_2(aq) + H_2(g)$ می‌شود.

- (۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

محل انجام محاسبات

۱۲۹- جرم‌های یکسان از KNO_3 را در دو شرایط متفاوت حرارت می‌دهیم تا طبق واکنش‌های زیر با سرعت ثابت تجزیه شوند:



برای این که جرم جامد باقی مانده در دو ظرف در هر لحظه برابر شود، باید کدام رابطه بین سرعت‌ها برقرار باشد؟ (در گزینه‌ها نماد \bar{R} مربوط به واکنش I و \bar{R}' مربوط به واکنش II است؛ $\text{K} = 39$ ، $\text{O} = 16$ ، $\text{N} = 14$ ؛ g.mol^{-1})

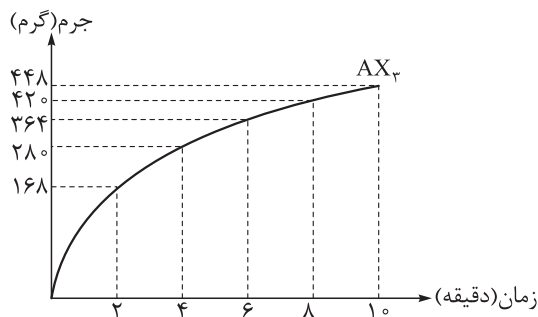
$$\bar{R}'_{\text{KNO}_3} = 7\bar{R}_{\text{K}_2\text{O}} \quad (2)$$

$$\bar{R}'_{\text{KNO}_3} = 2\bar{R}_{\text{KNO}_3} \quad (1)$$

$$\bar{R}'_{\text{O}_2} = 1/35\bar{R}_{\text{O}_2} \quad (4)$$

$$\bar{R}'_{\text{واکنش}} = 3/5\bar{R}_{\text{واکنش}} \quad (3)$$

۱۳۰- ۱۶۰ گرم A و ۲۸۸ گرم X_2 را وارد ظرفی می‌کنیم تا واکنش زیر در مدت ده دقیقه به طور کامل انجام شود. با توجه به نمودار داده شده، اگر تفاوت سرعت متوسط واکنش در دو دقیقه آغازی با دو دقیقه پایانی برابر 5 mol.min^{-1} باشد، جرم مولی عنصر فرضی X چند گرم بر مول است؟ (معادله موازنه شود، $\text{A}(\text{s}) + \text{X}_2(\text{g}) \rightarrow \text{AX}_3(\text{g})$)



(۱) ۱۵

(۲) ۲۵

(۳) ۳۰

(۴) ۵۰

محل انجام محاسبات

پایه دوازدهم

چنانچه پایه دوازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفتر چه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

نود جه بندی دروس	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حسابان و ریاضیات پایه
	هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای دترمینان و کاربردهای آن) صفحه ۹ تا ۲۶	ریاضیات گسسته فصل ۱ صفحه ۱ تا ۳۰	حسابان (۲): فصل ۱ صفحه ۱ تا ۲۲ پایه مرتبط: حسابان (۱): فصل ۲ صفحه ۳۷ تا ۷۰ ریاضی (۱): فصل ۵ صفحه ۹۴ تا ۱۱۷
	شیمی	فیزیک	
	شیمی (۳) فصل ۱ (تا ابتدای pH، مقیاسی برای تعیین میزان اسیدی بودن) صفحه ۱ تا ۲۴	فیزیک (۳) فصل ۱ صفحه ۱ تا ۲۸	

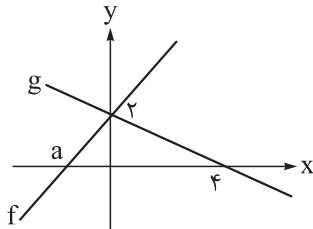
مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۲۵ دقیقه	۱۴۵	۱۳۱	۱۵	حسابان و ریاضیات پایه
۲۰ دقیقه	۱۵۵	۱۴۶	۱۰	ریاضیات گسسته
۲۰ دقیقه	۱۶۵	۱۵۶	۱۰	هندسه
۳۰ دقیقه	۱۸۵	۱۶۶	۲۰	فیزیک
۲۰ دقیقه	۲۰۰	۱۸۶	۱۵	شیمی
۱۱۵ دقیقه		۷۰ سؤال		مجموع

حسابان دوازدهم

۱۳۱- تابع $f = \{(2, 3), (3, 4), (-1, 12), (1, 13)\}$ و تابع $g(x) = \frac{x+7}{x-1}$ مفروض اند. مجموع اعضای برد تابع $f + g$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ۱۸ (۳) ۲۱ (۲) ۳۰ (۱)

۱۳۲- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر تابع $\frac{f-g^{-1}}{f^{-1}+g}$ خطی و غیر ثابت باشد، مقدار a کدام است؟



- ۱ (۱)
-۲ (۲)
 $-\frac{1}{2}$ (۳)
-۸ (۴)

۱۳۳- اگر $f(x) = \frac{2x+a}{x+2}$ و $f^{-1}(2f(-\frac{4}{5})) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۴) ۱ (۳) -۲ (۲) -۱ (۱)

۱۳۴- اگر $f^{-1}(x+1) = 2x-1$ و $(gof)(x) = x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(fog)(0)$ کدام است؟

- $\frac{3}{2}$ (۴) -۳ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۱)

۱۳۵- تابع غیر ثابت $f(x) = ax + a$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع $f \cdot f^{-1}$ همواره بالای نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ قرار بگیرد، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای $f(1)$ کدام است؟

- ۲۸ (۴) -۶ (۳) -۱۲ (۲) -۱۸ (۱)

۱۳۶- تابع $f(x) = \frac{mx+6}{x+n}$ وارون خود را فقط در دو نقطه به طول های ۲- و α قطع می کند. اگر $f^{-1}(\alpha+1) = 1$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۱۳۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+2}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می کنیم و سپس ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم تا نمودار تابع g به دست آید، مقدار $(fog^{-1})(-2)$ کدام است؟

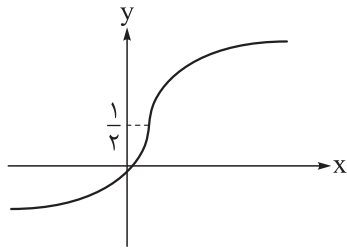
- $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۳۸- نقطه $A(-1, a)$ روی نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{2})$ با نقطه $A'(b, 2b)$ روی نمودار تابع $y = 2f(1-2x)$ متناظر است. مقدار a کدام است؟

- $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

محل انجام محاسبات

۱۳۹- تابع درجه سوم $f(x) = (4x^2 + a)(2x + b) + 9$ مفروض است. اگر نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر باشد، حاصل



$a - b$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۶

(۳) -۹

(۴) صفر

۱۴۰- تابع $f(x) = |x - 2\alpha + 1| - |x + \alpha - 5|$ روی \mathbb{R} نزولی است. حداکثر مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۱/۵

۱۴۱- توابع f و g با دامنه \mathbb{R} مفروض اند. اگر توابع $2f + g$ و $f - 2g$ هر دو اکیداً صعودی باشند، کدام تابع روی \mathbb{R} الزاماً

اکیداً نزولی است؟

(۴) $y = g(-x) - x$

(۳) $y = x - g(x)$

(۲) $y = f(-x) - x$

(۱) $y = x - f(x)$

۱۴۲- تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$ مفروض است. مجموعه جواب‌های نامعادله $(f \circ f)(x) > f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

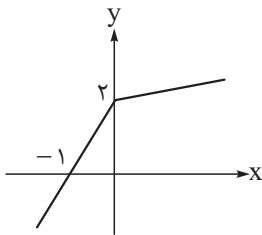
(۴) بی‌شمار

(۳) ۳۲

(۲) ۳۳

(۱) ۳۴

۱۴۳- نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(2x-1)(f(x+a)-2)}$ برابر \mathbb{R} باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) 1/2

(۴) -1/2

۱۴۴- خارج قسمت و باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + ax^2 + b$ بر چندجمله‌ای $x - 2$ به ترتیب $q(x)$ و

6 است. اگر مجموع ضرایب چندجمله‌ای $q(x)$ برابر 12 باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) -۹

(۲) ۹

(۱) -۳

۱۴۵- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $2x + 1$ است. باقی مانده

تقسیم چندجمله‌ای $(x-1)f(x) + xf(x-1)$ بر $x - 2$ کدام است؟

(۴) ۱۳

(۳) ۱۱

(۲) ۹

(۱) ۷

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته دوازدهم

۱۴۶- چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با ارائه مثال نقض رد کرد؟

(الف) حاصل ضرب یک عدد گویای غیرصفر و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

(ب) اگر مجموع دو عدد گنگ گویای غیرصفر باشد، مجموع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم عددی گنگ است.

(پ) حاصل ضرب جذر دو عدد حقیقی مثبت برابر است با جذر حاصل ضرب آن دو.

(ت) هیچ عدد طبیعی فردی وجود ندارد که مربع و مکعب آن فرد نباشد.

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۴۷- اگر $x \mid 3m + 7$ و $x \mid 5m + 12$ ، چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴۸- اگر عدد صحیحی را ۷ واحد زیاد کنیم بر عدد ۱۳ و اگر از آن ۳ واحد کم کنیم بر عدد ۷ بخش پذیر می‌شود. عدد

a بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی و فرد با شرایط گفته شده است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $9 \mid a^2 - 1$ (۲) $7 \mid a^2 - 2$

(۳) $11 \mid a^2 - 4$ (۴) $31 \mid a^2 - 8$

۱۴۹- چند مورد از همنهشتی‌های زیر همواره درست هستند؟

(الف) $43! \equiv 74$ (ب) $5^{1403} \equiv 57$

(پ) $a(a+1)(a+2) \equiv 2a$ (ت) $a^2 \equiv b^2$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۰- اگر $x + 1 \equiv -28$ و $3 - y \equiv -31$ ، باقی‌مانده تقسیم $2 - 13xy + 24y + 191x$ بر ۷ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۵۱- اگر باقی‌مانده تقسیم عدد x بر ۲۱ برابر ۱۲ باشد، کدام گزینه نمی‌تواند درست باشد؟

$$\left\{ \begin{array}{l} 49 \\ x \equiv -9 \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} 28 \\ x \equiv 19 \\ 9 \\ x \equiv -3 \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} 18 \\ x \equiv -3 \\ 9 \\ x \equiv -7 \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ x \equiv 6 \\ 14 \\ x \equiv -2 \end{array} \right. \quad (۱)$$

محل انجام محاسبات

۱۵۲- اگر باقی‌مانده تقسیم عدد $32a42b$ بر 117 برابر 82 و عدد $698c67$ بر 11 بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $-cabacb$ بر 175 کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۴۴ (۳) ۳۶ (۴) ۲۸

۱۵۳- در معادله سیاله خطی $114 = 12y - 18x$ ، به ازای کدام مقدار x ، بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی y به دست می‌آید؟

- (۱) ۳۳۳ (۲) ۶۶۱ (۳) ۶۷۱ (۴) ۹۹۷

۱۵۴- m کوچک‌ترین عدد طبیعی است که $48 \equiv (m+2)! \pmod{48}$. به ازای چند عدد سه‌رقمی n ، معادله سیاله خطی $4 - 5n = (2m+14)x + (3m-1)y$ دارای جواب صحیح است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۷۳ (۳) ۸۲ (۴) ۹۱

۱۵۵- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن و باقی‌مانده برابر 3 است. اگر مقسوم‌علیه را 4 واحد کم‌تر کنیم، باقی‌مانده برابر 4 می‌شود. تعداد مقسوم‌های چهاررقمی کدام است؟

- (۱) ۱۱۴ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۱۶ (۴) ۱۱۷

هندسه دوازدهم

۱۵۶- اگر ماتریس‌های ضرایب و مقادیر ثابت دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ را به ترتیب A و B بنامیم، کوچک‌ترین درایه ماتریس $[x \ y] \cdot A + B$ کدام است؟

- (۱) $-1/6$ (۲) $1/6$ (۳) $0/8$ (۴) $-0/8$

۱۵۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ستون اول ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

۱۵۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ و $|AB| = 6$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۳ (۳) ۲۵ (۴) ۲۲

۱۵۹- اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ -2 & |A| \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{12} کدام است؟

- (۱) 2^7 (۲) -2^7 (۳) 2^{13} (۴) -2^{13}

۱۶۰- اگر سطر سوم ماتریس وارون‌پذیر A به صورت $[m \ -1 \ m-1]$ و ستون سوم ماتریس A^{-1} به صورت $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ m+1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) $\{1, -3\}$ (۲) $\{-1, 3\}$ (۳) $\{-1\}$ (۴) \emptyset

۱۶۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $AB = A^{-1}$ باشد، آن‌گاه به ازای کدام مقدار n، ماتریس $B + nA$ اسکالر است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۳ (۴) چنین مقداری وجود ندارد.

۱۶۲- اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر مرتبه ۲ و $A + 4A^{-1} = 3I$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

۱۶۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایه روی قطر اصلی ماتریس $B^{-1}A^3B$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۶۴- اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $A(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۲۰

۱۶۵- اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $A+B=\bar{O}$ و $AB=I$ ، آن‌گاه $(A^3 - B^3)^{-1} = aA$ مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -2 (۴) ۲

فیزیک دوازدهم

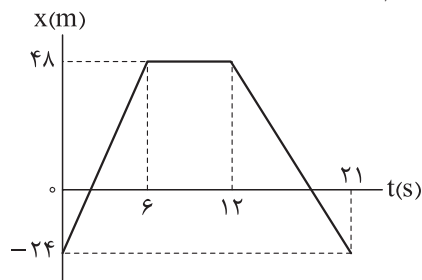
۱۶۶- بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می کند، در لحظه های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 10s$ به ترتیب $\vec{I}(18m)$ و $\vec{I}(10m)$ است. بردار مکان متحرک در لحظه $t_3 = 24s$ بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $-4\vec{I}$ (۲) $-6\vec{I}$ (۳) $-16\vec{I}$ (۴) $-26\vec{I}$

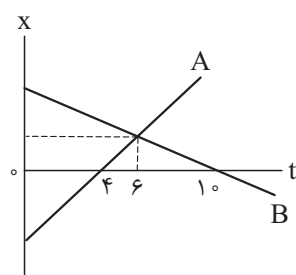
۱۶۷- دو خودرو با سرعت های ثابت $20 km/h$ و $30 km/h$ در مسیری مستقیم از نقطه A تا نقطه B جابه جا می شوند. فاصله این دو نقطه $900m$ است. اگر دو خودرو در یک لحظه در نقطه A باشند، اختلاف زمانی رسیدن آن ها به نقطه B چند دقیقه است؟

- (۱) $0/9$ (۲) $1/8$ (۳) $2/7$ (۴) $5/4$

۱۶۸- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه ای که جهت بردار مکان آن تغییر می کند، بر حسب متر بر مربع ثانیه، کدام است؟



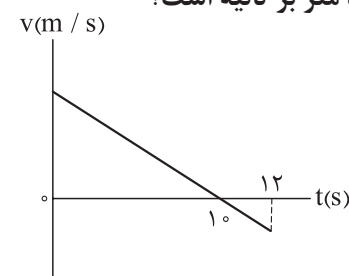
- (۱) $0/25\vec{I}$ (۲) $-0/25\vec{I}$ (۳) $1/25\vec{I}$ (۴) $-1/25\vec{I}$



۱۶۹- نمودار مکان - زمان متحرک های A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل مقابل است. در مبدأ زمان، اندازه بردار مکان متحرک A چند برابر اندازه بردار مکان متحرک B است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۱۷۰- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در 12 ثانیه اول، مسافت طی شده توسط متحرک $156m$ باشد، اندازه سرعت متوسط آن در این بازه زمانی چند متر بر ثانیه است؟



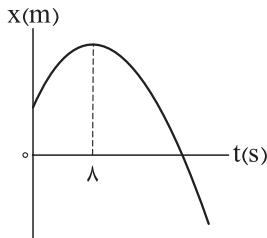
- (۱) $11/5$ (۲) 12 (۳) $12/5$ (۴) 13

محل انجام محاسبات

۱۷۱- سرعت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در مدت 8 s از $\vec{v}_1 = (5\text{ m/s})\vec{i}$ به $\vec{v}_2 = (-10\text{ m/s})\vec{i}$ می‌رسد. جابه‌جایی متحرک در این مدت برحسب متر کدام است؟

- (۱) $20\vec{i}$ (۲) $-20\vec{i}$ (۳) $60\vec{i}$ (۴) $-60\vec{i}$

۱۷۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1\text{ s}$ تا $t_2 = 9\text{ s}$ ، با تندی آن در کدام لحظه، برحسب ثانیه، برابر است؟



- (۱) ۷
(۲) ۹
(۳) ۱۱
(۴) ۱۳

۱۷۳- تندی متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، هنگام عبور از مکان‌های $x_1 = 20\text{ m}$ و $x_2 = 40\text{ m}$ به ترتیب 17 m/s و 23 m/s است. در لحظه‌ای که تندی متحرک برابر 1 m/s است، بردار مکان آن برحسب متر کدام است؟

- (۱) $2\vec{i}$ (۲) $-2\vec{i}$ (۳) $4\vec{i}$ (۴) $-4\vec{i}$

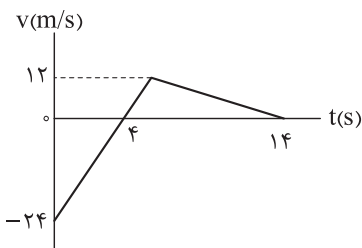
۱۷۴- جهت حرکت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در لحظه $t = 5\text{ s}$ تغییر می‌کند. مسافت طی شده توسط متحرک در ۴ ثانیه اول، چند برابر مسافت طی شده توسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{12}{5}$

۱۷۵- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^2 - 12t + 10$ است. حداقل تندی متوسط متحرک در یک بازه زمانی دلخواه ۴ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه است؟

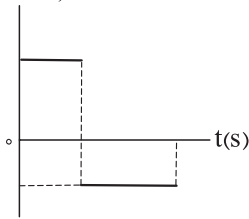
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۷۶- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی‌ای که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و در حال نزدیک شدن به مکان اولیه خود است، اندازه جابه‌جایی آن چند متر است؟

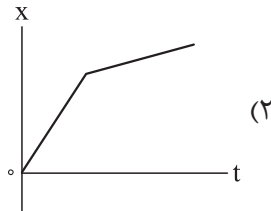


- (۱) ۶۰
(۲) ۴۸
(۳) ۲۴
(۴) ۱۲

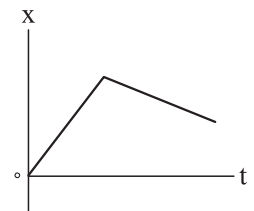
محل انجام محاسبات

a(m/s²)

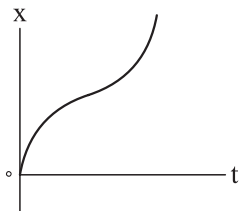
۱۷۷- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل مقابل است. نمودار مکان - زمان آن به صورت کدام شکل می تواند باشد؟



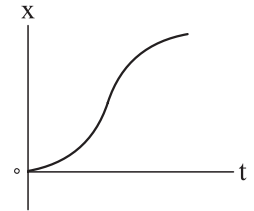
(۲)



(۱)

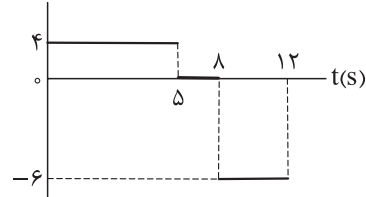


(۴)



(۳)

۱۷۸- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 10$ s فاصله متحرک از مکان اولیه خود بیشینه باشد، در بازه زمانی ای متحرک در جهت محور X حرکت می کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

a(m/s²)

۵/۲ (۱)

۵/۸ (۲)

۷/۲۵ (۳)

۸/۲۵ (۴)

۱۷۹- خودرویی در کنار جاده ایستاده است. در لحظه ای یک موتورسوار با سرعت ثابت 90 km/h از کنار آن می گذرد. در همین لحظه، خودرو با شتاب ثابت 2 m/s^2 ، در جهت حرکت موتورسوار، شروع به حرکت می کند. خودرو پس از طی مسافت چند متر به موتورسوار می رسد؟

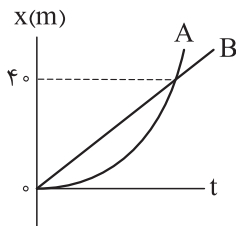
۴۰۵۰ (۴)

۲۰۲۵ (۳)

۶۲۵ (۲)

۳۱۲/۵ (۱)

۱۸۰- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور X حرکت می کنند، به شکل زیر است. شتاب متحرک A ثابت و تندی آن در مبدأ زمان برابر صفر است. در لحظه ای که تندی دو متحرک برابر می شود، فاصله آنها از یکدیگر چند متر است؟



۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

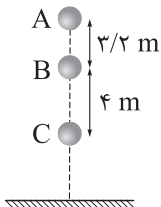
۲۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۱۸۱- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h در مبدأ زمان رها می‌شود. اندازه جابه‌جایی گلوله در n ثانیه سوم، چند برابر اندازه جابه‌جایی آن در n ثانیه دوم است؟ ($h > \frac{9}{4}gn^2$)

$\frac{9n}{4}$ (۴) $\frac{5n}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۱)

۱۸۲- در شکل زیر، در شرایط خلأ، گلوله‌ای از نقطه A رها می‌شود. اندازه سرعت متوسط گلوله در بازه زمانی ای که از نقطه B به نقطه C می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- ۴ (۱)
 ۵ (۲)
 ۸ (۳)
 ۱۰ (۴)

۱۸۳- در شرایط خلأ گلوله‌ای از ارتفاع h رها می‌شود. اگر گلوله در مدت ۳s، از ارتفاع ۱۴۰ متری به ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین برسد، ۲s قبل از رسیدن به سطح زمین، از ارتفاع چند متری عبور می‌کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

120 (۴) 90 (۳) 60 (۲) 45 (۱)

۱۸۴- ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین، 32 m بیشتر از ارتفاع نقطه B نسبت به سطح زمین است. در لحظه‌ای، یک گلوله از نقطه A و $1/6 \text{ s}$ بعد، گلوله دیگری از نقطه B رها می‌شود. اگر دو گلوله با هم به سطح زمین برسند، ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

$54/2$ (۴) $49/2$ (۳) $44/2$ (۲) $39/2$ (۱)

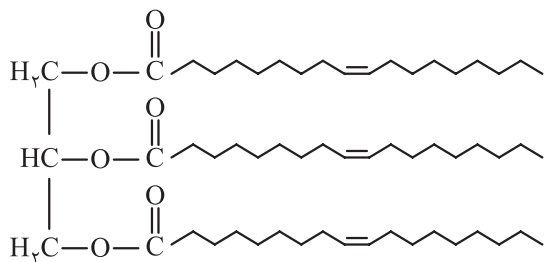
۱۸۵- در شرایط خلأ، از نقطه‌ای به ارتفاع 125 m نسبت به سطح زمین، دو گلوله به فاصله زمانی t رها می‌شوند. اگر بیشینه فاصله دو گلوله در حین حرکت آن‌ها $36/8 \text{ m}$ باشد، t برابر چند ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$1/8$ (۴) $1/2$ (۳) $0/8$ (۲) $0/2$ (۱)

شیمی دوازدهم

۱۸۶- کدام مطلب درست است؟

- (۱) در دهه‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی و نرخ رشد آن در نواحی برخوردار، نسبت به نواحی کم‌برخوردار بیشتر بوده است.
- (۲) در فرایند انحلال روغن زیتون در هگزان همانند فرایند انحلال نمک خوراکی در آب، ماده حل‌شونده ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.
- (۳) شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول وازلین را می‌توان $\frac{3}{4}$ برابر شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول بنزین در نظر گرفت.
- (۴) نسبت شمار اتم‌ها به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در ساختار اوره، کوچک‌تر از این مقدار در ساختار اتیلن گلیکول است.
- ۱۸۷- کدام موارد از مطالب زیر، درباره استر بلندزنجیر داده شده، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



- (الف) تفاوت جرم مولی الکل سازنده استر مورد نظر با اتانول، برابر ۴۸ است.
- (ب) از واکنش یک مول از آن با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، ۳ مول صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{34}COONa$ تولید می‌شود.

- (پ) این استر سه‌عاملی را می‌توان روغن زیتون در نظر گرفت.
- (ت) واکنش‌پذیری این استر بلندزنجیر در شرایط یکسان از چربی موجود در کوهان شتر، بیشتر است.

- (۱) الف - ب
- (۲) ب - پ
- (۳) پ - ت
- (۴) الف - ت

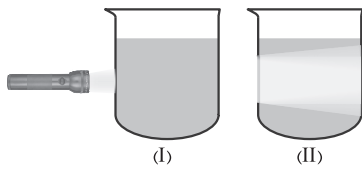
۱۸۸- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- ممکن است در ساختار یک صابون، عنصر فلزی وجود نداشته باشد.
- پاک‌کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند.
- صابون از طریق بخش قطبی جزء آنیونی خود با مولکول‌های آب پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.
- شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، $\frac{1}{8}$ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده‌های صابونی است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

محل انجام محاسبات

۱۸۹- با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به دو مخلوط پایدار هستند، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) آب‌قند نمونه‌ای از مخلوط (I) و شیر، نمونه‌ای از مخلوط (II) است.

(۲) مخلوط آب و روغن از نوع (I) است که با افزودن صابون به نوع (II) تبدیل می‌شود.

(۳) مخلوط (II) برخلاف مخلوط (I)، ناهمگن است، اما ذره‌های سازنده هیچ‌کدام از این دو مخلوط با گذشت زمان، ته‌نشین نمی‌شوند.

(۴) ذرات سازنده مخلوط (II)، درشت‌تر از ذرات سازنده مخلوط (I) هستند.

۱۹۰- در ساختار صابونی جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، نسبت شمار اتم‌های (های) نافلزی به اتم‌های (های) فلزی برابر ۴۹ است. از واکنش 2° / مول از این صابون با مقدار کافی محلول منیزیم کلرید، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود؟
($Mg = 24, O = 16, C = 12, H = 1: g \cdot mol^{-1}$)

(۲) ۱۰۶ / ۸

(۱) ۵۳ / ۴

(۴) ۵۵ / ۸

(۳) ۲۷ / ۹

۱۹۱- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) فرمول شیمیایی نمک حاصل از واکنش یون کلسیم با صابون جامد که زنجیر آلکیل آن ۱۴ اتم کربن دارد؛ به صورت $C_{30}H_{58}O_4Ca$ است.

(ب) در شرایط یکسان، ارتفاع کف حاصل از صابون در آب مقطر، نسبت به ارتفاع کف حاصل از صابون در محلول منیزیم کلرید، بیشتر است.

(پ) در شرایط یکسان، قدرت صابون در از بین بردن لکه‌های چربی روی پارچه پلی‌استری، بیشتر از پارچه نخی است.

(ت) از صابون فسفردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

(۲) ب - ت

(۱) الف - پ

(۴) الف - ب

(۳) پ - ت

۱۹۲- کدام مطلب درست است؟

(۱) از دید آرنیوس، جامدهای یونی اکسیژن‌دار، اسید به شمار می‌آیند.

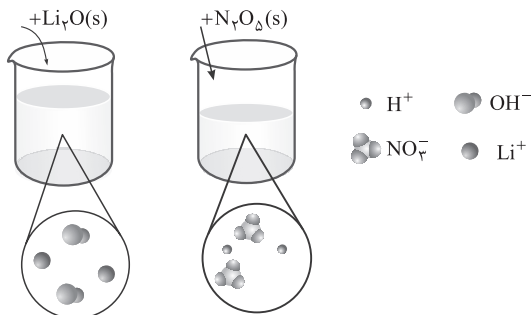
(۲) محلول مولکول‌های قطبی در آب، نوعی الکترولیت محسوب می‌شود.

(۳) با افزایش غلظت اتیلن گلیکول در محلول آن، رسانایی الکتریکی محلول تغییری نمی‌کند.

(۴) در دمای اتاق، ثابت یونش اسید موجود در باران معمولی از ثابت یونش هیدرویدیک اسید، بیشتر و از ثابت یونش اسیدهای مسبب ایجاد باران اسیدی، کم‌تر است.

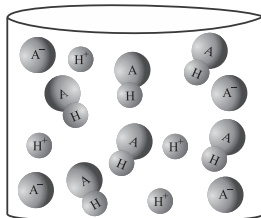
محل انجام محاسبات

۱۹۳- مطابق شکل‌های زیر، جرم برابری از دو نوع اکسید را به صورت جداگانه در مقدار معینی آب حل می‌کنیم. اگر اختلاف مجموع جرم کاتیون‌های تولیدشده در اثر انحلال این دو ماده با مجموع جرم آنیون‌های تولیدشده در اثر انحلال آن‌ها برابر ۱۹۴ گرم باشد، مجموع شمار مول‌های اولیه اکسیدها، کدام است؟ ($O = 16, N = 14, Li = 7, H = 1: g.mol^{-1}$)



- (۱) ۹/۲
(۲) ۴/۶
(۳) ۲/۳
(۴) ۱۸/۴

۱۹۴- شکل زیر، محلولی از اسید ضعیف HA را در دما و حجم معین نشان می‌دهد. درجه یونش اسید HA در محلول مورد نظر، چند برابر درجه یونش محلول ۰/۲ مولار اسید ضعیف HB، با غلظت یون هیدرونیوم برابر 4×10^{-3} مول بر لیتر است؟



- (۱) ۲
(۲) ۲۰
(۳) ۰/۲
(۴) ۰/۰۲

۱۹۵- ترتیب رسانایی الکتریکی محلول‌های زیر، در کدام گزینه به درستی آمده است؟ ($O = 16, N = 14, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

- (a) محلول ۲۵ درصد جرمی نیتریک اسید با چگالی ۱/۲۶ گرم بر میلی‌لیتر
(b) محلول ۱/۵ مولار استیک اسید با درصد یونش ۸
(c) محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید
(d) محلول ۰/۸ مولار نیترواسید با درجه یونش ۰/۲

- (۱) $a > d > c > b$ (۲) $d > a > b > c$ (۳) $a > c > d > b$ (۴) $b > a > d > c$

۱۹۶- کدام مطلب درست است؟

- (۱) ثابت تعادل، بیانی از میزان پیشرفت یک واکنش تا لحظه برقراری تعادل است و به غلظت اولیه واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وابسته است.
(۲) در واکنش‌های تعادلی، در لحظه تعادل، سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به صفر می‌رسد.
(۳) ثابت ماندن غلظت مواد شرکت‌کننده در تعادل، برخلاف برابری غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، جزء ویژگی‌های واکنش تعادلی است.
(۴) محلول کربوکسیلیک اسیدها در آب، برخلاف محلول هیدروسیانیک اسید، نمونه‌ای از یک سامانه تعادلی است.

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی
خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

مرحله چهارم

پایه دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۶ / شهریور / ۱۴۰۳

ویژه کنکوری های ۱۴۰۴

ویژگی های برنامہ راهبردی آزمون های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۱۴۰۳-۰۴

- ۱- دوره دروس پایه دهم
- ۲- دوره دروس پایه یازدهم
- ۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
- ۴- امکان انتخاب فرآیند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه	مرحله	اول ۱۳ تیر	دوم ۵ مرداد	سوم ۲۶ مرداد	چهارم ۱۶ شهریور	پنجم ۶ مهر
دهم	-	✓	✓	✓	✓	✓
یازدهم	✓	✓	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	-	-	✓	✓	-

با توجه به موارد فوق دفتر چه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شده است.

هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پلن کار بری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.

آزمون تعیین سطح (جامع پایه یازدهم) در تاریخ ۱۳ تیر ۱۴۰۳ برگزار شده است؛ چنانچه نتوانستید در این آزمون شرکت کنید، امکان برگزاری این آزمون به صورت آنلاین فراهم است.

آزمون مرحله چهارم (همین دفتر چه ای که در دست دارید) ادامه پیشروی پایه دهم و یازدهم و پیشروی پایه دوازدهم است.

در آزمون مرحله پنجم به دوره پایه های دهم و یازدهم پرداخته می شود.

در برنامه شروع مجدد دوازدهم از مهر، تمامی سرفصل های پایه دوازدهم، مجدد از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.



پایہ دہم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
ہندسہ (۱)	امیرحسین ابومحبوب - محمد رضا حسینی فرد - کیوان صارمی - حسین ہاشمی طاہری
فیزیک (۱)	امین امینی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاہی
شیمی (۱)	یاسر راش - علی طہانی - یاسر عبداللہی - وحید فارسیان - محدثہ ملک پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	امیرحسین ابومحبوب	محمد گودرزی محمد سجاد نقیہ سجاد داوطلب	عاطفہ خان محمدی ماہان فنی فر ابوالفضل ناصر
ہندسہ (۱)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	مہدی خوش نویس ماہان فنی فر ابوالفضل ناصر
فیزیک (۱)	رضا سبزمیدانی	نوید شاہی	محمد باغبان	امین امینی علیرضا جباری	مہدی بابائی نرجس تیمناک مدیا عیدی ابوالفضل ناصر
شیمی (۱)	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	علی طہانی محدثہ ملک پور	محمد مرادی سروش عبادی وحید فارسیان	سیدعلی حسین زاده مہسا خاکی احسان رحیمی ہومن زندگی

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقا جانپور



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

ریاضی دهم

تست و پاسخ ۱

اگر $n(A) = 22$ ، $n(A \cup B) = 28$ و $n(A - B) = 3n(B - A)$ باشد، کدام است $n(B)$ ؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

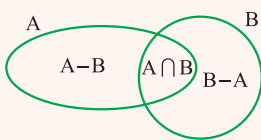
۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره به نمودار ون برآش بکش، راحت حل می شه.

درس نامه •• اجتماع دو مجموعه - نمودار ون

اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ و اشتراک آن‌ها را به صورت $A \cap B$ نمایش می دهیم. تعاریف این دو را می دانید.



حال اگر A و B را دو زیرمجموعه از مجموعه جهانی (U) در نظر بگیریم، می توانیم در حالت کلی نمودار مقابل را برای این مجموعه‌ها (که موسوم است به نمودار ون) داشته باشیم: با توجه به نمودار می شود گفت:

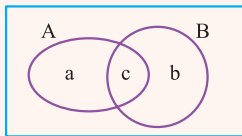
$$A - B = A - (A \cap B) \quad , \quad B - A = B - (A \cap B) \Rightarrow A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

در نتیجه برای تعداد اعضای $A \cup B$ داریم:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = (n(A) - n(A \cap B)) + n(A \cap B) + (n(B) - n(A \cap B))$$

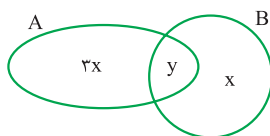
$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

البته در اکثر موارد نیازی به نوشتن فرمول نیست و خود نمودار ون کار را بسیار ساده تر می کند:



$$n(A) = a + c, \quad n(B) = b + c$$

$$n(A \cap B) = c \Rightarrow n(A \cup B) = a + b + c$$



پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به معلومات مسئله، یک نمودار ون برای این دو مجموعه رسم می کنیم:

دقت کنید که $n(B - A)$ را x گرفته ایم، پس $n(A - B)$ برابر $3x$ می شود.

گام دوم: تعداد اعضای مجموعه‌های A و $A \cup B$ را داریم و می نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = 22 \Rightarrow 3x + y = 22 \\ n(A \cup B) = 28 \Rightarrow 4x + y = 28 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = 6 \text{ و } y = 4$$

گام سوم: در نتیجه تعداد اعضای مجموعه B برابر $x + y = 10$ خواهد بود.

تست و پاسخ ۲

تعداد اعضای مجموعه A ، ۱۰ عضو بیشتر از تعداد اعضای مجموعه B است. اگر مجموعه $A \cup B$ دارای ۲۲ عضو باشد، حداقل تعداد اعضای B کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$n(A) - n(B) = 10$$

پاسخ تشریحی گام اول: در ابتدای مسئله می دانیم که:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22$$

گام دوم: اجتماع دو مجموعه، ۲۲ عضو دارد، پس می نویسیم:

و به جای $n(A)$ عبارت $n(B) + 10$ را می گذاریم، زیرا $n(B)$ را می خواهیم:

$$n(B) + 10 + n(B) - n(A \cap B) = 22 \Rightarrow 2n(B) = 12 + n(A \cap B) \Rightarrow n(B) = 6 + \frac{n(A \cap B)}{2}$$

گام سوم: مجموعه B زمانی کمترین تعداد اعضای خود را دارد که A و B جدا از هم باشند ($A \cap B = \emptyset$). پس $n(A \cap B) = 0$ است و داریم:

$$n(B) \geq 6$$

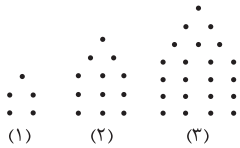


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۳

در الگوی شکل مقابل، تعداد نقاط شکل n م برابر $n^2 + 8n + 1$ است. مقدار n کدام است؟



۱۱ (۲)

۹ (۱)

۱۳ (۴)

۱۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

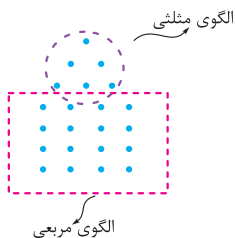
مشاوره در الگوهای شکلی، اصلاً بر اساس عدد جلو نروید، بلکه بر اساس خود شکل‌ها جلو بروید. یعنی این‌که ساختن دنباله اعداد $۵, ۱۲, ۲۲, \dots$ و سعی در پیدا کردن الگوی آن کاری بسیار سخت‌تر و نامناسب‌تر است.

درس نامه الگوهای خطی و غیرخطی

مثال‌های بارز	فرمول (جمله عمومی)	مشخصه	خطی	الگو
دنباله جملات فرد $t_n = 2n - 1$ دنباله جملات مضرب k $t_n = kn$	$t_n = \alpha n + \beta$ همان مقدار افزایش یا کاهش است.	مقدار افزایش یا کاهش جملات برابر است. ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ... +۵, +۵, +۵	خطی	الگو غیرخطی
الگوی مربعی $t_n = n^2$ الگوی مثلثی $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$	فرم کلی ندارد، اما در حالتی که اختلاف اختلاف‌ها ثابت باشد، الگوی درجه دوم داریم و به صورت زیر است: $t_n = an^2 + bn + c$ نصف اختلاف اختلاف‌هاست.	مقدار افزایش یا کاهش جمله‌ها برابر نیست. مهم‌ترین آن‌ها این است که اختلاف اختلاف‌ها مقداری ثابت است. ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵ +۳, +۵, +۷, +۹		

دوازدهم ریاضی

آزمون مرحله چهارم



پاسخ تشریحی گام اول: شکل n م از یک الگوی مربعی مرتبه $n+1$ و یک الگوی مثلثی مرتبه n

تشکیل شده است:

گام دوم: پس تعداد نقاط شکل n م (جمله عمومی دنباله) برابر است با:

$$t_n = \underbrace{(n+1)^2}_{\text{الگوی مربعی}} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{الگوی مثلثی از ۱ تا } n} \Rightarrow t_n = n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \Rightarrow t_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

گام سوم: این رابطه را باید برابر $n^2 + 8n + 1$ قرار دهیم:

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1 = n^2 + 8n + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 = \frac{11}{2}n \xrightarrow{\div \frac{n}{2}} n = 11$$

تست و پاسخ ۴

در الگوی درجه دوم $۲, ۷, ۱۸, ۳۹, \dots$ مجموع جملات پانزدهم و شانزدهم کدام است؟

۹۳۳ (۴)

۹۱۳ (۳)

۸۲۷ (۲)

۸۴۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره سه تا مجهول (ضرایب) می‌خوای و سه تا معلوم داری، کافیه دستگاه بزنی و حل کنی.

پاسخ تشریحی گام اول: الگو درجه دوم است، پس فرمول (جمله عمومی) آن را $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} t_1 = 2 &\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 16a + 4b + c = 29 \end{cases} && \text{گام دوم: } t_1, t_2, t_4 \text{ و } t_4 \text{ معلوم‌اند:} \end{aligned}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام سوم: برای حل این دستگاه سه معادله - سه مجهول، کافی است از معادله اول، c را برحسب a و b به دست آوریم و در دو معادله دیگر جای گذاری کنیم:

$$c = 2 - a - b \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 2 - a - b = 7 \\ 16a + 4b + 2 - a - b = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 5 \\ 5a + b = 9 \end{cases}$$

حل دستگاه $\rightarrow a = 2, b = -1 \xrightarrow{c=2-a-b} c = 1 \Rightarrow t_n = 2n^2 - n + 1 = n(2n-1) + 1$

گام چهارم: مجموع جملات پانزدهم و شانزدهم را حساب می کنیم:

$$t_{15} + t_{16} = 436 + 497 = 933$$

تست و پاسخ ۵

در یک الگوی خطی، جمله سوم برابر ۲۲ و مجموع جملات هفتم و دهم ۱۲۱ است. جمله اول این الگو کدام است؟

$$t_n = \alpha n + \beta$$

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره الگوی خطی همان دنباله حسابی است، پس با دانش دنباله حسابی هم می توانید حل کنید.

خودت حل کنی بهتره مثل سؤال قبل، دستگاه لازم داری.

پاسخ تشریحی گام اول: الگو خطی است، پس جمله عمومی آن را $t_n = \alpha n + \beta$ در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} t_3 = 22 \Rightarrow 3\alpha + \beta = 22 \\ t_7 + t_{10} = 121 \Rightarrow 17\alpha + 2\beta = 121 \end{cases}$$

گام دوم: t_7 و t_{10} را داریم:

گام سوم: حل دستگاه را انجام می دهیم:

$$(17\alpha + 2\beta) - 2(3\alpha + \beta) = 121 - 2(22) \Rightarrow 11\alpha = 77 \Rightarrow \alpha = 7 \xrightarrow{3\alpha + \beta = 22} \beta = 1 \Rightarrow t_n = 7n + 1$$

$$t_1 = 7(1) + 1 = 8$$

گام چهارم: جمله اول (t_1) را حساب می کنیم:

تست و پاسخ ۶

جمله های الگوی $a_n = 3n - 2$ را به صورت $\dots, \{19, 22, 25, 28\}, \{10, 13, 16\}, \{4, 7\}, \{1\}$ دسته بندی کرده ایم. اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین عضو دسته دهم کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۴ (۳)

۳۳ (۲)

۲۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره چقدر از این تیپ سؤالات در سال های اخیر زیاد شده!! سخت نیستن اصلاً، پس با اعتماد به نفس به حسابشان برسید.

خودت حل کنی بهتره ببین چی رو می خواد؟ اختلاف ...؟ سعی کن برای این اختلاف تو دسته ها الگو بسازی.

درس نامه ••• مجموع های مهم

برای بهتر حل کردن سؤال ها و سرعت بیشتر، چند تا مجموع مهم را بلد باشید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{مجموع اعداد طبیعی ۱ تا } n \text{ (الگوی مثلثی)}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \quad \text{مجموع } n \text{ عدد فرد اول}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n = n(n+1) \quad \text{مجموع } n \text{ عدد زوج اول}$$

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{مجموع } n \text{ مربع کامل اول}$$

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{مجموع } n \text{ مکعب کامل اول}$$

پاسخ تشریحی روش اول:

گام اول: دنبال اختلاف بزرگ ترین عدد و کوچک ترین عدد هستیم. پس اختلاف ها را حساب می کنیم و به ترتیب می نویسیم: $\dots, 9, 6, 3, 0, \dots$

گام دوم: الگوی اختلاف های مورد نظر $t_n = 3(n-1)$ است. پس در دسته دهم، اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین عدد برابر $t_{10} = 3 \times 9 = 27$ است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

روش دوم:

گام اول: تعداد اعضای هر دسته برابر شماره آن دسته است. پس تا دسته نهم $\frac{9 \times 10}{2} = 45$ جمله $1+2+3+\dots+9$ از جمله‌های دنباله $a_n = 3n - 2$ را مصرف کرده‌ایم. در نتیجه عدد اول دسته دهم ۴۶امین جمله این دنباله یعنی $136 = 3 \times 46 - 2 = a_{46}$ است.
گام دوم: تا دسته دهم $1+2+3+\dots+10 = 55$ جمله از جمله‌های دنباله $a_n = 3n - 2$ را مصرف می‌کنیم، در نتیجه عدد آخر دسته دهم ۵۵امین جمله دنباله یعنی $163 = 3 \times 55 - 2 = a_{55}$ است.
گام سوم: اختلاف عدد اول و آخر دسته دهم برابر $163 - 136 = 27$ است.

تست و پاسخ ۷

دنباله $1, 2a+1, 3a+1, 4a, \dots$ حسابی و دنباله $a, a+3, a+b, \dots$ هندسی است. مقدار b کدام است؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره ویژگی‌های اولیه جملات متوالی دنباله‌های حسابی و هندسی رو بنویس.

درس نامه ••• دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای است که هر جمله آن (به غیر از جمله اول)، از افزودن یک مقدار ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید، این مقدار ثابت (تفاضل مشترک) را قدرنسبت دنباله حسابی می‌نامیم. در واقع دنباله حسابی همان دنباله خطی است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d = \alpha n + \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = d \\ \beta = a_1 - d \end{cases}$$

جمله عمومی:

ویژگی‌های جمله‌های دنباله حسابی:

رابطه	شرط
$2b = a + c$ $2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$	سه جمله متوالی a, b, c حالت کلی: سه جمله با فاصله برابر a_n, a_{n-k} و a_{n+k}
$a_n + a_m = a_p + a_q$	$m + n = p + q$
$d = \frac{b-a}{n+1}, n = \frac{b-a}{d} - 1$	بین دو عدد حقیقی a و b واسطه حسابی قرار دهیم.
$a_n - a_m = (n-m)d$	

دنباله هندسی

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای است که هر جمله آن (به غیر از جمله اول (غیرصفر))، از ضرب یک عدد ثابت غیرصفر در جمله قبلی به دست می‌آید. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله هندسی می‌نامیم.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \alpha \beta^n \Rightarrow \begin{cases} \beta = q \\ \alpha = \frac{a_1}{q} \end{cases}$$

جمله عمومی:

ویژگی‌های جملات دنباله هندسی:

رابطه	شرط
$b^2 = ac$ $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$	سه جمله متوالی a, b, c حالت کلی: سه جمله با فاصله برابر a_n, a_{n-k} و a_{n+k}
$a_n \cdot a_m = a_x \cdot a_y$	$m + n = x + y$
$q = n + \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, n = \log_q \left(\frac{b}{a} \right) - 1$	بین دو عدد حقیقی a و b واسطه هندسی قرار دهیم.
$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$	



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

نکته دنباله ثابت تنها دنباله‌ای است که هم هندسی و هم حسابی محسوب می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا از روی ویژگی سه جمله متوالی دنباله حسابی، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow a + 4a - 1 = 2(2a + 1) \Rightarrow 5a - 1 = 4a + 2 \Rightarrow a = 3$$

$$3 \times (3 + b) = 6^2 \Rightarrow 3 + b = 12 \Rightarrow b = 9$$

گام دوم: دنباله $3, 6, 3 + b$ باید هندسی باشد، داریم:

تست و پاسخ ۸

در یک دنباله حسابی غیر ثابت با قدرنسبت d و جمله عمومی a_n ، تساوی $2a_7 = (2a_3 + a_2)a_1$ برقرار است. جمله پنجم این دنباله چند

برابر d است؟

$$d \neq 0$$

۵ یا ۳ (۴)

۴ یا ۳ (۳)

۵ یا ۲ (۲)

۴ یا ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره جمله عمومی و دیگر هیچ.

$$\Rightarrow a_7 = a_1 + 6d \quad a_3 = a_1 + 2d$$

پاسخ تشریحی گام اول: جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ است:

گام دوم: جمله‌ها را در رابطه داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$2(a_1 + 6d)^2 = (2(a_1 + 2d) + (a_1 + 6d))a_1 \Rightarrow 2a_1^2 + 24a_1d + 72d^2 = 3a_1^2 + 16a_1d + 12d^2 \Rightarrow a_1^2 + da_1 - 6d^2 = 0$$

گام سوم: تساوی بالا را می‌توانیم به چشم یک معادله درجه دوم بر حسب a_1 نگاه کنیم. داریم:

$$(a_1 - d)(a_1 + 6d) = 0 \Rightarrow a_1 = d \text{ یا } a_1 = -6d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = 1 \text{ یا } \frac{a_1}{d} = -6$$

$$\frac{a_5}{d} = \frac{a_1 + 4d}{d} = \frac{a_1}{d} + 4 = 5 \text{ یا } 2$$

گام چهارم: نسبت جمله پنجم به d را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۹

در مثلث ABC ، $\tan \hat{A} = \frac{3}{4}$ و $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$ است. اگر $BC = 30$ باشد، مساحت این مثلث کدام است؟

۳۲۴ (۴)

۲۴۶ (۳)

۳۱۲ (۲)

۲۸۸ (۱)

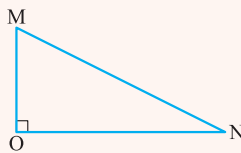
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شکل رسم کنید و این نکته را هم حتماً از هندسه یاد گرفته‌اید که اغلب سؤالات هندسه با رسم یک پاره‌خط (که در شکل

نیست) ساده‌تر حل می‌شوند، پس فکر کنید که چه جزئی باید اضافه کنیم؟

درس نامه •• تعریف نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی را به صورت جدول زیر تعریف کنیم:

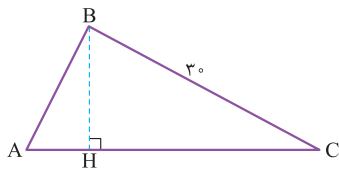


	تعریف	مثال‌ها در مثلث
sin	مقابل وتر	$\sin \hat{N} = \frac{OM}{MN}$, $\sin \hat{M} = \frac{ON}{MN}$
cos	مجاور وتر	$\cos \hat{N} = \frac{ON}{MN}$, $\cos \hat{M} = \frac{OM}{MN}$
tan	مقابل مجاور	$\tan \hat{N} = \frac{OM}{ON}$, $\tan \hat{M} = \frac{ON}{OM}$
cot	مجاور مقابل	$\cot \hat{N} = \frac{ON}{OM}$, $\cot \hat{M} = \frac{OM}{ON}$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات



پاسخ تشریحی گام اول: یک شکل برای مسئله رسم می‌کنیم:

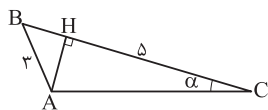
چون نسبت‌های مثلثاتی زوایای A و C را داریم، با رسم ارتفاع BH مسئله روشن می‌شود و می‌توانیم BH و AC و در نتیجه مساحت مثلث را حساب کنیم.

گام دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویه BHC و AHB به ترتیب داریم:

$$\triangle BHC: \begin{cases} \cos \hat{C} = \frac{CH}{BC} = \frac{CH}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow CH = 24 \\ BC = 5, CH = 24 \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} BH = 18 \end{cases}$$

$$\triangle AHB: \tan \hat{A} = \frac{BH}{AH} = \frac{18}{AH} = \frac{3}{2} \Rightarrow AH = 12$$

گام سوم: پس در این مثلث قاعده AC برابر 36 و ارتفاع BH برابر 18 است. پس مساحت آن برابر است با: $S = \frac{1}{2} \times 18 \times 36 = 324$



$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

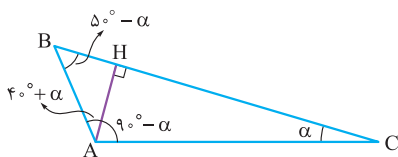
تست و پاسخ ۱۰

در مثلث ABC، زاویه A برابر 130° است. حاصل $\cot \alpha \cdot \cos(\alpha + 40^\circ)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره تعریف نسبت رو بنویس خیلی راحت حل می‌شه.

پاسخ تشریحی گام اول: زوایای شکل را بر حسب α حساب می‌کنیم:



$$\cot \alpha = \frac{CH}{AH}$$

گام دوم: در مثلث AHC داریم:

$$\cos(\alpha + 40^\circ) = \frac{AH}{AB}$$

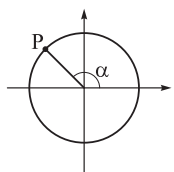
و همچنین در مثلث AHB داریم:

گام سوم: پس حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$\cot \alpha \cdot \cos(\alpha + 40^\circ) = \frac{CH}{AH} \times \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AB} = \frac{5}{3}$$

تست و پاسخ ۱۱

نقطه $P(x-1, 2x)$ مطابق شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟



$$\frac{7}{12} \quad (4)$$

$$-\frac{7}{12} \quad (3)$$

$$-\frac{25}{12} \quad (2)$$

$$\frac{25}{12} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه •• دایره مثلثاتی

دایره مثلثاتی دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱. جهت استاندارد زاویه هم در این دایره پادساعتگرد است؛ به بیان دیگر، زاویه‌ای که - شعاع مربوط به نقطه - با جهت مثبت محور Xها می‌سازد، زاویه استاندارد است.

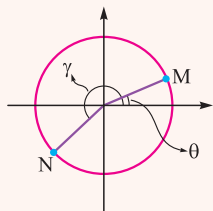
به طور مثال زاویه مربوط به نقطه M، θ و زاویه مربوط به نقطه N، γ است.

• معادله دایره مثلثاتی $x^2 + y^2 = 1$ است. پس مختصات هر نقطه روی آن باید در این معادله صدق کند.

• اگر نقطه $M(x_0, y_0)$ روی دایره مثلثاتی باشد که زاویه مربوط به آن θ است، داریم:

$$\cos \theta = x_0, \sin \theta = y_0.$$

$$\tan \theta = \frac{y_0}{x_0}, \cot \theta = \frac{x_0}{y_0}.$$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی گام اول: مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی باید در معادله $x^2 + y^2 = 1$ صدق کند. پس برای نقطه P داریم:
 $(x-1)^2 + (2x)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $\frac{2}{5}$

که با توجه شکل $x = 0$ غیر قابل قبول است.

گام دوم: پس مختصات نقطه P به صورت $P(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ است.

گام سوم: و داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{4}{2}, \cot \alpha = -\frac{2}{4}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -\frac{4}{2} + \frac{2}{4} = -\frac{7}{2}$$

گام چهارم: در نهایت عبارت مورد نظر برابر است با:

تست و پاسخ ۱۲

اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3)$$

$$\frac{7}{9} \quad (2)$$

$$\frac{8}{9} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه ••• رابطه نسبت‌های مثلثاتی

بین نسبت‌های مثلثاتی رابطه‌های مقدماتی زیر را داریم:

(۱) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(۲) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cos \alpha \neq 0$

(۳) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \sin \alpha \neq 0$

(۴) $\tan \alpha \cot \alpha = 1, \sin \alpha \cos \alpha \neq 0$

(۵) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \cos \alpha \neq 0$

(۶) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \sin \alpha \neq 0$

۱) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

۲) $(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha$

نکات

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا طرفین تساوی صورت سؤال را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{15}{9} \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

گام دوم: می‌رویم سراغ عبارت مجهول سؤال و شروع می‌کنیم به ساده کردن:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \underbrace{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{\text{فاکتور می‌گیریم}} = 1 - \cos^2 \alpha \underbrace{(1 - \cos^2 \alpha)}_{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - (\sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

گام سوم: از گام اول به دست آورده بودیم که $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$

تست و پاسخ ۱۳

با توجه به شکل مقابل، حاصل عبارت $T = \sqrt{13}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$ کدام است؟

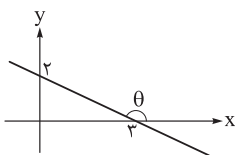
$$-\frac{19}{13} \quad (2)$$

$$\frac{19}{13} \quad (1)$$

$$-\frac{35}{13} \quad (4)$$

$$\frac{35}{13} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

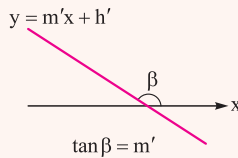
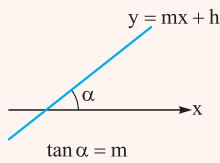
ریاضیات

مشاوره حواستان باشد که در مثلثات، علاوه بر تسلط بر رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی، به تسلط بر اتحادهای جبری هم نیاز دارید.

خودت حل کنی بهتره از روی \tan می‌تونی \sin و \cos رو حساب کنی؟

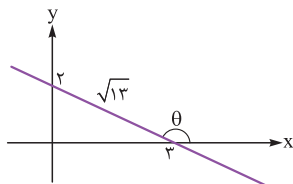
درس نامه ●● رابطه شیب خط و تانژانت

شیب هر خط، برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با قسمت مثبت محور Xها می‌سازد:



پاسخ تشریحی گام اول: شیب خط داده شده برابر $-\frac{2}{3}$ است، در نتیجه $\tan \theta = -\frac{2}{3}$.

گام دوم: θ زاویه‌ای منفرجه (در ربع دوم دایره مثلثاتی) است، پس $\sin \theta$ مثبت و $\cos \theta$ منفی است. حال با توجه به شکل مقابل به دست می‌آید:



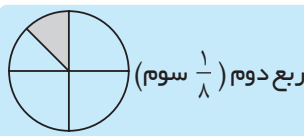
$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$T = \sqrt{13} \left(\frac{8}{13\sqrt{13}} - \frac{27}{13\sqrt{13}} \right) = \frac{8}{13} - \frac{27}{13} = -\frac{19}{13}$$

گام سوم: مقدار عبارت T را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۱۴

اگر $90^\circ < \theta < 135^\circ$ و $\frac{22}{25} = (1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta)$ باشد، حاصل $\tan \theta + \cot \theta$ کدام است؟



$$-\frac{25}{8} \quad (4)$$

$$\frac{25}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{25}{4} \quad (2)$$

$$\frac{25}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه ●● علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم	ربع اول	θ	
sin منفی و cos مثبت		sin مثبت و cos منفی		cos و sin	
$315^\circ < \theta < 360^\circ$	$270^\circ < \theta < 315^\circ$	$135^\circ < \theta < 180^\circ$	$90^\circ < \theta < 135^\circ$		هر دو مثبت
$ \cos \theta > \sin \theta $	$ \sin \theta > \cos \theta $	$ \sin \theta < \cos \theta $	$ \sin \theta > \cos \theta $		
هر دو منفی		هر دو منفی		cot و tan	
$315^\circ < \theta < 360^\circ$	$270^\circ < \theta < 315^\circ$	$135^\circ < \theta < 180^\circ$	$90^\circ < \theta < 135^\circ$		هر دو مثبت
$ \tan \theta < \cot \theta $	$ \tan \theta > \cot \theta $	$ \tan \theta < \cot \theta $	$ \tan \theta > \cot \theta $		

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (*)$$

پاسخ تشریحی گام اول: این را می‌دانیم که:

پس هدف محاسبه $\sin \theta \cos \theta$ است.

گام دوم: عبارت $\sin \theta + \cos \theta$ را X می‌گیریم، داریم:

$$x^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

گام سوم: حال تساوی داده شده در صورت سؤال را بسط می دهیم:

$$(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta) = \frac{32}{25} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta + 1 = \frac{32}{25} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{25}$$

گام چهارم: تساوی های گام دوم را جای گذاری می کنیم:

$$x + \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{7}{25} \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{39}{25} \xrightarrow{+1} x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = \frac{64}{25}$$

$$\Rightarrow x + 1 = \pm \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ یا } x = -\frac{13}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

حواسمان هست که $90^\circ < \theta < 135^\circ$ است، پس طبق درس نامه و شکل تعبیر $|\sin \theta| > |\cos \theta|$ و در نتیجه x مثبت است.

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{8}{25} \xrightarrow{*} \tan \theta + \cot \theta = -\frac{25}{8}$$

گام پنجم:

تست و پاسخ ۱۵

گر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{9}$ و $135^\circ < x < 180^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

$$-\frac{1}{2} (4)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$

$$\frac{3}{4} (2)$$

$$-\frac{3}{4} (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه •• چند رابطه مثلثاتی دیگر

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

پاسخ تشریحی گام اول:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{7}{9} \Rightarrow (\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{9} \xrightarrow{x \text{ ربع دوم است}} \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

گام دوم:

در بازه $135^\circ < x < 180^\circ$ ، قدرمطلق \cos بیشتر است ($|\cos x| > |\sin x|$). پس $\sin x + \cos x$ منفی است.

$$A = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}$$

گام سوم: عبارت A را ساده می کنیم:

$$A = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \frac{1}{3})} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

گام چهارم: مقادیر عبارت ها را جای گذاری می کنیم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

هندسه دهم

تست و پاسخ ۱۶

تعداد اضلاع یک چندضلعی محدب، با تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است. اگر تعداد قطرهای چندضلعی محدب برابر ۱۷۰ باشد، از هر رأس n ضلعی چند قطر می‌گذرد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ساده‌ای است که با دانستن فرمول محاسبه تعداد قطرهای چندضلعی محدب قابل حل است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا تعداد اضلاع چندضلعی محدبی که ۱۷۰ قطر دارد را محاسبه کن. حالا به دست بیاور که کدام چندضلعی این تعداد قطر دارد.

درس نامه

از هر رأس n ضلعی محدب $n - 3$ قطر عبور می‌کند، در نتیجه هر n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ قطر دارد.

پاسخ تشریحی گام اول (به دست آوردن تعداد اضلاع چندضلعی اول): طبق فرمول تعداد قطرهای چندضلعی اول، داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 170 \Rightarrow n(n-3) = 2 \times 170 = 20 \times 17 \Rightarrow n = 20$$

پس تعداد قطرهای n ضلعی ۲۰ تا است.

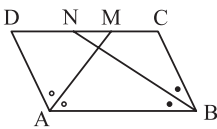
گام دوم (به دست آوردن تعداد اضلاع چندضلعی دوم): تعداد قطرهای این چندضلعی ۲۰ تا است، پس داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Rightarrow n(n-3) = 40 = 8 \times 5 \Rightarrow n = 8$$

این چندضلعی، ۸ ضلعی است، بنابراین تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس آن $n - 3 = 5$ است.

تست و پاسخ ۱۷

مطابق شکل، نیمسازهای دو زاویه A و B ، ضلع CD از متوازی‌الاضلاع را در نقاط M و N قطع کرده‌اند. طول MN برابر با کدام گزینه است؟



$$\frac{AB - BC}{2} \quad (۲)$$

$$AB - BC \quad (۱)$$

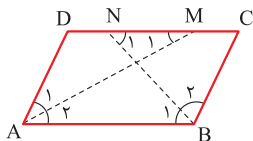
$$2AD - AB \quad (۴)$$

$$\frac{AB + CD}{4} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره با استفاده از خطوط موازی - مورب و با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، خواسته صورت سؤال را به دست بیاور.

پاسخ تشریحی با استفاده از قضیه خطوط موازی - مورب و نیمساز بودن AM و BN داریم:



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r = \hat{M}_1 \Rightarrow AD = DM \quad \Delta AMD \text{ متساوی‌الساقین است,}$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_r = \hat{N}_1 \Rightarrow BC = CN \quad \Delta BNC \text{ متساوی‌الساقین است,}$$

$$MN = DM + CN - DC = AD + \frac{BC}{AD} - \frac{DC}{AB} = 2AD - AB$$

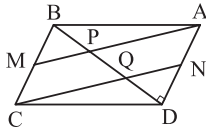


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۱۸

مطابق شکل، M و N وسط ضلع‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. اگر $\hat{ADB} = 90^\circ$ ، $MC = 3/5$ و $CD = 25$ ، آن‌گاه طول ضلع AP



$$\sqrt{185} \quad (2)$$

$$\sqrt{305} \quad (4)$$

کدام است؟

$$4\sqrt{5} \quad (1)$$

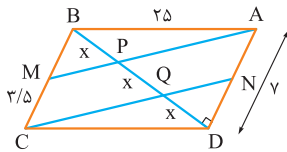
$$10\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این سؤال، با ایده گرفتن از یکی از تمرین‌های کتاب درسی هندسه ۱ طرح شده است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با کمک تالس PQ ، BP و QD را به دست بیاور و برای محاسبه AP از فیثاغورس کمک بگیر.

درس نامه ●● اگر دو ضلع یک چهارضلعی موازی و مساوی باشد، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه PQ ، BP و QD): طبق نکته درس‌نامه چون $MC = AN$ و

$MC \parallel AN$ است، چهارضلعی $AMCN$ متوازی‌الاضلاع است و $AM \parallel NC$ است. حالا طبق قضیه

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BP}{PQ} = 1 \Rightarrow BP = PQ = x$$

تالس در مثلث BQC داریم:

و طبق قضیه تالس در مثلث ADP داریم:

$$\frac{DQ}{QP} = \frac{DN}{AN} = 1 \Rightarrow DQ = QP = x$$

گام دوم (محاسبه AP): مثلث ABD قائم‌الزاویه است، پس طبق فیثاغورس در آن داریم:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD^2 = 25^2 - 7^2 \Rightarrow BD = 24$$

$$BD = 3x \Rightarrow 24 = 3x \Rightarrow BP = PQ = QD = 8$$

$$AP^2 = AD^2 + PD^2 \Rightarrow AP^2 = 7^2 + 16^2 = 305 \Rightarrow AP = \sqrt{305}$$

طبق فیثاغورس در مثلث APD داریم:

تست و پاسخ ۱۹

در یک دوزنقه متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۳ و ۹ و طول هر ساق ۴ واحد است. اگر وسط‌های دو قاعده و وسط‌های دو قطر این دوزنقه را به طور متوالی به یکدیگر وصل کنیم، آن‌گاه محیط چهارضلعی حاصل کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

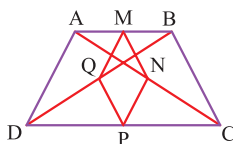
پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره با استفاده از قضیه تالس و عکس آن، طول اضلاع چهارضلعی را برحسب اضلاع متوازی‌الاضلاع به دست بیاور.

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبه اندازه اضلاع چهارضلعی برحسب اضلاع متوازی‌الاضلاع):

$$\text{طبق فرض: } \frac{MB}{MA} = \frac{BQ}{QD} = 1 \xrightarrow[\text{در } \hat{ADB}]{\text{عکس تالس}} MQ \parallel AD \xrightarrow[\text{در } \hat{ADB}]{\text{تعمیم تالس}} \frac{MQ}{AD} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = \frac{AD}{2}$$



$$\text{به دلیل مشابه در مثلث‌های } ABC, BDC, \text{ و } ADC \text{ به ترتیب، } MN = \frac{BC}{2}, NP = \frac{AD}{2} \text{ و } PQ = \frac{BC}{2}$$

گام دوم (محاسبه محیط چهارضلعی $MNPQ$):

$$\text{محیط } MNPQ = MN + PQ + NP + MQ = \frac{BC}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} = BC + AD = 4 + 4 = 8$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۲۰

از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳، یک چهارضلعی حاصل شده است. بیشترین فاصله نقاط واقع بر محیط این چهارضلعی، از نقاط واقع بر محیط مستطیل کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

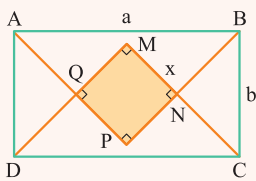
$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه •• شکل حاصل از برخورد نیمسازهای مستطیل

اگر نیمسازهای داخلی یک مستطیل به طول a و عرض b را رسم کنید، یک مربع به وجود می‌آید که طول قطر آن برابر است با $a - b$ ، پس:

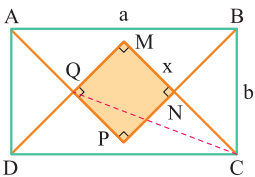


$$\text{طول ضلع مربع MNPQ} : x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{طول} - \text{عرض}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b)$$

پس نسبت مساحت‌هایشان هم می‌شود:

$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right)^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{2ab}$$

پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال): طبق درس‌نامه متوجه شدیم که مربع MNPQ مربع است و از طرفی با توجه به



شکل، بیشترین فاصله نقاط واقع بر مربع از نقاط واقع بر مستطیل برابر با طول پاره خط QC است.

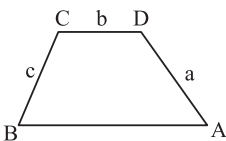
گام دوم (محاسبه طول ضلع مربع): از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد $a = 3$ و $b = 2$ ، مربعی به طول ضلع $\frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به وجود می‌آید؛ پس $MQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

گام سوم (محاسبه MC): مثلث قائم الزاویه با زاویه 45° است (چون CM نیمساز \hat{C} است). پس: $MC = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال): حالا با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه MCQ داریم:

$$MQ^2 + MC^2 = QC^2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{18}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 = QC^2 \Rightarrow QC = \sqrt{5}$$

تست و پاسخ ۲۱

در شکل رسم‌شده، AB و CD موازی هستند و اندازه زاویه D دو برابر اندازه زاویه B و اندازه‌های AD، CD و BC به ترتیب a ، b و c هستند. اندازه AB کدام است؟



$a + c$ (۲)

$\frac{1}{2}(a + b + c)$ (۱)

$a + b$ (۴)

$b + c$ (۳)

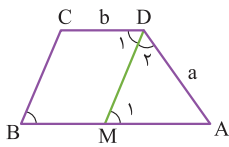
پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره از D خطی موازی BC رسم کن تا یک متوازی‌الاضلاع بسازی.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات



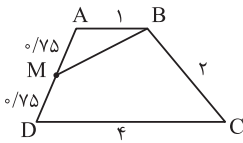
پاسخ تشریحی از رأس D خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AB را در M قطع کند.

در این صورت چهارضلعی BCDM متوازی‌الاضلاع است چون اضلاعش دوجه‌دو با هم موازی‌اند.

در نتیجه $BC = MD$ و $BM = CD = b$ و از طرفی بنا بر قضیه خطوط موازی - مورب و خاصیت متوازی‌الاضلاع داریم $\hat{B} = \hat{D}_1 = \hat{M}_1$ و از آنجا که $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \hat{D} = 2\hat{B}$ پس $\hat{D}_1 = \hat{M}_1$ در نتیجه مثلث AMD در رأس A متساوی‌الساقین است؛ پس $AM = AD = a$ اکنون داریم:
 $AB = AM + BM = a + b$

تست و پاسخ ۲۲

مطابق شکل، نسبت مساحت مثلث ABM به مساحت دوزنقه ABCD کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{10}$

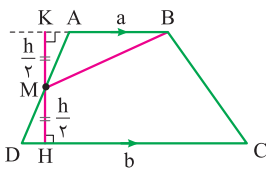
پاسخ: گزینه ۴

خود حل کنی بهتره ارتفاع دوزنقه را به طوری که از نقطه M بگذرد رسم کن و سپس مساحت مثلث و دوزنقه را بنویس. باید دنبال پاره‌خط‌های برابر بگردی.

پاسخ تشریحی

ابتدا ارتفاع دوزنقه را به طوری که از نقطه M بگذرد، رسم می‌کنیم. گام اول (پیدا کردن مثلث‌های همنهشت):

در شکل مقابل مثلث‌های قائم‌الزاویه AMK و DMH بنا به حالت تساوی وتر و یک زاویه حاده همنهشت هستند، زیرا $AM = MD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاویه M متقابل به رأس است. پس $MK = MH = \frac{1}{2}h$



$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}MK \cdot AB}{\frac{1}{2}KH \cdot (AB + CD)} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{h}{2})(a)}{\frac{1}{2}(h)(a + b)} = \frac{a}{2(a + b)} = \frac{1}{2(1 + 4)} = \frac{1}{10}$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

تست و پاسخ ۲۳

در مثلث ABC، زاویه بین دو میانه AM و BN برابر 120° است. اگر $BN = 2AM$ ، آن‌گاه فاصله نقطه N از میانه AM، چند برابر طول این میانه است؟

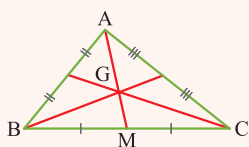
- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره نقطه هم‌رسی میانه‌ها در مثلث نقطه مهمی است؛ ویژگی‌های آن را بلد باشید.

خود حل کنی بهتره اندازه AG و GN را بر حسب AM به دست بیاورید؛ سپس از N ارتفاع مثلث AGN را رسم کنید و اندازه آن را به دست آورید.

درس نامه



$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} AG = \frac{2}{3}AM \\ GM = \frac{1}{3}AM \end{cases}$$

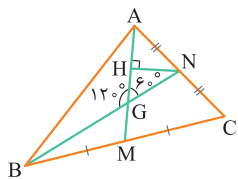
(۱) نقطه تلاقی سه میانه مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

(۲) اندازه ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{4}$ طول ضلع است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات



گام اول: با توجه به شکل، زاویه حاده بین دو میانه AM و BN می شود 60° . از طرفی G نقطه

همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس داریم:

$$\begin{cases} AG = \frac{2}{3} AM \xrightarrow{AM=x} AG = \frac{2}{3} x \\ GN = \frac{1}{3} BN \xrightarrow{BN=2AM=2x} GN = \frac{2}{3} x \end{cases} \Rightarrow AG = GN = \frac{2}{3} x$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

در مثلث AGN دیدیم $AG = GN$ و $\hat{A}GN = 60^\circ$ ؛ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است و ارتفاع آن برابر است با:

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ طول ضلع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

تست و پاسخ ۲۴

در مثلث ABC، اگر $AB = AC = 2$ ، $\hat{B} = 75^\circ$ و D نقطه‌ای واقع بر ضلع BC باشد، به طوری که $DB = 2DC$ ، آن‌گاه مجموع فاصله‌های M

از دو ساق کدام است؟

۴ (۴)

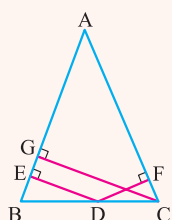
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

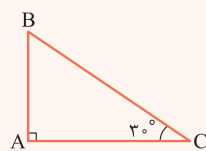
پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه واقع بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین، از دو ساق آن برابر با چه بود؟



$$ED + FD = GC$$

در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه 3° ، ضلع روبه‌روی این زاویه، نصف وتر است.



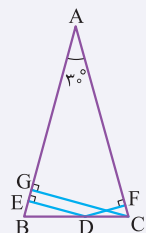
$$AB = \frac{BC}{2}$$

پاسخ تشریحی

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، چون زاویه‌های روبه‌روی قاعده‌ها $\hat{B} = \hat{C} = 75^\circ$ هستند پس زاویه رأس آن $\hat{A} = 3^\circ$ است. با توجه به

شکل، در مثلث قائم‌الزاویه AGC، $\hat{A} = 3^\circ$ پس طول GC نصف طول AC است، پس $CG = 1$ و در نتیجه:

$$ED + FD = CG = 1$$



توجه دانستن $2MC = MB$ در حل سوال بی‌تأثیر است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۲۵

مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای که حداقل تعداد نقاط مرزی را دارد، برابر $9/5$ است. تعداد نقاط درونی این چندضلعی، چند برابر تعداد نقاط مرزی آن است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

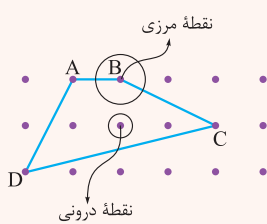
۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره هر چندضلعی شبکه‌ای، حداقل ۳ نقطه مرزی دارد.

درس نامه •• نقاط شبکه‌ای و مساحت



در یک صفحه شبکه‌ای که فاصله دو نقطه متوالی روی یک خط افقی یا عمودی برابر واحد است، اگر یک چندضلعی طوری در این صفحه واقع شود که رأس‌های چندضلعی، نقاط این صفحه باشند، چندضلعی را شبکه‌ای می‌گویند، مساحت چندضلعی شبکه‌ای از فرمول زیر که به فرمول پیک معروف است، به دست می‌آید: مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:

$$S = \left(\frac{\text{تعداد نقاط مرزی}}{2} - 1 \right) + \text{تعداد نقاط درونی}$$

دقت کنید که نقاط مرزی نقاطی هستند که روی ضلع‌ها یا رأس‌های چندضلعی و نقاط درونی داخل چندضلعی قرار دارند. مثلاً در شکل بالا مساحت می‌شود:

$$S = \frac{4}{2} - 1 + 3 = 4$$

توجه حواستان باشد! که حداقل تعداد نقاط مرزی در چندضلعی شبکه‌ای ۳ تا است.

پاسخ تشریحی حداقل تعداد نقاط مرزی چندضلعی شبکه‌ای برابر با ۳ تا است. یعنی در این چندضلعی شبکه‌ای $b = 3$ می‌باشد. اگر تعداد نقاط درونی را (i) بگیریم؛ آن‌گاه:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 9/5 = \frac{3}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 9$$

بنابراین:

$$\frac{i}{b} = \frac{9}{3} = 3$$



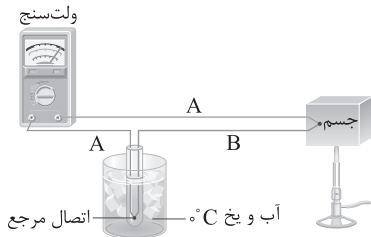
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

فیزیک دهم

تست و پاسخ ۲۶

شکل زیر، طرح ساده‌ای از کدام وسیله را نشان می‌دهد و کاربرد اصلی این وسیله کدام است؟



- (۱) ترموکوپل، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی وسایل گرمایشی و سرمایشی
- (۲) ترموستات، اندازه‌گیری دما در مدارهای الکترونیکی وسایل گرمایشی و سرمایشی
- (۳) ترموکوپل، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی
- (۴) ترموستات، کلید الکتریکی حسگرهای گرمایی

پاسخ: گزینه ۱

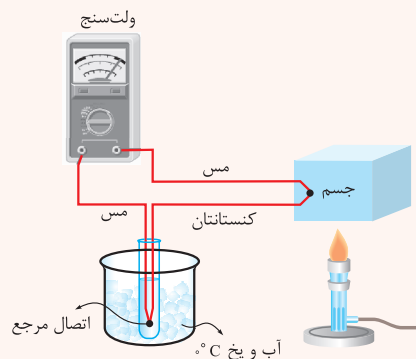
مشاوره کنکور ۱۴۰۳ به ما نشان داده است که طراح‌ها علاقه زیادی به سؤال‌هایی از متن و شکل‌های کتاب درسی دارند، پس متن کتاب را به دقت بخوانید.

درس نامه

دماسنج ترموکوپل تا پیش از سال ۱۹۹۰ میلادی جزء دماسنج‌های معیار بوده است. این دماسنج کاربرد فراوانی در صنعت و آزمایشگاه دارد (در مدارهای الکترونیکی و بسیاری از وسایل صنعتی، گرمایشی و سرمایشی به کار می‌رود). کمیت دماسنجی این دماسنج، ولتاژ است.

شکل مقابل طرحی از یک دماسنج ترموکوپل را نشان می‌دهد:

گستره دماسنجی ترموکوپل به جنس سیم‌های آن بستگی دارد. به دلیل جرم کوچک محل اتصال، دمای جسم را خیلی سریع اندازه می‌گیرد.



پاسخ تشریحی با توجه به درس‌نامه‌ای که بررسی کردیم، شکل، مربوط به ترموکوپل است و در مدارهای الکترونیکی وسایل گرمایشی و سرمایشی استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۲۷

اگر دمای جسمی برحسب درجه سلسیوس ۵ برابر شود، دمای آن برحسب درجه فارنهایت ۲۷ واحد کاهش می‌یابد. دمای اولیه این جسم چند کلون بوده است؟ ($^{\circ}\text{C} = -273/15^{\circ}\text{K}$)

$$269/4 \quad (2)$$

$$276/9 \quad (1)$$

$$276/15 \quad (4)$$

$$270/15 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ ، دمای اولیه جسم را برحسب درجه سلسیوس به دست آورید؛ سپس از رابطه $T = \theta + 273/15$ ، دمای اولیه جسم را برحسب کلون محاسبه کنید.

درس نامه

سه مقیاس دمای متداول که در کتاب درسی بررسی می‌کنیم به صورت زیر هستند:

سلسیوس (θ) ← یکان $^{\circ}\text{C}$

کلون (T) ← یکان K (یکای دما در SI کلون است).

فارنهایت (F) ← یکان $^{\circ}\text{F}$

$$T \approx \theta + 273, \quad F = \frac{9}{5}\theta + 32$$

روابط بین مقیاس‌های دما به صورت مقابل است:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

روابط بین تغییرات دما در مقیاس‌های مختلف دما به صورت زیر است:

$$\Delta T = \Delta \theta, \quad \Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta = \frac{9}{5} \Delta T$$

پاسخ تشریحی گام اول: اگر دمای اولیه جسم را θ_1 در نظر بگیریم، دمای ثانویه θ_2 است. طبق رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ داریم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \xrightarrow{\Delta F = -27^\circ F, \Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = 4\theta_1} -27 = \frac{9}{5} (4\theta_1) \Rightarrow \theta_1 = -\frac{27 \times 5}{9 \times 4} = -3/75^\circ C$$

گام دوم: دمای اولیه جسم را بر حسب کلونین به دست می‌آوریم:

$$T_1 = \theta_1 + 273/15 = -3/75 + 273/15 = 269/4 K$$

تست و پاسخ ۲۸

در شکل زیر، میله فولادی به طول ۲ m بین دو دیواره ثابت قرار دارد و فاصله هر انتهای میله از دیوار مجاورش ۱ mm است. دمای میله، حداقل چند درجه فارنهایت افزایش یابد تا میله با دیواره‌ها تماس پیدا کند؟ (ضریب انبساط طولی فولاد $\frac{1}{K} \times 10^{-5} \times 1/25$ است.)



۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

۱۴۴ (۴)

۷۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره از رابطه $\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$ برای محاسبه تغییرات دما بر حسب درجه سلسیوس استفاده کنید (تغییر طول میله را ۲ mm در نظر بگیرید، چون میله از دو طرف تغییر طول می‌دهد)، سپس از رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ برای محاسبه تغییر دما بر حسب درجه فارنهایت استفاده کنید.

درس نامه

اگر دمای میله‌ای با طول اولیه L_1 ، به اندازه $\Delta \theta$ تغییر کند، طول میله به اندازه ΔL تغییر می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

تغییرات دما بر حسب کلونین یا سلسیوس

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$$

ضریب انبساط طولی ($\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C}$)

اگر دمای جسمی بر حسب سلسیوس به اندازه $\Delta \theta$ تغییر کند، تغییر دمای آن بر حسب فارنهایت (ΔF) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$$

پاسخ تشریحی گام اول: برای این که میله فولادی با دیواره‌ها برخورد کند، تغییرات طول میله باید ۲ mm باشد (۱ mm از هر طرف). به کمک رابطه $\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$ داریم:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta \Rightarrow 2 = 1/25 \times 10^{-5} \times 2000 \times \Delta \theta \Rightarrow$$

طول اولیه بر حسب میلی‌متر

$$2 = 2/5 \times 10^{-2} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{2}{2/5 \times 10^{-2}} = \frac{200}{2/5} = 80^\circ C$$

حواستون باشه در رابطه $\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta$ ، باید یکای ΔL و L_1 یکسان باشد؛ مثلاً می‌تواند هر دو میلی‌متر یا هر دو سانتی‌متر باشد و لزومی ندارد یکای آن‌ها در واحد SI باشد.

گام دوم: حال به کمک رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ تغییرات دما را بر حسب درجه فارنهایت به دست می‌آوریم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta = \frac{9}{5} (80) = 144^\circ F$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

تست و پاسخ ۲۹

اگر دمای یک کره فلزی توپر ۱۴۴K افزایش یابد، مساحت سطح آن ۲۴٪ درصد افزایش می‌یابد. اگر دمای همین کره ۱۰۰K افزایش یابد، چگالی آن تقریباً چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۲۵٪، کاهش می‌یابد. (۲) ۴۵٪، کاهش می‌یابد.
 (۳) ۲۵٪، افزایش می‌یابد. (۴) ۴۵٪، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطه $\frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = (2\alpha) \Delta\theta \times 100$ که بیانگر درصد تغییرات مساحت است، α (ضریب انبساط طولی) را به دست آورید، سپس در حالت دوم درصد تغییرات چگالی را به کمک رابطه $\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \times 100 = -(3\alpha) \Delta\theta \times 100$ محاسبه کنید.

درس نامه

معمولاً با افزایش دمای جسم، طول، سطح و حجم جسم افزایش می‌یابد. اگر دمای یک جسم به اندازه $\Delta\theta$ تغییر کند در این صورت داریم:

$$\text{درصد تغییرات طول} = \alpha \Delta\theta \times 100$$

$$\text{درصد تغییرات سطح} = (2\alpha) \Delta\theta \times 100$$

$$\text{درصد تغییرات حجم} = (3\alpha) \Delta\theta \times 100 = \beta \Delta\theta \times 100$$

$$\text{درصد تغییرات چگالی} = -(3\alpha) \Delta\theta \times 100 = -\beta \Delta\theta \times 100$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به این که با افزایش دما به اندازه ۱۴۴K، مساحت کره ۲۴٪ درصد افزایش یافته، به کمک رابطه زیر، ضریب انبساط طولی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = (2\alpha) \Delta\theta \times 100 = 0.24 \Rightarrow 2\alpha \times 144 \times 100 = 24 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{24 \times 10^{-2}}{2 \times 144 \times 100} = \frac{10^{-4}}{12} \text{ K}$$

گام دوم: درصد تغییرات چگالی را به کمک رابطه $-(3\alpha) \Delta\theta \times 100$ در حالت دوم که دما ۱۰۰K افزایش یافته است را به دست می‌آوریم:

$$\text{علامت منفی پاسخ بیانگر کاهش چگالی است.} \quad \text{درصد تغییرات چگالی} = -3\alpha \Delta\theta \times 100 = -3 \times \frac{10^{-4}}{12} \times 100 \times 100 = -25$$

تست و پاسخ ۳۰

در دمای ۲۰°C، در ظرفی به گنجایش ۱L و ضریب انبساط طولی $\frac{1}{K}$ ، 10^{-4} ، 900 cm^3 از مایعی به ضریب انبساط حجمی $\frac{1}{K}$ وجود دارد. با افزایش دمای مجموعه، در دمای چند درجه فارنهایت، مایع از ظرف سرریز می‌شود؟

۱۸۷ / ۵ (۱)

۲۰۷ / ۵ (۲)

۲۲۳ / ۵ (۳)

۲۵۵ / ۵ (۴)

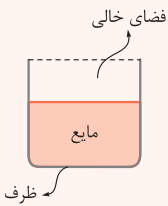
پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره تغییر حجم مایع را به کمک رابطه $\Delta V = V_{\text{مایع}} \beta \Delta\theta$ به دست آورید و این تغییر حجم را با مجموع حجم فضای خالی اولیه و تغییر حجم ظرف بر اثر انبساط $(3\alpha) \Delta\theta$ ظرف $(\Delta V = V_{(1)})$ برابر قرار دهید تا $\Delta\theta$ و در نهایت دمای ثانویه را برحسب فارنهایت محاسبه کنید.



درس نامه

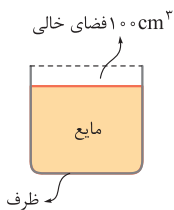
شکل زیر، یک ظرف را نشان می‌دهد که درون آن مایعی با حجم $V_{\text{مایع}}$ و ضریب انبساط حجمی β ریخته شده است. اگر حجم ظرف را با $V_{\text{ظرف}}$ نمایش دهیم، در این صورت حداکثر تغییر دما برای این که مایع از ظرف لبریز نشود از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_{\text{فضای خالی}} + \Delta V_{\text{ظرف}} \Rightarrow V_1(\text{مایع}) \beta \Delta \theta = V_{\text{فضای خالی}} + V_1(\text{ظرف}) (\alpha \Delta \theta)$$

پاسخ تشریحی گام اول: زمانی مایع از ظرف سرریز می‌شود که تغییرات حجم مایع برابر با حجم فضای خالی داخل ظرف باشد و علاوه بر آن بتواند تغییر حجم ظرف را هم پوشش دهد (چون علاوه بر افزایش حجم مایع، ظرف هم منبسط می‌شود).

شکل مقابل تصویری از ظرف به گنجایش $1L = 1000 \text{ cm}^3$ و مایع به حجم 900 cm^3 را نشان می‌دهد:



$$\Delta V_{\text{مایع}} = 100 \text{ cm}^3 + \Delta V_{\text{ظرف}}$$

شرط سرریز شدن مایع

گام دوم: شرط سرریز شدن مایع در گام اول را به صورت عددی می‌نویسیم تا دمای ثانویه را به دست آوریم:

$$\Delta V_{\text{مایع}} = 100 \text{ cm}^3 + \Delta V_{\text{ظرف}} \Rightarrow V_1(\text{مایع}) \beta \Delta \theta = 100 + V_1(\text{ظرف}) \beta \Delta \theta$$

$$\Rightarrow 900 \times 1 / 4 \times 10^{-3} \Delta \theta = 100 + 1000 \times (3 \times 10^{-4}) \Delta \theta$$

$$\Rightarrow 1 / 26 \Delta \theta = 100 + 0 / 3 \Delta \theta \Rightarrow 0 / 96 \Delta \theta = 100 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{100}{0 / 96} = \frac{10000}{96} = \frac{625}{6}$$

$$\theta_r = \Delta \theta + \theta_1 = \frac{625}{6} + 20 = \frac{745}{6} \text{ } ^\circ\text{C}$$

گام سوم: دمای ثانویه را به کمک رابطه $F = \frac{9}{5} \theta + 32$ بر حسب فارنهایت به دست می‌آوریم:

$$F_r = \frac{9}{5} \theta_r + 32 = \frac{9}{5} \left(\frac{745}{6} \right) + 32 = 255 / 5 \text{ } ^\circ\text{F}$$

تست و پاسخ ۳۱

دمای دو جسم A و B که به ترتیب گرمای Q و 4Q دریافت کرده‌اند، به یک اندازه افزایش می‌یابد. اگر این دو جسم به ترتیب گرمای 4Q و Q دریافت کنند، افزایش دمای جسم A چند برابر افزایش دمای جسم B می‌شود؟

۴ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۱۶ (۴)

$\frac{1}{16}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

خود حل کنی بهتره رابطه $Q = mc \Delta \theta$ که بیانگر گرمای مبادله شده توسط جسم در اثر تغییر دمای آن است را در حالت اول برای

دو جسم A و B بنویسید تا به رابطه‌ای بین ظرفیت گرمایی (mc) دو جسم A و B برسید و دوباره همین روند را در حالت دوم به کار ببرید تا تغییرات دما را در حالت دوم مقایسه کنید.

درس نامه

اگر جسمی به جرم m، گرمای Q را دریافت کند یا از دست دهد، بدون این که حالت جسم تغییر کند، در این صورت داریم:

$$Q = m c \Delta \theta$$

تغییر دما (°C یا K) \rightarrow گرمای (J) \leftarrow

جرم (kg) \uparrow

ظرفیت گرمایی ویژه ($\frac{J}{\text{kg} \cdot \text{K}}$) \downarrow



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{m_A c_A \Delta\theta_A}{m_B c_B \Delta\theta_B}$$

رابطه مقایسه‌ای گرما برای دو جسم به صورت مقابل نوشته می‌شود:

پاسخ تشریحی گام اول: جسم‌های A و B به ترتیب با دریافت گرمای Q و 4Q، تغییر دمای یکسانی دارند. به کمک رابطه $Q = mc \Delta\theta$ داریم:

$$\begin{cases} Q_A = m_A c_A \Delta\theta_A \Rightarrow Q = m_A c_A \Delta\theta \\ Q_B = m_B c_B \Delta\theta_B \Rightarrow 4Q = m_B c_B \Delta\theta \end{cases} \Rightarrow 4 m_A c_A = m_B c_B$$

گام دوم: در حالت دوم که گرمای دریافت‌شده توسط جسم A، 4 برابر گرمای دریافت‌شده توسط جسم B است، داریم:

$$\frac{Q'_A}{Q'_B} = \frac{m_A c_A \Delta\theta'_A}{m_B c_B \Delta\theta'_B} \Rightarrow \frac{4Q}{Q} = \frac{m_A c_A}{4 m_A c_A} \times \frac{\Delta\theta'_A}{\Delta\theta'_B} \Rightarrow 16 = \frac{\Delta\theta'_A}{\Delta\theta'_B}$$

تست و پاسخ ۳۲

در دمای معین، چگالی مایع A، 2 برابر چگالی مایع B، گرمای ویژه مایع A، 3 برابر گرمای ویژه مایع B و ضریب انبساط حجمی مایع A، نصف ضریب انبساط حجمی مایع B است. اگر دو مایع گرمای یکسانی دریافت کنند، حجم آن‌ها به ترتیب به اندازه ΔV_A و ΔV_B افزایش می‌یابد. ΔV_A چند برابر ΔV_B است؟

$\frac{1}{12}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۱۲ (۳) ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا با برابر قراردادن گرمای دریافت‌شده توسط دو جسم A و B طبق رابطه $Q = mc \Delta\theta$ ، رابطه‌ای بین حجم اولیه و تغییر دمای دو جسم A و B به دست می‌آید؛ سپس از رابطه $\Delta V = V_1 \beta \Delta\theta$ ، تغییرات حجم دو جسم A و B را مقایسه کنید.

درس نامه ..

اگر مایعی با ضریب انبساط حجمی β در اثر تغییر دمای $\Delta\theta$ تغییر حجم دهد، رابطه زیر برقرار است:

$\Delta V = V_1 \beta \Delta\theta \rightarrow$ تغییر دما (C یا K)

β ضریب انبساط حجمی ($\frac{1}{C}$ یا $\frac{1}{K}$)

ΔV تغییر حجم

V_1 حجم اولیه

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به این که دو مایع گرمای یکسانی دریافت می‌کنند، $Q_A = Q_B$ است؛ بنابراین داریم:

$$Q_A = Q_B \Rightarrow m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B \Rightarrow \rho_A V_A c_A \Delta\theta_A = \rho_B V_B c_B \Delta\theta_B$$

$$\frac{\rho_A = 2\rho_B}{c_A = 3c_B} \rightarrow (2\rho_B) V_A (3c_B) \Delta\theta_A = \rho_B V_B c_B \Delta\theta_B$$

$$\Rightarrow 6 V_A \Delta\theta_A = V_B \Delta\theta_B$$

گام دوم: از رابطه $\Delta V = V_1 (\beta) \Delta\theta$ برای مقایسه تغییر حجم مایع‌های A و B استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_{1A} \beta_A \Delta\theta_A}{V_{1B} \beta_B \Delta\theta_B} \xrightarrow{V_{1A} = V_A, V_{1B} = V_B} \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A \Delta\theta_A}{V_B \Delta\theta_B} \times \frac{\beta_A}{\beta_B} = \frac{V_A \Delta\theta_A}{6 V_A \Delta\theta_A} \times \frac{1}{3} \frac{\beta_B}{\beta_B} = \frac{1}{12}$$

تست و پاسخ ۳۳

گرمکنی به توان 500 W و بازده 63 درصد را درون 300 g آب با دمای 10°C قرار می‌دهیم. دمای آب پس از 200 s به چند درجه سلسیوس

می‌رسد؟ ($c = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}$)

۲۵ (۱) ۳۵ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

خودت حل کنی بهتره از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ برای محاسبه تغییر دما استفاده کنید، البته به جای Q معادل آن یعنی $Pt \times Ra$ را در معادله قرار داده و در نهایت دمای ثانویه را به دست آورید.

درس نامه

به آهنگ انرژی گرمایی، توان گرمایی گفته می شود که به کمک رابطه $P = \frac{Q}{t}$ به دست می آید. این رابطه می تواند به صورت ترکیبی زیر استفاده شود:

$$Q = mc \Delta\theta \Rightarrow Pt = mc \Delta\theta$$

$$Q = mL_F \Rightarrow Pt = mL_F$$

$$Q = mL_V \Rightarrow Pt = mL_V$$

در صورتی که بازده گرمکن، صددرصد نباشد باید اثر آن را لحاظ کنیم و توان گرمایی مفید را در رابطه بالا قرار دهیم.

پاسخ تشریحی گام اول: به کمک رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، تغییرات دمای آب را به دست می آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \begin{matrix} \uparrow \text{توان گرمکن} \\ (Pt) \times Ra = mc\Delta\theta \Rightarrow 500 \times 200 \times 0.63 = 0.3 \times 4200 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{63 \times 1000}{3 \times 420} = 50^\circ\text{C} \\ \downarrow \text{بازدهی گرمکن} \end{matrix}$$

گام دوم: دمای ثانویه آب را به دست می آوریم:

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1 \Rightarrow 50 = \theta_p - 10 \Rightarrow \theta_p = 60^\circ\text{C}$$

تست و پاسخ ۳۴

در فشار 1 atm، مقداری آب 40°C ، با دریافت گرما به جوش آمده و به طور کامل تبخیر می شود. چند درصد از گرمای دریافتی آب صرف تبخیر آن

شده است؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ و $L_V = 2268 \text{ J/g}$ تبخیر سطحی ناچیز است.)

۹۹ (۴)

۹۰ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره مقدار گرمایی که آب 40°C نیاز دارد تا به بخار 100°C برسد را به دست آورید (البته مرحله به مرحله)، سپس نسبت مقدار گرمایی که باعث تبخیر شدن آب شده است ($Q = mL_V$) را به کل گرمای دریافتی را محاسبه کنید.

درس نامه

اگر مایعی به جرم m در نقطه جوش خود قرار داشته باشد، با دریافت گرمای Q ، مایع تبخیر می شود و مقدار این گرما از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{matrix} \text{جرم (kg)} \\ \uparrow \\ Q = mL_V \leftarrow \text{گرما (J)} \\ \downarrow \\ \text{گرمای نهان تبخیر (J/kg)} \end{matrix}$$

پاسخ تشریحی گام اول: طرحواره زیر فرایندی را که باعث می شود آب با دمای 40°C به طور کامل تبخیر شود، نمایش می دهد:

$$m \text{ گرم آب } 40^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_1} m \text{ گرم آب } 100^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_2} m \text{ گرم بخار } 100^\circ\text{C}$$

گام دوم: خواسته سؤال، نسبت گرمای Q_2 (مقدار گرمایی که باعث تبخیر شدن می شود) به گرمای کل ($Q_1 + Q_2$) است:

$$\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{m L_V}{mc\Delta\theta + mL_V} = \frac{L_V}{c\Delta\theta + L_V} = \frac{2268}{4/2 \times 60 + 2268} = \frac{2268}{2520} = 0.9$$

۹۰ درصد گرمای داده شده به آب باعث تبخیر آن می شود.

خواستون باشه در رابطه بالا، m را برحسب گرم فرض کردیم، بنابراین مقدار c را برحسب $\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot^\circ\text{C}}$ قرار داده ایم که برابر $4/2 \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot^\circ\text{C}}$ است.

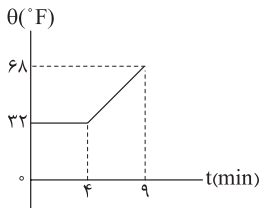


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

تست و پاسخ ۳۵

به مخلوطی از آب و یخ در حال تعادل، با آهنگ ثابت $\frac{5}{25} \frac{\text{kJ}}{\text{min}}$ گرما می‌دهیم. اگر نمودار دمای مجموعه بر حسب زمان، به شکل مقابل باشد، جرم آب در مخلوط اولیه چند کیلوگرم بوده است؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$)
($L_F = 336 \text{ J/g}$)



$$\frac{5}{16} \text{ (4)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (3)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (2)}$$

$$\frac{1}{16} \text{ (1)}$$

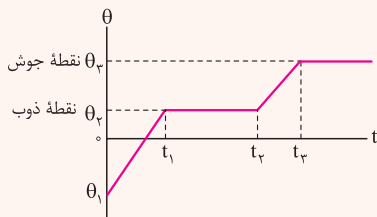
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره نمودارهای $(Q - t)$ و $(\theta - t)$ در فصل دما و گرما به سرعت! ذهن ما را به سمت توان گرمایی می‌برد و جزو سؤالاتی است که ممکن است در ابتدای راه برای شما دشوار باشد، اما با تمرین می‌توانید بر این مبحث مسلط شوید.

خودت حل کنی بهتره در ۴ دقیقه اول، رابطه $Q = m_1 L_F$ را به کار ببرید تا جرم یخ را به دست آورید، سپس در ۵ دقیقه دوم، رابطه $Q = mc\Delta\theta$ را برای جرم یخ آب شده و جرم آبی که از قبل بوده است، به کار ببرید تا جرم آب در مخلوط اولیه را محاسبه کنید.

درس نامه

در این درس نامه می‌خواهیم نمودار $(\theta - t)$ را برای یک جسم جامد بررسی کنیم:



$$(0 - t_1) \Rightarrow P \times (t_1 - 0) = mc_{\text{جامد}} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$(t_1 - t_2) \Rightarrow P \times (t_2 - t_1) = mL_F$$

$$(t_2 - t_3) \Rightarrow P \times (t_3 - t_2) = mc_{\text{مایع}} (\theta_3 - \theta_2)$$

پاسخ تشریحی گام اول: در ۴ دقیقه اول، دمای مخلوط ثابت است و گرمای داده شده صرفاً باعث ذوب شدن یخ می‌شود. اگر جرم یخ را m_1 در نظر بگیریم، طبق رابطه $Q_1 = m_1 L_F$ ، جرم یخ را به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = m_1 L_F \Rightarrow P \times t_1 = m_1 L_F \Rightarrow 5/25 \times 10^3 \times 4 = m_1 \times 336 \times 10^3 \Rightarrow m_1 = \frac{21}{336} \text{ kg} = \frac{1}{16} \text{ kg}$$

گام دوم: در بازه زمانی ۴ min تا ۹ min، جرم آب $(m_1 + m_2)$ کیلوگرم است. m_1 جرم یخی است که ذوب شده است و m_2 جرم اولیه آب است. در این بازه زمانی دمای آب از 32°F به 68°F می‌رسد؛ بنابراین داریم:

$$Q_2 = m_{\text{آب}} c \Delta\theta \Rightarrow P \times t_2 = (m_1 + m_2) \times c_{\text{آب}} \times \left(\frac{5}{9} \Delta F\right) \Rightarrow 5/25 \times 10^3 \times 5 = \left(\frac{1}{16} + m_2\right) \times 4200 \times \left(\frac{5}{9} \times 36\right) \Rightarrow$$

$$26/25 \times 10^3 = \left(\frac{1}{16} + m_2\right) \times 4200 \times 20 \Rightarrow \frac{1}{16} + m_2 = \frac{26/25 \times 10^3}{42 \times 2 \times 10^3} = \frac{5}{16}$$

$$m_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ kg}$$

تست و پاسخ ۳۶

قطعه فلزی به جرم ۶۰۰ g و دمای 100°C را در گرماسنجی با ظرفیت گرمایی 180 J/K که حاوی ۴۵۰ g آب با دمای 20°C است، می‌اندازیم. اگر پس از رسیدن به تعادل گرمایی، دمای مجموعه برابر 25°C شود، گرمای ویژه فلز در SI کدام است؟ (گرمای ویژه آب $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ و اتلاف گرما ناچیز است.)

$$460 \text{ (4)}$$

$$420 \text{ (3)}$$

$$230 \text{ (2)}$$

$$210 \text{ (1)}$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره معمولاً یکی از سؤال‌های پای ثابت دما و گرما، دمای تعادل است و هر ساله ردپای آن در کنکور دیده می‌شود. این نوع سؤال‌ها غالباً محاسبات طولانی دارند و از این بابت باید سرعت محاسبات خود را بالا ببرید.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

خود حل کنی بهتره با توجه به این که تبادل گرما با محیط صفر است، مجموع گرمایی که گرماسنج، آب و فلز با محیط مبادله می کنند باید صفر باشد.

درس نامه

اگر چند جسم با دماهای متفاوت در کنار هم قرار گیرند، بین این اجسام به دلیل اختلاف دما، گرما مبادله می شود؛ طوری که گرما از جسم با دمای بیشتر به جسم با دمای کم تر منتقل می شود. این تبادل گرما تا زمانی ادامه پیدا می کند که دمای جسم ها در یک دمایی به نام دمای تعادل (θ_e) به تفاهم برسند. برای محاسبه دمای تعادل از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0$$

پاسخ تشریحی گام اول: گرماسنج و آب درون آن با گرفتن گرما از قطعه فلز، به دمای تعادل 25°C می رسند؛ به عبارتی داریم:

$$Q_{\text{فلز}} + Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گرماسنج}} = 0$$

مجموع گرمای مبادله شده صفر است، چون اتلاف گرما ناچیز است.

گام دوم: با نوشتن رابطه بالایی و روابط گرما، گرمای ویژه فلز را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow Q_{\text{فلز}} + Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گرماسنج}} = 0$$

$$\Rightarrow (100 - \theta_e) c_{\text{فلز}} m_{\text{فلز}} + (\theta_e - 20) c_{\text{آب}} m_{\text{آب}} + C_{\text{گرماسنج}} (\theta_e - 20) = 0$$

$$0 = (100 - 25) \cdot 6 / 100 + (\theta_e - 20) \cdot 45 \cdot 4200 + 45 \cdot 25$$

$$0 = 900 + 9450 - 45 C_{\text{فلز}} \Rightarrow 45 C_{\text{فلز}} = 10350$$

$$\Rightarrow C_{\text{فلز}} = \frac{10350}{45} = 230 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$$

تست و پاسخ ۳۷

درون ظرفی 800 g آب با دمای 20°C وجود دارد. یک قطعه مسی به جرم 750 g و دمای 80°C را در آب درون این ظرف می اندازیم. اگر در این فرایند، تا برقراری تعادل گرمایی $3 / 36 \text{ kJ}$ گرما تلف شود، دمای تعادل مجموعه چند درجه سلسیوس است؟ (گرمای ویژه آب و مس به ترتیب

$$\frac{4200 \text{ J}}{\text{kg.K}} \text{ و } \frac{400 \text{ J}}{\text{kg.K}} \text{ است.)}$$

۲۸ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره مجموع مقدار گرمایی که مس باید از دست بدهد با مقدار گرمایی که آب لازم دارد تا به دمای تعادل برسد را برابر با $3 / 36 \text{ kJ}$ قرار دهیم. علت منفی بودن هم اتلاف انرژی است.

درس نامه

اگر چند جسم با دماهای مختلف در کنار هم باشند، به دلیل اختلاف دما T گرما از جسم با دمای بیشتر به جسم با دمای کم تر منتقل می شود و این روند تا زمانی ادامه پیدا می کند که دمای دو جسم برابر شود (دمای تعادل). برای محاسبه دمای تعادل در حالتی که مقداری گرما تلف شود از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = Q_{\text{تلف شده}}$$

این مقدار گرما را با علامت منفی در نظر می گیریم.

پاسخ تشریحی گام اول: 800 g گرم آب با دمای 20°C ، با دریافت گرمای Q_1 و قطعه مسی با دمای 80°C با از دست دادن گرمای Q_2 به دمای تعادل (θ_e) می رسد که طرحواره آن به صورت مشخص شده است:

$$80^\circ\text{C} \text{ گرم مس } \xleftarrow{Q_2} 750 \text{ g مس با دمای } \theta_e + 800 \text{ g آب با دمای } \theta_e \xrightarrow{Q_1} 800 \text{ گرم آب } 20^\circ\text{C}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام دوم: با توجه به این که $3/36 \text{ kJ}$ گرما تلف می‌شود، مجموع گرمای Q_1 و Q_2 برابر $3/36 \text{ kJ}$ است.

$$Q_1 + Q_2 = -3/36 \text{ kJ} \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - 20) + m_{\text{مس}} c_{\text{مس}} (\theta_e - 80) = -3/36 \text{ kJ} \Rightarrow$$

$$800 \times 4/2 \times (\theta_e - 20) + 750 \times 0/4 (\theta_e - 80) = -3/36 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 3360 (\theta_e - 20) + 300 (\theta_e - 80) = -3/36 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 11/2 (\theta_e - 20) + (\theta_e - 80) = -11/20 \Rightarrow 12/2 \theta_e - 304 = -11/2 \Rightarrow 12/2 \theta_e = 292/8 \Rightarrow \theta = 24^\circ \text{C}$$

تست و پاسخ ۳۸

مقداری یخ به جرم m و دمای 0°C را درون ظرف حاوی 900 g آب 20°C می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی، 60% درصد از جرم یخ ذوب شده باشد، m برحسب گرم کدام است؟ ($c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ، $L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و تبادل گرمایی فقط بین آب و یخ صورت می‌گیرد.)

۲۵۰ (۴)

۳۷۵ (۳)

۶۲۵ (۲)

۷۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از آن جایی که بخشی از یخ هم‌چنان در مخلوط باقی مانده است، دمای تعادل 0°C است. مقدار گرمایی که لازم است تا 60% درصد جرم یخ ($m/6$) ذوب شود را با مقدار گرمایی که 900 g آب 20°C باید از دست بدهد تا به دمای 0°C برسد، برابر قرار دهی تا به مقدار جرم یخ برسید.

درس نامه

در تعادل بین آب و یخ، دمای تعادل صفر درجه سلسیوس است. در این حالت مقدار گرمایی که آب از دست می‌دهد با مقدار گرمایی که یخ دریافت می‌کند برابر است (البته اگر تبادل گرما فقط بین آب و یخ باشد).
نکته‌ای که در تعادل گرمایی بین آب و یخ وجود دارد، این است که ممکن است سه حالت رخ دهد:
(۱) یخ در دمای صفر درجه باشد و اصلاً ذوب نشود.
(۲) مقداری از یخ ذوب شود.
(۳) یخ به طور کامل ذوب شود.

پاسخ تشریحی گام اول: پس از برقراری تعادل گرمایی بین آب و یخ، دمای هر دو به صفر درجه سلسیوس می‌رسد. 900 g آب 20°C گرما از دست می‌دهد تا به آب صفر درجه سلسیوس برسد و این مقدار گرما باعث ذوب شدن 60% درصد از جرم یخ می‌شود؛ به عبارتی در طرح‌واره زیر داریم:
 900 g آب 20°C $\xrightarrow{Q_2}$ $0/6 m + 900 \text{ g}$ آب 0°C $\xrightarrow{Q_1}$ m گرم یخ 0°C
گام دوم: از آن جا که تبادل گرما بین آب و یخ صورت می‌گیرد، مجموع گرمای Q_1 و Q_2 برابر صفر است:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta + m' L_F = 0$$

مقدار یخی که ذوب می‌شود.

$$900 \times 4/2 \times (-20) + 0/6 m \times (336) = 0 \Rightarrow -900 \times 42 \times 2 + 0/6 \times 336 m = 0$$

$$m = \frac{900 \times 42 \times 2}{0/6 \times 336} = \frac{900 \times 2}{0/6 \times 8} = \frac{1800}{4/8} = 375 \text{ g}$$

تست و پاسخ ۳۹

در چاله کوچکی 800 g آب 0°C قرار دارد. اگر در همین دما بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و باقی‌مانده آن یخ ببندد، جرم آب یخ‌زده چند گرم است؟ (گرمای نهان تبخیر آب در دمای 0°C برابر 2352 kJ/kg و گرمای نهان ذوب یخ برابر 336 kJ/kg است.)

۷۲۰ (۴)

۷۰۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

مشاوره تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید. این سؤال برگرفته از کتاب درسی است.

خودت حل کنی بهتره m گرم از آب چاله با از دست‌دادن مقداری گرما به یخ تبدیل می‌شود و بقیه آب $(800 - m)$ گرم با دریافت این مقدار گرما، تبخیر می‌شود. کافی است اندازه این دو گرما را با هم برابر قرار دهید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** اگر جرم آب یخ‌زده را m گرم در نظر بگیریم، $(800 - m)$ گرم آب با دریافت گرما تبخیر می‌شود (منظور همان تبخیر سطحی است).

$$Q_1 = (800 - m) L_V \quad \text{گرم آب گرمایی را که برای تبخیر نیاز دارد از } m \text{ گرم آبی دریافت می‌کند که تبدیل به یخ می‌شود:}$$

$$Q_2 = -m L_F$$

گام دوم: با توجه به اصل پایستگی انرژی، مجموع گرمای Q_1 و Q_2 برابر صفر است:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow (800 - m) L_V - m L_F = 0 \Rightarrow (800 - m) L_V = m L_F \Rightarrow (800 - m) 2352 = m (336)$$

$$\Rightarrow (800 - m)(\gamma) = m \Rightarrow 800 \times \gamma - \gamma m = m \Rightarrow 800 \times \gamma = \lambda m \Rightarrow m = 700 \text{ g}$$

تست و پاسخ ۴۰

در کدام یک از موارد زیر، روش انتقال گرما به درستی بیان شده است؟

الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن: رسانش گرمایی

ب) سیستم خنک‌کننده موتور اتومبیل: همرفت واداشته

پ) ذوب کردن برف اطراف توسط کلم اسکانک: تابش گرمایی

ت) سیستم گرم‌کننده مرکزی در ساختمان‌ها: همرفت طبیعی

الف و ت (۴)

پ و ت (۳)

ب و پ (۲)

الف و ب (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره طراحان سؤال کنکور جدیداً به متن کتاب درسی علاقه‌مند شده‌اند، پس کتاب درسی را خوب تحلیل کنید.

پاسخ تشریحی تک تک عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن از طریق همرفت رخ می‌دهد. ✗

ب) سیستم خنک‌کننده موتور خودرو مثالی از انتقال گرما به روش همرفت واداشته است. ✓

پ) ذوب کردن برف توسط کلم اسکانک به روش تابش گرمایی صورت می‌گیرد. ✓

ت) سیستم گرم‌کننده مرکزی در ساختمان‌ها نمونه‌ای از مثال همرفت واداشته است که در آن شماره به کمک یک تلمبه به حرکت واداشته می‌شود. ✗

تست و پاسخ ۴۱

در محفظه‌ای به حجم ۴۲ لیتر، 240 g گاز اکسیژن با دمای 7°C قرار دارد. اگر دمای این گاز 7°C افزایش یابد، فشار پیمانه‌ای آن چند برابر می‌شود؟ ($R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ ، فشار هوا 10^5 Pa و جرم مولی گاز اکسیژن 32 g/mol است.)

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{6}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا طبق رابطه $PV = nRT$ ، فشار گاز را در حالت اول محاسبه کنید و در مرحله دوم با توجه به ثابت بودن

حجم گاز، فشار گاز را پس از تغییرات دما به دست آورید. در نهایت نسبت فشارهای پیمانه‌ای را حساب کنید.

درس نامه

در یک گاز کامل (آرمانی) نسبت PV به nT مقداری ثابت است و این مقدار ثابت تقریباً برابر $8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ است.

$$\frac{PV}{nT} = R = \text{ثابت}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

در صورتی که حجم گاز ثابت باشد و تعداد مول گاز تغییر نکنند، رابطه زیر در طی یک فرایند برقرار است:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{V_1=V_2} \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{\Delta P}{\Delta T}$$

پاسخ تشریحی گام اول: فشار گاز را قبل از تغییر دما (در حالت اول) به دست می آوریم:

$$P_1 V = nRT_1 \Rightarrow P_1 V = \frac{m}{M} RT_1 \Rightarrow P_1 \times 42 \times 10^{-3} = \frac{240}{32} \times 8 \times (7 + 273) \Rightarrow$$

تبدیل سلسیوس به کلوین تبدیل لیتر به مترمکعب

$$P_1 \times 42 \times 10^{-3} = \frac{240 \times 8 \times 280}{32} \Rightarrow P_1 = \frac{24 \times 8 \times 28}{32 \times 42} \times 10^5 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

گام دوم: با توجه به این که حجم و مقدار گاز ثابت مانده است، برای محاسبه فشار در حالت دوم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{\Delta P}{\Delta T} \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{\Delta P}{\Delta T} \Rightarrow \frac{4 \times 10^5}{(7 + 273)} = \frac{\Delta P}{70} \Rightarrow \Delta P = \frac{70 \times 4 \times 10^5}{280} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = P_1 + \Delta P = 4 \times 10^5 + 10^5 = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

حواستون باشه تغییرات دما بر حسب کلوین و سلسیوس برابر است. ($\Delta T = \Delta \theta$)

گام سوم: فشار پیمانه‌ای گاز را در حالت اول و دوم به دست آورده و نسبت آن‌ها را حساب می کنیم:

$$P_{g_1} = P_1 - P_0 = 4 \times 10^5 - 10^5 = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{g_2} = P_2 - P_0 = 5 \times 10^5 - 10^5 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_{g_2}}{P_{g_1}} = \frac{4 \times 10^5}{3 \times 10^5} = \frac{4}{3}$$

تست و پاسخ ۴۲

یک حباب هوا به حجم 2 cm^3 در ته یک دریاچه به عمق 45 m و دمای 2°C قرار دارد. حباب تا سطح آب که دما در آنجا 27°C است، بالا می آید در لحظه‌ای که حباب به سطح آب می رسد، حجم آن چند سانتی متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)، چگالی آب دریاچه 1 g/cm^3 فشار هوای محیط 10^5 Pa و دمای هوای حباب با دمای آب اطراف آن یکسان است.

۲ / ۴ (۴)

۱ / ۲ (۳)

۰ / ۶ (۲)

۰ / ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره تمرین های کتاب درسی را جدی بگیرید. این سوال برگرفته از تمرین کتاب درسی است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا فشار گاز را در عمق 45 m و سطح آب به دست آورید و سپس قانون گاز کامل را برای آن به کار ببرید

$$\left(\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \right) \text{ تا در نهایت حجم حباب را در سطح آب حساب کنید.}$$

درس نامه

اگر مقدار معینی از یک گاز کامل در ابتدای یک فرایند دارای فشار P_1 و حجم V_1 و دمای T_1 باشد و در انتهای فرایند فشار، حجم و دمای گاز به ترتیب به P_2 ، V_2 و T_2 برسد، در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: فشار وارد بر حباب هوا را در هر دو حالت جداگانه به دست می آوریم:

$$P_1 = P_0 + \rho gh = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 45 = 5 / 5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

فشار در عمق 45 m سطح دریاچه

$$P_2 = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

فشار در سطح دریاچه



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

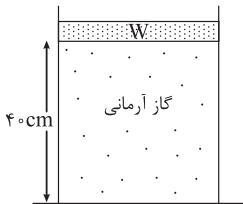
گام دوم: با توجه به این که تعداد مول‌های گاز (حباب) تغییر نکرده است، معادله حالت را به کار می‌بریم:

$$\frac{PV}{T} = nR = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{5/5 \times 10^5 \times V_1}{(2+273)} = \frac{10^5 \times V_2}{(27+273)} \Rightarrow \frac{5/5 V_1}{275} = \frac{V_2}{300} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{300 \times 5/5}{275} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{0.2} = 6 \Rightarrow V_2 = 1/2 \text{ cm}^3$$

تست و پاسخ ۴۳

مطابق شکل در زیر پیستون آزاد به مساحت 20 cm^2 و وزن $W = 40 \text{ N}$ ، گاز آرمانی با دمای 17°C قرار دارد و فشار هوا 10^5 پاسکال است. اگر روی پیستون وزنه 80 نیوتونی قرار دهیم، وزنه 4 cm پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. در این حالت، دمای گاز چند درجه سلسیوس است؟



- (۱) ۵۸
(۲) ۷۵
(۳) ۳۳۱
(۴) ۳۴۸

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره فشار گاز را در حالت اول و دوم طبق رابطه $P = \frac{W}{A} + P_0$ محاسبه کنید، سپس از رابطه $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ برای

محاسبه دمای ثانویه استفاده کنید.

پاسخ تشریحی

گام اول: فشار گاز را در حالت اول و در حالت دوم (پس از قراردادن وزنه روی پیستون) به دست می‌آوریم:

$$P_1 = \frac{W}{A} + P_0 = \frac{40}{20 \times 10^{-4}} + 10^5 = 2 \times 10^4 + 10^5 = 12 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \frac{W + mg}{A} + P_0 = \frac{40 + 80}{20 \times 10^{-4}} + 10^5 = 6 \times 10^4 + 10^5 = 16 \times 10^4 \text{ Pa}$$

گام دوم: با توجه به این که قبل و بعد از قراردادن وزنه روی پیستون، تعداد مول گاز تغییر نکرده است، داریم:

$$\frac{PV}{T} = nR = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{12 \times 10^4 \times (40 \text{ A})}{(273+17)} = \frac{16 \times 10^4 \times (36 \text{ A})}{T_2} \Rightarrow \frac{12 \times 40}{290} = \frac{16 \times 36}{T_2} \Rightarrow$$

$$T_2 = \frac{290 \times 16 \times 36}{12 \times 40} = 348 \text{ K}$$

$$T_2 = \theta_2 + 273 \Rightarrow 348 = \theta_2 + 273 \Rightarrow \theta_2 = 75^\circ \text{C}$$

حواستون باشه در رابطه $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ ، دماها حتماً باید برحسب کلوین باشند، اما فشارها و حجم‌ها می‌توانند برحسب یکای SI نباشند

و صرفاً باید یکاهای یکسانی داشته باشند.

تست و پاسخ ۴۴

تعداد مولکول‌های موجود در هوای اتاقی به ابعاد 4 m ، 6 m و 3 m در فشار 1 bar و دمای 27°C برابر کدام است؟ $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ و عدد آووگادرو برابر 6×10^{23} است.

- (۱) $2/4 \times 10^{25}$
(۲) $2/4 \times 10^{27}$
(۳) $1/8 \times 10^{25}$
(۴) $1/8 \times 10^{27}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست مثال ۴-۱۸ کتاب درسی فیزیک (۱) رشته ریاضی است که با تغییری جزئی در این جا مطرح شده است.



درس نامه

$$PV = nRT$$

$$n = \frac{N}{Na} \rightarrow \text{تعداد مولکولها}$$

$$n = \frac{N}{Na} \rightarrow \text{عدد آووگادرو}$$

$$T = \theta + 273$$

دما (K) ↑

↓ دما (°C)

(۱) قانون گازهای آرمانی (کامل):

$$P = \text{فشار مطلق (Pa)}$$

$$V = \text{حجم (m}^3\text{)}$$

$$n = \text{تعداد مول}$$

$$R = \text{ثابت جهانی گازها (} \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \text{)}$$

$$T = \text{دما (K)}$$

(۲) تبدیل یکای دما، از درجه سلسیوس (درجه سانتی گراد) به کلوین:

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا حجم اتاق را حساب می‌کنیم. سپس با استفاده از قانون گازهای آرمانی (کامل)، تعداد مولهای هوای داخل

اتاق را به دست می‌آوریم:

$$V = 4 \times 6 \times 3 = 72 \text{ m}^3$$

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} \xrightarrow{P=1 \text{ bar}=10^5 \text{ Pa}, V=72 \text{ m}^3, R=8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}, T=27+273=300 \text{ K}}$$

$$n = \frac{10^5 \times 72}{8 \times 300} = \frac{9 \times 10^5}{3 \times 10^2} = 3 \times 10^3$$

گام دوم: با استفاده از عدد آووگادرو، تعداد مولکولهای موجود در اتاق را پیدا می‌کنیم:

$$n = \frac{N}{Na} \xrightarrow{n=3 \times 10^3, Na=6 \times 10^{23}} 3 \times 10^3 = \frac{N}{6 \times 10^{23}} \Rightarrow N = 18 \times 10^{26} = 1/8 \times 10^{27}$$

تست و پاسخ ۴۵

دمای گاز آرمانی موجود در مخزنی برابر 91°C است. اگر در حجم ثابت، فشار گاز ۲۵ درصد افزایش یابد، دمای گاز به چند درجه سلسیوس می‌رسد؟

$$455 \text{ (۴)}$$

$$227/5 \text{ (۳)}$$

$$182 \text{ (۲)}$$

$$113/75 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه با استفاده از قانون گازهای آرمانی (کامل)، برای مقدار معینی گاز کامل در حجم ثابت می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{V_1=V_2, n_1=n_2} \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

توجه کنید که دما در این رابطه، حتماً برحسب کلوین به کار می‌رود.

پاسخ تشریحی ابتدا دمای گاز را برحسب کلوین به دست می‌آوریم، سپس با توجه به خواسته سؤال، این دما را برحسب درجه سلسیوس می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \xrightarrow{P_2=P_1+0.25P_1=1.25P_1, T_1=91+273=91+3 \times 91=4 \times 91 \text{ K}} \frac{P_1}{4 \times 91} = \frac{1.25 P_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = 4 \times 91 \times 1.25 = 5 \times 91 = 455 \text{ K}$$

$$T_2 = \theta_2 + 273 \Rightarrow 455 = \theta_2 + 273 \Rightarrow \theta_2 = 455 - 273 = 182^\circ \text{C}$$

حواستون باشه اگر تبدیل آخر، در پاسخ تشریحی را فراموش کنید، گزینه نادرست (۴) را انتخاب خواهید کرد. هم‌چنین اگر دمای اولیه

را به کلوین تبدیل نکنید و آن را برحسب سلسیوس در رابطه به کار ببرید به گزینه نادرست (۱) می‌رسید.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

شیمی دهم

تست و پاسخ ۴۶

کدام مورد درست است؟

- (۱) با افزایش بخار آب و کربن دی‌اکسید در هواکره، میانگین سطح آب‌های آزاد زمین کاهش می‌یابد.
 (۲) یک درخت تنومند طی فرایند فتوسنتز، کربن دی‌اکسید بیشتری از یک نهال جوان تولید می‌کند.
 (۳) رابطه مقدار کربن دی‌اکسید با مساحت برف در نیمکره شمالی، همانند رابطه بین دما و حجم مقدار معینی از یک نمونه گاز در فشار ثابت است.
 (۴) برای تولید مقدار معینی برق، استفاده از انرژی خورشیدی نسبت به باد، کربن دی‌اکسید بیشتری تولید خواهد کرد.

 $V \propto T$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: ردپای کربن دی‌اکسید در صورت استفاده از انرژی خورشیدی برای تولید برق، بیشتر از ردپای آن در صورت استفاده از باد است.

نکته: مقایسه ردپای ایجادشده از منابع گوناگون تولید انرژی، به صورت زیر است:

باد > گرمای زمین > انرژی خورشید > گاز طبیعی > نفت خام > زغال سنگ: مقایسه ردپای CO_2

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) بخار آب (H_2O) و کربن دی‌اکسید (CO_2) در هواکره، گازهای گلخانه‌ای هستند که افزایش آن‌ها باعث افزایش دمای زمین و به دنبال آن، باعث ذوب شدن یخ‌های قطبی و افزایش میانگین سطح آب‌های آزاد زمین (آب اقیانوس‌ها و دریاها) می‌شود.
 (۲) درختان طی فرایند فتوسنتز، کربن دی‌اکسید مصرف می‌کنند، تولید نمی‌کنند!
 (۳) در سال‌های اخیر با افزایش گاز کربن دی‌اکسید و گرم شدن کره زمین، مساحت برف در نیمکره شمالی کاهش یافته است؛ بنابراین، بین مقدار گاز کربن دی‌اکسید و مساحت برف در نیمکره شمالی، رابطه وارونه وجود دارد. از طرف دیگر، اگر مقدار مشخصی از گاز با فشار معین را گرم کنیم، حجم آن زیاد می‌شود؛ یعنی حجم گازها و دما با هم رابطه مستقیم دارند.

تست و پاسخ ۴۷

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- اگر لایه اوزون وجود نداشت، میانگین دمای کره زمین به $255K$ کاهش می‌یافت.
- بیش از 50% درصد پرتوهای فروسرخ گسیل‌شده از زمین، از هواکره خارج می‌شود.
- نور خورشید هنگام گذر از هواکره با مولکول‌ها و دیگر ذره‌های آن برخورد می‌کند و همه آن به سطح زمین می‌رسد.
- یکی از راه‌های کاهش ردپای کربن دی‌اکسید تولیدی در نیروگاه‌ها، واکنش آن با آهک ($CaCO_3$) است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

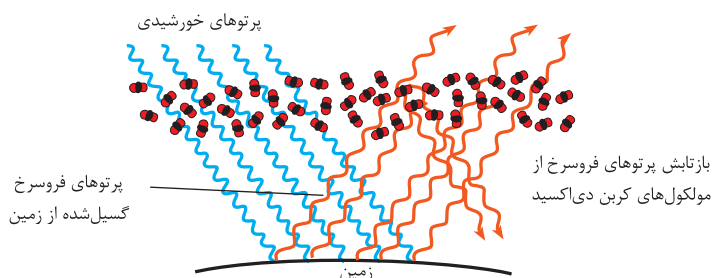
۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: فقط مورد دوم درست است.

بررسی موارد:

- اگر هواکره و در نتیجه اثر گلخانه‌ای وجود نداشت، میانگین دمای کره زمین به $-18^\circ C$ یا $255K = 273 - 18$ کاهش می‌یافت.
- از امواج الکترومغناطیسی منتشرشده توسط زمین، بخش قابل توجهی یعنی بیشتر از 50% درصد، به صورت تابش فروسرخ زمین را ترک کرده و به فضا می‌رود و بخش کوچک‌تری یعنی کم‌تر از 50% درصد از این پرتوها توسط گازهای گلخانه‌ای جذب و دوباره به سمت زمین بازتابش می‌شود.

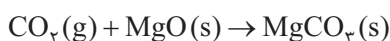
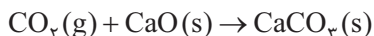




پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

- بخش کوچکی از امواج ارسالی خورشید، توسط مولکول‌های گازی هواکره جذب می‌شود و بخش عمده (نه همه!) این امواج به سطح زمین می‌رسد.
- یکی از راه‌های کاهش ردپای کربن دی‌اکسید (CO_2) تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، واکنش گاز کربن دی‌اکسید با آهک یا همان کلسیم اکسید (CaO نه CaCO_3 !) و یا واکنش با منیزیم اکسید (MgO) است که معادله واکنش‌ها هم، این‌طور یاس:



تست و پاسخ ۴۸

فسفر سفید (P_4) را طبق واکنش: $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2(\text{s}) + \text{SiO}_2(\text{s}) + \text{C}(\text{s}) \rightarrow \text{P}_4(\text{s}) + \text{CaSiO}_3(\text{l}) + \text{CO}(\text{g})$ در کوره الکتریکی تهیه می‌کنند. پس از موازنه واکنش، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها به ضریب استوکیومتری فرآورده مذاب کدام است و اگر در این واکنش ۴۲ گرم SiO_2 مصرف شود، به تقریب چند گرم فسفر سفید تولید خواهد شد؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید؛ $(\text{P} = 31, \text{Si} = 28, \text{O} = 16 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$)

$$14/5,6 \quad (2)$$

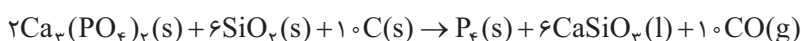
$$14/5,3 \quad (1)$$

$$10/2,6 \quad (4)$$

$$10/2,3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: اگر ضریب پیچیده‌ترین ترکیب ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$) را برابر ۱ قرار دهیم، به منظور موازنه اتم‌های کلسیم و فسفر، ضریب CaSiO_3 و P_4 به ترتیب ۳ و $\frac{1}{4}$ خواهد شد. در ادامه، برای موازنه اتم سیلیسیم به SiO_2 ضریب ۳ می‌دهیم. با توجه به این که یک اتم کربن در هر دو ترکیب باقی‌مانده وجود دارد، بنابراین ضرایب آن‌ها با هم برابر است؛ پس به منظور موازنه شدن اتم اکسیژن، به CO و C ضریب ۵ می‌دهیم و در نهایت همه ضرایب استوکیومتری را برای حذف ضریب کسری P_4 ، در ۲ ضرب می‌کنیم:



$$\frac{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها}}{\text{ضریب استوکیومتری فرآورده مذاب } (\text{CaSiO}_3)} = \frac{2+6+10}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

گام دوم: با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش و جرم SiO_2 مصرف‌شده، جرم P_4 تولیدشده را به دست می‌آوریم:

$$42 \text{ g SiO}_2 \times \frac{1 \text{ mol SiO}_2}{60 \text{ g SiO}_2} \times \frac{1 \text{ mol P}_4}{6 \text{ mol SiO}_2} \times \frac{124 \text{ g P}_4}{1 \text{ mol P}_4} = 14/5 \text{ g P}_4$$

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{SiO}_2} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{P}_4} = \frac{42}{60 \times 6} = \frac{x}{1 \times 124} \rightarrow x = 14$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

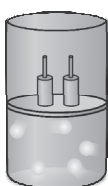
تست و پاسخ ۴۹

درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

جامد

گاز

- در دمای اتاق، گوگرد همانند متان، به شکل ظرف محتوی آن درمی‌آید.
- اگر یکی از وزنه‌های روی پیستون روان در شکل روبه‌رو را برداریم، حجم مولکول‌ها افزایش می‌یابد.
- قراردادن بادکنک‌های پر شده از هوا درون آمونیاک مایع، سبب تغییر حجم آن‌ها نمی‌شود.
- در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون برابر با $22/4$ لیتر است.



(۲) نادرست - نادرست - درست - درست

(۱) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

(۴) نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۳) درست - درست - درست - نادرست

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

پاسخ تشریحی همه عبارت‌های داده شده، نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- در دمای اتاق، گوگرد به حالت جامد است که شکل و حجم مشخصی داشته و شکل آن به شکل ظرف بستگی ندارد، ولی متان به حالت گازی است که شکل و حجم معینی ندارد و به شکل ظرف درمی‌آید.
- برای مقدار معینی گاز در دمای ثابت، حجم گاز با فشار آن رابطه معکوس دارد؛ بنابراین در صورتی که یکی از وزنه‌های روی پیستون شکل داده شده را برداریم، فشار کاهش و در نتیجه حجم گاز افزایش می‌یابد و فاصله بین مولکول‌های گازی زیاد می‌شود، ولی باید به این نکته دقت کرد که خود مولکول تغییری نمی‌کند و حجم مولکول‌های گازی ثابت است.
- نقطه جوش آمونیاک (NH_3) ، -33°C است؛ آمونیاک مایع، دمایی کم‌تر از نقطه جوش خود دارد و مایعی سرد می‌باشد. در صورتی که بادکنک‌های پر شده از هوا را درون آمونیاک مایع قرار دهیم، به دلیل کاهش دما و رابطه مستقیم دما با حجم گاز، حجم بادکنک‌ها کم شده و تغییر می‌کند.
- در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است، ولی لزوماً $4/22$ لیتر نمی‌باشد؛ زیرا حجم مولی گازهای مختلف در شرایط استاندارد یا STP برابر این مقدار است که در این شرایط، دما 0°C و فشار 1 atm می‌باشد.

تست و پاسخ ۵۰

درستی یا نادرستی چند مورد از عبارت‌های داده شده، همانند عبارت زیر است؟

«کارخانه‌ها قیمت تمام شده یک کالا را با حساب کردن ملاحظات اقتصادی، زیست‌محیطی و اجتماعی مشخص می‌کنند.»

(الف) به هر یک از شکل‌های مولکولی یا بلوری یک ترکیب، دگرشکل گفته می‌شود.

(ب) به واکنش سریع مواد با اکسیژن که با تولید انرژی همراه است، واکنش اکسایش می‌گویند.

(پ) واکنش‌های انجام شده در همه باتری‌ها همانند فرایندهای تبخیر و میعان، برگشت پذیر هستند.

(ت) واکنش $(\text{NO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{NO}(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}))$ ، تنها در هنگام رعد و برق یا درون موتور خودرو انجام می‌شود و یکی از فرآورده‌های آن ساختار خمیده دارد.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی همه عبارت‌های داده شده همانند عبارت اولیه، نادرست هستند.

کارخانه، قیمت تمام شده یک کالا را با حساب کردن کل هزینه‌های تولید و با در نظر گرفتن سود آن شرکت مشخص می‌کند. در این حالت برای حساب کردن قیمت تمام شده، فقط ملاحظات اقتصادی در نظر گرفته شده و ملاحظات زیست‌محیطی و اجتماعی در آن مشخص نشده است.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) دگرشکل یا آلوتروپ، به هر یک از شکل‌های مولکولی یا بلوری یک عنصر (نه ترکیب!) گفته می‌شود.

(ب) به واکنش آرام (نه سریع!) مواد با اکسیژن که با تولید انرژی همراه است، واکنش اکسایش می‌گویند.

(پ) واکنش‌های انجام شده در باتری‌های قابل شارژ (نه همه باتری‌ها!) همانند فرایندهای تبخیر و میعان، برگشت‌پذیر هستند.

(ت) واکنش $\text{N}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NO}(\text{g})$ ، در هنگام رعد و برق و یا درون موتور خودروها در دمای بالا انجام می‌شود در صورتی که واکنش

$\text{NO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{NO}(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g})$ در حضور نور خورشید انجام شده و اوزون در میان فرآورده‌های آن، ساختار خمیده $(\text{O}=\text{O}-\text{O})$ دارد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ (۵۱)

با توجه به شکل داده شده که ظرف‌های محتوی گازهای مختلف را در دما و فشار یکسان نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟ (هر ذره، معادل ۰/۰۵ مول است؛ $N = 14, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

شماره نمونه	۱	۲	۳	۴
گاز	N_2	Ne	CO_2	O_2
ظرف محتوی گاز				

(۱) شمار اتم‌ها در نمونه ۳، برابر $9/03 \times 10^{23}$ است.

(۲) حجم گاز نمونه ۴، دو برابر حجم گاز نمونه ۲ است و در شرایط STP، برابر ۲۲/۴ لیتر است.

(۳) چگالی گاز نمونه ۱ در دمای $^{\circ}C$ و فشار ۱ atm، برابر ۱/۲۵ گرم بر لیتر است.

(۴) در مخلوطی از ۴/۸ گرم گاز متان و گاز نمونه ۴، درصد حجمی گاز متان برابر ۳۷/۵ درصد است.

پاسخ: گزینه (۲)

پاسخ تشریحی در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است؛ بنابراین حجم گاز با شمار مول‌های آن رابطه مستقیم دارد. با توجه به شکل‌های داده شده، در گاز نمونه ۴ (O_2)، ۱۰ ذره و در گاز نمونه ۲ (Ne)، ۵ ذره وجود دارد؛ پس حجم گاز نمونه ۴ (O_2)، $2 = \frac{10}{5}$ برابر حجم گاز نمونه ۲ (Ne) است و یا به عبارت دیگر، حجم گاز نمونه ۴ (O_2) در شرایط STP، برابر ۱۱/۲ لیتر می‌باشد:

$$10 \text{ ذره} \times \frac{0.05 \text{ mol}}{1 \text{ ذره}} \times \frac{22/4 \text{ L}}{1 \text{ mol}} = 11/2 \text{ L}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) با توجه به شکل‌های داده شده، در گاز نمونه ۳ یا CO_2 ، ۱۰ ذره وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$10 \text{ ذره} \times \frac{0.05 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ ذره}} \times \frac{3 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ atom}}{1 \text{ mol atom}} = 9/03 \times 10^{23} \text{ atom}$$

(۳) دمای $^{\circ}C$ و فشار ۱ atm همان شرایط STP است که چگالی گاز نمونه ۱ یا N_2 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$STP \text{ چگالی گاز در شرایط} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی}} = \frac{2 \times 14}{22/4} = 1/25 \text{ g.L}^{-1}$$

(۴) با توجه به شکل‌های داده شده، در گاز نمونه ۴ یا O_2 ، ۱۰ ذره وجود دارد؛ بنابراین، خواهیم داشت:

$$10 \text{ ذره } O_2 \times \frac{0.05 \text{ mol } O_2}{1 \text{ ذره } O_2} = 0.5 \text{ mol } O_2$$

$$4/8 \text{ g } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{16 \text{ g } CH_4} = 0.3 \text{ mol } CH_4$$

می‌دانیم که درصد حجمی گازها در یک مخلوط، با درصد مولی آن‌ها برابر است:

$$CH_4 \text{ درصد مولی گاز} = \frac{\text{شمار مول‌های گاز } CH_4}{\text{شمار مول‌های گازهای موجود در مخلوط}} \times 100 = \frac{0.3}{0.8} \times 100 = 37/5\%$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۵۲

کدام مورد درباره مولکول‌های اوزون و اکسیژن، درست است؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (۱) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول اوزون، بیشتر از شمار الکترون‌های ناپیوندی در مولکول اکسیژن است.
 (۲) اگر دمای مخلوطی مایع از اکسیژن و اوزون به تدریج افزایش یابد، ابتدا مولکول‌های اوزون از مخلوط خارج می‌شوند.
 (۳) بر اثر تابش پرتوهای خورشیدی با طول موج بین 100 تا 400 نانومتر به مولکول اوزون، پیوند دوگانه می‌شکند و یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن پدید می‌آید.

فرابنفش

(۴) در واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، به ازای مصرف $11/2$ لیتر واکنش‌دهنده در شرایط STP، 24 گرم فرآورده تشکیل خواهد شد.

پاسخ: گزینه ۴

نکته مقایسه اوزون و اکسیژن

ویژگی	آلوتروپ	O_2	O_3
ساختار لوویس	$\ddot{O}=\ddot{O}$	$\ddot{O}=\ddot{O}$	$\ddot{O}=\ddot{O}-\ddot{O}$ (خمیده یا V شکل)
نقطه جوش	-183°C (کم‌تر)	-112°C (بیشتر)	
مایع شدن	سخت‌تر	آسان‌تر	
رنگ در حالت مایع	آبی کم‌رنگ	آبی پررنگ	
واکنش‌پذیری	کم‌تر	بیشتر (گندزدا)	
پایداری	بیشتر	کم‌تر	
قطبیت	ناقطبی	قطبی	
انحلال‌پذیری در آب	کم‌تر	بیشتر	

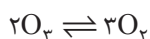
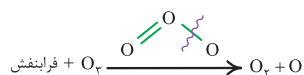
پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱ در مولکول اوزون، ۶ جفت‌الکترون ناپیوندی و در مولکول اکسیژن، ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی (یعنی ۸ الکترون ناپیوندی) وجود دارد. دقت کنید که در مورد اوزون، از جفت‌الکترون و در مورد اکسیژن، از الکترون ناپیوندی صحبت شده!



۲ نقطه جوش اکسیژن از اوزون کم‌تر است؛ بنابراین با افزایش دما، ابتدا اکسیژن به حالت گاز درآمده و از مخلوط خارج می‌شود.

۳ بر اثر تابش پرتوهای فرابنفش (که طول موج کوتاه‌تر از 400 nm دارند) به مولکول اوزون، پیوند یگانه بین دو اتم اکسیژن می‌شکند:



۴ معادله واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، به صورت روبه‌رو است:

$$11/2 \text{ L } O_3 \times \frac{1 \text{ mol } O_3}{22/4 \text{ L } O_3} \times \frac{3 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } O_3} \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 24 \text{ g } O_2$$

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{11/2}{2 \times 22/4} = \frac{x}{3 \times 32} \rightarrow x = 24 \text{ g } O_2$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

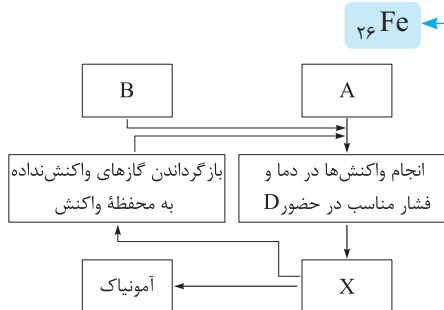


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۵۳

با توجه به شکل مقابل که مربوط به مراحل تهیه آمونیاک به روش هابر است، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) D فلزی است که مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیتی آن، برابر ۳۸ است.

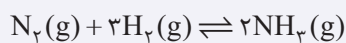
(۲) یکی از واکنش‌دهنده‌های آن را می‌توان از تقطیر جزء به جزء هوای مایع تأمین کرد.

(۳) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله این واکنش و معادله واکنش سوختن گاز هیدروژن، برابر ۲ است.

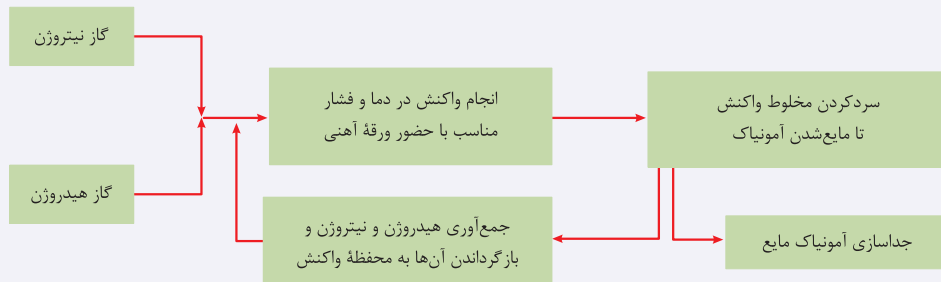
(۴) دمای بخش X، می‌تواند $5^{\circ}\text{C} / -34$ باشد.

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره تسلط روی شکل‌ها و نمودارهای کتاب درسی، اخیراً خیلی مورد توجه طراحان کنکور سراسری قرار گرفته. حتماً توصیه می‌کنیم که با دقت بیشتری شکل‌ها و نمودارهای کتاب درسی را تجزیه و تحلیل کنید.

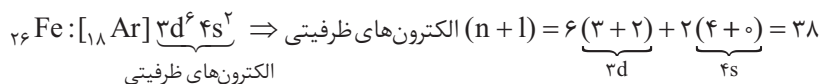


نکته فرایند هابر را به صورت خلاصه، با طرح زیر می‌توان نشان داد:



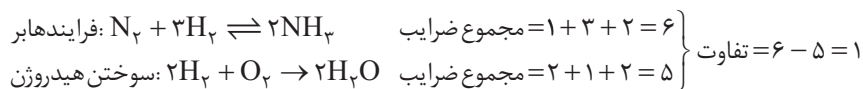
پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

(۱) D، همان کاتالیزگر واکنش یعنی آهن (26Fe) است:



(۲) گاز نیتروژن (N_2) را می‌توان از تقطیر جزء به جزء هوای مایع تهیه کرد.

(۳) ببینیم:



(۴) در بخش X، مخلوط واکنش سرد می‌شود تا آمونیاک مایع شده و از مخلوط جدا شود؛ بنابراین دمای این بخش باید کمی پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک (-33°C) بوده و می‌تواند $5^{\circ}\text{C} / -34$ باشد.

تست و پاسخ ۵۴

اگر در 120°C گرم سولفیدی از مس، در مجموع $2/25$ مول یون وجود داشته باشد، فرمول شیمیایی آن کدام است و اگر برای تهیه مس خام، 40 گرم از این سولفید را با مقدار کافی از گاز اکسیژن واکنش دهند، چند لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید در شرایطی که حجم مولی گازها برابر

25L است، به دست می‌آید؟ ($\text{Cu} = 64, \text{S} = 32; \text{g.mol}^{-1}$)



پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۵۶

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- الف) در میان منابع آب در کره زمین، کوه‌های یخ سهم بیشتری از آب‌های زیرزمینی دارند.
 ب) آب‌های موجود در کره زمین در صورت مسطح بودن آن، همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ متر می‌پوشانند.
 پ) مقدار یون‌های تک‌اتمی و محلول در آب دریا، به میزان قابل توجهی بیشتر از یون‌های چنداتمی است.
 ت) مجموع جرم یون‌های فلزهای قلیایی در هر کیلوگرم آب دریا، کم‌تر از این مقدار برای یون‌های فلزهای قلیایی خاکی است.

گروه اول ← گروه دوم

الف - ب (۱) پ - ت (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی موارد «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد:

الف) به طور کلی منابع آب را می‌توان به دو دسته کلی منابع اقیانوسی و منابع غیراقیانوسی تقسیم کرد. در منابع آبی غیراقیانوسی، پس از کوه‌های یخ، بیشترین سهم آب مربوط به آب‌های زیرزمینی است و پس از آن، آب نهرها و جوی‌ها و در نهایت مجموعه آب شیرین و شور دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب موجود در هوا سهم بسیار کمی دارند. ✓

ب) آب شیرین و آب شور دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب موجود در هوا > آب نهرها و جوی‌ها > آب‌های زیرزمینی > کوه‌های یخ: درصد فراوانی ب) اگر کره زمین را مسطح در نظر بگیریم، آب همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر می‌پوشاند. ✗
 پ) در جدول زیر، مقدار یون‌های تک‌اتمی محلول در آب دریا که شامل یون‌های Ca^{2+} ، Na^+ ، Cl^- و Br^- می‌باشد، نشان داده شده است. این یون‌ها به میزان قابل توجهی بیشتر از یون‌های چنداتمی که شامل یون‌های CO_3^{2-} و SO_4^{2-} است، می‌باشد. ✓

نام یون	کلرید	سدیم	سولفات	منیزیم	کلسیم	پتاسیم	کربنات	برمید
نماد یون	Cl^-	Na^+	SO_4^{2-}	Mg^{2+}	Ca^{2+}	K^+	CO_3^{2-}	Br^-
میلی گرم یون در یک کیلوگرم آب دریا	۱۹۰۰۰	۱۰۵۰۰	۲۶۵۵	۱۳۵۰	۴۰۰	۳۸۰	۱۴۰	۶۵

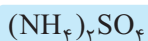
ت) فلزهای قلیایی همان فلزهای گروه اول جدول تناوبی و فلزهای قلیایی خاکی همان فلزهای گروه دوم جدول تناوبی هستند؛ یون‌های فلزهای قلیایی در آب دریا به طور عمده شامل یون‌های Na^+ و K^+ و یون‌های فلزهای قلیایی خاکی در آب دریا شامل یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} می‌باشند. با توجه به جدول، مجموع جرم فلزهای قلیایی در آب دریا، بیشتر از مجموع جرم فلزهای قلیایی خاکی است. ✗

تکنیک در این سؤال، عبارت‌های «پ» و «ت» عبارت‌های سختی محسوب می‌شوند، اما با توجه به فرمت سؤال، می‌توانیم فقط با بررسی عبارت‌های «الف» و «ب» به جواب تست برسیم. عبارت «الف» درست است؛ پس جواب (۱) یا (۳) خواهد بود. عبارت «ب» نادرست است؛ بنابراین (۱) حذف شده و جواب درست، (۳) می‌باشد.

تست و پاسخ ۵۷

کدام گزینه درباره آمونیوم سولفات، درست است؟

- (۱) نسبت شمار آنیون به کاتیون در آن، با این نسبت در منیزیم کربنات برابر است.
 (۲) مدل فضاپرکن آنیون سازنده آن با یون نیترات مشابه است.
 (۳) نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در یک واحد فرمولی آن، برابر ۳/۷۵ است.
 (۴) شمار پیوندهای اشتراکی هر اتم نیتروژن در آن، با شمار پیوندهای اشتراکی اتم نیتروژن در آمونیاک برابر است.



پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

پاسخ تشریحی آمونیوم سولفات با فرمول شیمیایی $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ ، یک ترکیب یونی چندتایی است که دارای $2(1+4) + 1 + 4 = 15$

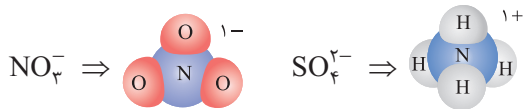
اتم و ۴ نوع عنصر سازنده (N, H, S, O) است؛ بنابراین نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در یک واحد فرمولی آن، برابر $\frac{3}{75} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ می‌باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

نسبت شمار آنیون به شمار کاتیون در آمونیوم سولفات، کم‌تر از این نسبت در منیزیم کربنات است:

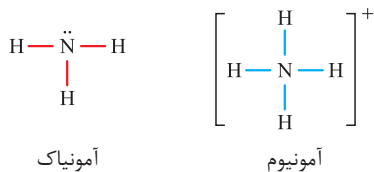
$$\left. \begin{array}{l} \text{شمار آنیون} \\ \text{شمار کاتیون‌ها} = \frac{1}{2} \\ \text{شمار آنیون} \\ \text{شمار کاتیون} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

آمونیوم سولفات: $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$
منیزیم کربنات: MgCO_3

مدل فضاپرکن یون‌های NO_3^- و SO_4^{2-} ، مشابه هم نیست.



اتم نیتروژن در آمونیوم (NH_4^+)، ۴ پیوند اشتراکی و در آمونیاک (NH_3)، ۳ پیوند اشتراکی تشکیل داده است:



تست و پاسخ ۵۸

با توجه به جدول زیر، شمار اتم‌ها در هر واحد فرمولی از کدام ترکیب، درست نوشته شده است؟

نام	کلسیم یدید	آهن (II) اگزالات	سدیم برمیت	آلومینیم آرسنات
فرمول شیمیایی	$\text{Ca}(\text{IO}_3)_2$	FeC_2O_4	NaBrO_3	AlAsO_4

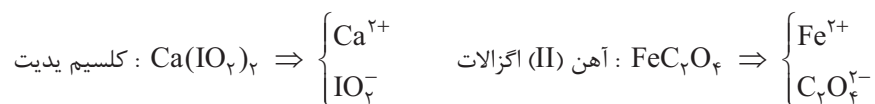
(۱) آمونیوم آرسنات - ۱۰ (۲) نقره اگزالات - ۸ (۳) گالیم برمیت - ۹ (۴) روبیدیم یدید - ۵

پاسخ: گزینه ۲

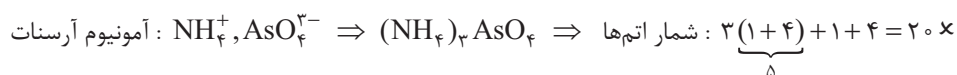
مشاوره در این سبک از سؤالات، نیاز نیست که حتماً فرمول شیمیایی کاتیون‌ها یا آنیون‌هایی که خارج از کتاب درسی است را بلد

باشین! فقط کافیست که الگوی فرمول نویسی را برای اونها با استفاده از اطلاعاتی که داری به دست بیاری.

پاسخ تشریحی با توجه به فرمول شیمیایی ترکیبات داده‌شده در جدول، فرمول شیمیایی آنیون و کاتیون سازنده آن‌ها را می‌نویسیم:



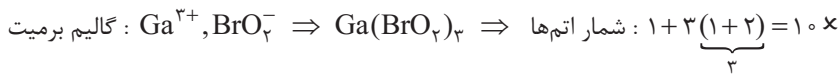
بررسی گزینه‌ها:





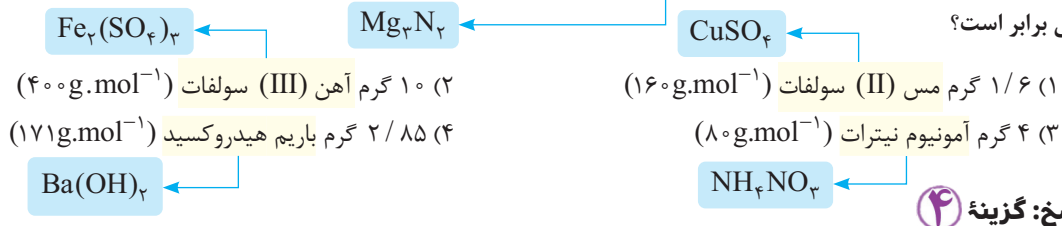
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی



تست و پاسخ ۵۹

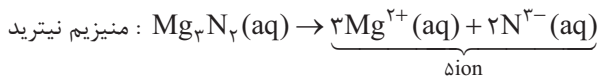
شمار یون‌های حاصل از انحلال یک گرم منیزیم نیتريد (100 g.mol^{-1}) در آب کافی، با شمار یون‌های حاصل از انحلال کدام نمونه در آب کافی برابر است؟



پاسخ: گزینه ۴

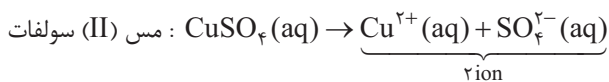
خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک معادله انحلال منیزیم نیتريد در آب و جرم آن، تعداد یون تولیدشده را به دست بیار. سپس همین کار را برای تک تک گزینه‌ها انجام بده تا به گزینه درست برسی. دقت داشته باش در این سوال نیاز نیست عدد دست و پا گیر آووگادرو را وارد محاسبات کنی و به جاش می‌تونی از نمادش استفاده کنی.

پاسخ تشریحی بر اثر انحلال هر واحد فرمولی منیزیم نیتريد در آب، ۵ مول یون تولید می‌شود:



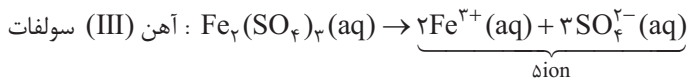
$$1 \text{ g } Mg_3N_2 \times \frac{1 \text{ mol } Mg_3N_2}{100 \text{ g } Mg_3N_2} \times \frac{\Delta \text{ mol ion}}{1 \text{ mol } Mg_3N_2} \times \frac{N_A \text{ ion}}{1 \text{ mol ion}} = 0.05 N_A \text{ ion}$$

بررسی گزینه‌ها:



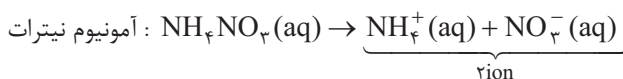
۱

$$1/6 \text{ g } CuSO_4 \times \frac{1 \text{ mol } CuSO_4}{160 \text{ g } CuSO_4} \times \frac{2 \text{ mol ion}}{1 \text{ mol } CuSO_4} \times \frac{N_A \text{ ion}}{1 \text{ mol ion}} = \frac{1/6 \times 2}{160} N_A = 0.02 N_A \text{ ion} \times$$



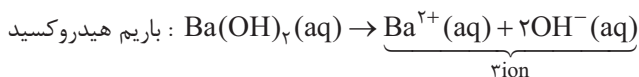
۲

$$10 \text{ g } Fe_2(SO_4)_3 \times \frac{1 \text{ mol } Fe_2(SO_4)_3}{400 \text{ g } Fe_2(SO_4)_3} \times \frac{\Delta \text{ mol ion}}{1 \text{ mol } Fe_2(SO_4)_3} \times \frac{N_A \text{ ion}}{1 \text{ mol ion}} = \frac{10 \times \Delta}{400} N_A = 0.125 N_A \text{ ion} \times$$



۳

$$4 \text{ g } NH_4NO_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_4NO_3}{80 \text{ g } NH_4NO_3} \times \frac{2 \text{ mol ion}}{1 \text{ mol } NH_4NO_3} \times \frac{N_A \text{ ion}}{1 \text{ mol ion}} = \frac{4 \times 2}{80} N_A = 0.1 N_A \text{ ion} \times$$



۴

$$2/85 \text{ g } Ba(OH)_2 \times \frac{1 \text{ mol } Ba(OH)_2}{171 \text{ g } Ba(OH)_2} \times \frac{3 \text{ mol ion}}{1 \text{ mol } Ba(OH)_2} \times \frac{N_A \text{ ion}}{1 \text{ mol ion}} = \frac{2/85 \times 3}{171} N_A = 0.05 N_A \text{ ion} \checkmark$$



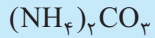
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۶۰

کدام مطلب نادرست است؟

(۱) در واکنش‌های انجام‌شده در زیست‌کره، درشت‌مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.



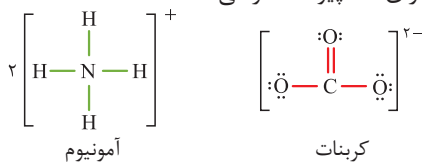
(۲) در هر واحد فرمولی از آمونیوم کربنات، ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

(۳) در معادله واکنش بین محلول‌های سدیم فسفات و کلسیم کلرید، ۴ ترکیب یونی با نسبت شمار کاتیون به آنیون متفاوت وجود دارد.

(۴) با وجود تبخیر حجم زیادی از آب دریاها در طول سال، جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی فرمول شیمیایی آمونیوم کربنات به صورت $(NH_4)_2CO_3$ است و در هر واحد فرمولی آن، ۲ یون آمونیوم (با ۴ پیوند اشتراکی) و ۱ یون کربنات (با ۴ پیوند اشتراکی) وجود دارد، یعنی این ترکیب در مجموع دارای ۱۲ پیوند اشتراکی است.

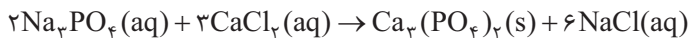


$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی} = (2 \times 4) + (1 \times 4) = 12$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) کاملاً درسته!

(۳) معادله واکنش بین محلول‌های سدیم فسفات و کلسیم کلرید و تشکیل رسوب کلسیم فسفات، به صورت زیر است:



نسبت شمار کاتیون به آنیون در هر ۴ ترکیب موجود در این معادله، با هم متفاوت است؛ این نسبت در ترکیب‌ها از چپ به راست برابر است با:

$$\frac{1}{1} \text{ و } \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}$$

(۴) جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است، زیرا همان‌طور که سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ‌کره، هواکره

و... وارد آب‌کره می‌شوند، به اندازه همان مقدار ماده نیز از آب دریاها و اقیانوس‌ها خارج می‌شوند.

پایه یازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	حسین شفیعزاده - مهرداد کیوان
هندسه (۲)	محمد رضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی - حمید گلزاری
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
فیزیک (۲)	امین امینی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی (۲)	یاسر راش - علی طهانی - یاسر عبداللہی - وحید فارسیان - محدثه ملک پور

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	حسین شفیعزاده مهرداد کیوان	حسین شفیعزاده مهرداد کیوان	علیرضا کاظمی بقا	محمد سجاد نقیہ سجاد داوطلب	شمیم پهلوان شریف ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
هندسه (۲)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیر حسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ماهان فنی فر
آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیر حسین ابومحبوب	شمیم پهلوان شریف ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک (۲)	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری	امین امینی علیرضا جباری	مدیا عیدی ماهان فنی فر احسان محمدی ابوالفضل ناصری
شیمی (۲)	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	علی طهانی محدثه ملک پور	محمد مرادی سروش عبادی وحید فارسیان	سید علی حسینزاده مهسا خاکی احسان رحیمی هومن زندگی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور



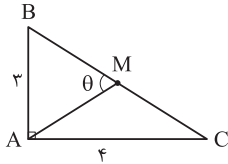
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

حسابان یازدهم

تست و پاسخ ۶۱

میانه AM در مثلث قائم الزاویه ABC رسم شده است. مقدار $\cos \theta$ کدام است؟



○ / ۲۵ (۱)

○ / ۲۸ (۲)

○ / ۲۴ (۳)

○ / ۳۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در کنکورهای جدید، طراحان درس ریاضی علاقه شدیدی به طرح کردن سؤالهای ترکیبی دارند، در این سؤال یک نکته از هندسه با مثلثات ترکیب شده است.

خودت حل کنی بهتره با توجه به این که میانه وارد بر وتر نصف وتر است، مثلث AMC متساوی الساقین می شود، در این مثلث زاویه های مجاور به ساق را α در نظر بگیرید، θ یک زاویه خارجی برای این مثلث است، پس $\theta = 2\alpha$. از این جا به بعد پاسخ به آسانی پیدا می شود.

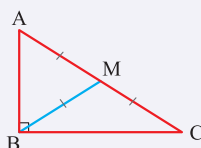
درس نامه

روابط مثلثاتی کمان α

	رابطه مثلثاتی	یه جور دیگه
۱	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
		$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$
۲	$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$	$\tan \alpha \cot \alpha = 1$
۳	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	—
۴	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	—

روابط مثلثاتی کمان 2α

	رابطه مثلثاتی	یه جور دیگه
۱	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$
۲	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
		$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$



$$BM = \frac{AC}{2} \Rightarrow BM = AM = MC$$

نکته در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.



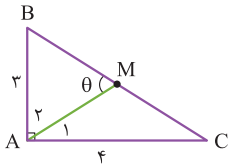
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی گام اول (به دست آوردن طول ضلع BC):

با توجه به قضیه فیثاغورس طول ضلع BC یا همان وتر را به دست می آوریم:

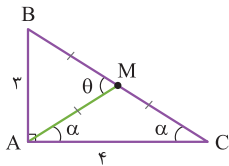
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \underbrace{3^2 + 4^2}_{25} = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$



نکته به اعدادی مانند ۵ و ۴ و ۳ یا ۱۳ و ۱۲ و ۵ و ۱۷ و ۱۵ و ۸ و ... اعداد فیثاغورسی می گویند. چراکه این اعداد در رابطه فیثاغورس صدق می کنند و می توانند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند. (هر مضربی از اعداد فیثاغورسی نیز فیثاغورسی هستند مثلاً $5x$ و $4x$ و $3x$ در رابطه فیثاغورس صدق می کنند).

گام دوم (مشخص کردن زاویه های مساوی):

با توجه به نکته گفته شده در درس نامه، پس مثلث AMC متساوی الساقین است و $\hat{A}_1 = \hat{C} = \alpha$



گام سوم (نوشتن زاویه theta بر حسب alpha): زاویه theta یک زاویه خارجی برای مثلث AMC است؛ پس طبق نکته داریم:

$$\theta = \alpha + \alpha \Rightarrow \theta = 2\alpha$$

نکته اندازه هر زاویه خارجی در مثلث برابر است با مجموع زاویه های داخلی غیرمجاور.

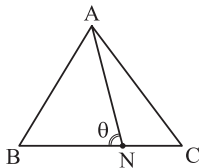
گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال): حال $\theta = 2\alpha$ را در خواسته سؤال جای گذاری می کنیم، با توجه به اندازه های به دست آمده برای

$$\text{مثلث قائم الزاویه، } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \text{ بنابراین: } \cos \theta = \cos(2\alpha) \Rightarrow \cos \theta = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos \theta = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25} = 0.28 \Rightarrow \cos \theta = 0.28$$

تست و پاسخ ۶۲

مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع ۳ است. اگر $BN = 2NC$ ، مقدار $\cos \theta$ کدام است؟



$$\frac{\sqrt{7}}{14} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{28} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3\sqrt{7}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{7}} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

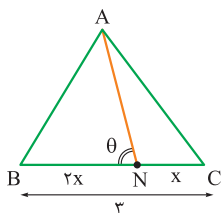
مشاوره این تست مشابه یکی از تست های کنکور نوبت اول ۱۴۰۳ می باشد.

خودت حل کنی بهتره ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم کنید و با توجه به این نکته که ارتفاع، میانه نیز هست و سایر داده های سؤال طول اضلاع مثلث AHN را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی گام اول (به دست آوردن طول BN و NC):

با توجه به فرض سؤال اندازه هر ضلع ۳ و $BN = 2NC$ ، اگر $NC = x$ ، پس $BN = 2x$ ، حالا:

$$x + 2x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow BN = 2, NC = 1$$



نکته ارتفاع وارد بر هر ضلع در مثلث متساوی الاضلاع، آن ضلع را نصف می کند.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

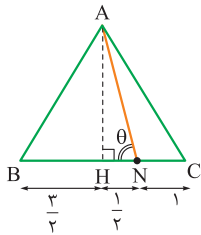
گام دوم (به دست آوردن طول HN):

در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم، طبق نکته، این ارتفاع ضلع BC را نصف می‌کند ($BH = HC = 1/5$)، از گام اول هم می‌دانیم که $NC = 1$ ، همان‌طور که در شکل می‌بینید HN برابر می‌شود با:

$$HN = CH - NC \Rightarrow HN = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

گام سوم (به دست آوردن طول AN):

ابتدا طول ارتفاع AH را به دست می‌آوریم، با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABH:



$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times a$$

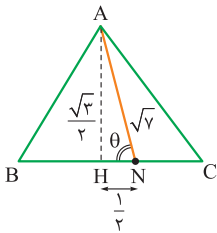
نکته طول ارتفاع وارد بر هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول a برابر است با:

حال رابطه فیثاغورس را برای مثلث AHN می‌نویسیم تا AN به دست آید:

$$AN^2 = HN^2 + AH^2 \Rightarrow AN^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow AN^2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = 7 \xrightarrow{AN > 0} AN = \sqrt{7}$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

حالا که اضلاع مثلث AHN را داریم، $\cos \theta$ به راحتی پیدا می‌شود:



$$\cos \theta = \frac{NH}{AN} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

تست و پاسخ ۶۳

اگر $\cos \alpha = \frac{-1}{4}$ و $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار $\cos 2\beta$ کدام است؟

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۴)$$

$$\pm \frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۱)$$

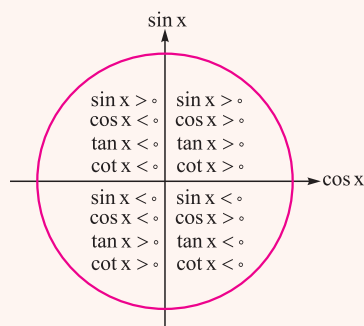
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره باید به خوبی بر به دست آوردن نسبت‌های زاویه‌ها به شکل $k\pi \pm \alpha$ و $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ مسلط باشید چرا که حل کردن بسیاری از سؤال‌های مثلثات بدون این مفاهیم غیرممکن است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا رابطه را به صورت $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$ بنویسید و سپس طرفین را در ۲ ضرب کنید.

درس نامه

علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف دایره مثلثاتی:





نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها به شکل $k\pi \pm \alpha$:

زاویه α را حاده در نظر می‌گیریم، در آن طرف مساوی همان نسبت را برای α می‌نویسیم (مثلاً $\sin(k\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$) سپس مشخص می‌کنیم که $k\pi \pm \alpha$ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد، اگر نسبت اولیه در آن ناحیه مثبت بود، پشت حاصل مثبت و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می‌دهیم، نگاه کنید:

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \text{ربع سوم } (> 0) \\ \tan(\pi + \alpha) = \oplus \tan \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \text{ربع دوم } (> 0) \\ \sin(\pi - \alpha) = \oplus \sin \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \text{ربع سوم } (< 0) \\ \cos(3\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \text{ربع چهارم } (< 0) \\ \sin(2\pi - \alpha) = \ominus \sin \alpha \end{array} \end{array}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها به شکل $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ (فرد k):

α را حاده در نظر می‌گیریم، اگر \sin داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cos \alpha$ (و بالعکس) و اگر \tan داشتیم در آن طرف مساوی می‌نویسیم $\cot \alpha$ (و بالعکس)، سپس تعیین می‌کنیم که $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد، اگر نسبت اولیه در آن جا مثبت بود، پشت حاصل مثبت قرار می‌دهیم و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می‌دهیم. نگاه کنید:

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \text{ربع دوم } (< 0) \\ \cot(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\tan \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \text{ربع سوم } (> 0) \\ \tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = \oplus \cot \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \text{ربع دوم } (< 0) \\ \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \ominus \sin \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \text{ربع چهارم } (< 0) \\ \sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha) = \ominus \cos \alpha \end{array} \end{array}$$

فلاصه بگم! $k\pi$ نسبت رو عوض نمی‌کنه ولی $\frac{k\pi}{4}$ (فرد k) نسبت رو عوض می‌کنه، برای تعیین علامت هم کافیه ببینی که عبارت داخل پرانتز در کدوم ربع قرار می‌گیره.

پاسخ تشریحی

گام اول (نوشتن β بر حسب α): در رابطه داده شده، β را بر حسب α می‌نویسیم و سپس طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم تا

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \alpha \xrightarrow{\times 2} 2\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

گام دوم (به دست آوردن $\cos 2\beta$): در $2\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ، جای‌گذاری می‌کنیم و با توجه به مطالب درس‌نامه خواهیم داشت:

$$\cos(2\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \oplus \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (*)$$

نسبت عوض می‌شود

گام سوم (به دست آوردن $\sin \alpha$): در صورت سؤال $\cos \alpha = \frac{-1}{4}$ داده شده است، $\sin \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$$

تکنیک

هر موقع هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به ما دادند، می‌توانیم اندازه (علامت نه!) سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آوریم، به این صورت که یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی رسم می‌کنیم و با توجه به نسبت داده شده، اندازه‌ها را بر روی مثلث قرار می‌دهیم و سپس به کمک فیثاغورس طول ضلع سوم را به دست می‌آوریم و سایر نسبت‌ها را می‌نویسیم، مثلاً در این جا داریم:

$$\begin{array}{l} |\cos \alpha| = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \\ |\sin \alpha| = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ |\tan \alpha| = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \\ |\cot \alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \end{array}$$

با توجه به فیثاغورس

باز هم تأکید می‌کنم که این تکنیک علامت نسبت را مشخص نمی‌کند و برای تعیین علامت باید بدانیم که α در کدام ناحیه قرار دارد.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

$\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را در رابطه (*) در گام دوم جای گذاری می کنیم تا خواسته سؤال به دست آید:

$$\cos 2\beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-1}{2} \right) \Rightarrow \cos 2\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تست و پاسخ ۶۴

مقدار عبارت $A = \sin 54^\circ \cos 72^\circ$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره هر چه قدر از اهمیت روابط کمان های 2α بگویم باز هم کم است، به خوبی بر آنها مسلط باشید چراکه یکی از مفاهیم پایه ای مثلثات است.

خود حل کنی بهتره چون 54° و 36° متمم یکدیگرند، به جای $\sin 54^\circ$ بنویسید $\cos 36^\circ$ و سپس دو طرف رابطه را در $\sin 36^\circ$ ضرب کنید تا بتوانید از رابطه $\sin 2\alpha$ استفاده کنید.

درس نامه

نسبت های مثلثاتی زوایای متمم و مکمل

α و β متمم	α و β مکمل
$\sin \alpha = \cos \beta$	$\sin \alpha = \sin \beta$
$\cos \alpha = \sin \beta$	$\cos \alpha = -\cos \beta$
$\tan \alpha = \cot \beta$	$\tan \alpha = -\tan \beta$
$\cot \alpha = \tan \beta$	$\cot \alpha = -\cot \beta$

پاسخ تشریحی گام اول (نوشتن A بر حسب $\cos 36^\circ$ و $\cos 72^\circ$): زوایای 36° و 54° متمم یکدیگرند، پس $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$:

$$A = \sin 54^\circ \cos 72^\circ \Rightarrow A = \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

گام دوم (ساده سازی A): دو طرف رابطه را در $\sin 36^\circ$ ضرب می کنیم و سپس با توجه به رابطه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ خواهیم داشت:

$$A = \cos 36^\circ \cos 72^\circ \Rightarrow (\sin 36^\circ) A = \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\frac{1}{2} \sin 72^\circ}$$

$$\Rightarrow (\sin 36^\circ) A = \frac{\frac{1}{2} \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{\frac{1}{2} \sin 144^\circ} \Rightarrow (\sin 36^\circ) A = \frac{1}{4} \sin 144^\circ \Rightarrow A = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ}$$

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال): زاویه های 36° و 144° مکمل یکدیگرند پس $\sin 36^\circ = \sin 144^\circ$ ، در نتیجه مقدار A برابر می شود با:

$$A = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 144^\circ} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

تست و پاسخ ۶۵

مقدار $\sin(x+y)$ کدام است؟

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ اگر}$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

مشاوره روابط مرتبط با بسط‌های $\sin(\alpha \pm \beta)$ و $\cos(\alpha \pm \beta)$ را باید حفظ باشید، این رابطه‌ها می‌توانند سؤال مستقیم داشته باشند و یا با بقیه مباحث مثلثات ترکیب شوند.

خودت حل کنی بهتره دو طرف روابط داده شده را به توان ۲ برسانید و سپس طرفین را با هم جمع کنید.

درس نامه •• سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان

سینوس و کسینوس زوایای $\alpha \pm \beta$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

پاسخ تشریحی گام اول (به توان ۲ رساندن دو طرف رابطه‌های داده شده):

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

دو طرف رابطه‌های داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

گام دوم (جمع طرفین رابطه‌ها):

سمت چپ روابط به دست آمده را با هم و سمت راست آن‌ها را نیز با هم جمع می‌کنیم تا بتوانیم از روابط مثلثاتی استفاده کنیم:

$$\overbrace{\sin^2 x + \sin^2 y + \cos^2 x + \cos^2 y} = 1 + \overbrace{-2 \sin x \sin y + 2 \cos x \cos y} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب سازی}} 2 + 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y = 1 \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} 2 + 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 1$$

گام سوم (به دست آوردن $\cos(x+y)$):

از رابطه به دست آمده در گام دوم با توجه به درس‌نامه به جای $\cos x \cos y - \sin x \sin y$ قرار می‌دهیم $\cos(x+y)$:

$$2 + 2 \underbrace{(\cos x \cos y - \sin x \sin y)}_{\cos(x+y)} = 1 \Rightarrow 2 + 2 \cos(x+y) = 1 \Rightarrow 2 \cos(x+y) = -1 \Rightarrow \cos(x+y) = -\frac{1}{2}$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

می‌دانیم $\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$ ، برای به دست آوردن اندازه $\sin(x+y)$ ، مثلث فرضی زیر را رسم می‌کنیم:

$$\underbrace{\cos(x+y)}_{\text{مجاور وتر}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{c} \sqrt{3} \\ \triangle \\ 1 \end{array} \Rightarrow |\sin \alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به فیثاغورس

توجه کنید اندازه $\sin \alpha$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و علامت آن را نمی‌دانیم، با توجه به این‌که $\frac{\sqrt{3}}{2}$ در گزینه‌ها موجود است پس جواب برابر

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ می‌شود.}$$

تست و پاسخ ۶۶

مقدار عبارت $A = \sqrt{\frac{1}{\sin 15^\circ}} + \sqrt{\frac{1}{\cos 15^\circ}}$ کدام است؟

$$\sqrt{4+4\sqrt{6}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{2+4\sqrt{6}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{6}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2+2\sqrt{6}} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

مشاوره خیلی از اوقات در سؤال‌های مثلثات، کلید حل سؤال «به توان ۲ رساندن» است.

خودت حل کنی بهتره دو طرف رابطه را به توان ۲ برسانید و از مخرج مشترک‌گیری استفاده کنید. برای ادامه حل توجه کنید که

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ$$

پاسخ تشریحی روش اول:

گام اول (به توان ۲ رساندن دو طرف رابطه):

$$A^2 = \frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} + 2\sqrt{\frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}}$$

با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای دو طرف رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

گام دوم (ساده‌سازی):

با توجه به $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ$ و مخرج مشترک‌گیری خواهیم داشت:

$$A^2 = \frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} + 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}} \Rightarrow A^2 = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} + 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)}{\sin 30^\circ} + 2\sqrt{\frac{2}{\sin 30^\circ}}$$

گام سوم (جای گذاری $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ در رابطه به دست آمده):

در رابطه به دست آمده در گام دوم به جای $\frac{1}{2} \sin 30^\circ$ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)}{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}}} \Rightarrow A^2 = \frac{2(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)}{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}}} \Rightarrow A^2 = 4(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) + 4 \quad (*)$$

نکته برای به دست آوردن $\sin x + \cos x$ و $\sin x - \cos x$ خواهیم داشت:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \sqrt{1 + \sin 2x}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin 2x}$$

گام چهارم (به دست آوردن $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$):

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \pm \sqrt{1 + \frac{\sin 30^\circ}{2}} \xrightarrow{\substack{\sin 15^\circ > 0 \\ \cos 15^\circ > 0}} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

با توجه به نکته گفته شده داریم:

گام پنجم (به دست آوردن خواسته سؤال):

مقدار به دست آمده در گام چهارم را در رابطه (*) در گام سوم جای‌گذاری می‌کنیم تا خواسته سؤال به دست آید:

$$A^2 = 4(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) + 4 \xrightarrow{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}} A^2 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 4$$

$$\Rightarrow A^2 = \sqrt{\frac{16 \times 3}{2}} + 4 \Rightarrow A^2 = \sqrt{24} + 4 \Rightarrow A^2 = 2\sqrt{6} + 4 \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{2\sqrt{6} + 4}$$

روش دوم:

در گام چهارم $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ را این‌گونه هم می‌توانستیم به دست بیاوریم:

با توجه به $\sin(45^\circ + x)$ خواهیم داشت:

$$\sin(45^\circ + x) = \sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \Rightarrow \sin(45^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \quad (I)$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

حال اگر در (I) قرار دهیم $x = 15^\circ$

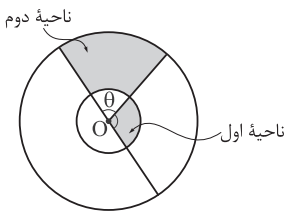
$$\xrightarrow{(I)} \sin(45^\circ + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) \Rightarrow \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ادامه حل مانند روش اول است.

تست و پاسخ ۶۷

شعاع دایره کوچکتر نصف شعاع دایره بزرگتر است و مساحت ناحیه اول نصف مساحت ناحیه دوم است. مقدار θ کدام است؟



$$\frac{2\pi}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{5} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{5} \quad (3)$$

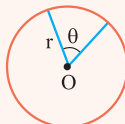
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤالهای مساحت قطاع دو دایره چون تا به حال خیلی کم در کنکور آمده است، می‌تواند در کنکورهای آینده مورد توجه طراحان قرار گیرد.

خودت حل کنی بهتره شعاع دایره کوچک را r و شعاع دایره بزرگ را $2r$ در نظر بگیریم، از رابطه $S_{\text{قطاع}} = \frac{r^2}{2} \theta$ استفاده کنید و مساحت قسمت‌های رنگی را برحسب r بنویسید.

درس نامه •• مساحت قطاع

مساحت قطاع به زاویه θ از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \Rightarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{r^2}{2} \theta$$

توجه کنید که θ را برحسب رادیان در نظر گرفتیم.

پاسخ تشریحی گام اول (به دست آوردن S_3 برحسب r):

ناحیه سوم را در شکل مشخص می‌کنیم، مساحت ناحیه دوم برابر می‌شود با مساحت قطاع به زاویه θ در دایره بزرگ منهای S_3 ، با توجه به صورت سؤال شعاع دایره بزرگ را $2r$ و شعاع دایره کوچک را r در نظر می‌گیریم، پس طبق فرمول مساحت قطاع در درس‌نامه خواهیم داشت:

$$S_3 = \underbrace{\frac{(2r)^2}{2} \theta}_{\text{قطاع } S} - \underbrace{S_3}_{\frac{r^2}{2} \theta} \Rightarrow S_3 = 2r^2 \theta - \frac{r^2}{2} \theta \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2} r^2 \theta$$

گام دوم (به دست آوردن S_1 برحسب r):

به شکل دقت کنید مساحت ناحیه اول برابر است با نصف مساحت دایره کوچک منهای S_3 :

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{2} - S_3 \Rightarrow S_1 = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \theta \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } \frac{r^2}{2}} S_1 = \frac{r^2}{2} (\pi - \theta)$$

نصف مساحت دایره کوچک



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

با توجه به صورت سؤال $S_2 = 2S_1$ ، در این رابطه به جای S_1 و S_2 عبارت‌های به دست آمده در گام‌های قبلی را جای گذاری می‌کنیم:

$$S_2 = 2S_1 \rightarrow \frac{S_1 = \frac{r^2}{2}(\pi - \theta)}{S_2 = \frac{r^2}{2}r^2\theta} \rightarrow \frac{3}{2}r^2\theta = \frac{r^2}{2}(\pi - \theta) \Rightarrow \frac{3}{2}r^2\theta = r^2(\pi - \theta) \Rightarrow \frac{3}{2}\theta = \pi - \theta$$

$$\frac{3}{2}\theta = \pi - \theta \Rightarrow \frac{5}{2}\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{5}$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

تست و پاسخ ۶۸

هرگاه $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ و $\sin 2\theta - \cos \theta = \cos 2\theta + \sin \theta$ ، مقدار $\cos 4\theta$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره فاکتورگیری، تجزیه کردن، اتحادهای جبری و... معادله‌های جبری و... معادله‌های مثلثات هستند.

خودت حل کنی بهتره عبارت را به صورت $\sin 2\theta - \sin \theta = \cos 2\theta + \cos \theta$ در بیاورید و سپس $\sin 2\theta$ را باز کنید و در سمت چپ از

$\sin \theta$ فاکتور بگیرید.

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول (ساده‌سازی):

ابتدا عبارت داده شده را مرتب می‌کنیم و به جای $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ به ترتیب $2\sin \theta \cos \theta$ و $1 - 2\cos^2 \theta$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$\sin 2\theta - \cos \theta = \cos 2\theta + \sin \theta \Rightarrow \sin 2\theta - \sin \theta = \cos 2\theta + \cos \theta \Rightarrow 2\sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 2\cos^2 \theta - 1 + \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری و مرتب‌سازی}} (\sin \theta)(2\cos \theta - 1) = 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1$$

گام دوم (تجزیه $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1$):

سمت راست عبارت به دست آمده را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin \theta(2\cos \theta - 1) = 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \Rightarrow (\sin \theta)(2\cos \theta - 1) = (\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1)$$

گام سوم (بررسی حالت‌های مختلف با توجه به شرط $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$):

با توجه به رابطه به دست آمده دو حالت داریم، یا $2\cos \theta - 1 \neq 0$ که در این حالت آن را از دو طرف ساده می‌کنیم و یا $2\cos \theta - 1 = 0$ ، هر دو

حالت را با توجه به شرط $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ بررسی می‌کنیم:

$$\text{حالت اول: } \frac{2\cos \theta - 1 \neq 0}{\rightarrow} (\sin \theta)(2\cos \theta - 1) = (\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1)$$

$$\sin \theta = \cos \theta + 1 \Rightarrow \sin \theta - \cos \theta = 1 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta}{1} = 1 \Rightarrow 1 - \sin 2\theta = 1 \Rightarrow \sin 2\theta = 0$$

در این حالت با توجه به این که $0 < 2\theta < \pi$ ، مقداری برای θ وجود ندارد.

$$\text{حالت دوم: } 2\cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < \theta < \frac{\pi}{4}} \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 4\theta = \frac{4\pi}{3}$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

در گام سوم دیدیم که $4\theta = \frac{4\pi}{3}$ بنابراین خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$\cos 4\theta = \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \cos 4\theta = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

روش دوم: رابطه داده شده را به صورت زیر مرتب کنید و سپس طرفین رابطه به دست آمده را به توان ۲ برسانید:

$$\sin 2\theta - \cos \theta = \cos 2\theta + \sin \theta \Rightarrow \sin 2\theta - \cos 2\theta = \sin \theta + \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} \underbrace{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta}_1 - 2 \sin 2\theta \cos 2\theta = \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 + \underbrace{2 \sin \theta \cos \theta}_{\sin 2\theta} \Rightarrow -2 \sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 2\theta$$

طبق صورت سؤال $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، پس $0 < 2\theta < \pi$ در نتیجه $\sin 2\theta$ مخالف صفر است و آن را از دو طرف ساده می‌کنیم:

$$-2 \sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 2\theta \Rightarrow -2 \cos 2\theta = 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{-1}{2}$$

با توجه به رابطه $\cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1$ خواهیم داشت:

$$\cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1 \xrightarrow{\cos 2\theta = \frac{-1}{2}} \cos 4\theta = 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{-1}{2}$$

تست و پاسخ ۶۹

مقدار عبارت $A = (1 - \sin \frac{3\pi}{8})(1 - \cos \frac{3\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{\lambda} (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (3)$$

$$\frac{1}{\lambda} (2)$$

$$\frac{1}{4} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم و مکمل همواره مورد علاقه طراحان کنکور بوده است.

خودت حل کنی بهتره از آن‌جا که $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{8}$ متمم یکدیگرند به جای $\sin \frac{3\pi}{8}$ و $\cos \frac{3\pi}{8}$ به ترتیب قرار دهید $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$ و سپس

از اتحاد مزدوج استفاده کنید.

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال):

با دقت به صورت سؤال می‌بینیم که زاویه‌های $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{8}$ در آن وجود دارند، با توجه به این که $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ ، زاویه‌های $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{8}$ متمم هستند.

پس سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری است.

گام دوم (نوشتن رابطه داده شده بر حسب سینوس و کسینوس $\frac{\pi}{8}$):

در رابطه داده شده در صورت سؤال به جای $\sin \frac{3\pi}{8}$ و $\cos \frac{3\pi}{8}$ به ترتیب $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$ را قرار می‌دهیم:

$$A = (1 - \sin \frac{3\pi}{8})(1 - \cos \frac{3\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8}) \Rightarrow A = (1 - \cos \frac{\pi}{8})(1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})$$

گام سوم (ساده‌سازی):

با توجه به اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$A = \overbrace{(1 - \cos \frac{\pi}{8})(1 + \cos \frac{\pi}{8})}^{= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}} (1 - \sin \frac{\pi}{8})(1 + \sin \frac{\pi}{8}) \Rightarrow A = \underbrace{(1 - \sin^2 \frac{\pi}{8})}_{\cos^2 \frac{\pi}{8}} \underbrace{(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})}_{\sin^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$\Rightarrow A = (\sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8}) \Rightarrow A = (\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8})^2$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

$$A = \underbrace{(\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8})^2}_{\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4}} \Rightarrow A = \underbrace{(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4})^2}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۷۰

هرگاه $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ، مقدار $\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

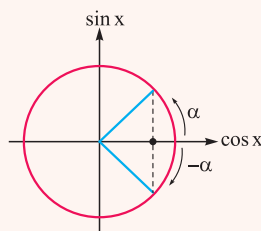
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در این مدل سوال ها که در کنکور هم مشابه آن ها را داشته ایم، باید سعی کنیم که بین کمان های داده شده یک ارتباط پیدا کنیم.

خودت حل کنی بهتره زاویه $x + \frac{\pi}{3}$ را برابر α و زاویه $2x - \frac{\pi}{3}$ را برابر β در نظر بگیرد، می بینید که $\beta = 2\alpha - \pi$.

درس نامه •• نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



توجه! کسینوس مثل بقیه نیست و منفی رو می خوره!

پاسخ تشریحی گام اول (ایجاد رابطه بین کمان های داده شده):

سؤال $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را داده و $\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ را می خواهد، $x + \frac{\pi}{3}$ را برابر α و $2x - \frac{\pi}{3}$ را برابر β در نظر می گیریم حال خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{\pi}{3} &= \alpha \\ 2x - \frac{\pi}{3} &= \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 2\alpha - \pi$$

گام دوم (ساده کردن خواسته سؤال):

حال $\beta = 2\alpha - \pi$ را در خواسته سؤال جای گذاری می کنیم:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2\alpha - \pi) = \cos(\underbrace{\pi - 2\alpha}_{\text{ربع دوم } (\cos < 0)}}) = -\cos 2\alpha \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\cos 2\alpha$$

با توجه به درس نامه

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

سؤال به ما $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را داده است، پس با توجه به رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\cos 2\alpha \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -(1 - 2(\frac{\sqrt{2}}{4})^2) \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\underbrace{(1 - \frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۷۱

اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، مقدار $\sin^2(\frac{\pi}{4} - 2x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{50}$ یا $\frac{49}{50}$ (۲) $\frac{1}{25}$ یا $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{1}{24}$ یا $\frac{24}{25}$ (۴) $\frac{1}{25}$ یا $\frac{1}{50}$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این سؤال، ترکیبی از نسبت های $\alpha \pm \beta$ و 2α است که هر دو از مفاهیم مهم و کلیدی هستند.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

خودت حل کنی بهتره تساوی $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ را باز کنید و سپس به کمک به توان ۲ رساندن، $\sin 2x$ و بعد $\cos 2x$ را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی گام اول (ساده کردن تساوی داده شده):

با توجه به بسط $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ، تساوی $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ را باز می‌کنیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

گام دوم (به دست آوردن $\sin 2x$ و $\cos 2x$):

دو طرف رابطه به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم و از اتحادهای مثلثاتی کمک می‌گیریم:

$$\cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1 - \frac{2 \sin x \cos x}{\sin 2x} = \frac{4}{10} \Rightarrow \sin 2x = \frac{6}{10}$$

حال $\cos 2x$ را هم پیدا می‌کنیم:

$$\sin 2x = \frac{6}{10} \xrightarrow{\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x} \cos^2 2x = 1 - \frac{36}{100} = \frac{64}{100} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{8}{10}$$

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

عبارت خواسته شده را با توجه به بسط $\sin(\alpha - \beta)$ باز می‌کنیم و اطلاعات به دست آمده در گام دوم را جاگذاری می‌کنیم:

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 0.8 - 0.6)$$

در نتیجه:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{1}{50} \\ \text{یا} \\ \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(-1.4)}{10} = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{49}{50} \end{array} \right.$$

پس پاسخ یا $\frac{1}{50}$ است یا $\frac{49}{50}$.

تست و پاسخ ۷۲

هرگاه $3 = 4 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$ و x در ناحیه اول باشد، مقدار $(\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۴۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این سؤال محک خوبی است برای این‌که ببینید تا چه اندازه به اتحادهای مثلثاتی مسلط هستید.

خودت حل کنی بهتره به جای $4 \sin^2 x$ بنویسید $2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x$ و سپس با مرتب‌سازی و استفاده از رابطه‌های

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ سؤال را حل کنید.

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول (ساده‌سازی عبارت داده شده):

در عبارت داده شده می‌نویسیم $4 \sin^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x$ و سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4 \sin^2 x = 3 \Rightarrow \overbrace{2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x} = 2 + 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 3$$

$$\Rightarrow 2 + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 3 \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{\cos^2 x - 2 \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



گام دوم (نوشتن رابطه به دست آمده بر حسب $\tan x$ و $\cot x$):

با استفاده از طرفین وسطین و سپس تفکیک کسرها داریم:

$$2\sqrt{3} \sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \xrightarrow[\sin x, \cos x \neq 0]{\text{در ناحیه اول}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}} \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cot x - \tan x = 2\sqrt{3}$$

گام سوم (پیدا کردن $\tan^2 x$ و $\cot^2 x$):

$$\cot x - \tan x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cot^2 x + \tan^2 x - 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 12 \Rightarrow \cot^2 x + \tan^2 x = 14$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$(\tan x + \cot x)^2 = \underbrace{\tan^2 x + \cot^2 x}_{14} + 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 16$$

روش دوم: طرفین رابطه داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 4\sin^2 x = 3 \xrightarrow{\div \cos^2 x} \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{3} \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x} 2 + 2\sqrt{3} \tan x + 4 \tan^2 x = 3 + 3 \tan^2 x \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$$

حال با توجه به روش Δ برای حل معادله درجه دوم خواهیم داشت:

$$\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=16} \tan x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع اول}} \tan x = 2 - \sqrt{3} \xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x}} \cot x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$(\tan x + \cot x)^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 = 16$$

خواسته سؤال برابر می‌شود با:

تست و پاسخ ۷۳

در شکل روبه‌رو، طول ضلع AB کدام است؟

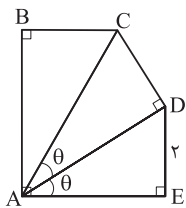
(۱) $4\sqrt{3}$

(۲) $6\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲



مشاوره گاهی اوقات روابط بین زوایه‌ها را با دقت از روی شکل‌ها باید به دست آوریم. مثلاً در مثلث ABC زاویه A برابر است با

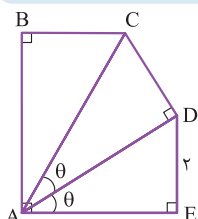
$$\frac{\pi}{2} - 2\theta$$

خود حل کنی بهتره در مثلث قائم‌الزاویه ADE ، سینوس θ را تشکیل داده و AD را بر حسب $\sin \theta$ بنویسید. به همین ترتیب برای دو مثلث قائم‌الزاویه دیگر هم نسبت‌های مثلثاتی لازم را تشکیل دهید.

پاسخ تشریحی گام اول (نوشتن AD بر حسب $\sin \theta$):

با توجه به این که $DE = 2$ ، در مثلث ADE ابتدا AD را بر حسب $\sin \theta$ می‌نویسیم:

$$\sin \theta = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{AD} \Rightarrow AD = \frac{2}{\sin \theta}$$



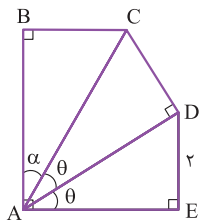


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام دوم (نوشتن AC بر حسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$): در مثلث ACD، $\cos \theta$ را می‌نویسیم و به جای AD قرار می‌دهیم $\frac{2}{\sin \theta}$:

$$\cos \theta = \frac{AD}{AC} \xrightarrow{AD = \frac{2}{\sin \theta}} \cos \theta = \frac{\frac{2}{\sin \theta}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2}{\underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{\frac{1}{2} \sin 2\theta}} \Rightarrow AC = \frac{4}{\sin 2\theta}$$



گام سوم (نوشتن کسینوس زاویه A در مثلث ABC):

در مثلث ABC، زاویه A را برابر α در نظر می‌گیریم و $\cos \alpha$ را می‌نویسیم:

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{AC = \frac{4}{\sin 2\theta}} \cos \alpha = \frac{AB}{\frac{4}{\sin 2\theta}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB \times \sin 2\theta}{4} \quad (*)$$

گام چهارم (نوشتن زاویه α بر حسب θ):

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \sin 2\theta \quad (**)$$

با توجه به این که $\hat{A} = 90^\circ$ با دقت به شکل می‌بینید که $\alpha = 90^\circ - 2\theta$ پس:

گام پنجم (به دست آوردن خواسته سؤال):

رابطه‌های (*) و (**) را با هم برابر قرار می‌دهیم و هم‌چنین می‌دانیم که $\sin 2\theta \neq 0$ ، پس می‌توانیم آن را از دو طرف حذف کنیم:

$$\frac{AB \times \sin 2\theta}{4} = \sin 2\theta \Rightarrow \frac{AB}{4} = 1 \Rightarrow AB = 4$$

تست و پاسخ ۷۴

اگر $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ باشد و شرط $\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta$ برقرار باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره یکی از تیپ سؤال‌های معروف، سؤال‌هایی مانند این سؤال است که $\sin \theta$ و $\cos \theta$ داریم و خواسته سؤال $\tan \theta$ یا $\cot \theta$ است. با تقسیم کردن مناسب باید به خواسته سؤال برسیم.

خودت حل کنی بهتره ابتدا به جای $\cos 2\theta$ بنویسید $1 - 2\sin^2 \theta$ و سپس دو طرف رابطه را بر $\cos^2 \theta$ تقسیم کنید و از رابطه

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad \text{استفاده کنید.}$$

پاسخ تشریحی روش اول:

گام اول (تبدیل $\cos 2\theta$ به $1 - 2\sin^2 \theta$):

به جای $\cos 2\theta$ در رابطه قرار می‌دهیم $1 - 2\sin^2 \theta$:

$$\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} 3\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = 1$$

گام دوم (تقسیم دو طرف بر $\cos^2 \theta$):

با توجه به $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ و $\cos^2 \theta \neq 0$ ، دو طرف را بر $\cos^2 \theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$3\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = 1 \Rightarrow \frac{3\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 3\tan^2 \theta - \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ خواهیم داشت:

$$3 \tan^2 \theta - \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 3 \tan^2 \theta - \tan \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 \theta - \tan \theta - 1 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} \tan \theta = 1 & \text{غ.ق.ق} \\ \tan \theta = -\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

با توجه به $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ ، در ربع دوم قرار دارد و در ربع دوم تنازانت منفی است. پس فقط $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

روش دوم:

$$\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\text{ابتدا به جای } \cos 2\theta, \text{ قرار می‌دهیم } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

حال در سمت چپ از $\sin \theta$ فاکتور می‌گیریم و در سمت راست از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم:

$$\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

دو حالت خواهیم داشت: $\sin \theta - \cos \theta \neq 0 \Rightarrow \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) = (\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta)$

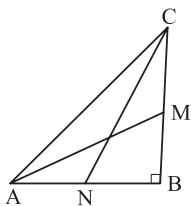
$$\Rightarrow \sin \theta = -\cos \theta - \sin \theta \Rightarrow 2 \sin \theta = -\cos \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-1}{2}$$

حالت دوم: $\sin \theta - \cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = 1$

پس با توجه به $-\pi < \theta < \pi$ ، $\tan \theta = 1$ غیر قابل قبول است؛ پس $\tan \theta = \frac{-1}{2}$.

تست و پاسخ ۷۵

در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، نیمساز زاویه‌های حاده رسم شده است، به طوری که $CN = 2 + \sqrt{5}$ و $AM = 3$ و $BM = 2$ ، طول ضلع BN کدام است؟



$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \quad (1)$$

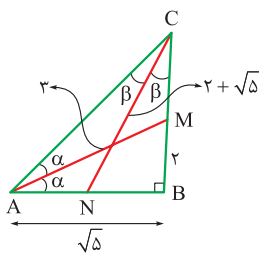
$$\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال‌های مثلثات در قالب شکل، در کنکورهای اخیر بسیار پرتکرار بوده‌اند.

خودت حل کنی بهتره در مثلث AMB اضلاع را مشخص کنید و زاویه A را برابر α در نظر بگیرید، $\sin \alpha$ واضح است، $\sin 2\alpha$ را پیدا

کنید و با توجه به شکل به حل ادامه دهید.



پاسخ تشریحی گام اول (نوشتن زاویه‌های مثلث بر حسب α و β و پیدا کردن سینوس و کسینوس α):

فرض می‌کنیم که نیمسازها، زاویه‌های A و C را به ترتیب به 2 زاویه α و 2 زاویه β تقسیم کرده‌اند، و در مثلث ABM با توجه به فیثاغورس $AB = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ ، حال نسبت‌های مثلثاتی α را در این مثلث می‌نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام دوم (به دست آوردن $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\beta$):

ابتدا $\sin 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \underbrace{\sin \alpha}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\cos \alpha}_{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

2α و 2β متمم یکدیگرند پس:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\frac{4\sqrt{5}}{9}} = \cos 2\beta \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

گام سوم (به دست آوردن $\sin \beta$):

با دقت به شکل می‌بینیم که برای به دست آوردن طول BN، باید $\sin \beta$ را داشته باشیم، حال در رابطه به دست آمده در گام دوم با توجه به

فرمول $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta$ خواهیم داشت:

$$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \beta = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 \beta = 1 - \frac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{18}$$

$$\frac{0 < \beta < \frac{\pi}{2}}{\sin \beta > 0} \rightarrow \sin \beta = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{5}}{18}} = \frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{|2 - \sqrt{5}|}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{5} - 2}{3\sqrt{2}} \quad (*)$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

در مثلث قائم‌الزاویه CNB داریم:

$$\sin \beta = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \sin \beta = \frac{BN}{2 + \sqrt{5}}$$

در آخر طبق (*):

$$\frac{\sqrt{5} - 2}{3\sqrt{2}} = \frac{BN}{2 + \sqrt{5}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین و طبق اتحاد مزدوج}} 3\sqrt{2}BN = 5 - 4 \Rightarrow BN = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

آمار و احتمال یازدهم

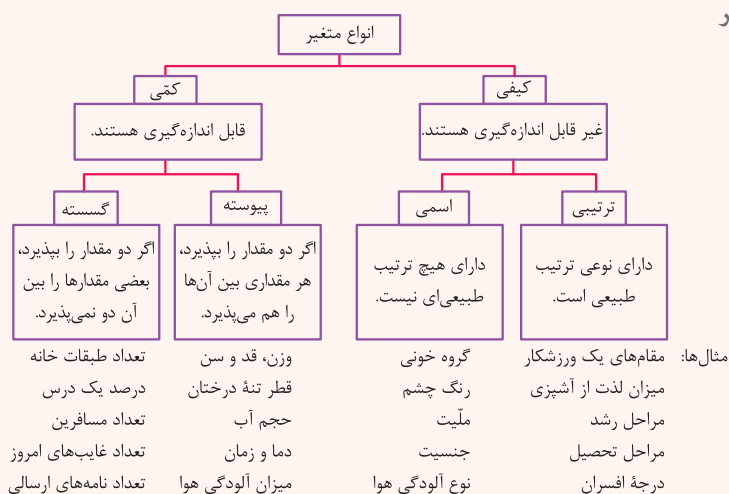
تست و پاسخ ۷۶

- در کدام گزینه متغیرهای «کیفی اسمی - کمی پیوسته - کمی گسسته» به ترتیب از راست به چپ درست نوشته شده‌اند؟
- (۱) تعداد اعضای یک کلاس - رنگ اتومبیل - گروه خونی
 (۲) رنگ اتومبیل - شاخص توده بدن - تعداد فرزندان
 (۳) مزه غذا - تعداد داوطلبان کنکور - تعداد غایب‌های یک کلاس
 (۴) شاخص توده بدن - تعداد فرزندان - رنگ اتومبیل

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال ساده‌ای از تعریف انواع متغیرها است که با دانستن ویژگی‌های هر دسته به سادگی می‌توانی حلش کنی.

درس نامه •• انواع متغیر

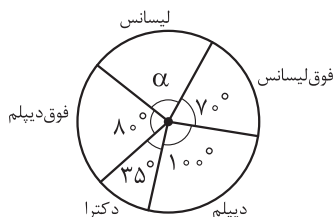


پاسخ تشریحی با توجه به تعریف انواع متغیرها، هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

- ۱) کمی گسسته - کیفی اسمی - کیفی اسمی
- ۲) کیفی اسمی - کمی پیوسته - کمی گسسته
- ۳) کیفی اسمی - کمی گسسته - کمی گسسته
- ۴) کمی پیوسته - کمی گسسته - کیفی اسمی

تست و پاسخ ۷۷

نمودار دایره‌ای توزیع مدرک تحصیلی در بین کارمندان یک شرکت دولتی به صورت زیر است. اگر تعداد لیسانس‌ها ۳۰ نفر باشد، در نمودار بافت‌نگاشت فراوانی مدرک تحصیلی کارمندان این شرکت، بلندی مستطیل کارمندان دارای مدرک دکترا کدام است؟



۱۶ (۱)

۱۵ (۲)

۱۴ (۳)

۱۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره انواع نمودارهای آماری و ویژگی‌های هر کدام، از مباحث مهم این فصل است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

خودت حل کنی بهتره با توجه به نمودار دایره‌ای با محاسبه زاویه α تعداد کل کارمندان را به دست بیاور و سپس می‌توانی تعداد دکترها را با توجه به زاویه آن در نمودار دایره‌ای محاسبه کنی.

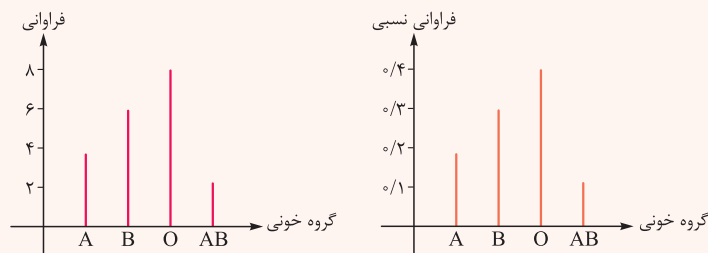
درس نامه •• انواع نمودارهای آماری

انواع مختلف نمودارهای آماری به صورت زیر است:

(۱) نمودار میله‌ای:

در این نمودار محور Xها متغیر را نشان می‌دهد و محور Yها متعلق به فراوانی یا فراوانی نسبی هر داده یا دسته است. این نمودار برای متغیرهای کیفی (مثل گروه خونی یا نوع بیمه) رسم می‌شود. ترتیب قرار گرفتن میله‌ها مهم نیست و بهتر است آن‌ها را طوری بچینیم که فراوانی‌ها به ترتیب باشند تا مقایسه ساده‌تر شود.

مثلاً در جدول فراوانی زیر که مربوط به گروه خونی افراد یک کلاس با ۲۰ دانش‌آموز است، نمودار میله‌ای فراوانی و فراوانی نسبی را رسم می‌کنیم:

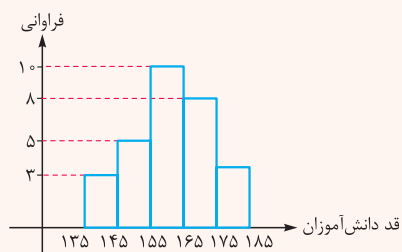


گروه خونی	A	B	O	AB
فراوانی	۴	۶	۸	۲
فراوانی نسبی	$\frac{4}{20} = 0.2$	$\frac{6}{20} = 0.3$	$\frac{8}{20} = 0.4$	$\frac{2}{20} = 0.1$

نکته در نمودار میله‌ای فراوانی، مجموع طول میله‌ها برابر فراوانی کل (کل داده‌ها) است.

(۲) **نمودار بافت‌نگاشت یا هیستوگرام**: در این نمودار روی محور افقی، مقدار داده‌های کمی پیوسته یا دسته‌بندی شده مانند قد، شاخص کیفیت هوا، طول، زمان، مسیر از خانه به مدرسه، نمرات IQ و ... که به صورت دسته‌بندی شده آمده‌اند می‌نویسیم. روی محور قائم نیز فراوانی به صورت یک مستطیل می‌آید، به همین دلیل به این نمودار، مستطیلی هم گفته می‌شود.

مثلاً نمودار زیر برای قد دانش‌آموزان یک کلاس است:



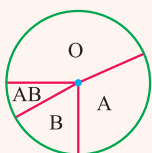
این نمودار می‌گوید ۳ نفر قد بین ۱۳۵ تا ۱۴۵ دارند، قد ۵ نفر در فاصله $[145, 155]$ است؛ در دسته $155 \leq x < 165$ ده نفر هستند؛ فراوانی دسته 165 تا 175 هم برابر ۸ است و بالاخره قد ۳ نفر در فاصله $175 \leq x \leq 185$ قرار دارد.

کلاس دارای $3 + 5 + 10 + 8 + 3 = 29$ دانش‌آموز است. فراوانی نسبی دسته وسط (دسته $[155, 165]$) برابر $\frac{10}{29}$ است و درصد فراوانی دسته چهارم $\frac{8}{29} \times 100$ است. تمام

این اطلاعات را از نمودار بافت‌نگاشت بالا فهمیدیم!

(۳) **نمودار دایره‌ای**: برای رسم این نمودار به هر متغیر، قسمتی از دایره را متناسب با فراوانی نسبی آن نسبت می‌دهیم،

$$\theta = \frac{f}{n} \times 360^\circ \quad \text{یا} \quad \theta = 360^\circ \times \text{فراوانی نسبی} = \text{زاویه}$$



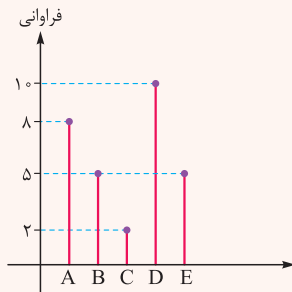
زاویه مرکزی این قسمت از دایره برابر است با:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

در نمودار دایره‌ای، شعاع دایره اهمیتی ندارد و معمولاً نواحی را با رنگ‌های مختلف نشان می‌دهیم. چون ترتیب قرارگیری نواحی در دایره مهم نیست. این نمودار معمولاً برای متغیرهای کیفی یا کمی گسسته به کار می‌رود. مثلاً سطح زیر کشت غله در پنج استان در نمودار میله‌ای روبه‌رو نشان داده شده است. زاویه متناظر استان A در نمودار دایره‌ای برابر است با:



$$\theta_A = \frac{\text{فراوانی A}}{\text{کل داده‌ها}} \times 360^\circ = \frac{8}{30} \times 360^\circ = 96^\circ$$

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه تعداد کل): ابتدا زاویه α را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha = 360^\circ - (70^\circ + 100^\circ + 35^\circ + 80^\circ) = 75^\circ$$

به کمک رابطه زاویه مرکزی در نمودار دایره‌ای داریم:

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 75^\circ = \frac{3}{n} \times 360^\circ \Rightarrow n = 144$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

بلندی مستطیل مربوط به مدرک دکترا در نمودار بافت‌نگاشت برابر با تعداد دکترهاست و این تعداد برابر است با:

$$\frac{35}{360} \times 144 = 14$$

تست و پاسخ ۷۸

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۵	۴	۳	k	k+1

اگر میانگین داده‌های جدول مقابل، برابر $\frac{10}{3}$ باشد، میانگین داده‌هایی که k واحد از این داده‌ها بزرگ‌تر و فراوانی آن‌ها مشابه همین داده‌ها باشد، کدام است؟

$$11 \frac{1}{3} (4)$$

$$11 (3)$$

$$10 \frac{1}{3} (2)$$

$$10 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تیپ، از سؤال‌ها که میانگین جدید داده‌ها پس از ایجاد تغییرات مختلف روی آن‌ها را از شما می‌خواهد، از تیپ‌های پرتکرار این فصل است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از میانگین مقدار k را به دست بیاور، پس از آن میانگین جدید را با در نظر گرفتن تغییرات داده‌ها محاسبه کن.

درس نامه •• میانگین وزن‌دار

تا حالا کارنامه خودتان را دیده‌اید! ضریب درس‌های مختلف با هم فرق دارد و قبول دارید که برای محاسبه معدل نمی‌توانیم همه نمره‌ها را با هم جمع کنیم و تقسیم بر تعداد درس‌ها کنیم؟! در این مواقع می‌گوییم داده‌ها وزن‌های مختلف (ضریب‌های مختلف) دارند و باید میانگین (یا همان معدل) را جور دیگری حساب کنیم، در این صورت باید از میانگین وزن‌دار استفاده کرد. میانگین وزن‌دار یعنی:

داده	x_1	x_2	x_3	...
وزن	w_1	w_2	w_3	...

$$\bar{x}_w = \text{میانگین وزن‌دار} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots}{w_1 + w_2 + \dots}$$



مثلاً در جدول زیر برای محاسبه میانگین، هر داده را در نظر بگیرید و تعداد هر داده را مثل ضریب آن درس در کارنامه تصور کنید و معدل یا همان میانگین وزن دار را حساب کنید:

داده	۲	۵	۷
تعداد	۳	۴	۲

$$\bar{x} = \frac{(2 \times 3) + (5 \times 4) + (7 \times 2)}{3 + 4 + 2} = \frac{40}{9} = 4 \frac{4}{9}$$

تغییرات داده‌ها و تأثیر آن بر میانگین

اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر \bar{x} باشد، در این صورت میانگین داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $a\bar{x} + b$ خواهد شد.

مثلاً اگر میانگین داده‌های a, b, c, d برابر ۳ باشد، آن‌گاه میانگین $-1, 2d - 1, 2c - 1, 2b - 1, 2a - 1$ برابر $5 - (2 \times 3)$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه k): میانگین وزن دار داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{(1 \times 5) + (2 \times 4) + (3 \times 3) + (4 \times k) + 5(k+1)}{5 + 4 + 3 + k + (k+1)} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{22 + 4k + 5k + 5}{12 + 2k + 1} = \frac{27 + 9k}{13 + 2k} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 130 + 20k = 81 + 27k \Rightarrow 7k = 49 \Rightarrow k = 7$$

گام دوم (محاسبه میانگین جدید):

اگر همه اعداد با k جمع شوند مجموع داده‌ها با «تعداد داده‌ها $\times k$ » جمع می‌شود، بنابراین میانگین داده‌ها نیز در نهایت با k جمع می‌شود.

$$\text{میانگین جدید} = \frac{10}{3} + k = \frac{10}{3} + 7 = \frac{10}{3} + \frac{21}{3} = \frac{31}{3} = 10 \frac{1}{3}$$

تست و پاسخ ۷۹

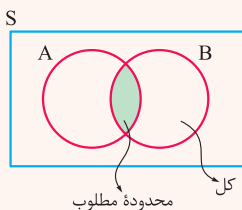
خانواده‌ای دارای سه فرزند است. اگر این خانواده لاقول یک دختر داشته باشد، با چه احتمالی فرزند بزرگ این خانواده پسر نیست؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{3}{5} \quad (3) \quad \frac{4}{7} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره حل سؤال‌های مربوط به احتمال شرطی دقت بسیار بالایی می‌خواهد. باید فضای نمونه کاهش یافته را تشخیص دهید و بعد حالت‌های مطلوب این فضا را بشمارید.

درس نامه •• احتمال شرطی



می‌دانیم که احتمال پیشامد A می‌شود $\frac{n(A)}{n(S)}$ ، حالا فرض کنید خبر بدهند که پیشامد B رخ داده است

(مثلاً بگویید عدد تاس فرد است یا متوجه شویم که مهره خروجی سیاه نیست و ...) حالا چه تغییری در

احتمال پیشامد A خواهیم داشت؟ شکل را نگاه کنید، دوتا اتفاق افتاده؛

(۱) چون می‌دانیم B رخ داده است، فضای نمونه‌ای دیگر کل S نیست، بلکه فقط درون B است.

(۲) ناحیه مطلوب دیگر تمام A نیست. به خاطر رخ دادن B ، فقط قسمتی از A قابل قبول است که با B سازگار باشد، یعنی قسمت مطلوب

می‌شود $A \cap B$ ؛ پس احتمال پیشامد A در این حالت (با فرض رخ دادن B) برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

نماد $P(A|B)$ را به صورت احتمال رخ دادن A به شرط رخ دادن B می‌خوانیم. B را پیش فرض می‌نامیم و می‌دانیم که B رخ داده است.

اگر در رابطه بالا، صورت و مخرج را بر $n(S)$ تقسیم کنیم، فرمول احتمال شرطی به دست می‌آید:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\text{این جوری حفظ کنید.}} P(\text{دومی} | \text{اولی}) = \frac{P(\text{اشتراک})}{P(\text{دومی})}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

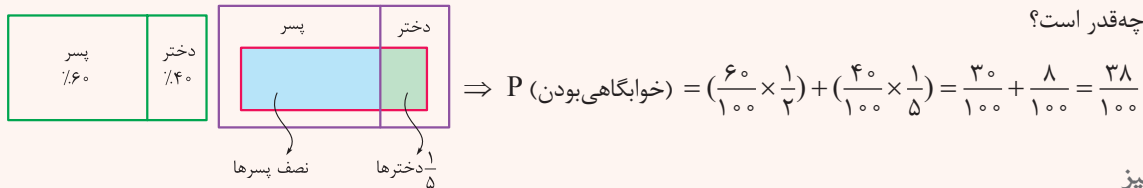
ریاضیات

یک پیشامد دیگر مثل B داریم که در فضای نمونه‌ای پخش شده و در قسمت‌های مختلف فضا قرار دارد. اگر احتمال B را در هر یک از بخش‌های A_1, A_2, A_3 بدانیم، می‌توانیم احتمال B را در کل فضا به دست بیاوریم. چه بوری؟ شانس B را در هر یک از قسمت‌ها حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots$$

اگر A_1, A_2 و ... افراز S باشند، فرمول احتمال کل می‌گوید:

مثلاً فرض کنید در دانشگاهی ۶۰ درصد دانشجویان، پسر هستند. نصف پسرها و یک پنجم دخترها خوابگاهی‌اند. احتمال خوابگاهی بودن در کل چه قدر است؟



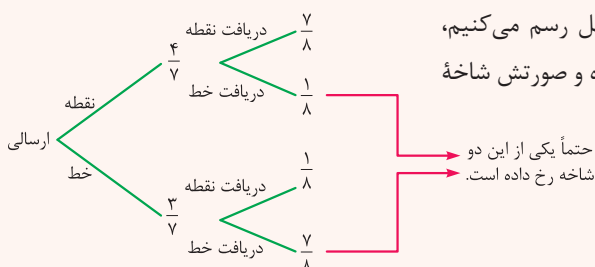
قانون بیز

در یک مسئله احتمال کل (چند کیسه، چند کارخانه و ...) اگر بیان مسئله شبیه احتمال شرطی شود، یعنی بدانیم که یک اتفاقی رخ داده و احتمال دیگری را می‌خواهیم، از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)}{P(B)} \times P(B | A_i)$$

مثل فرمول احتمال کل که اصلاً در حل تست‌ها استفاده نمی‌شد و از نمودار درختی استفاده می‌کردیم، این فرمول هم خیلی به کارمان نمی‌آید و در مثال زیر مفهوم این فرمول را یاد می‌گیریم و خیلی راحت از پس تست‌ها برمی‌آییم، نگاه کنید:

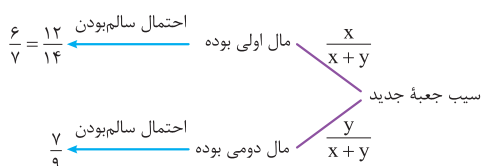
مثال: در یک ایستگاه مخابراتی به طور تجربی، فراوانی نقطه به خط به نسبت ۴ به ۳ است. اگر یک نقطه ارسال شود، احتمال این که خط دریافت شود $\frac{1}{8}$ و اگر خط ارسال شود، احتمال این که نقطه دریافت شود $\frac{1}{8}$ است. می‌دانیم در انتهای مسیر خط دریافت شده است. احتمال این که نقطه ارسال شده باشد، کدام است؟



استفاده از قانون بیز این جوری است که نمودار درختی را به طور کامل رسم می‌کنیم، مخرج کسر احتمال می‌شود شاخه‌هایی که می‌دانیم یکی از آن‌ها رخ داده و صورتش شاخه مورد نظر سؤال می‌باشد:

$$P(\text{دریافت خط} | \text{ارسال نقطه}) = \frac{P(\text{دریافت خط و ارسال نقطه})}{P(\text{دریافت خط})} = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{7}}{\frac{4}{7} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}} = \frac{4}{4+21} = \frac{4}{25} = 0.16$$

پاسخ تشریحی سیبی که از جعبه جدید برمی‌داریم ۲ حالت ممکن است داشته باشد؛ این که از جعبه اول باشد یا جعبه دوم.



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\left(\frac{x}{x+y} \times \frac{6}{14}\right) + \left(\frac{y}{x+y} \times \frac{7}{9}\right) = \frac{157}{189} \Rightarrow \frac{1}{x+y} \left(\frac{6x}{14} + \frac{7y}{9}\right) = \frac{157}{189}$$

$$\frac{1}{x+y} \left(\frac{54x + 49y}{63}\right) = \frac{157}{189}$$

$$162x + 147y = 157x + 157y \Rightarrow 5x = 10y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$



تست و پاسخ ۸۲

برای سه پیشامد مستقل A ، B و C داریم $P(C) = 2P(B) = 4P(A)$. اگر احتمال آن که فقط یکی از آن‌ها رخ دهد، سه برابر احتمال آن باشد که هر سه با هم رخ می‌دهند، چه قدر احتمال دارد که فقط پیشامد C رخ دهد؟

$$\frac{1}{8} \quad (1) \qquad \frac{3}{4} \quad (2) \qquad \frac{3}{8} \quad (3) \qquad \frac{1}{8} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره پیشامدهای مستقل از مباحث مهم فصل احتمال است و به ر رابطه‌های آن باید به خوبی مسلط باشید.

خودت حل کنی بهتره با توجه به قوانین احتمال در پیشامدهای مستقل، رابطه ریاضی فرض را بنویسید و مقدار $P(C)$ را به دست آورید.

درس نامه ••• پیشامدهای مستقل

دیدیم که برخی مواقع احتمال رخ دادن پیشامد A با فرض رخ دادن B تغییر می‌کند؛ مثلاً در پرتاب یک تاس احتمال روشن شدن ۶ برابر $\frac{1}{6}$ است، اما با فرض آمدن عدد زوج، احتمال روشن شدن ۶ می‌شود $\frac{1}{3}$.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$S = \{2, 4, 6\} = (\{6\} | \text{زوج}) = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{می‌دانیم زوج آمده}} \text{حالت شرطی}$$

پس رخ دادن پیشامد «زوج بودن»، احتمال پیشامد $\{6\}$ را از $\frac{1}{6}$ به $\frac{1}{3}$ افزایش داد. این دو پیشامد به هم وابسته‌اند (چون رخ دادن یکی احتمال دیگری را عوض کرد)؛ اما بعضی وقت‌ها رخ دادن یک پیشامد اثری بر احتمال دیگری ندارد، مثلاً اگر بدانیم تاس در پرتاب قبلی ۴ آمده، احتمال شش بودن تاس فعلی تغییری نمی‌کند. در این شرایط می‌گوییم دو پیشامد مستقل‌اند یا به عبارتی:

$$B, A \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$$

دقت کنید که وقتی پیشامدهای A و B مستقل باشند، پیشامدهای A' و B' نیز نسبت به هم مستقل‌اند و داریم:

$$P(A' | B') = P(A')$$

کتاب درسی می‌گوید پیشامدهایی که در ظاهر نیز با هم ارتباطی ندارند، مستقل‌اند؛ مثلاً سکه از تاس مستقل است؛ سکه اول از سکه دوم مستقل است؛ فرزندان خانواده از هم مستقل‌اند، قبولی A در آزمون از قبولی B مستقل است و ...

نکته اگر دو پیشامد از هم مستقل باشند، احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل ضرب احتمال‌ها است؛ یعنی:

$$B, A \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

پاسخ تشریحی طبق فرض مسئله اگر $P(A) = x$ باشد، آن‌گاه $P(B) = 2x$ و $P(C) = 4x$ است. طبق درس‌نامه داریم:

$$P(A) \cap P(B') \cap P(C') = P(A) \times P(B') \times P(C') = x(1-2x)(1-4x)$$

احتمال این که فقط A رخ بدهد:

$$\text{به طریق مشابه احتمال این که فقط } B \text{ رخ بدهد برابر با } 2x(1-x)(1-4x) \text{ و احتمال این که فقط } C \text{ رخ بدهد برابر با } 4x(1-x)(1-2x)$$

است. احتمال رخ دادن هر سه با هم نیز برابر با $8x^3 = 4x \times 2x \times x$ است؛ بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$x(1-2x)(1-4x) + 2x(1-x)(1-4x) + 4x(1-x)(1-2x) = 3 \times 8x^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

خواسته صورت سؤال احتمال رخ دادن فقط پیشامد C است؛ یعنی:

$$P(C) = 4x(1-x)(1-2x) = \frac{3}{8}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۸۳

با دیدن n داده، حسین و رسول میانگین داده‌ها را به ترتیب ۴۱ و ۴۴ تخمین می‌زنند. انحراف داده‌ها از میانگین‌های حسین و رسول به ترتیب ۹ و ۳۶ است. اگر از این داده‌ها به اندازه میانگین اعداد حدس زده شده توسط حسین و رسول کم کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر کدام می‌شود؟

$$\frac{9}{2} (۴) \quad \frac{7}{2} (۳) \quad \frac{5}{2} (۲) \quad \frac{3}{2} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره با توجه به اطلاعات مسئله تعداد داده‌ها را به دست بیاور تا بتوانی میانگین واقعی را محاسبه کنی و پس از آن میانگین جدید را محاسبه کن.

درس نامه •• اختلاف از میانگین

برای بررسی دقیق پراکندگی باید اختلاف داده‌ها از میانگین را در نظر بگیریم؛ یعنی هر داده را منهای میانگین کنیم و مقادیر $x_i - \bar{x}$ را

$$\text{به دست آوریم؛ مثلاً در داده‌های } ۱۴, ۱۷, ۱۸, ۱۶, ۲۰ \text{ میانگین برابر } \bar{x} = \frac{۱۴+۱۷+۱۸+۱۶+۲۰}{۵} = ۱۷ \text{ است و داریم:}$$

$$\text{اختلاف از میانگین } x_i - \bar{x} : \underbrace{(۱۴-۱۷)}_{-۳}, \underbrace{(۱۷-۱۷)}_0, \underbrace{(۱۸-۱۷)}_{+۱}, \underbrace{(۱۶-۱۷)}_{-۱}, \underbrace{(۲۰-۱۷)}_{+۳}$$

نکته همیشه مجموع مقادیر اختلاف از میانگین صفر است؛ یعنی:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

پاسخ تشریحی محاسبه میانگین واقعی: ابتدا باید تعداد داده‌ها را به دست بیاوریم. میانگین اعداد برابر است با میانگین به دست آمده به اضافه

انحراف داده‌ها از میانگین تقسیم بر تعداد کل داده‌ها برای هر کدام از افراد.

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}_n + \frac{9}{n} = 41 + \frac{9}{n} \\ \bar{x} = \bar{x}_r + \frac{36}{n} = 44 + \frac{36}{n} \end{cases} \Rightarrow 41 + \frac{9}{n} = 44 + \frac{36}{n} \Rightarrow n = 18$$

تعداد داده‌ها ۱۸ تا است؛ پس میانگین ۴۶ می‌شود.

اگر از داده‌ها به اندازه میانگین ۴۱ و ۴۴، یعنی $\frac{۸۵}{۲}$ کم کنیم، میانگین کل داده‌ها نیز $\frac{۸۵}{۲}$ کم می‌شود؛ پس داریم:

$$\bar{x} - \frac{۸۵}{۲} = 46 - \frac{۸۵}{۲} = \frac{7}{2}$$

تست و پاسخ ۸۴

کیسه‌ای شامل ۲ مهره سیاه و ۵ مهره سفید است. از این کیسه به تصادف ۳ مهره انتخاب می‌کنیم و سپس به تعداد مهره‌های سفید خارج شده از کیسه، سکه پرتاب می‌کنیم. اگر تمام سکه‌های پرتاب شده رو آمده باشند، با کدام احتمال هر ۳ مهره خارج شده از کیسه، سفید بوده است؟

$$\frac{5}{14} (۴) \quad \frac{2}{7} (۳) \quad \frac{3}{14} (۲) \quad \frac{1}{7} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره برای حل سؤال‌های احتمال کل و قانون بیز اغلب از روش نمودار درختی استفاده می‌کنیم.

پاسخ تشریحی ابتدا نمودار درختی را در حالت‌هایی که تعداد مهره‌های سفید متفاوت است رسم می‌کنیم و احتمال هر یک را حساب

می‌کنیم، سپس در ستون بعدی احتمال رو آمدن تمام سکه‌ها را در هر حالت می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} \text{۱ مهره سفید و ۲ مهره سیاه} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{c} ۲ \\ ۲ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} ۵ \\ ۱ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} ۷ \\ ۳ \end{array} \right) \end{array} \quad \frac{1}{2} \text{ یک سکه رو}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

$$\xrightarrow{2 \text{ مهره سفید و ۱ مهره سیاه}} \frac{\binom{2}{1} \binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$\xrightarrow{3 \text{ مهره سفید}} \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} \left(\frac{1}{7}\right)^3$$

بنابراین طبق قانون احتمال کل، احتمال این که هر سه سکه رو بیاید برابر است با:

$$\frac{1 \times 5}{35} \times \frac{1}{2} + \frac{2 \times 10}{35} \times \frac{1}{4} + \frac{10}{35} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{70} + \frac{20}{140} + \frac{5}{140} = \frac{10 + 20 + 5}{140} = \frac{35}{140} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{35} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{140} = \frac{1}{28} \Rightarrow \frac{1}{28} = \frac{1}{28}$$

حالا طبق قانون بیض احتمال آن که هر ۳ مهره خارج شده از کیسه، سفید باشند برابر است با:

تست و پاسخ ۸۵

عدد a را به تصادف از بین اعداد صحیح انتخاب می‌کنیم. اگر معادله $ax^2 - (a+1)x + a + 8 = 0$ دارای دو ریشه ناهم‌علامت باشد، چه قدر احتمال دارد دقیقاً یکی از ریشه‌های این معادله عددی صحیح باشد؟

$$\frac{2}{7} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

$$\frac{3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال ترکیبی احتمال و حسابان که تیپ جدیدی از سؤال‌های کنکور است.

خودت حل کنی بهتره اول از همه مقادیر قابل قبول برای a را به دست بیاور و بعد هر کدام را در معادله جای‌گذاری کن و ریشه‌ها را

به دست بیاور.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه مقادیر قابل قبول برای a): معادله دو ریشه ناهم‌علامت دارد. پس حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است.

$$\frac{a+8}{a} < 0$$

$$\Rightarrow -8 < a < 0 \Rightarrow a = \{-1, -2, -3, \dots, -7\} \Rightarrow n(s) = 7$$

$$a = -1: -x^2 + 7 = 0 \Rightarrow \text{ریشه صحیح ندارد. } x$$

گام دوم (جای‌گذاری a در معادله):

$$a = -2: -2x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 48 = 49$$

$$\text{ریشه‌ها: } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} & \text{صحیح نیست. } x \\ \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} & \text{صحیح است. } \checkmark \end{cases}$$

$$a = -3: -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 64$$

$$\text{ریشه‌ها: } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{-6} = -1 & \text{صحیح است. } \checkmark \\ \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} & \text{صحیح نیست. } x \end{cases}$$

$$a = -4: -4x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 73$$

$$a = -5: -5x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 76$$

پس هر دو ریشه این معادله گنگ هستند.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

$$a = -6: -6x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 73$$

هر دو ریشه معادله غیرگویا هستند.

$$a = -7: -7x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 64$$

هر دو ریشه معادله غیرگویا هستند.

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-14}{-14} = 1 & \text{صحیح است.} \\ \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7} & \text{صحیح نیست.} \end{cases}$$

پس به ازای $a = -7, -3, -2$ معادله یک ریشه صحیح و یک ریشه غیرصحیح دارد.

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال):



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

هندسه یازدهم

تست و پاسخ ۸۶

کدام تبدیل هیچ‌گاه نمی‌تواند همانی باشد؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه

می‌دانیم که اگر نقطه‌ای روی محور بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی در تبدیل T ، A' همان A است و داریم $T(A) = A' = A$ ؛ این نقاط را نقاط ثابت تبدیل نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کنند؛ چنین تبدیلی‌هایی را تبدیل همانی می‌نامیم.
تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم: $T(A) = A$.

پاسخ تشریحی

انتقال با بردار صفر، دوران با زاویه $k \times 360^\circ$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ و تجانس با نسبت ۱، همه نقاط را روی خودش تصویر می‌کنند، یعنی تبدیل همانی هستند، اما هیچ بازتابی وجود ندارد که همه نقاط را روی خودش تصویر کند.

تست و پاسخ ۸۷

چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تبدیل «تجانس انقباضی معکوس» درست است؟

- (الف) شیب خط را لزوماً حفظ می‌کند.
(ب) شکل و تصویر آن، هم‌نهشت هستند.
(پ) جهت شکل حفظ می‌شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره ویژگی‌های تبدیلات هندسی را به خوبی بلد باشید.

درس نامه

(۱) تجانس با ضریب مثبت را تجانس مستقیم و تجانس با ضریب منفی را تجانس معکوس گویند. در تجانس با نسبت $|k| > 1$ تصویر شکل بزرگ‌تر شده و تجانس را انبساط و در تجانس با نسبت $|k| < 1$ تصویر شکل کوچک‌تر شده و تجانس را انقباض می‌گویند.
(۲) ویژگی تبدیلات هندسی:

طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازه زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.	
درست	درست	نادرست	نادرست	درست	بازتاب
درست	درست	درست	درست	درست	انتقال
درست	درست	نادرست	درست	درست	دوران
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	تجانس

پاسخ تشریحی

طبق درس‌نامه می‌دانیم هر نوع تبدیل تجانسی، شیب خط و جهت شکل را حفظ می‌کند، اما در مورد هم‌نهشتی فقط در حالتی که نسبت تجانس ± 1 باشد این اتفاق می‌افتد؛ پس اگر H یک تجانس انقباضی معکوس باشد (یعنی $-1 < k < 0$)، هیچ‌گاه تبدیل یافته یک شکل با تبدیل H ، با خود آن شکل هم‌نهشت نیست.



تست و پاسخ ۸۸

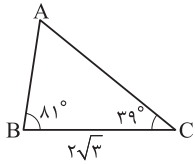
با توجه به شکل، شعاع دایره گذرنده از سه نقطه A، B و C کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) ۲

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) ۴



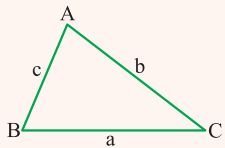
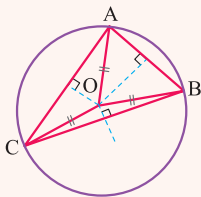
پاسخ: گزینه ۲

درس نامه دایره محیطی مثلث

نقطه همرسی سه عمودمنصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه همرسی سه عمودمنصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است.

$$OA = OB = OC = R$$

شعاع دایره محیطی مثلث ABC از روابط زیر قابل به دست آوردن است:



$$\begin{cases} R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}} \\ R = \frac{abc}{4S} \quad (S \text{ مساحت مثلث است.}) \end{cases}$$

از فرمول $R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا اندازه زاویه \hat{A} را به دست می‌آوریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - \underbrace{(\hat{B} + \hat{C})}_{120^\circ} = 60^\circ, \quad R = \frac{a}{2 \sin \hat{A}} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

تست و پاسخ ۸۹

در تجانس انبساطی مستقیم به مرکز O، نقطه A' تصویر نقطه A و نقطه M وسط AA' است. اگر $\frac{MA'}{MO} = 0/2$ آن گاه نسبت تجانس کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱/۷۵

(۲) ۱/۵

(۱) ۱/۲۵

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره رسم شکل مناسب در حل سؤالات تجانس، بسیار به شما کمک می‌کند.

خودت حل کنی بهتره شکل مسئله را بکش و طول پاره‌خط‌های مختلف را روی شکل به دست بیاور.

درس نامه تجانس

تعریف تجانس: تجانس به مرکز ثابت O و نسبت k تبدیلی است که در آن هر نقطه M به نقطه N چنان تصویر می‌شود که:

(۱) هر سه نقطه O، M و N روی یک امتداد باشند.

(۲) $ON = |k| \cdot OM$

(۳) اگر $k > 0$ (تجانس مستقیم) M و N در یک طرف O و اگر $k < 0$ (تجانس معکوس) M و N در دو طرف O قرار دارند.

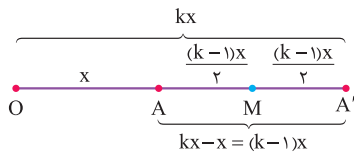


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب):



بر اساس تعریف تجانس داریم: $\frac{OA'}{OA} = k$ ، پس با فرض $OA = x$ داریم: $OA' = kx$ و

در نتیجه $AA' = OA' - OA = (k-1)x$.

گام دوم (محاسبه مقدار k):

$$\frac{MA'}{MO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{k-1}{2}x}{x + \frac{k-1}{2}x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2k - 2 = k + 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۹۰

یک مثلث متساوی الاضلاع را در تجانس که مرکز آن نقطه همرسی میانه‌ها و نسبت تجانس آن $\frac{1}{4}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیه بین مثلث و تصویرش برابر $3\sqrt{3}$ باشد، آن گاه محیط مثلث اولیه کدام است؟

۱۸ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره باز هم سوالی از تجانس که رسم درست شکل در حل آن بسیار مهم است.

خودت حل کنی بهتره با رسم شکل و نوشتن روابط تجانس، مساحت مثلث متساوی الاضلاع و سپس محیط آن را به دست بیاور.

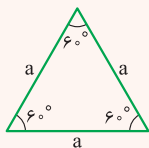
درس نامه

نکات

۱) نقطه همرسی میانه‌ها در هر مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

۲) فرمول مساحت مثلث متساوی الاضلاع:

$$S = \frac{1}{2} a \times a \times \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



ویژگی‌های تجانس:

(۱) تجانس، اندازه زوایا را حفظ می‌کند.

(۲) در تجانس، پاره‌خط‌های متناظر موازی می‌باشند؛ بنابراین تجانس شیب خطوط را حفظ می‌کند.

(۳) خطوطی که نقاط متناظر را به هم وصل می‌کنند، همگی در مرکز تجانس هم‌رس می‌باشند.

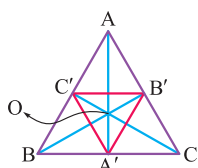
(۴) در هر تجانس، نسبت طول‌های پاره‌خط‌های متناظر، با قدرمطلق نسبت تجانس برابر است؛ یعنی $|k| = \frac{A'B'}{AB}$.

نتیجه در تجانس، شکل اولیه و تصویر آن متشابه می‌باشند و نسبت این تشابه با قدرمطلق نسبت تجانس یکسان است؛ بنابراین تجانس به نسبت k ، طول را با ضریب $|k|$ و مساحت را با ضریب k^2 تغییر می‌دهد.

پاسخ تشریحی (رسم شکل مناسب):

می‌دانیم نقطه همرسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند؛ بنابراین تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{1}{4}$ - نقطه A' (وسط BC) است. به همین ترتیب B' (وسط AC) تصویر B و C' (وسط AB) تصویر C در این تجانس است، زیرا:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{4}, \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{4}, \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{4}$$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام دوم (محاسبه مساحت $A'B'C'$ بر حسب مساحت ABC):

می‌دانیم که نسبت مساحت دو شکل مجانس، مربع نسبت تجانس است؛ پس داریم:

$$S_{A'B'C'} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

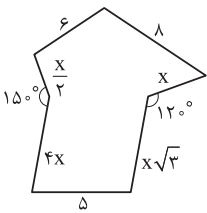
$$S_{\text{ناحیه بین}} = S_{ABC} - S_{A'B'C'} = S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ناحیه بین}} = \frac{3}{4} \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$ABC \text{ مثلث } 3a = 3 \times 4 = 12$$

تست و پاسخ ۹۱

مساحت شکل زیر را افزایش می‌دهیم به طوری که محیط آن تغییر نکند. اگر میزان افزایش مساحت برابر 120° باشد، آن گاه x کدام است؟



$$4\sqrt{3} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$3\sqrt{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

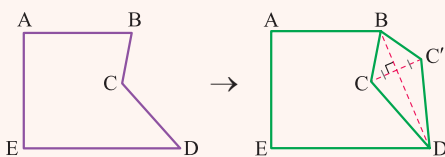
مشاوره سؤالات مربوط به افزایش مساحت شکل‌ها بدون تغییر محیط (هم پیرامونی)، مهم و پرتکرار هستند. در کنکور تیر ۱۴۰۳

هم سؤالی مشابه این سؤال داشتیم.

درس‌نامه •• کاربرد تبدیلات (مسائل هم‌محیطی)

یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائل هم‌محیطی است. در این‌گونه مسائل هدف این است که بدون تغییر محیط یک چندضلعی، مساحت آن را تغییر دهیم.

به طور مثال، در شکل زیر چندضلعی EABCD یک چندضلعی مقعر است (حداقل یک زاویه بیشتر از 180° درجه دارد). می‌خواهیم بدون تغییر محیط این چندضلعی، مساحت آن را تغییر دهیم.



ابتدا نقطه B را به نقطه D وصل می‌کنیم؛ سپس قرینه رأس C را نسبت به BD می‌یابیم. چون $DC = DC'$ و $BC = BC'$ ، پس محیط EABCD با محیط EABC'D برابر است، اما مساحت آن افزایش یافته است. میزان افزایش مساحت، برابر است با دو برابر مساحت مثلث BCD.

پاسخ تشریحی

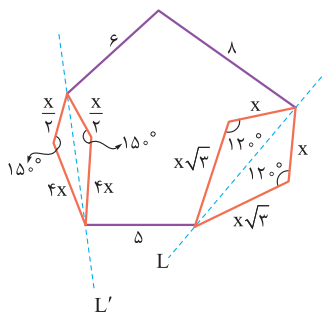
شکل مناسب را رسم می‌کنیم:

مطابق شکل، بازتاب اضلاعی را که بر حسب x مشخص شده، نسبت به محورهای L و L' به دست می‌آوریم. محیط هفت‌ضلعی حاصل با محیط هفت‌ضلعی اولیه برابر است و میزان افزایش مساحت برابر است با:

$$2 \times \left(\frac{1}{4} \times x \times x \sqrt{3} \times \sin 12^\circ\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4} \times 4x \times \frac{x}{4} \times \sin 15^\circ\right) = 120$$

$$\Rightarrow x^2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} + 2x^2 \times \frac{1}{4} = 120 \Rightarrow \frac{3x^2}{4} + x^2 = 120$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{240}{5} = 48 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$





تست و پاسخ ۹۲

نقاط $A(4, 5)$ ، $B(-1, 1)$ و $M(\alpha, \alpha)$ مفروض اند. در حالتی که محیط مثلث ABM حداقل مقدار ممکن است، مساحت آن کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4)$$

$$\sqrt{6} \quad (3)$$

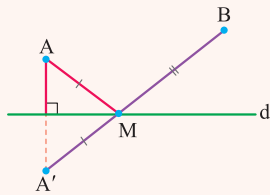
$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

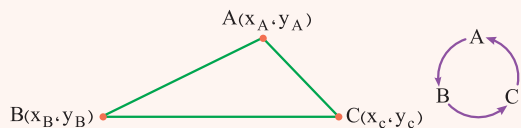
مشاوره یکی از کاربردهای بازتاب محاسبه طول کوتاه‌ترین مسیر است. (مسئله هرون)

درس نامه



(۱) مسئله هرون: دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند. برای یافتن نقطه‌ای روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از A و B مینیمم باشد، باید بازتاب نقطه A را نسبت به خط d بیابیم (A') و از آن به نقطه B وصل کنیم. مطابق شکل $MA + MB = A'B$ همواره کم‌ترین مجموع فواصل است.

(۲) یافتن مساحت مثلث در دستگاه مختصات: با داشتن مختصات سه رأس مثلث می‌توان مساحت آن را از رابطه زیر به دست آورد:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

(۳) فرمول پیک در محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای: اگر b تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای و i تعداد نقاط درونی آن باشد، مساحت چندضلعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} - i + 1$$

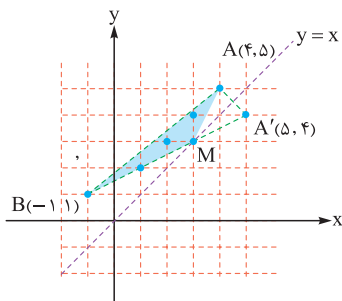
(۴) برای یافتن قرینه هر نقطه در صفحه مختصات نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، کافی است مختصات طول و عرض آن را جابه‌جا کنیم:

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y=x} A'(b, a)$$

پاسخ تشریحی گام اول (استفاده از مسئله هرون برای پیدا کردن مختصات M): نقطه $M(\alpha, \alpha)$

روی خط $y = x$ قرار دارد و با استفاده از بازتاب، برای پیدا کردن نقطه M باید نقطه A را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم:

مختصات قرینه $A(4, 5)$ نسبت به خط $y = x$ نقطه $A'(5, 4)$ است و خط $A'B$ با خط $y = x$ در نقطه $M(3, 3)$ متقاطع است، زیرا معادله خط $A'B$ به صورت زیر است:



$$\begin{cases} A'(5, 4) \\ B(-1, 1) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{4-1}{5-(-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'B: y-1 = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\Rightarrow A'B: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

پس تقاطع این دو خط در $x = 3$ اتفاق می‌افتد.

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow M(3, 3)$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): برای محاسبه مساحت مثلث ABM دو روش وجود دارد:

$$b = 4: \text{نقاط مرزی}$$

$$i = 2: \text{نقاط درونی}$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{b}{2} + i - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

روش اول: با توجه به شکل، بنا به قضیه پیک، داریم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

روش دوم:

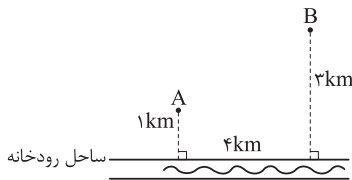
نکته طبق مورد (۲) درسنامه، مساحت مثلث ABM از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_M) + x_B(y_M - y_A) + x_M(y_A - y_B)|$$

$$S = \frac{1}{2} |4(1-3) + (-1)(3-5) + 3(5-1)| = 3$$

تست و پاسخ ۹۳

مطابق شکل می‌خواهیم از نقطه A به نقطه B ، جاده‌ای احداث کنیم که یک کیلومتر از آن در ساحل رودخانه باشد. کم‌ترین طول ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره باز هم مسئله کوتاه‌ترین مسیر که به کمک مسئله هرون حل می‌شود.

درس‌نامه •• مسئله جاده ساحلی

مسئله: فرض کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط d واقع‌اند. پاره خط $CD = a$ را روی خط d طوری مشخص کنید که مسیر شکسته $ACDB$ کم‌ترین طول را داشته باشد.

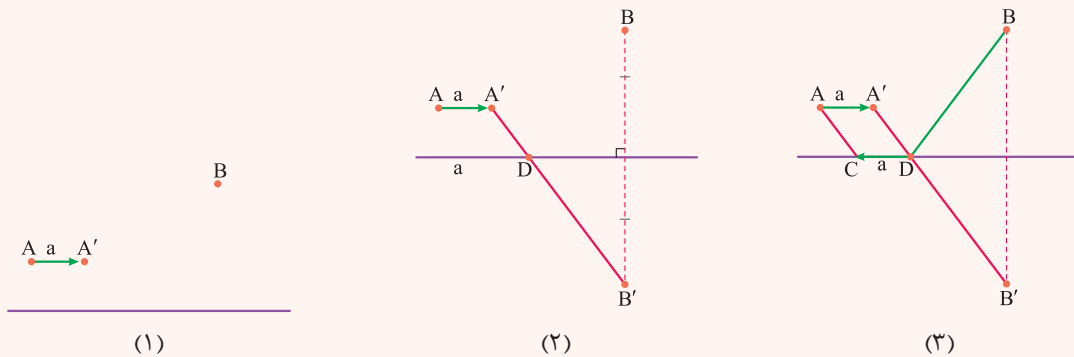
پاسخ:

A

خط d

(۱) نقطه A را a واحد به موازات خط d به سمت B منتقل می‌کنیم تا به A' برسیم.

(۲) روش حل مسئله هرون را برای دو نقطه A' و B پیاده می‌کنیم؛ یعنی بازتاب B را نسبت به خط d به دست آورده و B' می‌نامیم. نقطه برخورد $A'B'$ با d نقطه D را به ما می‌دهد.



(۳) با معلوم شدن D ، کافی است D را a واحد روی خط d به سمت A منتقل کنیم تا C به دست آید.

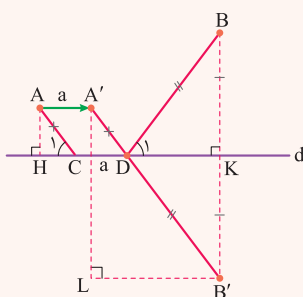
نکات ۱) چهارضلعی $AA'DC$ متوازی‌الاضلاع است، در نتیجه $AC + BD$ با طول پاره خط $A'B'$ برابر است.

۲) در مسائل، معمولاً طول $A'B'$ را می‌توانیم با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'L$

به دست آوریم. توجه کنید $B'L = HK - a$.

۳) طول مسیر $ACDB$ برابر با $a + A'B'$ است.

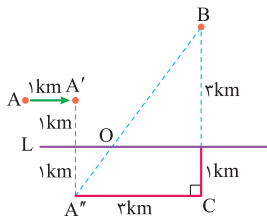
۴) $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات



پاسخ تشریحی ابتدا نقطه A را به اندازه 1 km به سمت راست (یا نقطه B را 1 km به سمت چپ) منتقل

می کنیم (نقطه A' روی شکل) تا 1 km از جاده را که در ساحل احداث می شود، در نظر بگیریم:

حالا طبق قضیه هرون A' را نسبت به خط L بازتاب می کنیم تا A'' به دست آید و سپس طول A''B را

$$A''B^2 = BC^2 + CA''^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow A''B = 5$$

محاسبه می کنیم:

پس کمترین طول جاده $5 + 1 = 6$ km است.

تست و پاسخ ۹۴

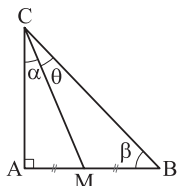
در شکل مقابل حاصل $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \theta}$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)



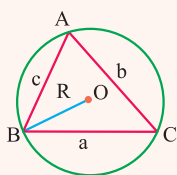
پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره یک بار در مثلث MCB و یک بار در مثلث AMC قضیه سینوس ها را بنویس.

درس نامه •• قضیه سینوس ها

مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R مفروض است. اگر طول های AB، AC و BC را c، b و a بنامیم، داریم:

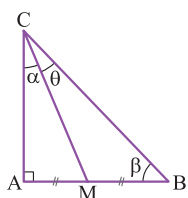
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



نتیجه نسبت طول هر دو ضلع دلخواه یک مثلث، برابر است با نسبت سینوس های زاویه های روبه روی آن ها،

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \quad \text{مثلاً}$$

پاسخ تشریحی در دو مثلث MBC و AMC از قضیه سینوس ها استفاده می کنیم:



$$\text{قضیه سینوس ها در مثلث MBC: } \frac{\sin \beta}{\sin \theta} = \frac{CM}{MB}$$

$$\text{قضیه سینوس ها در مثلث قائم الزاویه AMC: } \frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{AM}{CM}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب}} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \theta} = \frac{AM}{CM} \times \frac{CM}{MB} = \frac{AM}{MB}$$

$$\xrightarrow{AM=MB} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \theta} = 1$$

تست و پاسخ ۹۵

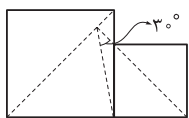
با توجه به شکل، نسبت مساحت های دو مربع کدام است؟

۲ (۲)

۶ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)



پاسخ: گزینه ۲

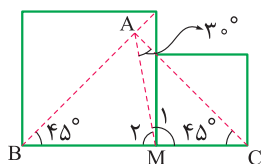


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

خودت حل کنی بهتره هر قطر یک مربع با اضلاع آن زاویه 45° می‌سازد.

پاسخ تشریحی



گام اول (تحلیل سؤال): در مثلث ABC مطابق شکل $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$ ، پس $\hat{BAC} = 90^\circ$ ، یعنی این مثلث، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. از طرفی $\hat{BAM} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

گام دوم (استفاده از قضیه سینوس‌ها): با توجه به قضیه سینوس‌ها در دو مثلث AMC و AMB داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMC: \frac{AC}{\sin M_1} = \frac{MC}{\sin 30^\circ} \\ \triangle AMB: \frac{AB}{\sin M_2} = \frac{BM}{\sin 60^\circ} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sin M_1 = \sin M_2} \frac{AC=AB}{\sin M_1 = \sin M_2} \rightarrow \frac{MC}{\sin 30^\circ} = \frac{BM}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): نسبت اضلاع دو مربع $\sqrt{3}$ است؛ پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۳ است.



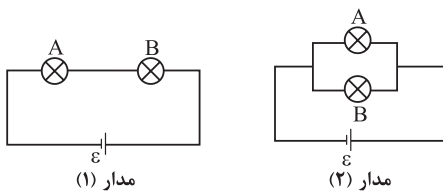
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

فیزیک یازدهم

تست و پاسخ ۹۶

لامپ‌های A و B را به صورت شکل‌های زیر به دو سر باتری آرمانی بسته‌ایم. اگر در مدار (۱) توان مصرفی لامپ A دو برابر توان مصرفی لامپ B باشد، در مدار (۲)، توان مصرفی لامپ A چند برابر توان مصرفی لامپ B است؟



۴ (۱)

۲ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ رشته تجربی طرح شده است.

خودت حل کنی بهتره با استفاده از یکسان بودن جریان عبوری از لامپ‌ها در مدار (۱)، رابطه بین مقاومت‌های الکتریکی R_B و R_A را به دست آورید. سپس با استفاده از یکسان بودن اختلاف پتانسیل دو سر لامپ‌های A و B در مدار (۲)، نسبت توان مصرفی آن‌ها را پیدا کنید.

درس نامه ••• توان مصرفی در لامپ یا هر مصرف‌کننده الکتریکی دیگر، از روابط زیر به دست می‌آید:

$$P = R I^2 = \frac{V^2}{R}$$

اختلاف پتانسیل (V) \nearrow
 مقاومت الکتریکی (Ω) \uparrow
 توان مصرفی (W) \leftarrow
 جریان الکتریکی (A) \downarrow

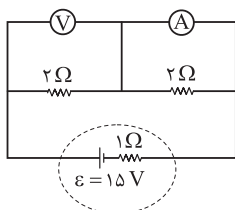
پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این که دو لامپ A و B در مدار (۱) به صورت متوالی بسته شده‌اند، جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها یکسان است و داریم:

$$\frac{P_{1A}}{P_{1B}} = \frac{R_A I_A^2}{R_B I_B^2} \xrightarrow{I_A = I_B} \frac{P_{1A} = 2P_{1B}}{I_A = I_B} \rightarrow 2 = \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow R_A = 2R_B$$

گام دوم: با توجه به این که دو لامپ A و B در مدار (۲) به صورت موازی بسته شده‌اند، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها یکسان است و داریم:

$$\frac{P_{2A}}{P_{2B}} = \frac{R_A}{R_B} \xrightarrow{V_A = V_B} \frac{P_{2A}}{P_{2B}} = \frac{R_B}{R_A} \xrightarrow{R_A = 2R_B} \frac{P_{2A}}{P_{2B}} = \frac{R_B}{2R_B} = \frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۹۷



در مدار شکل مقابل، به ترتیب، مقدارهایی که ولت‌سنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهند، چند ولت و چند آمپر است؟

۳ ، ۱۰ (۲)

۳ ، ۶ (۱)

۵ ، ۱۰ (۴)

۵ ، ۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره مدارهای الکتریکی از مهم‌ترین مباحث فیزیک (۲) هستند که در هر یک از کنکورهای اخیر، حداقل ۲ تست از آن‌ها مطرح شده است. سعی کنید روی حل مدارهای الکتریکی، تسلط کافی پیدا کنید.



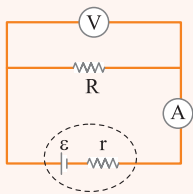
درس نامه

(۱) رابطه قانون اهم به صورت زیر است:

$$V = R I$$

↑
جریان الکتریکی (A)
↓
مقاومت الکتریکی (Ω)
← اختلاف پتانسیل (V)

(۲) محاسبه جریان الکتریکی در یک مدار تک حلقه با یک مولد:



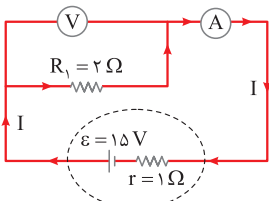
$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

↑
نیروی محرکه مولد (V)
← جریان الکتریکی (A)
↓
مقاومت داخلی (Ω) مقاومت خارجی (Ω)

(۳) آمپرسنج A: وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری جریان الکتریکی در مدار که مقاومت بسیار کمی دارد. مقاومت الکتریکی یک آمپرسنج آرمانی، صفر است.

(۴) ولت‌سنج V: وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل (ولتاژ) در مدار که مقاومت الکتریکی بسیار زیادی دارد و جریان عبوری از آن، بسیار کم است. مقاومت الکتریکی یک ولت‌سنج آرمانی، بی‌نهایت است و جریانی از آن عبور نمی‌کند.

(۵) اتصال کوتاه: هرگاه دو سر یک مقاومت، به وسیله یک سیم رابط یا یک آمپرسنج (که می‌دانیم مقاومت آن ناچیز است) به هم متصل شوند، تمام جریان از درون آن سیم یا آمپرسنج گذشته و از مقاومت، هیچ جریانی نمی‌گذرد. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم که آن مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.



پاسخ تشریحی گام اول: از آن‌جا که آمپرسنج آرمانی، مقاومت ناچیزی دارد و به دو سر مقاومت ۲ اهمی در سمت راست متصل است، این مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود؛ بنابراین شکل مدار به صورت مقابل، ساده می‌شود:

گام دوم: جریانی که آمپرسنج نشان می‌دهد، همان جریانی است که از مولد می‌گذرد:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{R=R_1=2\Omega, r=1\Omega} I = \frac{15}{2+1} = 5A$$

بنابراین آمپرسنج آرمانی، جریان ۵A را نشان می‌دهد.

گام سوم: ولت‌سنج آرمانی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 را نشان می‌دهد. با توجه به قانون اهم داریم:

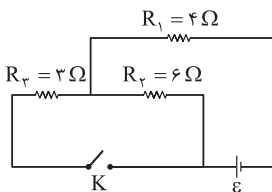
$$V = R_1 I \xrightarrow{R_1=2\Omega, I=5A} V = 2 \times 5 = 10V$$

بنابراین ولت‌سنج آرمانی، ۱۰V را نشان می‌دهد.

حواستون باشه اگر اتصال کوتاه را در نظر نگیرید در دام (۱) می‌افتید.

تست و پاسخ ۹۸

در مدار شکل مقابل با بستن کلید K، توان مصرفی مقاومت الکتریکی R_2 چند برابر می‌شود؟



$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\frac{25}{81} \quad (4)$$

$$\frac{25}{9} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴



مشاوره این تست با تغییرات در یکی از مسئله‌های دوره‌ای فصل ۲ کتاب درسی فیزیک (۲) طرح شده است. به تمرین‌های کتاب توجه کافی داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره جریان الکتریکی گذرنده از مقاومت R_p را در هر دو حالت کلید باز و کلید بسته به دست آورید؛ سپس به کمک رابطه $P = RI^2$ نسبت توان مصرفی مقاومت R_p در حالت دوم به حالت اول را حساب کنید.

درس نامه

(۱) به هم بستن متوالی مقاومت‌ها: دو مقاومت R_1 و R_2 را متوالی می‌گوییم هرگاه فقط از یک سر به هم متصل بوده و از محل اتصال آن‌ها هیچ انشعاب جریان‌داری خارج نگردد. در این حالت از هر دو مقاومت، جریان یکسانی عبور می‌کند و مقاومت معادل آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad \text{مقاومت معادل}$$

(۲) به هم بستن موازی مقاومت‌ها: دو مقاومت R_1 و R_2 را موازی می‌گوییم هرگاه هر دو سر آن‌ها به وسیله سیم‌های رابط به یکدیگر متصل شده باشند در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها یکسان است و مقاومت معادل آن‌ها از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(۳) جریان الکتریکی عبوری از دو مقاومت متوالی، یکسان است، اما جریان الکتریکی بین دو مقاومت موازی، به نسبت عکس مقاومت آن‌ها تقسیم می‌شود، یعنی هر شاخه که مقاومت کم‌تری دارد، سهم بیشتری از جریان را عبور می‌دهد.

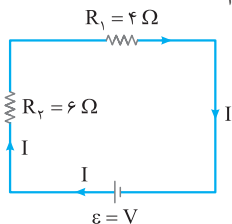
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times I, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times I$$

(۴) اختلاف پتانسیل دو سر مولد از رابطه زیر به دست می‌آید. توجه کنید که یک باتری آرمانی، مقاومت درونی ناچیزی دارد؛ بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن، با نیروی محرکه‌اش برابر است.

$$V = \varepsilon - rI \quad \text{مقاومت درونی } (\Omega) \quad \text{نیروی محرکه } (V)$$

← اختلاف پتانسیل (V) → $V = \varepsilon$ ↓ جریانی الکتریکی (A)

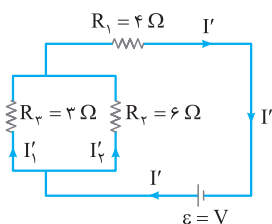
پاسخ تشریحی گام اول: در حالتی که کلید K باز است، مقاومت R_p از مدار حذف می‌شود. در این حالت جریان الکتریکی گذرنده از R_p را که همان جریان الکتریکی گذرنده از مدار است، به دست می‌آوریم؛ مقاومت‌های R_1 و R_2 متوالی هستند و داریم:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 4 + 6 = 10 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow{r=0} I = \frac{\varepsilon}{10} A$$

گام دوم: بعد از وصل شدن کلید، مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی شده و مجموعه آن‌ها با مقاومت R_1 به صورت متوالی بسته شده است. مقاومت معادل و جریان گذرنده از مولد را در این حالت نیز به دست می‌آوریم:



$$R'_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 \Rightarrow R'_{eq} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} + 4 = 2 + 4 = 6 \Omega$$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} \xrightarrow{r=0} I' = \frac{\varepsilon}{6} A$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام سوم: توجه کنید که جریان گذرنده از مقاومت R_2 (I_2') در حالت کلید بسته با جریان عبوری از مولد (I)، متفاوت است. اکنون جریان I_2' را به دست می آوریم:

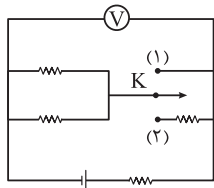
$$I_2' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \times I' \xrightarrow{I' = \frac{\varepsilon}{6}} \xrightarrow{R_2 = 6\Omega, R_3 = 3\Omega} I_2' = \frac{3}{6+3} \times \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow I_2' = \frac{\varepsilon}{18} A$$

گام چهارم: نسبت توان مصرفی مقاومت الکتریکی R_2 را در حالت دوم به حالت اول محاسبه می کنیم:

$$\frac{P_2'}{P_2} = \frac{R_2 I_2'^2}{R_2 I^2} = \left(\frac{I_2'}{I}\right)^2 \xrightarrow{I = \frac{\varepsilon}{10}} \xrightarrow{I_2' = \frac{\varepsilon}{18}} \frac{P_2'}{P_2} = \left(\frac{18}{10}\right)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{25}{81}$$

تست و پاسخ ۹۹

در مدار شکل مقابل، منبع نیروی محرکه، آرمانی و تمام مقاومت‌ها مشابه‌اند. ابتدا کلید در حالت (۱) قرار دارد. اگر کلید در حالت (۲) قرار گیرد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند برابر می‌شود؟



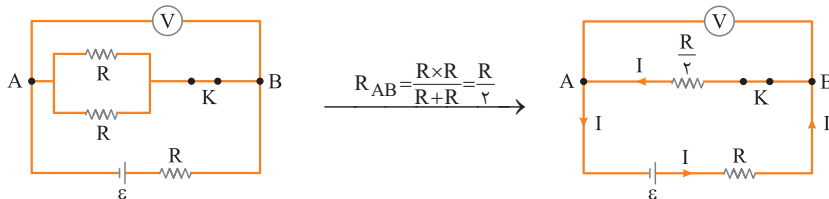
- (۱) $\frac{5}{9}$
- (۲) $\frac{9}{5}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست با تغییرات در یکی از سؤال‌های کنکور خارج از کشور رشته ریاضی سال ۱۳۹۹ طرح شده است.

خودت حل کنی بهتره مقاومت معادل مدار و جریان گذرنده از کلید را در هر دو حالت به دست آورید؛ سپس به کمک قانون اهم، نسبت عدد ولت‌سنج را در دو حالت پیدا کنید.

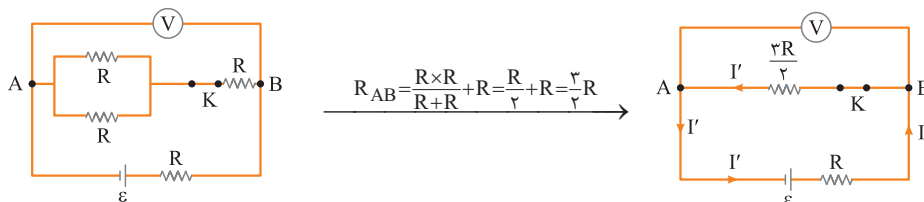
پاسخ تشریحی گام اول: در حالتی که کلید K در وضعیت (۱) قرار دارد، مقاومت معادل مدار و جریان گذرنده از کلید را حساب می‌کنیم. برای این منظور، هر یک از مقاومت‌ها را R فرض می‌کنیم:



$$R_{eq} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow{r=0} \xrightarrow{R_{eq} = \frac{3}{2}R} I = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{2}R} = \frac{2}{3} \times \frac{\varepsilon}{R}$$

گام دوم: در حالتی که کلید K در وضعیت (۲) قرار دارد نیز مقاومت معادل مدار و جریان گذرنده از کلید K را حساب می‌کنیم:



$$R'_{eq} = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} \xrightarrow{r=0} \xrightarrow{R'_{eq} = \frac{5}{2}R} I' = \frac{\varepsilon}{\frac{5}{2}R} = \frac{2}{5} \times \frac{\varepsilon}{R}$$



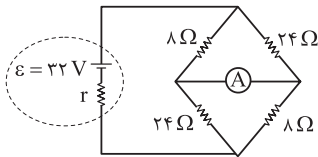
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام سوم: با استفاده از قانون اهم، نسبت عدد ولتسنج در حالت دوم به حالت اول را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{V'}{V} = \frac{I' \times \frac{2}{3} R}{I \times \frac{R}{2}} = \frac{I'}{I} \times 3 \xrightarrow{I' = \frac{2}{5} \times \frac{\varepsilon}{R}} \frac{V'}{V} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{\varepsilon}{R}}{\frac{2}{3} \times \frac{\varepsilon}{R}} \times 3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5}$$

تست و پاسخ ۱۰۰



در مدار شکل مقابل، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، ۱ A است. اگر آمپرسنج را برداشته و به جای آن یک ولتسنج آرمانی قرار دهیم، ولتسنج چند ولت را نشان می‌دهد؟

۱۶ (۲)

۱۲/۸ (۱)

۳۲ (۴)

۲۵/۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره بهتر است سؤال‌هایی از آزمون را که حل آن‌ها طولانی و وقت‌گیر است، در اولویت‌های بعدی خود قرار دهید.

درس نامه

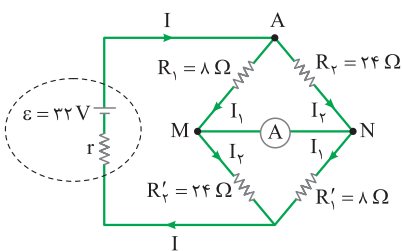
(۱) **قاعده انشعاب:** مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب خارج می‌شوند.

(۲) هرگاه در جهت جریان از مقاومت الکتریکی R بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازه IR کاهش می‌یابد (افت پتانسیل رخ می‌دهد)، اما اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت الکتریکی R بگذریم، پتانسیل به همان اندازه افزایش می‌یابد.

$$\begin{array}{l} V_b - V_a = -IR \\ V_a - V_b = IR \end{array}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جا که آمپرسنج آرمانی مقاومت ناچیزی دارد، مقاومت‌های R_1 و R_2 به صورت موازی بسته شده‌اند و

اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها یکسان است؛ بنابراین جریان گذرنده از مولد (I) بین آن‌ها تقسیم می‌شود (I_1, I_2). با توجه به تقارن موجود در مدار، جریان گذرنده از مقاومت‌های R'_1 و R'_2 نیز همان I_1 و I_2 است.



$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \xrightarrow{\frac{R_1 = 8\Omega}{R_2 = 24\Omega}} I_1 \times 8 = I_2 \times 24 \Rightarrow I_1 = 3I_2$$

گام دوم: قاعده انشعاب را در گره M به کار می‌بریم. می‌دانیم $I_1 > I_2$ است؛ بنابراین جریان آمپرسنج (I_a) از نقطه M به طرف نقطه N خواهد بود:

$$I_1 = I_2 + I_a \xrightarrow{I_a = 1A} I_1 = I_2 + 1$$

اکنون می‌توانیم I_1 و I_2 را به دست آوریم:

$$I_1 = I_2 + 1 \xrightarrow{I_1 = 3I_2} 3I_2 = I_2 + 1 \Rightarrow 2I_2 = 1 \Rightarrow I_2 = 0.5A$$

$$I_1 = 3I_2 \xrightarrow{I_2 = 0.5A} I_1 = 3 \times 0.5 = 1.5A$$

هم‌چنین با نوشتن قاعده انشعاب در گره A می‌توانیم جریان گذرنده از مولد (I) را نیز به دست آوریم:

$$I = I_1 + I_2 \xrightarrow{\begin{array}{l} I_1 = 1.5A \\ I_2 = 0.5A \end{array}} I = 1.5 + 0.5 = 2A$$

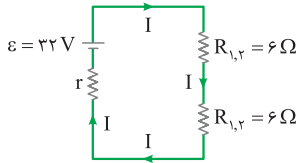


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام سوم: مقاومت معادل مدار و مقاومت درونی مولد را حساب می‌کنیم:

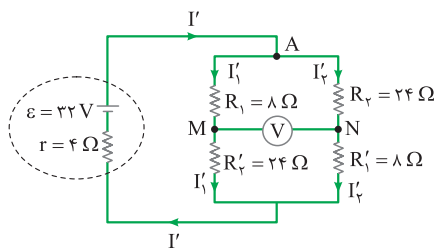
$$R_1, R_2 \Rightarrow R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \times 24}{8 + 24} = \frac{8 \times 24}{32} = 6 \Omega$$



$$R_{eq} = R_{1,2} + R_{1,2} = 6 + 6 = 12 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow{I=2A, \varepsilon=32V} 2 = \frac{32}{12+r} \Rightarrow 12+r=16 \Rightarrow r=4 \Omega$$

گام چهارم: حالا اگر آمپرسنج آرمانی را برداشته و به جای آن، یک ولتسنج آرمانی قرار دهیم، با توجه به این که مقاومت ولتسنج آرمانی بی‌نهایت است و جریانی از آن نمی‌گذرد، مقاومت‌های R_1 و R_1' با هم متوالی هستند. مقاومت‌های R_2 و R_2' نیز با هم متوالی‌اند، مقاومت معادل مدار در حالت جدید را پیدا می‌کنیم:



$$R_1 + R_1' = 8 + 24 = 32 \Omega$$

$$R_2 + R_2' = 24 + 8 = 32 \Omega$$

$$R'_{eq} = \frac{32 \times 32}{32 + 32} = 16 \Omega$$

گام پنجم: جریان گذرنده از مولد و جریان عبوری از هر شاخهٔ مدار را در حالت جدید به دست می‌آوریم:

$$I' = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} \xrightarrow{\varepsilon=32V, R'_{eq}=16\Omega, r=4\Omega} I' = \frac{32}{16+4} = \frac{32}{20} = 1/6 A$$

$$I_1' = I_2' = \frac{I'}{2} \xrightarrow{I'=1/6A} I_1' = I_2' = \frac{1/6}{2} = 0/8 A$$

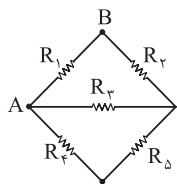
گام ششم: در حلقهٔ بالای ولتسنج و در جهت ساعتگرد از نقطه M به طرف نقطه N می‌رویم و ضمن نوشتن اختلاف پتانسیل‌ها، عددی را که ولتسنج نشان می‌دهد به دست می‌آوریم:

$$V_M + R_1 I_1' - R_2 I_2' = V_N \Rightarrow V_M + 8 \times 0/8 - 24 \times 0/8 = V_N$$

$$V_M - 16 \times 0/8 = V_N \Rightarrow V_M - V_N = 16 \times 0/8 = 12/8 V$$

تست و پاسخ (۱۰)

در مدار شکل مقابل، اگر دو سر یک منبع نیروی محرکه آرمانی به دو نقطه A و B وصل باشد، توان مصرفی تمام مقاومت‌ها برابر می‌شود. در این حالت، مقاومت معادل مدار چند برابر R_1 است؟



$$\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

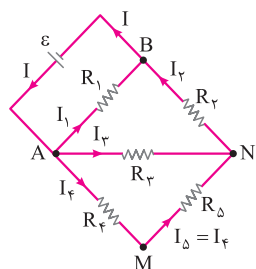
درس نامه

وقتی چند مقاومت الکتریکی با هم بسته می‌شوند (چه متوالی و چه موازی)، توان مصرفی در هر قسمت از مدار، با مجموع توان‌های مصرفی هر یک از مقاومت‌ها در آن قسمت، برابر است.

پاسخ تشریحی گام اول: مقاومت‌های R_4 و R_5 متوالی هستند؛ بنابراین جریان یکسانی دارند ($I_4 = I_5$).

از طرفی، توان مصرفی در مقاومت‌های R_4 و R_5 با هم برابر است؛ پس می‌توان نوشت:

$$P_4 = P_5 \Rightarrow R_4 I_4^2 = R_5 I_5^2 \xrightarrow{I_4=I_5} R_4 = R_5$$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

پاسخ تشریحی گام اول: وقتی مقاومت الکتریکی رئوستا افزایش می‌یابد، مقاومت الکتریکی معادل مدار نیز افزایش می‌یابد، در حالی که نیروی محرکه و مقاومت درونی مولد هیچ تغییری نمی‌کنند؛ بنابراین جریان الکتریکی گذرنده از مولد (I) کاهش می‌یابد:

$$\downarrow I = \frac{\varepsilon}{\uparrow R_{eq} + r}$$

$$\uparrow V = \varepsilon - rI \downarrow$$

از طرفی، اختلاف پتانسیل دو سر مولد ($V = V_{AB}$) افزایش پیدا می‌کند:

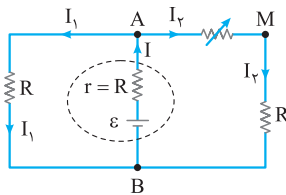
گام دوم: با استفاده از قانون اهم و قاعده انشعاب، تغییرات جریان در شاخه‌های مختلف مدار را بررسی می‌کنیم:

$$I_1 = \frac{\uparrow V_{AB}}{R} \Rightarrow \uparrow I_1$$

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = \downarrow I - \uparrow I_1 \Rightarrow \downarrow I_2$$

$$V_{MB} = R \downarrow I_2 \Rightarrow \downarrow V_{MB}$$

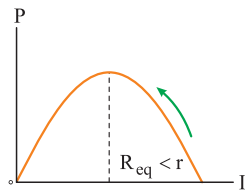
$$\uparrow V_{AB} = V_{AM} + \downarrow V_{MB} \Rightarrow \uparrow V_{AM}$$



بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر رئوستا افزایش می‌یابد (رد ۳ و ۴).

گام سوم: شاخه‌های سمت چپ و راست مولد، با هم موازی‌اند و مقاومت شاخه سمت چپ برابر با R است؛ بنابراین مقاومت معادل مدار، قطعاً کم‌تر از R است.

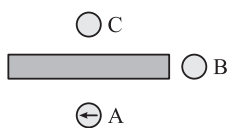
$$\begin{cases} R_{eq} < R \\ R_{eq} < r \end{cases} \Rightarrow R_{eq} < r$$



اگر به نمودار توان خروجی مولد دقت کنیم، با شرایط موجود، در نیمه سمت راست سهمی قرار داریم؛ بنابراین با افزایش مقاومت رئوستا و در نتیجه، کاهش جریان مولد، به سمت نقطه ماکزیمم سهمی می‌رویم، یعنی توان خروجی باتری افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۱۰۳

در شکل زیر، یک آهنربای میله‌ای و سه عقربه مغناطیسی در یک صفحه قرار دارند. با توجه به جهت‌گیری عقربه مغناطیسی A، عقربه‌های مغناطیسی B و C به ترتیب از راست به چپ چه جهتی را نشان می‌دهند؟



(۲) ← ، ←

(۱) ← ، →

(۴) → ، ←

(۳) → ، →

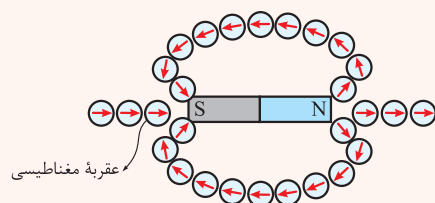
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش‌های متن کتاب درسی در فصل ۳ از کتاب فیزیک (۲) طرح شده است. هنگام مطالعه کتاب درسی، پرسش‌ها و تمرین‌های متن فصل را نیز جدی بگیرید.

درس نامه

(۱) عقربه مغناطیسی، یک آهنربای بسیار کوچک و سبک است که می‌تواند آزادانه بچرخد و برای تعیین جهت میدان مغناطیسی در هر نقطه از فضای اطراف یک آهنربا به کار می‌رود.

(۲) بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه، هم‌راستای عقربه مغناطیسی‌ای است که در آن نقطه، به حال تعادل درآمده باشد و نوک پیکان عقربه، جهت آن را نشان می‌دهد.



(۳) جهت میدان مغناطیسی درون آهنربا از قطب S به قطب N و خارج از آهنربا از قطب N به قطب S است.

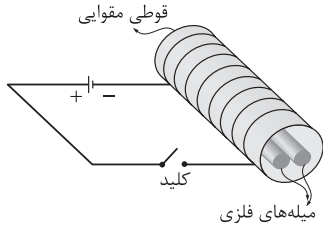


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

پاسخ تشریحی با توجه به شکل داده شده در درس نامه، سمت راست این آهنربای میله‌ای، قطب N و سمت چپ آن قطب S است؛ بنابراین جهت عقربه مغناطیسی B به طرف راست و جهت عقربه مغناطیسی C به طرف چپ است.

تست و پاسخ ۱۰۴



در شکل مقابل، دو میله فلزی بلند، درون سیم‌لوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیم‌لوله، دو میله از یکدیگر دور می‌شوند و وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه باز می‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟

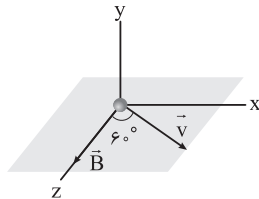
(۱) مواد دیامغناطیسی
(۲) مواد پارامغناطیسی
(۳) مواد فرومغناطیس نرم
(۴) مواد فرومغناطیس سخت

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این تست، یکی از پرسش‌های متن کتاب درسی در فصل ۳ از کتاب فیزیک (۲) است. لازم به یادآوری است که جزء به جزء، کتاب‌های درسی را به دقت مطالعه کنید.

پاسخ تشریحی میله‌ها در چنین میدان مغناطیسی‌ای که چندان هم قوی نیست، خاصیت مغناطیسی پیدا کرده و یکدیگر را دفع کرده‌اند؛ بنابراین باید از جنس ماده فرومغناطیس باشند. از طرفی، بعد از باز شدن کلید و حذف میدان مغناطیسی خارجی، میله‌ها به محل اولیه باز می‌گردند؛ پس میله‌ها به سرعت، خاصیت مغناطیسی خود را از دست داده‌اند و از نوع فرومغناطیس نرم هستند.

تست و پاسخ ۱۰۵



در شکل مقابل، میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 200 \text{ G}$ در جهت محور z است. در یک لحظه، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 5 \text{ nC}$ با تندی $v = 20 \text{ m/s}$ در جهتی حرکت می‌کند که با میدان مغناطیسی زاویه 60° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر ذره در این لحظه بر حسب نیوتون کدام است؟

$$F = (\sqrt{3} \times 10^{-9}) \vec{j} \quad (1)$$

$$F = (\sqrt{3} \times 10^{-10}) \vec{j} \quad (2)$$

$$F = -(\sqrt{3} \times 10^{-9}) \vec{j} \quad (3)$$

$$F = -(\sqrt{3} \times 10^{-10}) \vec{j} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

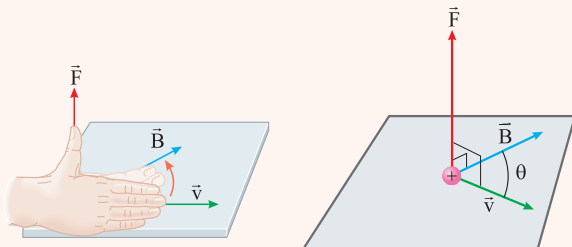
مشاوره این تیپ تست که اندازه و جهت نیروی وارد بر ذره باردار متحرک در یک میدان مغناطیسی را عنوان کرده است، بارها در کنکورهای سال‌های اخیر مطرح شده و مهم است.

درس نامه

(۱) نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی: اگر ذره باردار q با سرعت v در میدان مغناطیسی B حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد) بر آن نیرویی وارد خواهد شد که بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است.

(۲) قاعده دست راست برای تعیین جهت نیروی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی:

مطابق شکل اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت v باشد، به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویه کوچک‌تری که با B می‌سازد، در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت B قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است؛ به عبارت دیگر، طی همین مراحل، ولی با دست چپ تعیین می‌گردد.





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

۳) نماد بردار عمود بر صفحه به طرف بیرون (برون سو) است.

۴) نماد بردار عمود بر صفحه به طرف درون (درون سو) است.

۴) اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی، از رابطه زیر به دست می آید:

$$F = |q| v B \sin \theta$$

تندی ذره (m/s) اندازه بار الکتریکی (C)
 زاویه بین بردارهای اندازه میدان مغناطیسی (T) و سرعت و میدان مغناطیسی
 اندازه نیرو (N)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا اندازه نیروی وارد بر ذره باردار در این میدان مغناطیسی را به دست می آوریم:

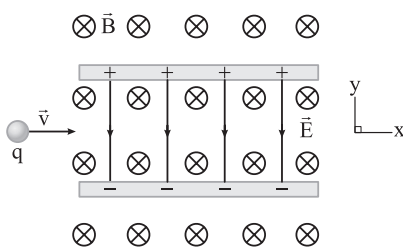
$$F = |q| v B \sin \theta \xrightarrow{B=2000 \text{ G} = 2000 \times 10^{-4} \text{ T}, \theta=60^\circ, v=20 \text{ m/s}, |q|=\Delta n C = 5 \times 10^{-9} \text{ C}} F = 5 \times 10^{-9} \times 20 \times 2000 \times 10^{-4} \times \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow F = 10^{-7} \times 2 \times 10^{-2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F = \sqrt{3} \times 10^{-9} \text{ N}$$

گام دوم: از آن جا که ذره دارای بار مثبت است، به کمک قاعده دست راست جهت نیروی وارد بر آن را تعیین می کنیم. مطابق توضیح درس نامه، جهت این نیرو، در سوی منفی محور y خواهد بود:

$$\vec{F} = -(\sqrt{3} \times 10^{-9} \text{ N}) \vec{j}$$

تست و پاسخ ۱۰۶



در شکل مقابل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -50 \mu\text{C}$ و جرم 2 g با سرعت $\vec{v} = (800 \text{ m/s}) \vec{i}$ وارد فضایی می شود که در آن میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} و میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} وجود دارد. اگر اندازه این میدان‌ها به ترتیب 2000 N/C و $1/8 \text{ T}$ باشد، شتاب ذره بلافاصله پس از ورود به این فضا بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (از نیروی وزن ذره چشم‌پوشی کنید.)

- (۱) $140 \vec{j}$
 (۲) $-140 \vec{j}$
 (۳) $860 \vec{j}$
 (۴) $-860 \vec{j}$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره نیروهای ناشی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی وارد بر ذره را به طور جداگانه به دست آورید. سپس این دو نیرو را به صورت برداری با هم جمع کنید تا نیروی خالص وارد بر ذره به دست آید. در پایان نیز با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب ذره را بلافاصله بعد از ورود به این فضا حساب کنید.

درس نامه ..

(۱) گاهی ممکن است که هم‌زمان، دو نیروی \vec{F}_E و \vec{F}_B به ترتیب ناشی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر یک ذره باردار اثر کنند. در این صورت با چشم‌پوشی از نیروی وزن ذره، نیروی خالص وارد بر آن، برآیند دو نیروی فوق است:

(۲) رابطه قانون دوم نیوتون به صورت زیر است:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$$

$$a = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m}$$

نیروی خالص (N)
 شتاب (m/s^2)
 جرم (kg)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا نیروی حاصل از میدان الکتریکی وارد بر ذره را به دست می آوریم:

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \xrightarrow{q=-50 \mu\text{C} = -50 \times 10^{-6} \text{ C}, \vec{E} = -(2000 \text{ N/C}) \vec{j}} \vec{F}_E = -50 \times 10^{-6} (-2000 \text{ N}) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_E = (10^{-1} \text{ N}) \vec{j}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام دوم: نیروی حاصل از میدان مغناطیسی وارد بر ذره را نیز به دست می‌آوریم:

$$F_B = |q| v B \sin \theta \xrightarrow{|q| = 5.0 \mu C = 5.0 \times 10^{-6} C, \vec{v} = (8.0 \times 10^6 \text{ m/s}) \hat{i}} F_B = 5.0 \times 10^{-6} \times 8.0 \times 10^6 \times 1 / 8 \times \sin 9.0^\circ$$

$$\Rightarrow F_B = 4 \times 10^{-2} \times 1 / 8 = 7 / 2 \times 10^{-2} \text{ N}$$

با توجه به این که $q < 0$ است، با استفاده از قاعده دست چپ، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره، رو به پایین است.

$$\vec{F}_B = - (7 / 2 \times 10^{-2} \text{ N}) \hat{j}$$

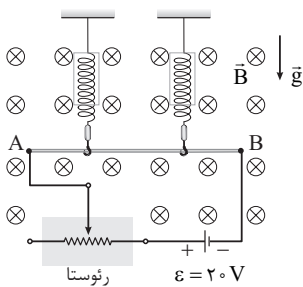
گام سوم: اکنون نیروی خالص وارد بر ذره را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_E + \vec{F}_B \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = (1.0 \times 10^{-1} \text{ N}) \hat{j} - (7 / 2 \times 10^{-2} \text{ N}) \hat{j} = (2 / 8 \times 10^{-2} \text{ N}) \hat{j}$$

گام چهارم: با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب ذره را بلافاصله پس از ورود به این فضا پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} \xrightarrow{m = 0.2 \text{ g} \times 10^{-3} \text{ kg}} \vec{a} = \frac{(2 / 8 \times 10^{-2} \text{ N}) \hat{j}}{0.2 \times 10^{-3}} \Rightarrow \vec{a} = 14.0 \hat{j}$$

تست و پاسخ ۱۰۷



در شکل مقابل، سیم رسانای AB به طول ۸.۰cm توسط دو نیروسنج مشابه به طور افقی قرار گرفته است. میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} عمود بر صفحه و اندازه آن ۵۰G است. در حالتی که مقاومت الکتریکی رئوستا برابر 2Ω است، هر یک از نیروسنج‌ها ۰/۶N را نشان می‌دهند. اگر مقاومت الکتریکی رئوستا ۲ برابر شود، مقداری که هر یک از نیروسنج‌ها نشان می‌دهد، به چند نیوتون می‌رسد؟ (مقاومت الکتریکی سیم‌ها ناچیز و مولد آرمانی است.)

۰/۷ (۲)

۰/۸ (۱)

۰/۳ (۴)

۰/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۳ کتاب درسی فیزیک (۲) و با تغییری در آن طرح شده است. این نوع تست، در کنکورهای سال‌های اخیر هم مطرح شده و مهم است.

درس نامه

$$F = I \ell B \sin \theta$$

F = اندازه نیرو (N)

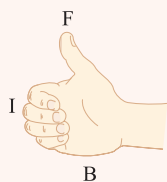
I = جریان الکتریکی (A)

ℓ = طول قسمتی از سیم که داخل میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد (m).

B = اندازه میدان مغناطیسی یکنواخت (T)

θ = زاویه بین امتداد سیم و بردار میدان مغناطیسی

نکته این نیرو بر راستای سیم و راستای میدان مغناطیسی عمود است.



۲) قاعده دست راست در مورد سیم مستقیم حامل جریان در میدان مغناطیسی به این صورت است که اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت جریان باشد، به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویه کوچک‌تری که امتداد سیم با \vec{B} می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت \vec{B} قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر سیم خواهد بود:

۳) وقتی جسمی در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن صفر است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام اول: جریان الکتریکی گذرنده از سیم AB را با استفاده از اطلاعات مربوط به مدار، به دست می‌آوریم:

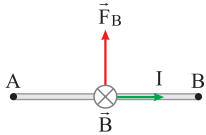
$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \xrightarrow{R=2\Omega, r=0} I = \frac{20}{2} = 10 \text{ A}$$

گام دوم: اندازه و جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این سیم را تعیین می‌کنیم:

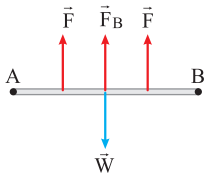
$$F = I \ell B \sin \theta \xrightarrow{I=10 \text{ A}, \ell=80 \text{ cm}=0.8 \text{ m}, B=500 \text{ G}=500 \times 10^{-4} \text{ T}, \theta=90^\circ} F = 10 \times 0.8 \times 500 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow F = 8 \times 500 \times 10^{-4} \times 1 \Rightarrow F = 0.4 \text{ N}$$

جهت این نیرو با استفاده از قاعده دست راست، رو به بالا به دست می‌آید:



گام سوم: با توجه به این که سیم در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم و وزن سیم را حساب می‌کنیم:



$$F + F + F_B - W = 0 \xrightarrow{F_B=0.4 \text{ N}} 0.4 + 0.4 + 0.4 - W = 0 \Rightarrow W = 1.2 \text{ N}$$

گام چهارم: در حالتی که مقاومت رثوستا، دو برابر شده است، جریان الکتریکی و نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را پیدا می‌کنیم:

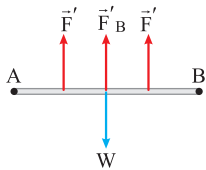
$$R' = 2R = 2 \times 2 = 4 \Omega$$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R'+r} = \frac{20}{4} = 5 \text{ A}$$

$$F'_B = I' \ell B \sin \theta \xrightarrow{I'=5 \text{ A}, \ell=0.8 \text{ m}, B=500 \text{ G}=500 \times 10^{-4} \text{ T}, \theta=90^\circ} F'_B = 5 \times 0.8 \times 500 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ \Rightarrow F'_B = 2 \times 500 \times 10^{-4} \times 1 = 0.2 \text{ N}$$

جهت این نیرو نیز، مشابه حالت اول و با استفاده از قاعده دست راست، رو به بالا به دست می‌آید.

گام پنجم: نیروی خالص وارد بر سیم را در حالت دوم نیز برابر با صفر قرار می‌دهیم تا نیرویی که هر یک از نیروسنج‌ها نشان می‌دهند به دست آید:

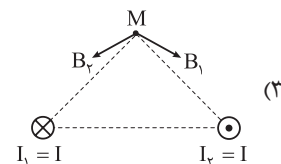
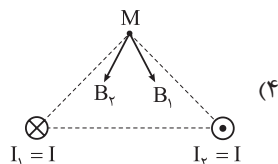
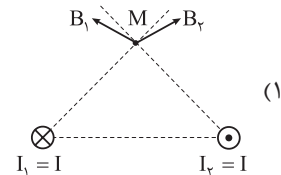
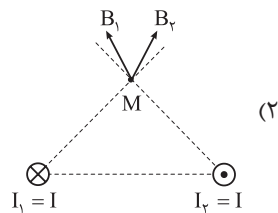
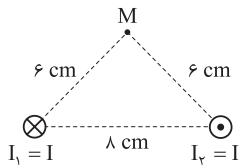


$$F' + F' + F'_B - W = 0 \xrightarrow{F'_B=0.2 \text{ N}, W=1.2 \text{ N}} 2F' + 0.2 - 1.2 = 0 \Rightarrow 2F' = 1.0 \Rightarrow F' = 0.5 \text{ N}$$

تست و پاسخ ۱۰۸

در شکل روبه‌رو، دو سیم موازی بسیار بلند و حامل جریان I، عمود بر صفحه قرار دارند. بردار میدان مغناطیسی

حاصل از هر یک از دو سیم در نقطه M، در کدام شکل درست است؟



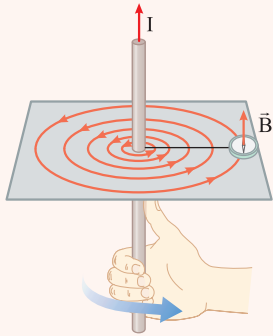
پاسخ: گزینه ۳



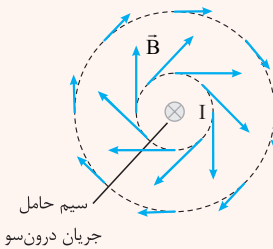
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

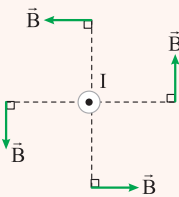
درس نامه



(۱) هنگامی که از یک سیم مستقیم جریان الکتریکی عبور می‌کند، در اطراف آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. اگر سیم را در دست راست خود بگیریم به گونه‌ای که انگشت شست دست راست، در جهت جریان باشد، جهت بسته‌شدن چهار انگشت دیگر، سوی میدان مغناطیسی در اطراف آن را نشان می‌دهد:



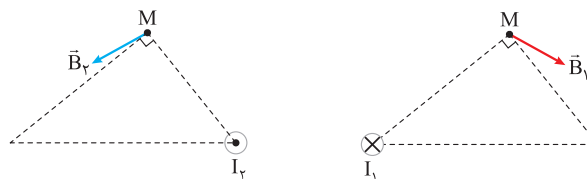
سیم حامل
جریان درون سو



(۲) اگر سیم حامل جریان، عمود بر صفحه کاغذ باشد، بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از صفحه، بر خطی که آن نقطه را به سیم وصل می‌کند، عمود است.

پاسخ تشریحی گام اول: اگر زاویه M برابر با 90° باشد، طبق رابطه فیثاغورس باید فاصله دو سیم حامل جریان به اندازه $8/\sqrt{2} = 5.66 \text{ cm}$ باشد. در حالی که این فاصله در شکل، 8 cm داده شده است؛ بنابراین زاویه M در رأس مثلث، کم‌تر از 90° است؛ در نتیجه بردارهای میدان‌های مغناطیسی \vec{B}_1 و \vec{B}_2 که عمود بر اضلاع MI_1 و MI_2 از مثلث هستند، خارج از مثلث قرار می‌گیرند (رد ۴).

گام دوم: باید \vec{B}_1 عمود بر MI_1 و \vec{B}_2 عمود بر MI_2 باشد (رد ۲). جهت میدان‌های مغناطیسی \vec{B}_1 و \vec{B}_2 در (۱) با قاعده دست راست مطابقت ندارد (رد ۱)، اما در (۳) این مطابقت وجود دارد. این دو میدان به صورت جداگانه در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند.



تست و پاسخ ۱۰۹

اندازه میدان مغناطیسی دور سر انسان حدود $3 \times 10^{-8} \text{ G}$ اندازه‌گیری شده است. اگرچه جریان‌هایی که این میدان را به وجود می‌آورند بسیار پیچیده‌اند، ولی با در نظر گرفتن این جریان‌ها به صورت تک‌حلقه‌ای دایره‌ای به قطر 16 cm می‌توان بزرگی جریان الکتریکی را تخمین زد.

جریان الکتریکی لازم برای ایجاد این میدان در مرکز حلقه چند آمپر است؟ $(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

(۱) $3/84 \times 10^{-11}$ (۲) $3/84 \times 10^{-7}$ (۳) $7/68 \times 10^{-11}$ (۴) $7/68 \times 10^{-7}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست، دقیقاً یکی از تمرین‌های کتاب درسی در فصل ۳ از کتاب فیزیک (۲) رشته ریاضی است.

جریان الکتریکی (A) تراوایی مغناطیسی $(\frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

← اندازه میدان مغناطیسی (T)
↓ شعاع حلقه (m)

درس نامه اندازه میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ای به شعاع R که حامل جریان است از رابطه مقابل به دست می‌آید:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

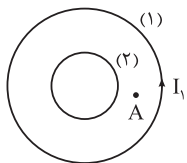
فیزیک

پاسخ تشریحی با معلوم بودن اندازه میدان مغناطیسی، جریان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad B = 3 \times 10^{-4} \text{ T} \quad G = 3 \times 10^{-12} \text{ T} \quad \mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}, \quad 2R = 16 \text{ cm} = 16 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$3 \times 10^{-12} = \frac{12/5 \times 10^{-7} \times I}{16 \times 10^{-2}} \Rightarrow 48 \times 10^{-14} = 12/5 \times 10^{-7} \times I$$

$$\Rightarrow I = \frac{48}{12/5} \times 10^{-7} \text{ A} = 3/84 \times 10^{-7} \text{ A}$$

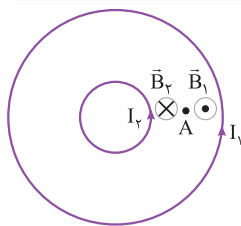


تست و پاسخ ۱۱۰ در شکل مقابل، دو حلقه هم‌مرکز و حامل جریان الکتریکی در صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی خالص در نقطه A برابر صفر باشد، جهت جریان عبوری از حلقه (۲) و جهت میدان مغناطیسی خالص در مرکز حلقه‌ها به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) پادساعتگرد، (۲) پادساعتگرد، (۳) ساعتگرد، (۴) ساعتگرد،

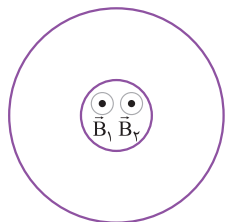
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در کتاب درسی فیزیک (۲) رشته ریاضی، تعیین اندازه میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه حامل جریان، فقط در مرکز حلقه بررسی شده است. اما تعیین جهت میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه حامل جریان، در نقاطی غیر از مرکز حلقه نیز می‌تواند بررسی شود.



پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه حامل جریان I1 در نقطه A برون سو است. حال برای آن که میدان مغناطیسی خالص در نقطه A برابر با صفر باشد، باید میدان مغناطیسی ناشی از حلقه (۲) در نقطه A درون سو باشد؛ بنابراین طبق قاعده دست راست، جریان در حلقه (۲) پادساعتگرد است.

گام دوم: قاعده دست راست، نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی ناشی از حلقه‌های (۱) و (۲) در مرکز آن‌ها برون سو است؛ بنابراین میدان مغناطیسی خالص نیز در این نقطه برون سو است.



تست و پاسخ ۱۱۱

در شکل مقابل، دو سیم‌لوله (۱) و (۲) هم‌محورند و طول برابر دارند. تعداد دور سیم‌لوله‌ها به ترتیب برابر ۳۰۰ و ۴۰۰ است. اگر جریان عبوری از سیم‌لوله (۱) برابر $I_1 = 1/2 \text{ A}$ باشد، از سیم‌لوله (۲) جریان چند آمپری و در چه جهتی عبور کند تا میدان مغناطیسی برآیند ناشی از دو سیم‌لوله در نقطه‌ای روی محور آن‌ها برابر صفر شود؟

- (۱) از A به B، ۰/۹
(۲) از A به B، ۱/۶
(۳) از B به A، ۰/۹
(۴) از B به A، ۱/۶

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست نیز، یکی از مسئله‌های دور‌های آخر فصل ۳ کتاب درسی فیزیک (۲) است که با تغییرات اندکی مطرح شده است.

درس نامه

(۱) برای محاسبه بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌لوله حامل جریان درون آن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

تعداد حلقه تراوایی مغناطیسی $\left(\frac{\text{T.m}}{\text{A}}\right)$ ← μ_0

جریان عبوری از حلقه (A) → NI

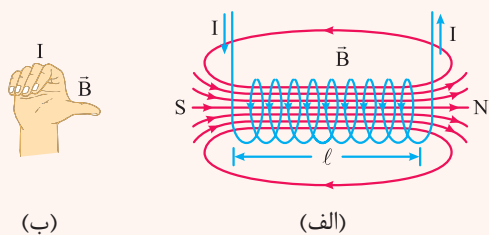
اندازه میدان مغناطیسی (T) ← B

طول سیم‌لوله (m) ← L



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک



(۲) اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت جریان سیم‌لوله ببندیم، انگشت شست، جهت میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله را نشان می‌دهد.

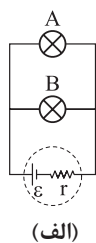
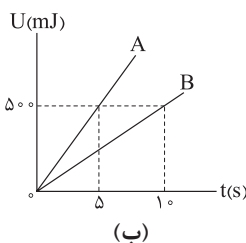
پاسخ تشریحی گام اول: برای آن که میدان مغناطیسی برابری داشته باشد، روی محور آن‌ها صفر شود، باید میدان‌های مغناطیسی ناشی از آن‌ها، هم‌اندازه و در جهت مخالف هم باشند:

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l_2} \xrightarrow{l_1 = l_2} N_1 I_1 = N_2 I_2$$

$$\frac{N_1 = 300, N_2 = 400}{I_1 = 1/2 A} \rightarrow 300 \times 1/2 = 400 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{3/6}{4} = 0/9 A$$

گام دوم: با توجه به قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌لوله (۱) به طرف چپ است؛ بنابراین برای آن که سیم‌لوله (۲) اثر این میدان مغناطیسی را خنثی کند، باید جهت میدان مغناطیسی آن به طرف راست بوده و جریان از B به طرف A در آن برقرار باشد.

تست و پاسخ ۱۱۲



نمودار انرژی الکتریکی مصرفی دو لامپ A و B که در مدار شکل (الف) قرار دارند، بر حسب زمان، به شکل (ب) است. توان خروجی باتری در مدار شکل (الف) چند وات است؟

(۲) ۰/۱۵
(۴) ۱/۳۰

(۱) ۱۵۰
(۳) ۱۰۰/۳

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

$$U = P \times t$$

انرژی مصرفی در یک مقاومت خارجی R از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$U = \text{انرژی (J)} \quad P = \text{توان مصرفی (W)} \quad t = \text{زمان (s)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به اطلاعات داده‌شده در نمودار، توان مصرفی هر یک از لامپ‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$U_A = P_A \times t_A \quad \frac{U_A = 500 \text{ mJ} = 500 \times 10^{-3} \text{ J} = 0/5 \text{ J}}{t_A = 5 \text{ s}} \rightarrow 0/5 = P_A \times 5 \Rightarrow P_A = 0/1 \text{ W}$$

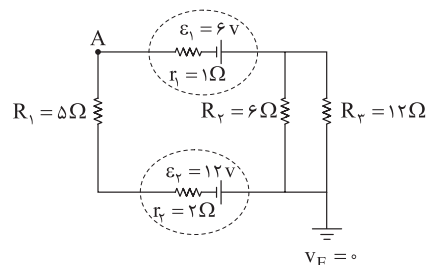
$$U_B = P_B \times t_B \quad \frac{U_B = 0/5 \text{ J}}{t_B = 10 \text{ s}} \rightarrow 0/5 = P_B \times 10 \Rightarrow P_B = 0/05 \text{ W}$$

گام دوم: توان خروجی در مدار، برابر است با مجموع توان‌های مصرفی لامپ‌های A و B.

$$P = P_A + P_B = 0/1 + 0/05 = 0/15 \text{ W}$$

تست و پاسخ ۱۱۳

در مدار شکل زیر، پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر چند ولت است؟



(۱) ۸/۵

(۲) -۸/۵

(۳) ۱۵/۵

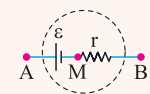
(۴) -۱۵/۵

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

(۱) بدون توجه به جهت جریان، هرگاه درون باتری از پایانه منفی به پایانه مثبت برویم، پتانسیل به اندازه ε افزایش می‌یابد.

$$V_M + \varepsilon = V_A$$





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

۲) باتری‌های مولد به مدار انرژی می‌دهند و جریان الکتریکی از پایانه مثبت آن‌ها وارد مدار می‌شود، اما باتری‌های مصرف‌کننده از مدار انرژی می‌گیرند و جریان الکتریکی به پایانه مثبت آن‌ها وارد می‌شود.

۳) هر باتری می‌خواهد جریان الکتریکی را از پایانه مثبت خود وارد مدار کند. بر این اساس وقتی دو باتری در یک مدار به صورت متقابل بسته می‌شوند، یکی می‌خواهد جریان ساعتگرد در مدار ایجاد کند و دیگری می‌خواهد جریان پادساعتگرد ایجاد کند. هر باتری‌ای که نیروی محرکه بیشتری داشته باشد، به عنوان مولد و باتری دیگر به عنوان مصرف‌کننده خواهد بود. جهت جریان الکتریکی نیز به گونه‌ای است که از پایانه مثبت باتری مولد وارد مدار می‌شود.

$$I = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_t'}{R_t + r_t + r_t'}$$

۴) محاسبه جریان در مدار تک‌حلقه:

$$I = \text{جریان الکتریکی (A)} \quad \varepsilon_t = \text{نیروی محرکه باتری مولد (V)}$$

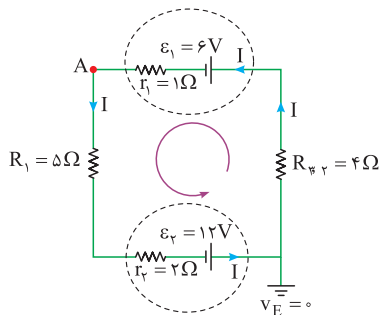
$$R_t = \text{مجموع مقاومت‌های خارجی مدار (}\Omega\text{)} \quad \varepsilon_t' = \text{نیروی محرکه باتری مصرف‌کننده (V)}$$

$$r_t' = \text{مقاومت درونی باتری مولد (}\Omega\text{)} \quad r_t = \text{مقاومت درونی باتری مصرف‌کننده (}\Omega\text{)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: دو مقاومت R_2 و R_3 به صورت موازی بسته شده‌اند. مقاومت معادل آن‌ها ($R_{2,3}$) را محاسبه کرده و شکل ساده‌تری از مدار را به صورت تک‌حلقه رسم می‌کنیم:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4 \Omega$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ است؛ بنابراین باتری ۲ به عنوان مولد و باتری ۱ به عنوان مصرف‌کننده عمل می‌کند و جریان پادساعتگرد در مدار برقرار می‌شود.



گام دوم: جریان الکتریکی در این مدار را به دست می‌آوریم:

$$R_t = R_1 + R_{2,3} = 5 + 4 = 9 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_t'}{R_t + r_t + r_t'} = \frac{12 - 6}{9 + 2 + 1} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ A}$$

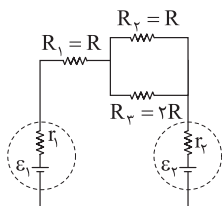
گام سوم: در جهت جریان از نقطه A به طرف نقطه E می‌رویم و ضمن گذر از هر قسمت، اختلاف پتانسیل آن را می‌نویسیم:

$$V_A - IR_1 - Ir_2 + \varepsilon_2 = V_E \quad \begin{matrix} I = \frac{1}{2} \text{ A}, R_1 = 5 \Omega, r_2 = 2 \Omega \\ \varepsilon_2 = 12 \text{ V}, V_E = 0 \end{matrix}$$

$$V_A - \frac{1}{2} \times 5 - \frac{1}{2} \times 2 + 12 = 0 \Rightarrow V_A = 3/5 - 12 \Rightarrow V_A = -8/5 \text{ V}$$

تست و پاسخ ۱۱۴

در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری (۱) برابر 200 W و توان مصرفی مقاومت R_2 برابر 40 W است. کدام یک از موارد زیر درباره باتری (۲) درست است؟



(۱) در هر دقیقه، 3 kJ انرژی الکتریکی به این باتری وارد می‌شود.

(۲) در هر دقیقه، 3 kJ انرژی الکتریکی از این باتری خارج می‌شود.

(۳) در هر دقیقه، 21 kJ انرژی الکتریکی به این باتری وارد می‌شود.

(۴) در هر دقیقه، 21 kJ انرژی الکتریکی از این باتری خارج می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: در متن سؤال ذکر شده که باتری ۱ توان خروجی دارد، پس باتری مولد است؛ بنابراین باتری ۲ که در جهت مخالف

آن بسته شده است، باتری مصرف‌کننده محسوب می‌شود و انرژی به آن وارد می‌شود. (رد ۲ و ۴)



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

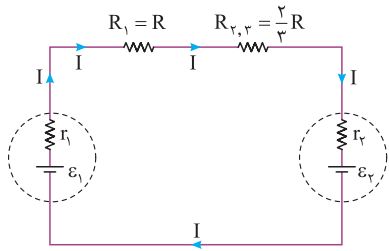
گام دوم: با معلوم بودن توان مصرفی مقاومت R_2 ، توان مصرفی مقاومت‌های R_1 و R_3 را نیز به دست می‌آوریم. مقاومت‌های R_2 و R_3 موازی‌اند؛ پس اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها یکسان بوده و داریم:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{P_2}{P_3} = \frac{R_3}{R_2} \Rightarrow \frac{40}{20} = \frac{2R}{R} \Rightarrow P_3 = \frac{40}{2} = 20 \text{ W}$$

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R \times 2R}{R + 2R} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R$$

اکنون مقاومت معادل R_2 و R_3 را به دست می‌آوریم:

R_1 با $R_{2,3}$ متوالی بسته شده و جریان عبوری از آن‌ها یکسان است.



$$P = RI^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_{2,3}} = \frac{R_1}{R_{2,3}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{40 + 20} = \frac{R}{\frac{2}{3}R} \Rightarrow \frac{P_1}{60} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow P_1 = 90 \text{ W}$$

گام سوم: توان خروجی باتری (۱) برابر است با مجموع توان‌های مصرفی مقاومت‌های خارجی مدار، به اضافه توان مصرفی باتری (۲):

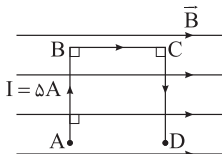
$$P_{\varepsilon_1} = P_1 + P_2 + P_3 + P_{\varepsilon_2} \Rightarrow 200 = 90 + 40 + 20 + P_{\varepsilon_2} \Rightarrow P_{\varepsilon_2} = 50 \text{ W}$$

اکنون می‌توانیم انرژی ورودی به باتری (۲) را حساب کنیم:

$$U_2 = P_{\varepsilon_2} t \xrightarrow{P_{\varepsilon_2} = 50 \text{ W}, t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}} U_2 = 50 \times 60 = 3000 \text{ J} = 3 \text{ kJ}$$

تست و پاسخ ۱۱۵

در شکل مقابل، سیم حامل جریان الکتریکی $I = 5 \text{ A}$ ، در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 200 \text{ G}$ قرار دارد. نیروی مغناطیسی خالص وارد بر این سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($AB = BC = CD = 40 \text{ cm}$)



(۱) \otimes ، $0/04$
(۲) \otimes ، $0/08$
(۳) \odot ، $0/08$
(۴) صفر

(۱) \otimes ، $0/04$
(۲) \otimes ، $0/08$
(۳) \odot ، $0/08$

پاسخ: گزینه ۲

$$F = IlB \sin \alpha$$

گام اول: اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر هر قطعه از سیم را حساب می‌کنیم:

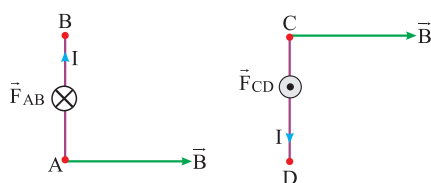
$$B = 200 \text{ G} = 200 \times 10^{-4} \text{ T} = 2 \times 10^{-2} \text{ T}$$

$$I = 5 \text{ A}, \quad l = 40 \text{ cm} = 0/4 \text{ m}$$

$$F_{AB} = 5 \times 0/4 \times 2 \times 10^{-2} \sin 90^\circ = 0/04 \text{ N}$$

$$F_{BC} = 5 \times 0/4 \times 2 \times 10^{-2} \sin 0 = 0$$

$$F_{CD} = F_{AB} = 0/04 \text{ N}$$



گام دوم: جهت نیروهای وارد بر قطعه‌های AB و CD را به کمک قاعده دست راست تعیین می‌کنیم.

تعیین می‌کنیم.

گام سوم: نیروی مغناطیسی خالص وارد بر این سیم را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که \vec{F}_{CD} و \vec{F}_{AB} در جهت مخالف هم هستند.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} \xrightarrow{F_{AB} = F_{CD}} \vec{F}_{\text{net}} = 0$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

شیمی یازدهم

تست و پاسخ ۱۱۶

کدام مطلب درست است؟

- (۱) ویتامین‌ها افزون بر تأمین مواد اولیه برای سوخت‌وساز یاخته‌ها، منبعی برای تأمین انرژی آن‌ها نیز هستند.
- (۲) انرژی حاصل از اکسایش یک گرم چربی، بیشتر از دو گرم کربوهیدرات است.
- (۳) مصرف موادی که درصد کربوهیدرات بیشتری دارند، برای فعالیت‌های فیزیکی که در مدت طولانی‌تر انجام می‌شوند، مناسب‌تر است.
- (۴) پروتئین‌ها در بدن به گلوکز شکسته شده و گلوکز حاصل از آن‌ها در خون حل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره برای زدن تست‌های حفظیات، مطالب کتاب درسی را خیلی خوب بخوانید و از هیچ نکته کوچکی هم ساده نگذرید! مطالبی که بقیه رقبا ی شما ممکنه خیلی بهش توجه نکرده باشند.

نکته بدن ما مواد گوناگونی شامل کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها، پروتئین‌ها، آب، ویتامین‌ها و مواد معدنی را از غذا دریافت می‌کند. در این میان، کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها علاوه بر تأمین مواد اولیه سوخت‌وساز یاخته‌ها، منابعی برای تأمین انرژی آن‌ها نیز هستند. مواد اولیه برای سوخت‌وساز یاخته‌ها ← آب، ویتامین‌ها، مواد معدنی، کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها
منابع تأمین انرژی برای سوخت‌وساز یاخته‌ها ← کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها
● مقایسه ارزش سوختی (انرژی حاصل از اکسایش کامل یک گرم ماده غذایی) منابع تأمین انرژی به صورت زیر است:

$$\text{پروتئین} = \text{کربوهیدرات} > \text{چربی: ارزش سوختی}$$

$$17 \text{kJ.g}^{-1} \quad 38 \text{kJ.g}^{-1}$$

● در بین کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها، فقط کربوهیدرات‌ها هستند که در بدن به گلوکز شکسته شده و گلوکز حاصل از آن‌ها در خون حل می‌شود. خون، این ماده را به یاخته‌ها می‌رساند و این ماده هنگام اکسایش در یاخته‌ها $(C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O + Q)$ ، انرژی تولید می‌کند.

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

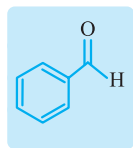
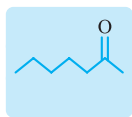
- ۱) وظیفه تأمین انرژی سلول‌ها بر عهده پروتئین‌ها، کربوهیدرات‌ها و چربی‌ها است.
- ۲) ارزش سوختی چربی ۳۸ و ارزش سوختی کربوهیدرات، ۱۷ کیلوژول بر گرم است:
- ۳) مصرف موادی که درصد چربی بیشتری دارند، برای فعالیت‌های طولانی‌مدت مناسب‌تر است.
- ۴) تنها کربوهیدرات‌ها می‌توانند در بدن به گلوکز شکسته شوند.

$$38 > 2 \times 17 = 34$$

چربی کربوهیدرات

تست و پاسخ ۱۱۷

مولکول‌های بنز آلدهید و ۲- هپتانون در کدام مورد مشابه نیستند؟



(۱) داشتن گروه کربونیل

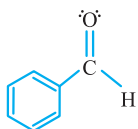
(۲) نسبت شمار اتم‌های کربن به اکسیژن

(۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی

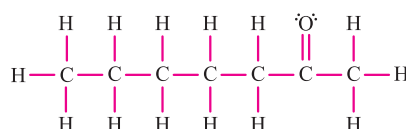
(۴) نسبت شمار پیوندهای C-H به C-C

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی ساختار مولکول‌های بنز آلدهید و ۲- هپتانون در زیر آورده شده است:



بنز آلدهید (C_7H_6O)



۲- هپتانون $(C_7H_{14}O)$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

بررسی گزینه‌ها:

۱) هر دو مولکول، گروه عاملی کربونیل ($\text{C}=\text{O}$) دارند.

۲) نسبت شمار اتم‌های کربن به اکسیژن در هر دو ترکیب، برابر ۷ است.

۳) هر دو مولکول دارای ۱ اتم اکسیژن و در نتیجه، ۲ جفت الکترون ناپیوندی‌اند.

۴) ببینیم:

$$\frac{\text{شمار پیوندهای C-H}}{\text{شمار پیوندهای C-C}} = \frac{6}{4} = 1.5$$

بنزآلدهید :

$$\frac{\text{شمار پیوندهای C-H}}{\text{شمار پیوندهای C-C}} = \frac{14}{6} > 2$$

۲- هپتانون :

تست و پاسخ ۱۱۸

در کدام گزینه مقایسهٔ درستی انجام نشده است؟

۱) گرمای سوختن مولی: اتان < اتن < اتانول

۲) انرژی حاصل از سوختن یک گرم ماده: متان < اتان < پروپان

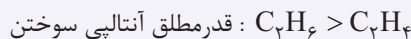
۳) ارزش سوختی: پروتئین = کربوهیدرات > چربی

۴) تفاوت آنتالپی سوختن: $\Delta H(\text{C}_3\text{H}_8(\text{g})) - \Delta H(\text{C}_2\text{H}_6(\text{g})) = \Delta H(\text{C}_2\text{H}_6(\text{g})) - \Delta H(\text{C}_2\text{H}_4(\text{g}))$

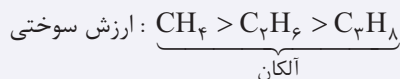
پاسخ: گزینه ۴

نکته چند نکته دربارهٔ مقایسهٔ آنتالپی سوختن و ارزش سوختی ترکیب‌های آلی (در محدودهٔ کتاب درسی):

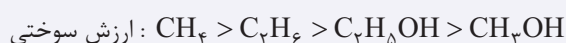
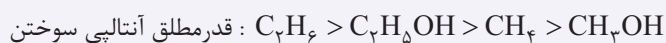
۱) به طور کلی، هر چه مقدار (جرم) یک هیدروکربن بیشتر باشد، مقدار گرمای حاصل از سوختن آن نیز بیشتر است:



۲) به طور کلی، وقتی جرم‌های برابر از هیدروکربن‌های هم‌خانواده می‌سوزند، گرمای حاصل از سوختن هیدروکربن سبک‌تر، بیشتر است:



۳) گرمای سوختن مولی الکل‌هایی که یک گروه OH دارند، از گرمای سوختن مولی آلکان‌های هم‌کربن آن‌ها، کم‌تر است.



۴) هر دو عضو متوالی از خانوادهٔ آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها، در یک گروه CH_2 با هم اختلاف دارند؛ بنابراین می‌توان گفت تفاوت آنتالپی‌های سوختن دو عضو متوالی از یک خانواده تقریباً ثابت است. به طور مثال اختلاف آنتالپی سوختن متان و اتان با اختلاف آنتالپی سوختن اتان و پروپان تقریباً برابر است.

۵) برخلاف هیدروکربن‌ها، وقتی جرم‌های برابر از الکل‌ها با یک گروه OH می‌سوزند، گرمای حاصل از سوختن الکل سنگین‌تر، بیشتر است:



پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) با توجه به جدول کتاب درسی، گرمای سوختن مولی آلکان‌ها از الکل‌های هم‌کربن خود بیشتر است (اتانول > اتان). از طرفی، در تعداد

کربن برابر، گرمای سوختن مولی آلکان‌ها از آلکن‌ها و آلکین‌ها نیز بیشتر است (اتن > اتان)!

نکته مقایسهٔ گرمای سوختن مولی ترکیب‌های داده‌شده در کتاب درسی، به صورت زیر است:

گرمای سوختن مولی :



۲) متان، اتان و پروپان، هر سه جزء خانوادهٔ آلکان‌ها هستند. در این خانواده، هر چه جرم مولی کم‌تر باشد، ارزش سوختی بیشتر است.

۳) ارزش سوختی چربی، برابر 38 kJ.g^{-1} و ارزش سوختی کربوهیدرات و پروتئین، یکسان و برابر 17 kJ.g^{-1} است.

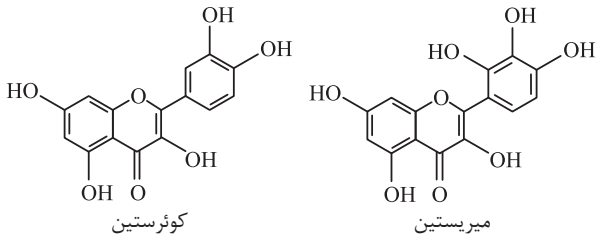


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

۴ تفاوت آنتالپی سوختن هیدروکربن‌های متوالی از یک خانواده، تقریباً با هم برابر است. C_7H_8 و C_7H_6 ، آلکان هستند، اما C_7H_6 و C_7H_4 از خانواده آلکان‌ها می‌باشند؛ بنابراین اختلاف آنتالپی دو عضو متوالی خانواده آلکان‌ها، با اختلاف آنتالپی دو عضو متوالی دیگر خانواده‌ها (مثل آلکان‌ها) برابر نیست! هر خانواده، قانون خودش دارد.

تست و پاسخ ۱۱۹



کوئرستین و میرستین دو فلاونوئید با خاصیت آنتی‌اکسیدانی هستند که به عنوان بازدارنده، با رادیکال‌های آزاد در بدن مقابله می‌کنند. با توجه به ساختار آن‌ها، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟
• این دو ماده خاصیت ضدسرطانی داشته و در میوه‌ها و سبزیجات یافت می‌شوند.

• اگر خاصیت آنتی‌اکسیدانی فلاونوئیدها با شمار گروه‌های هیدروکسیل رابطه مستقیم داشته باشد، میرستین نسبت به کوئرستین آنتی‌اکسیدان قوی‌تری محسوب می‌شود.

• گروه عاملی موجود در ترکیبی که به عنوان نگهدارنده در توت‌فرنگی یافت می‌شود، در این دو ماده دیده نمی‌شود.

• این دو ترکیب ایزومر یکدیگر بوده و بر اثر سوختن کامل مول‌های برابر از آن‌ها در شرایط یکسان، حجم گاز CO_2 تولیدی نیز برابر خواهد بود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی فقط مورد آخر نادرست است.

- بازدارنده‌ها در میوه‌ها و سبزیجات وجود دارند و با کاهش فعالیت رادیکال‌ها، خطر ابتلا به سرطان را کاهش می‌دهند.
- شمار گروه‌های هیدروکسیل ($-OH$) در میرستین و کوئرستین به ترتیب برابر ۶ و ۵ است.
- بنزوئیک اسید دارای گروه عاملی کربوکسیل ($-COOH$) است که این دو ماده فاقد آن هستند.
- با توجه به تفاوت شمار گروه‌های هیدروکسیل، تعداد اتم اکسیژن در دو ترکیب برابر نیست؛ بنابراین دو ترکیب ایزومر (هم‌پار) هم‌دیگر نیستند، اما با توجه به تعداد کربن برابر، از سوختن کامل مول‌های برابر از آن‌ها، حجم CO_2 یکسانی تولید خواهد شد.

تست و پاسخ ۱۲۰

ارزش سوختی دومین عضو خانواده آلکان‌ها برابر ۴۹ کیلوژول بر گرم است. از سوختن کامل ۱/۵ مول از این آلکن در فشار یک اتمسفر، دمای چند کیلوگرم آب $25^\circ C$ را می‌توان به دمای جوش رساند؟ (گرمای ویژه آب را $4/2 J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$ در نظر بگیرید و $C = 12$ و $H = 1$)
۲۹/۴ (۴) ۱۸/۲ (۳) ۶/۵ (۲) ۹/۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره اول به کمک ارزش سوختی داده شده حساب کن که چه قدر گرما از سوختن ۱/۵ مول پروپن به دست می‌آید! بعد با استفاده از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، جرم آب را بر حسب کیلوگرم حساب کن.

پاسخ تشریحی دومین عضو خانواده آلکان‌ها $(C_nH_{2n}, n \geq 2)$ ، C_3H_6 است.

گام اول: گرمای حاصل از سوختن ۱/۵ مول C_3H_6 را محاسبه می‌کنیم:

$$1/5 \text{ mol } C_3H_6 \times \frac{42 \text{ g } C_3H_6}{1 \text{ mol } C_3H_6} \times \frac{49 \text{ kJ}}{1 \text{ g } C_3H_6} = 1/5 \times 42 \times 49 \text{ kJ}$$

$$Q = mc\Delta\theta$$

گام دوم: از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ استفاده کرده و جرم آب را به دست می‌آوریم:

$$1/5 \times 42 \times 49 = m \times 4/2 \times (100 - 25) \Rightarrow m = \frac{15 \times 49}{5} = \frac{49}{5} = 9/8 \text{ kg } H_2O$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۱۲۱

با توجه به جدول و معادله داده شده زیر، ΔH واکنش $2\text{CO}(g) + 2\text{NO}(g) \rightarrow 2\text{CO}_2(g) + \text{N}_2(g)$ را چند کیلوژول است؟



پیوند	C=O	O=O	C≡O
آنتالپی پیوند ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)	۸۰۰	۴۹۵	۱۰۷۲

$$-742 \quad (1)$$

$$-380 \quad (2)$$

$$-561 \quad (3)$$

$$-923 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: روش اول: آنتالپی پیوندهای $\text{N}=\text{O}$ و $\text{N}\equiv\text{N}$ در جدول نیامده است؛ بنابراین با استفاده از واکنشی که ΔH آن مشخص است، رابطه بین دو پیوند را به دست می‌آوریم.



[مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده] - [مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده] = واکنش ΔH

$$\frac{\Delta H}{181} = [(N \equiv N) + (O = O)] - [2(N = O)] \Rightarrow [2(N = O) - (N \equiv N)] = 314$$

حالا می‌توانیم ΔH واکنش خواسته شده را به دست آوریم.

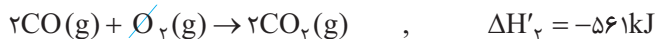
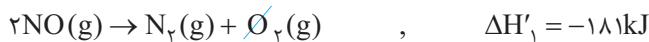


$$\Delta H = [2(C \equiv O) + 2(N = O)] - [4(C = O) + (N \equiv N)] = [2(1072) + 2(314)] - [4(800) + 314] = -742 \text{ kJ}$$

روش دوم: با جمع کردن دو واکنش داده شده، به واکنش $2\text{CO}(g) + \text{O}_2(g) \rightarrow 2\text{CO}_2(g)$ می‌رسیم که ΔH آن با استفاده از داده‌های جدول قابل محاسبه است:

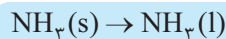
$$\Delta H = [2(C \equiv O) + (O = O)] - [4(C = O)] = [2(1072) + (495)] - [4(800)] = -561 \text{ kJ}$$

حالا با استفاده از قانون هس، ΔH واکنش خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



تست و پاسخ ۱۲۲

طبق نمودار داده شده، کدام مطلب نادرست است؟

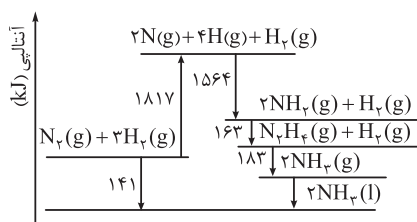


(۱) آنتالپی ذوب آمونیاک در شرایط داده شده، کمتر از $24 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ است.

(۲) تفاوت میانگین آنتالپی پیوند $\text{N}-\text{H}$ و $\text{N}-\text{N}$ ، برابر $228 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ است.

(۳) اگر آنتالپی پیوند $\text{H}-\text{H}$ برابر $436 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ باشد، آنتالپی پیوند $\text{N}\equiv\text{N}$ برابر $954 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ است.

(۴) به ازای تولید یک مول گاز آمونیاک از گازهای نیتروژن و هیدروژن، $46/5 \text{ kJ}$ انرژی آزاد می‌شود.



پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

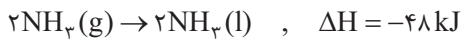
شیمی

مشاوره تست‌های نموداری از قانون هس و آنتالپی پیوند، در چند سال اخیر توی کنکور مُد شدن! تستی که براتون تدارک دیدیم، یکی از تست‌های خوب این مبحثه که باید به مسائل آنتالپی پیوند و قانون هس مسلط باشید.

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) با توجه به نمودار، می‌توانیم آنتالپی میعان آمونیاک را با استفاده از قانون هس به دست آوریم. اگر قدرمطلق آنتالپی فرایند $2\text{NH}_3(\text{g}) \rightarrow 2\text{NH}_3(\text{l})$ را X کیلوژول در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

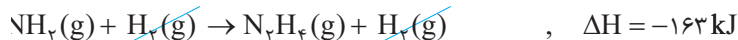
$$141 + 1817 = 1564 + 163 + 183 + X \Rightarrow X = 48$$



به ازای دو مول آمونیاک، 48 کیلوژول گرما آزاد شده است؛ پس آنتالپی میعان آمونیاک $-24 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ و در نتیجه آنتالپی تبخیر آن $+24 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است. از آنجایی که آنتالپی ذوب هر ماده کم‌تر از آنتالپی تبخیر آن است؛ پس ΔH ذوب آمونیاک کم‌تر از $24 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ خواهد بود.



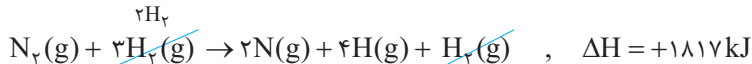
$$-1564 = 0 - [4\Delta H(\text{N}-\text{H})] \Rightarrow \Delta H(\text{N}-\text{H}) = 391 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$



$$\Delta H = [4\Delta H(\text{N}-\text{H})] - [4\Delta H(\text{N}-\text{H}) + \Delta H(\text{N}-\text{N})]$$

$$-163 = 0 - [\Delta H(\text{N}-\text{N})] \Rightarrow \Delta H(\text{N}-\text{N}) = 163 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{N}-\text{H}) - \Delta H(\text{N}-\text{N}) = 391 - 163 = 228 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$



$$+1817 = [(\text{N} \equiv \text{N}) + 2(\text{H}-\text{H})] \Rightarrow \Delta H(\text{N} \equiv \text{N}) = 945 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$



۴) با استفاده از قانون هس می‌توان نوشت:

$$\Delta H = 1817 - 1564 - 163 - 183 = -93 \text{ kJ}$$

مقدار به‌دست‌آمده به ازای تولید 2 مول گاز آمونیاک است؛ بنابراین به ازای تولید یک مول آمونیاک گازی، $46 / 5 \text{ kJ}$ انرژی آزاد می‌شود:

$$1 \text{ mol NH}_3 \times \frac{93 \text{ kJ}}{2 \text{ mol NH}_3} = 46 / 5 \text{ kJ}$$

تست و پاسخ ۱۳۳

کدام گزینه نادرست است؟

۱) آنتالپی واکنش $\text{H}_2(\text{g}) + \text{I}_2(\text{s}) \rightarrow 2\text{HI}(\text{g})$ را نمی‌توان به طور مستقیم با استفاده از آنتالپی پیوند محاسبه کرد.

۲) آنتالپی واکنش $\text{C}(\text{s}) + \frac{1}{2}\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{CO}(\text{g})$ (گرافیت) را نمی‌توان به روش تجربی اندازه‌گیری کرد.

۳) در واکنش $\text{H}_2(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{HCl}(\text{g})$ ، آنتالپی به‌دست‌آمده به روش آنتالپی پیوند با داده‌های تجربی تفاوت چندانی ندارد.

۴) آنتالپی واکنش $\text{NaOH}(\text{aq}) + \text{HCl}(\text{aq}) \rightarrow \text{NaCl}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ را نمی‌توان با استفاده از گرماسنج لیوانی تعیین کرد.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) حالت فیزیکی I_2 به صورت جامد است و آنتالپی پیوند برای واکنش‌هایی مناسب است که همه مواد شرکت‌کننده در آن به حالت گاز باشند.

۲) واکنش سوختن ناقص گرافیت را نمی‌توان به آسانی انجام داد؛ زیرا بخشی از واکنش سوختن کامل گرافیت است و نمی‌توان اطمینان داشت

که محصول نهایی CO خواهد بود.



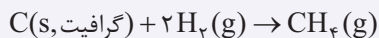
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

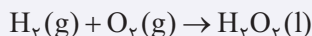
نکته واکنش‌هایی که نمی‌توان ΔH آن‌ها را به روش تجربی تعیین کرد:

برخی از واکنش‌ها، مرحله‌ای از یک واکنش پیچیده بوده و برخی دیگر را نمی‌توان به سادگی در آزمایشگاه انجام داد. به عبارت دیگر، ΔH آن‌ها را نمی‌توان به روش تجربی اندازه‌گیری کرد. کتاب درسی ۴ تا از این واکنش‌ها رو براتون آورده که شما باید اونا رو بلد باشید!

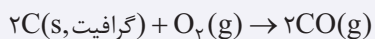
• واکنش تهیه گاز متان از گرافیت و گاز هیدروژن:



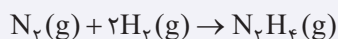
• واکنش تهیه هیدروژن پراکسید (H_2O_2) از گازهای هیدروژن و اکسیژن:



• واکنش سوختن ناقص گرافیت و تولید کربن مونوکسید:



• واکنش تولید هیدرازین (N_2H_4) از گازهای نیتروژن و هیدروژن:

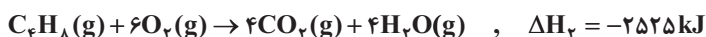


۳ از آن‌جایی که واکنش داده‌شده شامل مولکول‌های ساده بوده و لازم نیست از میانگین آنتالپی پیوند استفاده شود، ΔH به‌دست آمده از آنتالپی‌های پیوند با داده‌های تجربی همخوانی زیادی دارد.

۴ با استفاده از گرماسنج لیوانی، آنتالپی فرایندهای انحلال و واکنش‌هایی که در حالت محلول هستند را می‌توان اندازه‌گیری کرد.

تست و پاسخ ۱۲۴

با توجه به داده‌های زیر، ارزش سوختی ۱- بوتین گازی در دمای اتاق، چند کیلوژول بر گرم است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



۴۸ (۴)

۴۷ (۳)

۴۶ (۲)

۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

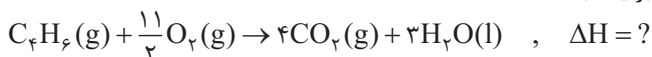
خودت حل کنی بهتره اول معادله سوختن کامل ۱- بوتین را بنویس و بعد به کمک قانون هس، آنتالپی سوختن آن را به دست بیار. در آخر به کمک آنتالپی به‌دست‌آمده، ارزش سوختی آن را حساب کن.

نکته رابطه بین آنتالپی سوختن و ارزش سوختی یک ماده به صورت زیر است:

$$\text{قدرمطلق آنتالپی سوختن (kJ.mol}^{-1}\text{)} = \frac{\text{ارزش سوختی (kJ.g}^{-1}\text{)}}{\text{جرم مولی (g.mol}^{-1}\text{)}}$$

پاسخ تشریحی ابتدا باید آنتالپی سوختن ۱- بوتین را به دست آوریم که واکنش آن مطابق زیر است: (دقت کنید که حالت فیزیکی H_2O

در این شرایط باید مایع (l) و ضریب ماده سوختنی (۱- بوتین)، برابر یک باشد.)



برای رسیدن به این واکنش، مراحل زیر را باید انجام دهیم:

$$\Delta H'_3 = -\Delta H_3 = -132 \text{ kJ} \quad \text{واکنش سوم معکوس}$$

$$\Delta H_2 = -2525 \text{ kJ} \quad \text{واکنش دوم بدون تغییر}$$

$$\frac{1}{4} \times \text{واکنش اول معکوس} : \Delta H'_1 = -\frac{1}{4}\Delta H_1 = -\frac{1}{4}(-484) = +121 \text{ kJ}$$

$$3 \times \text{واکنش چهارم معکوس} : \Delta H'_4 = -3\Delta H_4 = -3(+41) = -123 \text{ kJ}$$

$$\Delta H_{\text{کلی}} = \Delta H'_3 + \Delta H_2 + \Delta H'_1 + \Delta H'_4 = -132 - 2525 + 121 - 123 = -2538 \text{ kJ}$$

هالا آنتالپی سوختن را به ارزش سوختی تبدیل می‌کنیم:

$$C_4H_8(g) \text{ ارزش سوختی} = \frac{|\Delta H_{\text{سوختن}}|}{\text{جرم مولی}} = \frac{|-2538|}{54} = 47 \text{ kJ.g}^{-1}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۱۲۵

کدام مطلب درباره واکنش کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید در دما و فشار اتاق و در یک ظرف سر باز، نادرست است؟

(۱) با گذشت زمان، جرم مخلوط واکنش کاهش می‌یابد.

(۲) با گذشت زمان، جرم گاز آزاد شده در واکنش و سرعت تولید $\text{CaCO}_3(\text{s}) + 2\text{HCl}(\text{aq}) \rightarrow \text{CaCl}_2(\text{aq}) + \text{CO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$

آن، افزایش می‌یابد.

(۳) سرعت متوسط مصرف اسید در واکنش، دو برابر سرعت متوسط واکنش است.

(۴) نمودار مول - زمان برای فراورده یونی واکنش، با نمودار مول - زمان گاز تولید شده، از هر لحاظ یکسان است.

پاسخ: گزینه ۲

نکته به طور معمول، در آغاز یک واکنش که غلظت واکنش‌دهنده‌ها زیاد است، سرعت واکنش نیز زیاد خواهد بود، اما با گذشت زمان،

واکنش‌دهنده‌ها مصرف شده و با کاهش غلظت آن‌ها، سرعت واکنش کم می‌شود تا در نهایت به صفر برسد.

سرعت واکنش، بیانگر سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها یا سرعت تولید فراورده‌ها است که هر دو با گذشت زمان کاهش می‌یابند.

پاسخ تشریحی با گذشت زمان، جرم CO_2 تولید شده افزایش اما سرعت تولید آن، کاهش می‌یابد؛ یعنی مثلاً اگر در ۱۰ ثانیه اول، ۱ گرم

CO_2 تولید شود، در ۱۰ ثانیه دوم، ۰/۵ گرم CO_2 تولید خواهد شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است؛ در این واکنش، به دلیل تولید گاز CO_2 و خروج آن از ظرف واکنش، جرم مخلوط واکنش

رفته رفته کاهش می‌یابد.



(۳) اگر سرعت متوسط هر ماده را بر ضریب استوکیومتری آن تقسیم کنیم، سرعت متوسط واکنش به دست می‌آید:

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(\text{HCl})}{2} \Rightarrow \bar{R}(\text{HCl}) = 2\bar{R}(\text{واکنش})$$

(۴) ضرایب CaCl_2 و CO_2 با هم برابر است؛ بنابراین سرعت متوسط تولید و نمودار مول - زمان آن‌ها از هر لحاظ یکسان خواهد بود.

تست و پاسخ ۱۲۶

واکنش $2\text{H}_2\text{O}_2(\text{l}) \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{O}_2(\text{g})$ را یک بار در غیاب KI (آزمایش I) و بار دیگر در حضور KI

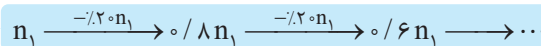
(آزمایش II) در شرایط یکسان با مول‌های برابر از هیدروژن پراکسید انجام می‌دهیم. در آزمایش (I) پس از گذشت

۵ دقیقه، شمار مول‌های H_2O_2 به ۸۰٪ مقدار اولیه خود می‌رسد، اما در آزمایش (II)، هر دقیقه ۲۰٪ از مقدار اولیه

واکنش‌دهنده مصرف می‌شود. کدام موارد زیر درباره این دو آزمایش، درست است؟

الف) پتاسیم یدید به عنوان کاتالیزگر عمل کرده و نمودار «مول - زمان» واکنش‌دهنده در دو آزمایش به صورت

مقابل است.



ب) سرعت متوسط واکنش در ۵ دقیقه ابتدایی در آزمایش (II)، پنج برابر آزمایش (I) است.

پ) اگر آزمایش (I) با سرعت ثابت ادامه یابد، تفاوت زمانی کامل شدن دو واکنش، برابر ۲۰ دقیقه است.

ت) اگر مقدار اولیه H_2O_2 برابر ۱/۵ مول باشد، سرعت متوسط واکنش در آزمایش (II)، برابر $18 \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$ است.

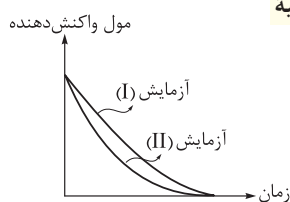
(۲) ب - پ

(۱) الف - ب

(۴) پ - ت

(۳) الف - ت

پاسخ: گزینه ۲





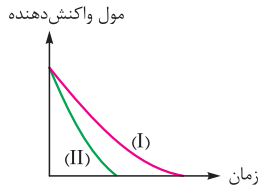
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

شیمی

پاسخ تشریحی عبارات‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

بررسی موارد:

الف) زمان پایان دو واکنش یکسان نیست و شکل درست نمودار آن، به صورت مقابل است:



(ب)

I) $\Delta \text{min} \rightarrow 20\%$ مصرف می‌شود

$$\Rightarrow \frac{\bar{R}_{II}}{\bar{R}_I} = 5 \rightarrow \bar{R}_{II} = 5\bar{R}_I$$

II) $1 \text{ min} \rightarrow 20\%$ مصرف می‌شود $\Rightarrow \Delta \text{min} \rightarrow 100\%$ مصرف می‌شود

پ) کامل شدن (مصرف 100% واکنش‌دهنده) آزمایش (I)، ۲۵ دقیقه و کامل شدن آزمایش (II)، ۵ دقیقه زمان می‌برد؛ پس تفاوت زمانی کامل شدن دو واکنش ۲۰ دقیقه است.

ت) سرعت واکنش (II)، برابر است با نسبت سرعت متوسط مصرف واکنش‌دهنده (H_2O_2) به ضریب استوکیومتری آن (۲). حالا اگر در هر ۵ دقیقه، $1/5$ مول واکنش‌دهنده مصرف شود (مصرف 100%)، خواهیم داشت:

$$\bar{R}_{II} = \frac{1}{2} \bar{R}_{\text{H}_2\text{O}_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1/5 \text{ mol}}{5 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 9 \text{ mol.h}^{-1}$$

تست و پاسخ ۱۲۷

پس از کامل کردن موازنه معادله زیر، کدام مطلب درست است؟



(۱) سرعت متوسط تولید گاز، ۵ برابر سرعت متوسط مصرف آب است.

(۲) در این واکنش و در یک بازه زمانی معین، رابطه $3\Delta[\text{H}_3\text{PO}_4] = -\Delta[\text{HNO}_3]$ برقرار است.

(۳) اگر در یک بازه زمانی معین، $4/6$ مول فسفر سفید (P_4) مصرف شود، در همان بازه زمانی، $1/6$ مول فسفریک اسید (H_3PO_4)، تشکیل خواهد شد.

(۴) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها با فرآورده‌ها برابر است.

پاسخ: گزینه ۳

نکته: سرعت متوسط واکنش در واکنش کلی $aA + bB \rightarrow cC + dD$ برابر است با:

$$\bar{R}_{(\text{واکنش})} = -\frac{1}{a} \frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = -\frac{1}{b} \frac{\Delta n(B)}{\Delta t} = +\frac{1}{c} \frac{\Delta n(C)}{\Delta t} = +\frac{1}{d} \frac{\Delta n(D)}{\Delta t} \quad \text{یا} \quad \bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

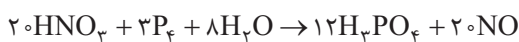
پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:



(۱) ابتدا باید معادله واکنش را کامل کرده و X و Y را به دست آوریم:

N موازنه: $20 = y$

H موازنه: $20 + 2x = (12 \times 3) \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$



حالا با توجه به ضرایب گاز NO و آب (H_2O)، رابطه سرعت آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{\bar{R}(\text{H}_2\text{O})}{8} = \frac{\bar{R}(\text{NO})}{20} \Rightarrow \frac{\bar{R}(\text{NO})}{\bar{R}(\text{H}_2\text{O})} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$$

(۲) با توجه به ضرایب H_3PO_4 و HNO_3 خواهیم داشت:

$$-\frac{\Delta[\text{HNO}_3]}{20 \Delta t} = +\frac{\Delta[\text{H}_3\text{PO}_4]}{12 \Delta t} \Rightarrow -12 \Delta[\text{HNO}_3] = 5 \Delta[\text{H}_3\text{PO}_4] \Rightarrow -3 \Delta[\text{HNO}_3] = \Delta[\text{H}_3\text{PO}_4]$$

(۳) ضریب فسفریک اسید (H_3PO_4)، ۴ برابر ضریب فسفر سفید (P_4) است؛ بنابراین در یک بازه زمانی معین، تعداد مول فسفریک اسید تولیدشده، ۴ برابر تعداد مول مصرفی فسفر سفید خواهد بود.

(۴) مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها برابر با $20 + 3 + 8 = 31$ و مجموع ضرایب استوکیومتری فرآورده‌ها برابر با $12 + 20 = 32$ است.



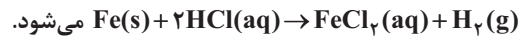
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۱۲۸

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) عبارت «پاشیدن و پخش کردن گرد آهن بر روی شعله، سبب سوختن آن می‌شود.» اثر عامل دما روی سرعت واکنش‌ها را نشان می‌دهد.
 ب) محلول بنفش رنگ پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق واکنش نمی‌دهد، اما با گرم شدن، محلول به سرعت بی‌رنگ می‌شود.
 پ) سینتیک شیمیایی، شاخه‌ای از علم شیمی است که به بررسی آهنگ تغییر شیمیایی در واکنش‌ها و عوامل مؤثر بر این آهنگ می‌پردازد.
 ت) استفاده از براده آهن به جای گرد آهن مانند افزودن مقداری آب به ظرف واکنش، سبب کاهش سرعت واکنش می‌شود.



الف - ب (۱) پ - ت (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

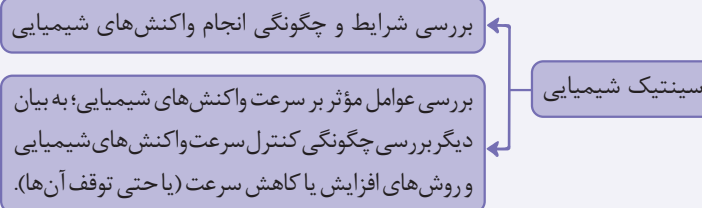
بررسی عبارت‌ها:

الف) عبارت داده شده، اثر سطح تماس را بر سرعت واکنش نشان می‌دهد. ✗

ب) محلول پتاسیم پرمنگنات در دمای اتاق با اسیدهای آلی واکنش می‌دهد، اما به کندی! ✗

پ) کاملاً درست! ✓

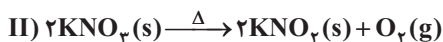
نکته وظایف سینتیک:



ت) هر چه سطح تماس واکنش دهنده‌ها کم‌تر باشد، سرعت واکنش نیز کم‌تر خواهد بود؛ بنابراین استفاده از براده آهن به جای گرد (پودر) آهن، سبب کاهش سرعت واکنش می‌شود (گرد آهن نسبت به براده آهن، سطح تماس بیشتری دارد). در ضمن با افزودن آب به ظرف واکنش، غلظت محلول و در نتیجه سرعت واکنش کم‌تر خواهد شد. ✓

تست و پاسخ ۱۲۹

جرم‌های یکسان از KNO_3 را در دو شرایط متفاوت حرارت می‌دهیم تا طبق واکنش‌های زیر با سرعت ثابت تجزیه شوند:



برای این که جرم جامد باقی‌مانده در دو ظرف در هر لحظه برابر شود، باید کدام رابطه بین سرعت‌ها برقرار باشد؟ (در گزینه‌ها نماد \bar{R} مربوط

به واکنش I و \bar{R}' مربوط به واکنش II است؛ $\text{K} = 39$ ، $\text{O} = 16$ ، $\text{N} = 14$: g.mol^{-1})

$$\bar{R}'_{\text{O}_2} = 1/25 \bar{R}_{\text{O}_2} \quad (4) \quad \bar{R}'_{\text{واکنش}} = 3/5 \bar{R}_{\text{واکنش}} \quad (3) \quad \bar{R}'_{\text{KNO}_3} = 7 \bar{R}_{\text{K}_2\text{O}} \quad (2) \quad \bar{R}'_{\text{KNO}_3} = 2 \bar{R}_{\text{KNO}_3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی برای این که جرم جامد باقی‌مانده در دو ظرف برابر باشد، باید جرم گاز تولیدشده در دو واکنش نیز (با توجه به جرم یکسان

واکنش دهنده) با هم برابر شود. اگر سرعت واکنش اول را \bar{R} در نظر بگیریم، سرعت تولید N_2 و O_2 در واکنش اول به ترتیب $2\bar{R}$ و $5\bar{R}$

خواهد بود و اگر سرعت واکنش دوم را \bar{R}' در نظر بگیریم، سرعت تولید O_2 نیز برابر \bar{R}' می‌شود؛ پس طبق فرمول سرعت برای فرآورده‌ها

می‌توان نوشت:

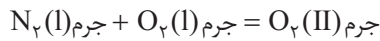
$$\bar{R} = \frac{+\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow \Delta n = \bar{R} \cdot \Delta t \xrightarrow{\text{جرم مولی} \times \text{مول} = \text{جرم}} \Delta m = \bar{R} \cdot \Delta t \cdot M$$

تغییر جرم جرم مولی



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی



$$\Rightarrow \bar{R} \cdot \Delta t \cdot M_{N_2} + \bar{R} \cdot \Delta t \cdot M_{O_2} = \bar{R}' \cdot \Delta t \cdot M_{O_2}$$

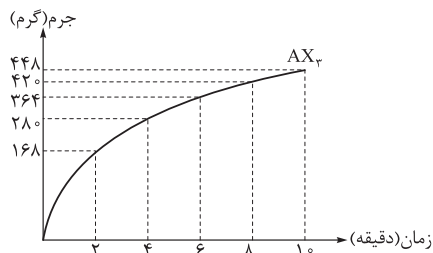
$$\Rightarrow \bar{R} \times 28 + \bar{R} \times 32 = \bar{R}' \times 32$$

$$\Rightarrow 216\bar{R} = 32\bar{R}' \Rightarrow \bar{R}' = \frac{216}{32}\bar{R} \Rightarrow \bar{R}' = 6.75\bar{R}$$

$$\begin{cases} \bar{R}'_{KNO_3} = \frac{6.75}{3} \bar{R}_{KNO_3} \\ \bar{R}'_{KNO_3} = 6.75 \bar{R}_{K_2O} \\ \bar{R}'_{O_2} = \frac{6.75}{5} \bar{R}_{O_2} \rightarrow \bar{R}'_{O_2} = 1.35 \bar{R}_{O_2} \checkmark \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۳۰

۱۶۰ گرم A و ۲۸۸ گرم X_2 را وارد ظرفی می‌کنیم تا واکنش زیر در مدت ده دقیقه به طور کامل انجام شود. با توجه به نمودار داده شده، اگر تفاوت سرعت متوسط واکنش در دو دقیقه آغازی با دو دقیقه پایانی برابر $0.5 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، جرم مولی عنصر فرضی X چند گرم بر مول است؟ (معادله موازنه شود، $A(s) + X_2(g) \rightarrow AX_3(g)$)



۱۵ (۱)

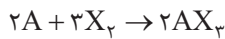
۲۵ (۲)

۳۰ (۳)

۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا معادله واکنش را موازنه کرده و تفاوت سرعت در دو دقیقه آغازی و پایانی را از روی نمودار محاسبه می‌کنیم.



$$\begin{cases} \text{جرم } AX_3 \text{ تولیدشده در دو دقیقه اول} = 168 \text{ g} \\ \text{جرم } AX_3 \text{ تولیدشده در دو دقیقه آخر} = 288 \text{ g} \end{cases} \Rightarrow \text{تفاوت جرم } AX_3 \text{ تولیدی در دو بازه} = 140 \text{ g}$$

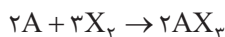
اگر جرم مولی AX_3 را M در نظر بگیریم می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{تفاوت سرعت } AX_3 \text{ در دو بازه} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{\frac{140}{M} \text{ mol}}{2 \text{ min}} = \frac{70}{M}$$

$$\text{تفاوت سرعت واکنش در دو بازه} = \frac{1}{3} \bar{R}(AX_3) = \frac{1}{3} \times \frac{70}{M} = \frac{35}{M}$$

$$\frac{35}{M} = 0.5 \Rightarrow M = 70 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

تفاوت سرعت واکنش در دو بازه داده شده برابر $0.5 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ است؛ پس:



فالا با استفاده از کسر تناسب می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{جرم مولی } X_2 \times \text{ضریب}}{X_2} = \frac{\text{جرم مولی } AX_3 \times \text{ضریب}}{AX_3} \Rightarrow \frac{288}{3 \times 2M_X} = \frac{448}{2 \times 70} \Rightarrow M_X = \frac{288 \times 70}{448 \times 3} = 15 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

پایہ دوازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۲)	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب - محمدرضا حسینی فرد - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری محسن میراسلامی علیرضا نصرالہی - حسین ہاشمی طاہری
فیزیک (۲)	امین امینی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاہی
شیمی (۲)	یاسر راش - علی طہانی - یاسر عبداللہی - وحید فارسیان - محدثہ ملک پور

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۲)	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	امیرحسین ابومحبوب	محمد گودرزی محمدسجاد نقیہ سجاد داوطلب	شمیم پهلوان شریف ماہان فنی فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	مہدی خوش نویس ماہان فنی فر ابوالفضل ناصری
هندسه (۲)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	ملیحہ حاجی بابا ماہان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک (۲)	رضا سبزمیدانی	نوید شاہی	علیرضا جباری	امین امینی علیرضا جباری	نرجس تیمناک مہدی خوش نویس احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی (۲)	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	علی طہانی محدثہ ملک پور	محمد مرادی سروش عبادی وحید فارسیان	سیدعلی حسین زاده مہسا خاکی احسان رحیمی ہومن زندگی

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاجانیپور



حسابان دوازدهم

تست و پاسخ (۱۳۱)

مجموعه مؤلفه‌های دوم تابع

تابع $f = \{(2, 3), (3, 4), (-1, 12), (1, 13)\}$ و تابع $g(x) = \frac{x+7}{x-1}$ مفروض‌اند. مجموع اعضای برد تابع $f + g$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره همیشه اولین کاری که تو جبر توابع باید کنی، پیدا کردن دامنه مشترک. دامنه رو پیدا کن و بعد محاسبات بین دو تابع (که می‌شه محاسبات روی مقدار تابع یا عرض نقاط) رو انجام بده.

درس نامه •• جبر توابع

منظور از جبر توابع، اعمال جبری بین توابع است، مثل جمع و منهای ضرب و تقسیم، توان و ریشه. مثلاً برای دو تابع f و g ، می‌توانیم عملیات جبری $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ و $f \times g, f - g, f + g$ را داشته باشیم. حال داریم:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

این یعنی عملیات ریاضی بین توابع، در واقع بین مقادیر توابع (همان $f(x)$ و $g(x)$) یا عرض نقاط روی نمودار آن‌ها انجام می‌شود، منتهی در یک x یکسان؛ پس عملیات جبری بین توابع در بخش مشترک بین دامنه‌های این توابع قابل انجام است و می‌توانیم بنویسیم.

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

کاملاً هم منطقی است، یعنی عملیات جبری بین $f(x)$ و $g(x)$ هنگامی برقرار می‌شود که $f(x)$ و $g(x)$ هر دو قابل تعریف باشند و x عضو دامنه هر دو تابع باشد.

در حالت خاص تقسیم $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، باید ریشه‌های مخرج را از دامنه مشترک برداریم.

دو حالت f^n و $\sqrt[n]{f}$ را هم بررسی کنیم:

$$D_{f^n} = D_f, \quad D_{\sqrt[n]{f}} = \begin{cases} D_f & ; \text{ فرد } n \\ \{x \in D_f \mid f(x) \geq 0\} & ; \text{ زوج } n \end{cases}; n \in \mathbb{N}$$

مثال: دو تابع $f = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 3), (3, 0)\}$ و $g = \{(-1, 0), (1, 2), (2, 3)\}$ مفروض‌اند. توابع زیر را به دست آورید:

الف) $f \times (g^2 - 1)$

ب) $\frac{2g+1}{f-2}$

$$D_f = \{-1, 0, 1, 3\}, D_g = \{-1, 1, 2\}$$

ابتدا دامنه دو تابع را می‌نویسیم:

$$D_f \cap D_g = \{-1, 1\}$$

پس:

$$\text{الف) } D_{g^2-1} = D_{g^2} = D_g \Rightarrow D_{f \times (g^2-1)} = D_f \cap D_g = \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow f \times (g^2 - 1) = \{(-1, f(-1)(g^2(-1) - 1)), (1, f(1)(g^2(1) - 1))\} = \{(-1, 2(0^2 - 1)), (1, 3(2^2 - 1))\}$$

$$\Rightarrow f \times (g^2 - 1) = \{(-1, -2), (1, 9)\}$$

$$\text{ب) } \frac{2g+1}{f-2} = \left\{(-1, \frac{2g(-1)+1}{f(-1)-2}), (1, \frac{2g(1)+1}{f(1)-2})\right\} = \left\{(-1, \frac{2(0)+1}{0-2}), (1, \frac{2(2)+1}{3-2})\right\} = \{(-1, -\frac{1}{2}), (1, 5)\}$$

عملیات جبری بین مؤلفه‌های دوم برقرار است.

مخرج صفر و غیرقابل تعریف



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

$$D_f = \{-1, 1, 2, 3\}$$

گام اول: ابتدا دامنه دو تابع را می‌نویسیم:

$$D_g = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-1, 2, 3\}$$

گام دوم: دامنه تابع $f + g$ را به دست می‌آوریم:

$$f + g = \{(-1, f(-1) + g(-1)), (2, f(2) + g(2)), (3, f(3) + g(3))\}$$

گام سوم: تابع $f + g$ را می‌سازیم:

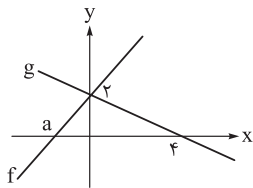
$$g(-1) = \frac{-1+7}{-1-1} = \frac{6}{-2} = -3, \quad g(2) = \frac{2+7}{2-1} = 9, \quad g(3) = \frac{3+7}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\Rightarrow f + g = \{(-1, 9), (2, 12), (3, 9)\}$$

گام چهارم: برد تابع $f + g$ مجموعه $\{9, 12\}$ است که مجموع اعضای آن برابر ۲۱ است.

تست و پاسخ ۱۳۳

نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر تابع $\frac{f-g^{-1}}{f^{-1}+g}$ خطی و غیر ثابت باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) -۸

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره ۲ سال است که در کنکورهای ریاضی و تجربی مستقیماً از توابع خطی و وارون آن‌ها سؤال طرح می‌شود و مشابه همین سؤال،

یک تابع کسری داده می‌شود. موضوع مهمی شده است، آن را نادیده نگیرید.

خودت حل کنی بهتره ظاهرش ترسناکه، اما چیزی نداره. کافیه معادله خطها و وارون اون‌ها رو بنویسی و مخرج اون تابع کسری رو به

یه تابع ثابت تبدیل کنی.

درس نامه •• تابع خطی و وارون آن

• تابع خطی

• تابع چندجمله‌ای: هر تابع را که نمایش جبری آن، یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_n \neq 0$$

هر تابع که بتوان ضابطه آن را به شکل $f(x) = ax + b$ یا $y = ax + b$ نوشت، یک تابع خطی می‌نامند. a شیب خط و b عرض از مبدأ خط است.

طول از مبدأ نیز برابر $-\frac{b}{a}$ است. معمولاً دامنه و برد تابع خطی \mathbb{R} است، اما اگر دامنه بازه $[x_1, x_2]$ باشد، برد، محدوده بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ است.

$[x_1, x_2]$		$[x_0, +\infty)$		$(-\infty, x_0]$		\mathbb{R}	دامنه
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$		
$[f(x_1), f(x_2)]$	$[f(x_2), f(x_1)]$	$[f(x_0), +\infty)$	$(-\infty, f(x_0)]$	$(-\infty, f(x_0)]$	$[f(x_0), +\infty)$	\mathbb{R}	برد

نیازی به حفظ کردن هم نیست، کافی است سر و ته بازه دامنه رادر ضابطه تابع جای گذاری کنید، سپس برد را به صورت بازه [بزرگ تر، کوچک تر] بنویسید.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

معادله خط

روش‌های نوشتن معادله خط: در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله خط را نوشت:

معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ	معلوم بودن دو نقطه از خط	معلوم بودن شیب و یک نقطه از خط
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ یا } y = mx + h$

نکته وارون تابع $f(x) = ax + b$ که $a \neq 0$ ، تابع $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است.

تابع ثابت

در تابع خطی $y = ax + b$ ، اگر $a = 0$ (یعنی شیب صفر باشد)، تابع ثابت $y = b$ را داریم. در تابع ثابت، برد تک‌عضوی است. تمام مؤلفه‌های دوم فرم زوج مرتبی آن مقداری برابر دارند و نمودار آن در دستگاه مختصات، خطی افقی موازی محور X هاست.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا ضابطه هر دو تابع را می‌نویسیم:

$$(0, 2), (4, 0) \in g \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2\left(-\frac{x}{4} + 1\right) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$(a, 0), (0, 2) \in f \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2\left(-\frac{1}{a}x + 1\right) \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{-\frac{2}{a}} = -\frac{a}{2}x + a$$

گام دوم: ضابطه وارون دو تابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$g^{-1}(x) = \frac{x-2}{-\frac{1}{2}} = -2x + 4$$

گام سوم: تابع $\frac{f-g^{-1}}{f^{-1}+g}$ زمانی خطی است که مخرج آن یک عدد حقیقی باشد، یعنی تابع $f^{-1} + g$ ثابت باشد.

$$\Rightarrow f^{-1}(x) + g(x) = -\frac{a}{2}x + a - \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{a+1}{2}x + a + 2$$

این یعنی زمانی ثابت است که $\frac{a+1}{2}$ صفر باشد، یعنی $a = -1$ باشد.

تست و پاسخ ۱۳۳

اگر $f(x) = \frac{2x+a}{x+2}$ و $f^{-1}\left(2f\left(-\frac{4}{y}\right)\right) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره از ویژگی‌های وارون استفاده کن و معادله $2f\left(-\frac{4}{y}\right) = f(-1)$ رو حل کن.

درس نامه ••• وارون و ویژگی‌های آن

اگر در تابع وارون‌پذیر $y = f(x)$ ، جای x و y را عوض کنیم، به تابع $y = f^{-1}(x)$ می‌رسیم. همین تعریف ساده، ویژگی‌هایی را نتیجه می‌دهد که بسیار مفیدند:

(۱) اگر نقطه (α, β) روی نمودار تابع f باشد، نقطه (β, α) روی نمودار تابع f^{-1} است.

(۲) دامنه تابع f ، برد تابع f^{-1} و برد تابع f ، دامنه تابع f^{-1} است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

۳) وارون جهت یکنوایی را عوض نمی کند، یعنی اگر f صعودی (نزولی) باشد، f^{-1} هم صعودی (نزولی) است.

۴) وارون وارون، خود تابع می شود:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

پاسخ تشریحی گام اول: از ویژگی (۱) وارون که در درس نامه عنوان شده است، استفاده می کنیم و داریم:

$$f^{-1}(2f(-\frac{4}{7})) = -1 \Rightarrow 2f(-\frac{4}{7}) = f(-1)$$

گام دوم: $x = -1$ و $x = -\frac{4}{7}$ را در ضابطه تابع f جای گذاری می کنیم:

$$f(-\frac{4}{7}) = \frac{2(-\frac{4}{7}) + a}{-\frac{4}{7} + 2} = \frac{-\frac{8}{7} + a}{\frac{-4 + 14}{7}} = \frac{-\frac{8}{7} + a}{10}$$

$$f(-1) = \frac{-2 + a}{-1 + 2} = -2 + a$$

گام سوم: معادله گام اول را تشکیل می دهیم و آن را حل می کنیم:

$$2\left(\frac{-\frac{8}{7} + a}{10}\right) = -2 + a \Rightarrow \frac{-\frac{8}{5} + 2a}{5} = -2 + a \Rightarrow -\frac{8}{5} + 2a = -10 + 5a \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

تست و پاسخ ۱۳۴

اگر $f^{-1}(x+1) = 2x-1$ و $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(f \circ g)(0)$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} (4)$$

$$-3 (3)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه •• پیدا کردن ضابطه در توابع مرکب

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطه $f(x)$ ، $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ معلوم است و ضابطه سوم را از ما می خواهند. جدول زیر روش های به دست آوردن ضابطه سوم را به صورت خلاصه شرح می دهد:

ضابطه ها	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
روش	معلوم	معلوم	به جای هر x ای که در ضابطه $f(x)$ می بینیم، ضابطه $g(x)$ را قرار می دهیم.
	ضابطه $g(x)$ را مساوی متغیر t قرار می دهیم و x را بر حسب t به دست می آوریم (همان ضابطه $g^{-1}(x)$ و سپس در ضابطه $(f \circ g)(x)$ جای گذاری می کنیم.	معلوم	معلوم
	معلوم	به جای هر x ضابطه $f(x)$ ، عبارت $g(x)$ را قرار می دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطه $(f \circ g)(x)$ برابر باشد. در این شرایط، معادله ای باید حل کنیم که متغیر مجهول آن $g(x)$ است.	معلوم

پاسخ تشریحی گام اول: به ضابطه تابع $y = f(x)$ نیاز داریم و برای آن اول باید ضابطه تابع $y = f^{-1}(x)$ را به دست آوریم؛ پس در معادله

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$f^{-1}(x+1) = 2x - 1 \text{ به جای } x, x-1 \text{ قرار می دهیم:}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{2}$$

گام دوم: طبق نکات درس نامه مربوط به تست قبلی، ضابطه تابع f را به دست می آوریم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام سوم: حالا در معادله $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x$ ضابطه $f(x)$ را داریم و باید ضابطه $g(x)$ را پیدا کنیم.

باید طبق ردیف دوم جدول درس نامه عمل کنیم:

$$\Rightarrow g(t) = (2t - 3)^2 + 3(2t - 3) = 4t^2 - 12t + 9 + 6t - 9 = 4t^2 - 6t \Rightarrow g(x) = 4x^2 - 6x$$

گام چهارم: هر دو ضابطه را حالا داریم و می توانیم $(f \circ g)(0)$ را حساب کنیم:

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = \frac{3}{2}$$

تست و پاسخ ۱۳۵

شیب مخالف صفر است. $(a \neq 0)$

تابع غیر ثابت $f(x) = ax + a$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع f, f^{-1} همواره بالای نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ قرار بگیرد، مجموع مقادیر صحیح

ممکن برای $f(1)$ کدام است؟

$(f \circ f^{-1})(x) > (f \circ f^{-1})(x)$ $y = x$
 -۱۸ (۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) -۲۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره چاره‌ای جز ساختن ضابطه $f \circ f^{-1}$ نداری، $f \circ f^{-1}$ هم که همون $y = x$ هستش.

درس نامه •• ترکیب یک تابع با وارون آن و وارون ترکیب توابع

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

قضیه مقابل در این موضوع برقرار است:

ترکیب هر تابع با تابع وارون آن، همواره تابع همانی را می‌دهد. فقط باید توجه کرد که کدام تابع اول وارد می‌شود، دامنه تابع همانی، با دامنه آن تابع برابر است. داریم:

$$1) (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad (x \in D_f)$$

$$2) (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad (x \in D_{f^{-1}})$$

اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر و $f, g, f(g(x)) = x$ و f وارون یکدیگرند.

پاسخ تشریحی گام اول: a مخالف صفر است؛ پس f وارون‌پذیر است و در این جا ضابطه وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax + a \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-a}{a} = \frac{1}{a}x - 1$$

گام دوم: ضابطه تابع $f \circ f^{-1}$ را می‌سازیم:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = a(x+1) \left(\frac{x-a}{a} \right) = x^2 + (1-a)x - a$$

ضابطه تابع $f \circ f^{-1}$ هم طبق درس نامه، همان تابع همانی $y = x$ است با دامنه \mathbb{R} .

گام سوم: نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ همواره بالاتر از نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ است؛ پس باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^2 + (1-a)x - a > x \Rightarrow x^2 - ax - a > 0$$

گام چهارم: برای این که این نامعادله همواره برقرار باشد، لازم است Δ عبارت درجه دوم $x^2 - ax - a$ منفی باشد.

$$\Delta = (-a)^2 - 4(-a) = a^2 + 4a = a(a+4) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -4 < a < 0$$

گام پنجم: مقدار $f(1)$ برابر $2a$ است و داریم:

$$-4 < a < 0 \Rightarrow -8 < f(1) = 2a < 0 \xrightarrow{f(1) \in \mathbb{Z}} f(1) = -7, -6, \dots, -1$$

مجموع این مقادیر برابر $-(1+2+\dots+7) = -\frac{7 \times 8}{2} = -28$ است.

تست و پاسخ ۱۳۶

هموگرافیک است و برای وارونش فرمول داریم.

تابع $f(x) = \frac{mx+6}{x+n}$ وارون خود را فقط در دو نقطه به طول‌های -2 و α قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(\alpha+1) = 1$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

خودت حل کنی بهتره برای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ لازم نیست ضابطه $f^{-1}(x)$ رو به دست بیاری؛ بلکه فقط باید معادله $f(x) = x$ رو حل کنی. البته با این شرط که f اکیداً صعودی باشه.

درس نامه ●● برخورد نمودارهای f و f^{-1}

سوالات مربوط به برخورد توابع f و f^{-1} همواره جزء سوالات جذاب و چالشی کنکورهای سراسری است. می توان نکات زیر را در این باره ذکر کرد:

(۱) اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، قطعاً نقاط برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد؛ پس به جای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، بهتر است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم. تعداد جوابهای معادله (نقاط برخورد) می تواند هر عدد حسابی باشد.

(۲) اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، تعداد نقاط برخورد (در صورت وجود) عدد فرد $2n + 1$ است که ۱ نقطه روی خط $y = x$ قرار دارد و $2n$ نقطه دیگر دویه دو نسبت به خط $y = x$ متقارن اند. در این حالت چاره ای جز حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ نداریم.

نکته در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $a+d \neq 0$ است. طول نقاط برخورد نمودار تابع با نمودار وارونش در صورت وجود، جوابهای

معادله $cx^2 + (a-d)x - b = 0$ هستند و می توان ثابت کرد که شاخه های نمودار چه صعودی و چه نزولی باشند $ad - bc$ مثبت یا منفی باشد، در هر دو صورت نقاط برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد.

پاسخ تشریحی گام اول: طبق نکته درس نامه، بهتر است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow \frac{mx+6}{x+n} = x \Rightarrow mx+6 = x^2 + nx \Rightarrow x^2 - (m-n)x - 6 = 0$$

گام دوم: جوابهای معادله بالا -2 و α هستند که حاصل ضرب آنها برابر -6 شده است. $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = -6 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = 3$

گام سوم: مجموع α و -2 برابر $3 - 2 = 1$ است و این مجموع در معادله گام اول برابر است با: $S = -\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow m - n = 1$ (۱)

گام چهارم: در صورت سؤال، شرط $f^{-1}(\alpha + 1) = 1$ را نیز داریم؛ پس می توانیم بنویسیم:

$$\xrightarrow{\alpha=3} f^{-1}(4) = 1 \xrightarrow{\text{ویژگی های وارون}} f(1) = 4$$

در ضابطه تابع اعمال می کنیم: $f(1) = \frac{m+6}{1+n} = 4 \Rightarrow m+6 = 4+4n \Rightarrow m-4n = -2$ (۲)

گام پنجم: دستگاه معادلات را حل می کنیم:

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-4n=-2 \end{cases} \Rightarrow (m-4n) - (m-n) = -2-1 \Rightarrow -3n = -3 \Rightarrow n=1 \xrightarrow{m-n=1} m-1=1 \Rightarrow m=2$$

در نهایت داریم: $m+n=3$

تست و پاسخ ۱۳۷

$-f(-x)$

نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+2}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می کنیم و سپس ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم تا نمودار

تابع g به دست آید، مقدار $(f \circ g^{-1})(-2)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره طبق ترتیب تبدیلهای گفته شده، ضابطه $g(x)$ رو بسازی کار تمومه.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

درس نامه •• تبدیل نمودار

• تابع $f(x)$ را داریم ($k > 0$):

عملیات	به جای x قرار دهیم $x - k$.	به جای x قرار دهیم $x + k$.	کل تابع را منهای k کنیم.	کل تابع را با k جمع کنیم.
ضابطه	$y = f(x - k)$	$y = f(x + k)$	$y = f(x) - k$	$y = f(x) + k$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می‌بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم.	نمودار f را k واحد پایین می‌بریم.	نمودار f را k واحد بالا می‌بریم.

• انعکاس (قرینه) نسبت به محور x ها و y ها:

عملیات	(۱) قراردادن $-x$ به جای x در تابع	(۲) کل تابع قرینه شود.	انجام هر دو عملیات (۱) و (۲)
ضابطه	$f(-x)$	$-f(x)$	$-f(-x)$
نمودار	نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به مبدأ قرینه می‌شود.

• رسم تابع $f(-x + k)$ یا $y = f(k - x)$ با شرط ($k > 0$):

(۱) نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم (به زبان دیگر $f(x + k)$ را رسم می‌کنیم).

(۲) نمودار به دست آمده را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (اگر به جای x قرار دهیم $-x$ ، تابع $f(-x + k)$ یا $f(k - x)$ به دست می‌آید).

• رسم تابع $y = f(-x - k)$ ($k > 0$):

(۱) نمودار f را k واحد به راست می‌بریم (در واقع، تابع $y = f(x - k)$ را رسم می‌کنیم).

(۲) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (در واقع، x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم تا تابع $f(-x - k)$ به دست آید).

پاسخ تشریحی گام اول: تبدیل‌های گفته شده را روی نمودار تابع f اعمال می‌کنیم تا ضابطه تابع $g(x)$ به دست آید:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} y = -f(-x) = -\frac{-x}{-x+2} = -\frac{x}{x-2}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{۲ واحد به راست} \\ x \rightarrow x-2}} y = -\frac{x-2}{(x-2)-2} = -\frac{x-2}{x-4}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{۳ واحد به پایین} \\ y \rightarrow y+3}} y+3 = -\frac{x-2}{x-4} \Rightarrow g(x) = -\frac{x-2}{x-4} - 3 = \frac{-4x+14}{x-4}$$

گام دوم: وارون تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، تابع $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است و طبق این نکته ضابطه وارون تابع g به صورت زیر است:

$$g^{-1}(x) = \frac{4x+14}{x+4}$$

$$f(g^{-1}(-2)) = f(3) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{4(-2)+14}{-2+4} = 3$$

گام سوم: $(f \circ g^{-1})(-2)$ را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۱۳۸

نقطه $A(-1, a)$ روی نمودار تابع $y = 2 - 3f\left(\frac{x}{2}\right)$ با نقطه $A'(b, 2b)$ روی نمودار تابع $y = 2f(1 - 2x)$ متناظر است. مقدار a کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره! مختصات ۲ نقطه رو تو ضابطه توابعشون جای گذاری کن، آخر سر باید به یک تساوی واحد برسی.



درس نامه •• نقاط متناظر

نقطه $A(x_1, y_1)$ روی نمودار تابع $a + bf(cx + d)$ متناظر است با نقطه $A'(x_2, y_2)$ روی نمودار تابع $a' + b'f(c'x + d')$. این دو نقطه در عمل باید یک تساوی واحد به صورت $y_0 = f(x_0)$ را گزارش کنند؛ پس مختصات دو نقطه را در ضابطه توابع مربوطه شان جای گذاری می کنیم:

$$A: y_1 = a + bf(cx_1 + d) \Rightarrow f(cx_1 + d) = \frac{y_1 - a}{b}$$

$$A': y_2 = a' + b'f(c'x_2 + d') \Rightarrow f(c'x_2 + d') = \frac{y_2 - a'}{b'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cx_1 + d = c'x_2 + d' \\ \frac{y_1 - a}{b} = \frac{y_2 - a'}{b'} \end{cases}$$

ورودی های f باید یکسان باشد.
خروجی های f باید یکسان باشد.

پاسخ تشریحی گام اول: مختصات هر دو نقطه را در ضابطه شان جای گذاری می کنیم:

$$A: a = 2 - 2f(-\frac{1}{2}) \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = \frac{2-a}{2}$$

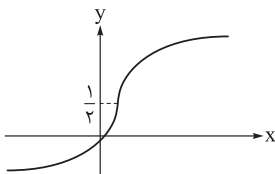
$$A': 2b = 2f(1-2b) \Rightarrow f(1-2b) = b$$

گام دوم: دو تساوی به دست آمده، طبق درس نامه باید یکسان باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \\ \frac{2-a}{2} = b \xrightarrow{b=\frac{3}{4}} \frac{2-a}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2-a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۳۹

تابع درجه سوم $f(x) = (4x^2 + a)(2x + b) + 9$ مفروض است. اگر نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟



(۱) ۶-

(۲) ۶

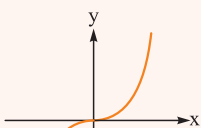
(۳) ۹-

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه •• تابع درجه سوم

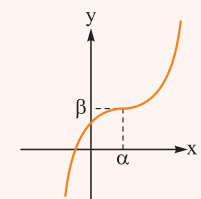
تابع $y = x^3$ را یک تابع درجه سوم می نامیم که نمودار آن به صورت روبه رو است: این تابع در $x = 0$ بر محور x مماس است.



با انتقال α واحد به راست و β واحد به بالا، نمودار تابع به صورت مقابل تغییر می کند:

در این صورت ضابطه تابع $y = (x - \alpha)^3 + \beta$ است.

در این تابع نقطه (α, β) مرکز تقارن نمودار است و خط مماس بر آن در $x = \alpha$ افقی است.





پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی

گام اول: نمودار تابع f^{-1} از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ پس نمودار تابع f نیز از مبدأ می‌گذرد و داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = ab + 9 = 0$$

گام دوم: ضابطه تابع f را باز می‌کنیم تا بتوانیم آن را به فرم $y = k(x - \alpha)^3 + \beta$ بنویسیم:

$$f(x) = (4x^2 + a)(2x + b) + 9 = 8x^3 + 4bx^2 + 2ax + ab + 9$$

$$\xrightarrow{ab+9=0} f(x) = 8x^3 + 4bx^2 + 2ax = 8\left(x^3 + \frac{bx^2}{2} + \frac{ax}{4}\right) \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای}} f(x) = 8\left(x + \frac{b}{6}\right)^3 - \frac{8b^3}{6^3}$$

گام سوم: در نمودار تابع f^{-1} مرکز تقارن $(m, \frac{1}{p})$ است. این یعنی مرکز تقارن تابع f نقطه $(\frac{1}{p}, m)$ است. با در نظر گرفتن ضابطه $f(x)$ و

$$\Rightarrow \frac{b}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -3 \quad \text{درس‌نامه این سؤال، نتیجه می‌گیریم که } \frac{b}{6} \text{ باید برابر } -\frac{1}{2} \text{ باشد:}$$

$$ab + 9 = 0 \xrightarrow{b=-3} -3a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$$

گام چهارم: از معادله گام اول استفاده می‌کنیم و داریم:

$$a - b = 6$$

در نهایت داریم:

تست و پاسخ ۱۴۰

تابع سرسره‌ای یا شکل

تابع $f(x) = |x - 2\alpha + 1| - |x + \alpha - 5|$ روی \mathbb{R} نزولی است. حداکثر مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

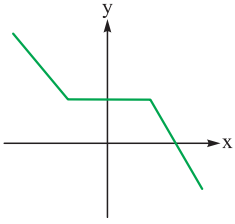
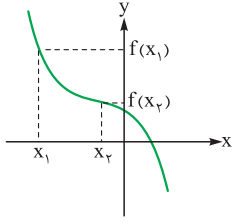
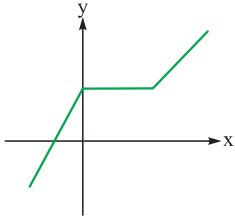
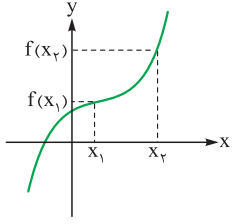
۱) ۵/۱

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره تابع سرسره‌ای به دو شکله، و کدوم نزولیه؟ و تحت چه شرایطی؟

درس‌نامه

مجموعه A ($A \subseteq D_f$) را در نظر بگیرید. به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به مجموعه A ، تابع f :

نزولی است.	اکیداً نزولی است.	صعودی است.	اکیداً صعودی است.
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
			
در بازه‌ای که تابع f نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

دقت کنید اگر مجموعه A برابر دامنه تابع باشد، گوییم تابع f روی دامنه خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. هم‌چنین اگر تابعی بر دامنه خود صعودی (نزولی) باشد، آن را یکنوا می‌نامیم.

الف) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.

ب) تابع ثابت (در یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

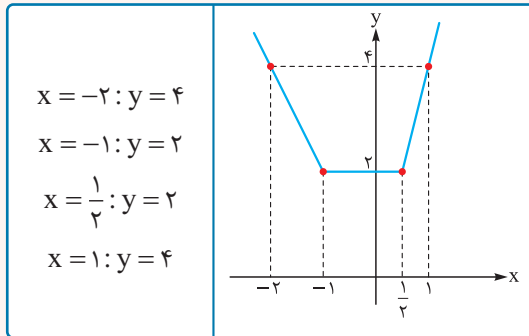
پ) اگر تابع f در دامنه خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیریکنوا می‌نامیم.



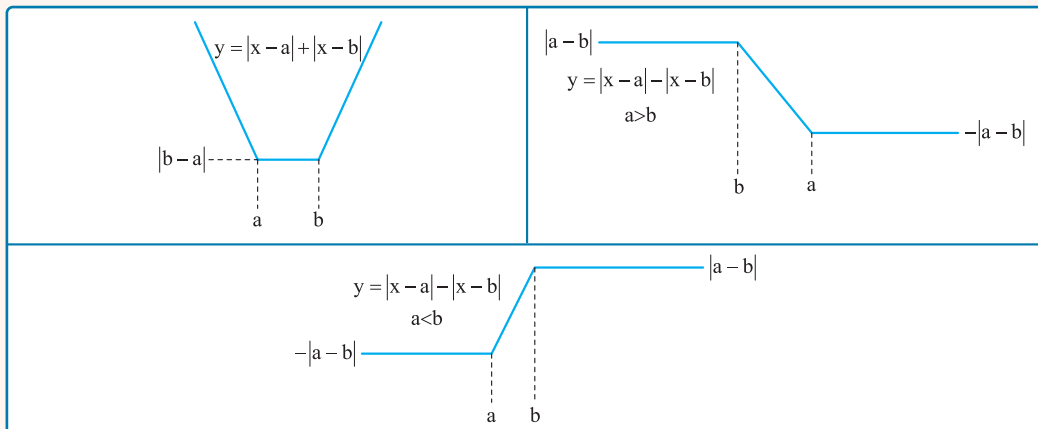
نمودار توابع قدرمطلق خاص

برای رسم توابع قدرمطلق به فرم $y = ax + b + |cx + d| + \dots$ که پس از تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها، ضابطه خطی پیدا می‌کنند، کافی است مقدار تابع را در ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها و سپس یک نقطه قبل‌تر و یک نقطه بعدتر را پیدا کرد. با وصل کردن متوالی این نقاط به هم نمودار تابع حاصل می‌شود.

مثلاً می‌خواهیم نمودار تابع $y = x + |2x - 1| + |x + 1|$ را رسم کنیم. ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها -1 و $\frac{1}{2}$ هستند. یک نقطه قبل‌تر از این دو، به دلخواه می‌تواند -2 و یک نقطه بعدتر، می‌تواند 1 باشد. مقادیر تابع را در این نقاط پیدا می‌کنیم:



دو تابع خاص داریم که باید شکل آن‌ها را حفظ باشید، تابع گلدانی و تابع سرسره‌ای:



پاسخ تشریحی گام اول: تابع f یک تابع سرسره‌ای است:

$$f(x) = |x - \underbrace{(2\alpha - 1)}_a| - |x - \underbrace{(-\alpha + 5)}_b|$$

که طبق شکل‌های درس‌نامه در حالت $a > b$ نزولی است.

$$2\alpha - 1 \geq -\alpha + 5 \Rightarrow 3\alpha \geq 6 \Rightarrow \alpha \geq 2$$

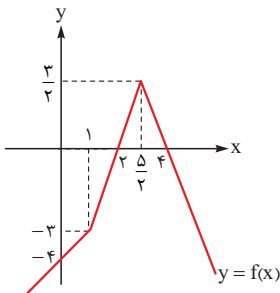
گام دوم: نامعادله $a > b$ را حل می‌کنیم:

حالت مساوی را در نظر می‌گیریم؛ زیرا به ازای $\alpha = 2$ تابع ثابت $f(x) = 0$ را داریم که هم صعودی و هم نزولی است.

$$\xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha) = |\alpha - 1| - |2\alpha - 5|$$

گام سوم: $f(\alpha)$ را به دست می‌آوریم:

گام چهارم: برای به دست آوردن بیشترین مقدار $f(\alpha)$ ، نمودار آن را رسم می‌کنیم. طبق روش گفته‌شده در درس‌نامه داریم:



که در محدوده $\alpha \geq 2$ بیشترین مقدار به ازای $\alpha = \frac{5}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ به دست می‌آید.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۱۴۱

توابع f و g با دامنه \mathbb{R} مفروض‌اند. اگر توابع $f + g$ و $f - 2g$ هر دو اکیداً صعودی باشند، کدام تابع روی \mathbb{R} الزاماً اکیداً نزولی است؟

$$y = g(-x) - x \quad (۴)$$

$$y = x - g(x) \quad (۳)$$

$$y = f(-x) - x \quad (۲)$$

$$y = x - f(x) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره مثل دستگاه دو معادله - دو مجهول بهش نگاه کن و ببین کدامشون راحت به دست میاد، کدام نامعلومه.

درس نامه •• جبر توابع و یکنوایی

توابع f و g هر دو نزولی‌اند.	تابع f صعودی اما تابع g نزولی است.	توابع f و g هر دو صعودی‌اند.
نزولی	نامعلوم	صعودی
نامعلوم	صعودی	نامعلوم
بستگی به علامت توابع و ریشه‌های آن‌ها دارد.		
$\frac{f}{g}$		
$\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}$		
صعودی	نزولی	صعودی

نکته انعکاس جهت یکنوایی را عوض می‌کند، یعنی جهت یکنوایی توابع $y = f(-x)$ و $y = -f(x)$ عکس جهت یکنوایی تابع f است، پس مثلاً اگر f نزولی باشد، $y = f(-x)$ و $y = -f(x)$ هر دو صعودی‌اند.

پاسخ تشریحی گام اول: از دستگاه زیر توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2f + g = a \\ f - 2g = b \end{cases} \Rightarrow f = \frac{2a + b}{5}, \quad g = \frac{a - 2b}{5}$$

$$f = \frac{2 \underbrace{(2f + g)}_{\text{اکیداً صعودی}} + \underbrace{(f - 2g)}_{\text{اکیداً صعودی}}}{5}, \quad g = \frac{\underbrace{(2f + g)}_{\text{اکیداً نزولی}} - 2 \underbrace{(f - 2g)}_{\text{اکیداً صعودی}}}{5}$$

گام دوم: پس داریم:

این یعنی f که مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس اکیداً صعودی است.

اما در مورد تابع g که مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع اکیداً نزولی است، نمی‌توان به طور قطع اظهار نظر کرد، یعنی یکنوایی تابع g نامعلوم است.

گام سوم: در مورد توابع ۳ و ۴ نمی‌توان اظهار نظر کرد، اما برای توابع دیگر داریم:

۱) $y = \underbrace{x}_{\text{نزولی}} - \underbrace{f(x)}_{\text{صعودی}}$: وضعیت نامعلوم است:

۲) $y = \underbrace{f(-x)}_{\text{نزولی}} - \underbrace{x}_{\text{نزولی}}$: قطعاً نزولی است:

تست و پاسخ ۱۴۲

تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$ مفروض است. مجموعه جواب‌های نامعادله $(f \circ f)(x) > f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۳۲

(۲) ۳۳

(۱) ۳۴

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

مشاوره یکی از مهم‌ترین کاربردهای یکنوایی در اهداف کتاب درسی، کاربرد آن در حل نامعادلات است که به شدت نامعادلات را ساده می‌کند. راهش این است که همواره در حل نامعادلات حواستان به وضعیت صعودی - نزولی بودن تابع باشد، چه تابع معلوم باشد و چه تابعی که خودتان با خلاقیت باید بسازید.

خودت حل کنی بهتره تابع f ، رادیکالی راست‌گرای رو به پایین و نزولیه، همین.

درس نامه •• کاربرد یکنوایی در نامعادلات

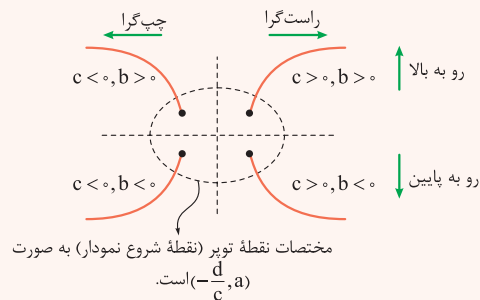
تعریف توابع (اکیداً) صعودی و (اکیداً) نزولی را که بلدیم. حالا در این مبحث می‌خواهیم عکس این تعریف‌ها عمل کنیم و نامعادله حل کنیم، به صورت مقابل:

$$f(g(x)) < f(h(x)) \Rightarrow \begin{cases} \text{تابع } f \text{ صعودی است:} & g(x) < h(x) \\ \text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود.} & \\ \text{تابع } f \text{ نزولی است:} & g(x) > h(x) \\ \text{جهت نامساوی عوض می‌شود.} & \end{cases}$$

اگر مساوی هم حضور داشته باشد (منظور \geq و \leq است)، باز هم این روابط برقرارند. هم‌چنین نکته مهم این روابط این است که باید دامنه توابع مرکب $f \circ h$ و $f \circ g$ را لحاظ شوند.

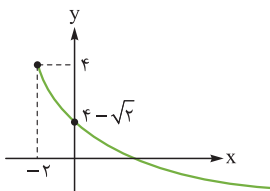
تابع رادیکالی $y = a + b\sqrt{cx + d}$

نمودار این تابع برحسب پارامترهای a, b, c, d یکی از ۴ حالت زیر است:



در این توابع اگر $b > 0$ ، برد تابع $[a, +\infty)$ است و اگر $b < 0$ ، برد $(-\infty, a]$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی گام اول: طبق درس‌نامهٔ دوم، نمودار تابع f به صورت زیر است:

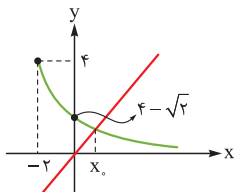


که یک تابع اکیداً نزولی است.

$$f(f(x)) > f(x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x) < x$$

گام دوم: پس نامعادله $(f \circ f)(x) > f(x)$ به نامعادلهٔ روبه‌رو تبدیل می‌شود:

گام سوم: خط $y = x$ را به نمودار داده‌شده اضافه می‌کنیم:



و می‌بینیم که در بازهٔ $(x_0, +\infty)$ نمودار تابع f از خط $y = x$ پایین‌تر است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام چهارم: x_0 جواب معادله $x - \sqrt{x+2} = 4$ است، آن را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow 4 - x_0 = \sqrt{x_0 + 2} \xrightarrow[-2 < x_0 < 4]{\text{توان } 2} x_0^2 - 8x_0 + 16 = x_0 + 2 \Rightarrow x_0^2 - 9x_0 + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 - 7)(x_0 - 2) = 0 \xrightarrow[-2 < x_0 < 4]{} x_0 = 2$$

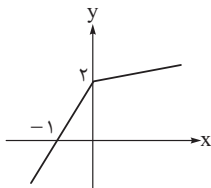
گام پنجم: باید حواسمان به دامنه تابع fof باشد:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \geq -2 \mid 4 - \sqrt{x+2} \geq -2\} = \{x \geq -2 \mid \underbrace{\sqrt{x+2} \leq 6}_{x+2 \leq 36}\} = \{x \geq -2 \mid x \leq 34\} = [-2, 34]$$

گام ششم: اشتراک بازه‌های $(2, +\infty)$ و $[-2, 34]$ مجموعه جواب‌های نامعادله را تشکیل می‌دهد که برابر بازه $(2, 34]$ است. این بازه $34 - 2 = 32$ عدد صحیح دارد.

تست و پاسخ ۱۴۳

نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(2x-1)(f(x+a)-2)}$ برابر \mathbb{R} باشد، مقدار a کدام است؟



عبارت زیر رادیکال
ریشه مرتبه فرد ندارد.

۱ (۱)

-۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره ظاهر بسیار عجیب و ترسناکی دارد، اما بسیار ساده حل می‌شود، فقط کافی است به مفاهیم اولیه یکنواپی و تعیین علامت دقت کنید.

خودت حل کنی بهتره $x = \frac{1}{2}$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد.

$$\Rightarrow (2x-1)(f(x+a)-2) \geq 0$$

پاسخ تشریحی گام اول: برای محاسبه دامنه تابع g باید زیر رادیکال نامنفی شود:

گام دوم: تابع $y = 2x - 1$ اکیداً صعودی است و از قضا تابع f هم روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است؛ پس برای این که دامنه تابع g نیز \mathbb{R} باشد، لازم است $y = 2x - 1$ و تابع $y = f(x+a) - 2$ از نظر علامت و ریشه عین هم باشند، یعنی $x = \frac{1}{2}$ ریشه $y = f(x+a) - 2$ باشد:

$$\Rightarrow 0 = f\left(a + \frac{1}{2}\right) - 2 \Rightarrow f\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2 \xrightarrow{\text{نمودار}} a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۱۴۴

خارج قسمت و باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + ax^2 + b$ بر چندجمله‌ای $x - 2$ به ترتیب $q(x)$ و 6 است. اگر مجموع

ضرایب چندجمله‌ای $q(x)$ برابر ۱۲ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

$q(1)$

۳ (۴)

-۹ (۳)

۹ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره رابطه تقسیم $p(x)$ بر $x - 2$ رو بنویس و $x = 2$ و $x = 1$ رو جای گذاری کن.

درس نامه تقسیم چندجمله‌ای‌ها

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مقسوم، $b(x)$ چندجمله‌ای مقسوم‌علیه، $q(x)$ چندجمله‌ای خارج قسمت و $r(x)$ چندجمله‌ای باقی مانده باشد، رابطه

$$p(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

مقابل برقرار است:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r \Rightarrow r = p(a)$$

(۱) اگر $b(x) = x - a$ باشد، داریم:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

(۲) اگر $b(x) = (x-a)(x-b)$ باشد، داریم:

$$p(x) = (x-a)(x-b)q(x) + \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} x=a: \alpha a + \beta = p(a) \\ x=b: \alpha b + \beta = p(b) \end{cases}$$

توجه کنید که درجه $r(x)$ همواره کمتر از درجه $b(x)$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: رابطه تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ را می‌نویسیم:

$$p(x) = (x-2)q(x) + 6$$

باقی‌مانده

$x=2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p(2) = 0 + 6$$

$$\xrightarrow{\text{چندجمله‌ای } p(x)} p(2) = 32 - 4(8) + a(4) + b = 6 \Rightarrow 4a + b = 6 \quad (1)$$

گام دوم: در رابطه تقسیم گام اول، $x=1$ را نیز جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p(1) = (-1)q(1) + 6 = -12 + 6 = -6$$

مجموع ضرایب چندجمله‌ای $q(x)$

$$\xrightarrow{\text{چندجمله‌ای } p(x)} p(1) = 1 - 4 + a + b = -6 \Rightarrow a + b = -3 \quad (2)$$

گام سوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4a + b = 6 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow (4a + b) - (a + b) = 6 - (-3) \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a+b=-3} 3 + b = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$a - b = 9$$

در نهایت داریم:

$$(x-1)(x-2)$$

تست و پاسخ ۱۴۵

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $2x + 1$ است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$(x-1)f(x) + xf(x-1)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: رابطه تقسیم چندجمله‌ای $(x-1)f(x) + xf(x-1)$ را بر $x-2$ می‌نویسیم، تا ببینیم به چه چیزهایی نیاز داریم:

$$(x-1)f(x) + xf(x-1) = (x-2)q_1(x) + r \xrightarrow{x=2} f(2) + 2f(1) = 0 + r \quad (*)$$

گام دوم: پس $f(1)$ و $f(2)$ را نیاز داریم و برای محاسبه آن‌ها از تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید

که نیازی هم به ضابطه $f(x)$ نداریم:

$$f(x) = (x-1)(x-2)q_2(x) + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1: f(1) = 0 + 3 \\ x=2: f(2) = 0 + 5 \end{cases}$$

گام سوم: طبق رابطه (*) باقی‌مانده مورد نظر برابر $11 = 5 + 2(3)$ است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

ریاضیات گسسته دوازدهم

تست و پاسخ ۱۴۶

چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با ارائه مثال نقض رد کرد؟

الف) حاصل ضرب یک عدد گویای غیرصفر و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

ب) اگر مجموع دو عدد گنگ گویای غیرصفر باشد، مجموع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم عددی گنگ است.

پ) حاصل ضرب جذر دو عدد حقیقی مثبت برابر است با جذر حاصل ضرب آن دو.

ت) هیچ عدد طبیعی فردی وجود ندارد که مربع و مکعب آن فرد نباشد.

۳ (۱) ۲ (۲)

۱ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره تسلط بر مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی در حل سوالات این بخش بسیار به شما کمک می‌کند.

خودت حل کنی بهتره گزاره‌ها را بررسی کن و سعی کن آن‌ها را اثبات کنی. برای «الف» و «ب» می‌توانی از برهان خلف کمک بگیری.

پاسخ تشریحی گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) با برهان خلف این گزاره را اثبات می‌کنیم: اگر α یک عدد گویای غیرصفر و β یک عدد گنگ باشد، فرض می‌کنیم $\alpha\beta$ عددی گویاست. می‌دانیم حاصل تقسیم یک عدد گویا به یک عدد گویای دیگر حتماً عددی گویا می‌شود، پس $\frac{\alpha\beta}{\alpha}$ باید گویا باشد، پس β گویاست که این گزاره با فرض ما در تناقض است؛ پس $\alpha\beta$ نمی‌تواند گویا باشد.

ب) باز هم از برهان خلف کمک می‌گیریم: اگر α و β گنگ و $\alpha + \beta$ یک عدد گویای غیرصفر باشد، حاصل $2\alpha + 3\beta$ عددی گویاست. طبق فرض مسئله $\alpha + \beta$ گویاست؛ پس $2\alpha + 2\beta$ نیز گویاست. می‌دانیم اگر دو عدد گویا را از هم کم کنیم باز هم حاصل آن گویا می‌شود، پس $(2\alpha + 3\beta) - (2\alpha + 2\beta)$ که برابر است با β ، باید عددی گویا باشد که با فرض مسئله در تناقض است؛ پس $2\alpha + 3\beta$ نمی‌تواند گویا باشد.

پ) بسیار واضح است که $\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$. این ویژگی جذر را از قدیم می‌دانیم.

ت) این مورد هم بسیار واضح است که هر عدد طبیعی فرد به توان هر عدد طبیعی‌ای که برسد باز هم حاصل عددی فرد است.

تست و پاسخ ۱۴۷

اگر $x | 3m + 7$ و $x | 5m + 12$ ، چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

۲ (۱) ۴ (۲)

۶ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره یک سؤال پرتکرار از مبحث عا‌دکردن که باید بتوانید چشم‌پسته‌ش حلش کنید.

خودت حل کنی بهتره مجهول m را با استفاده از ویژگی‌های عا‌دکردن از سمت راست رابطه حذف کن.



درس نامه •• ویژگی های عادکردن

ردیف	نماد ریاضی	توضیح
۱	$a b \Rightarrow ma mb$	می توانیم دو طرف را در عدد صحیح m ضرب کنیم.
۲	$a b \Rightarrow a mb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح دلخواه m ضرب کنیم.
۳	$a b \Rightarrow a^n b^n$	دو طرف را به توان طبیعی n برسانیم.
۴	$a b \Rightarrow a b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی دلخواه برسانیم.
۵	$\pm a \pm a$	هر عدد صحیح خودش را عاد می کند.
۶	$\pm 1 \pm a$	± 1 هر عددی را عاد می کنند.
۷	$a 0$	هر عدد صحیح، صفر را عاد می کند.
۸	$0 a \Rightarrow a = 0$	صفر فقط خودش را عاد می کند.
۹	$\begin{cases} a b \\ a c \end{cases} \Rightarrow a b \pm c$	اگر a دو عدد b و c را عاد کند، مجموع و تفاضل آن ها را هم عاد می کند.
	$\{ab c \Rightarrow a c, b c\}$	سمت چپ را می توانیم لاغر کنیم و جای ab مقسوم علیه های آن یعنی a یا b را قرار دهیم.
۱۰	$a b, b c \Rightarrow a c$	ویژگی تعدی عادکردن

پاسخ تشریحی

$$\text{فرض مسئله} \begin{cases} x | (3m+7) \times 5 \\ x | (5m+12) \times 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x | 15m+35 \\ x | 15m+36 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین را از یکدیگر کم می کنیم.}} x | 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تست و پاسخ ۱۴۸

اگر عدد صحیحی را ۷ واحد زیاد کنیم بر عدد ۱۳ و اگر از آن ۳ واحد کم کنیم بر عدد ۷ بخش پذیر می شود. عدد a بزرگ ترین عدد سه رقمی و فرد با شرایط گفته شده است. کدام گزینه نادرست است؟

$$7 | a^2 - 2 \quad (2)$$

$$9 | a^2 - 1 \quad (1)$$

$$31 | a^2 - 8 \quad (4)$$

$$11 | a^2 - 4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این سؤال مشابه سؤال کنکور است و حل آن کمی زمان بر است.

خودت حل کنی بهتره دو طرف رابطه همنهستی به پیمانه ۷ و ۱۳ را یکی کن تا از ویژگی ک.م.م پیمانه ها استفاده کنی و یک رابطه

برای a به دست بیاوری.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

درس نامه •• ویژگی های همنهشتی

خواص همنهشتی

خاصیت های همنهشتی را با جدول زیر بررسی می کنیم.

نام	توضیح عملکرد	مثال
تبدیل به تقسیم	$x \equiv y \pmod m$ را به صورت $x = mq + y$ می نویسیم.	$x \equiv 2 \pmod 5$ را به صورت $x = 5q + 2$ می نویسیم.
تبدیل به عاد کردن	$x \equiv y \pmod m$ را به صورت $m \mid x - y$ می نویسیم.	از $x \equiv 3x - 1 - 2x \pmod 7$ نتیجه می گیریم: $7 \mid 3x - 1 - 2x$ ، یعنی $7 \mid x - 1$.
تعویض پیمانه	به جای پیمانه می توان مقسوم علیه های آن را قرار داد. $x \equiv y \pmod m \xrightarrow{d \mid m} x \equiv y \pmod d$	از $x \equiv 1 \pmod{10}$ نتیجه می شود: $x \equiv 1 \pmod 2$ و $x \equiv 1 \pmod 5$.
جای گذاری باقی مانده	به جای هر عدد می توان باقی مانده آن بر m را قرار داد. $a = mq + r \Rightarrow a \equiv r \pmod m$	$15x + 27y + 30 \equiv 1x - 1y + 2 \pmod{15}$ به جای ۳۰ به جای ۲۷ به جای ۱۵
کم و زیاد کردن مضارب m	اجازه داریم به هر یک از دو طرف هر مضرب دلخواه m را اضافه یا کم کنیم: $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a \pm mq \equiv b \pm mq \pmod m$	$x \equiv 4 \pmod{27}$ اضافه کنیم. $x \equiv -10 \pmod{27}$ (الف) $x \equiv 3 \pmod{27}$ کم کنیم. $x \equiv 30 \pmod{27}$ (ب)
جمع و تفریق با عدد C	به دو طرف عدد یکسانی را اضافه یا کم می کنیم. $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod m, a - c \equiv b - c \pmod m$	به $x \equiv 1 \pmod 5$ +۴ کنیم. $x + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$ (الف) به $y \equiv 3 \pmod 7$ -۲ کنیم. $y - 2 \equiv 3 - 2 \equiv 1 \pmod 7$ (ب)
ضرب در عدد C	دو طرف را در عدد C ضرب کنیم (می توانیم پیمانه را هم ضرب کنیم): $a \equiv b \pmod m \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}, ac \equiv bc \pmod m$	$x \equiv y \pmod{16} \xrightarrow{\times 7} 7x \equiv 7y \pmod{112}, 7x \equiv 7y \pmod{16}$

نکته (ک.م.م پیمانه ها): اگر دو عدد X و Y در پیمانه های مختلف همنهشت باشند، به پیمانه ک.م.م آن ها نیز همنهشت اند.

$$x \equiv y \pmod{m_1}, x \equiv y \pmod{m_2} \Rightarrow x \equiv y \pmod{[m_1, m_2]}$$

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبه باقی مانده a بر ۱۳ و ۷):

$$a + 7 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv -7 \equiv 45 \pmod{13}$$

$$a - 3 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv 3 \equiv 45 \pmod{7}$$

$$[13, 7] \quad 91 \quad a \equiv 45 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv 45 \pmod{7} \Rightarrow a = 91q + 45$$

$$a \Rightarrow \text{بزرگ ترین مقدار سه رقمی} \Rightarrow 91 \times 10 + 45 = 955$$

گام دوم (محاسبه بزرگ ترین مقدار سه رقمی a):



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

گام سوم:

بررسی گزینه‌ها:

$$a \equiv 955 \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \Rightarrow 9 | a^2 - 1$$

۱

$$a \equiv 955 \equiv 3 \Rightarrow a^2 \equiv 9 \equiv 2 \Rightarrow 7 | a^2 - 2$$

۲

$$a \equiv 955 \equiv 9 \Rightarrow a^2 \equiv 81 \equiv 4 \Rightarrow 11 | a^2 - 4$$

۳

$$a \equiv 955 \equiv 25 \equiv -6 \Rightarrow a^2 \equiv 36 \equiv 5 \Rightarrow 31 | a^2 - 5$$

۴

تست و پاسخ ۱۴۹

چند مورد از همنهشتی‌های زیر همواره درست هستند؟

(ب) $5^{1403} \equiv 57 \pmod{62}$

(الف) $43! \equiv 74 \pmod{37}$

(ت) $a^2 \equiv b^2 \pmod{a-b}$

(پ) $a(a+1)(a+2) \equiv 2a \pmod{6}$

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره تسلط شما در ساده‌کردن رابطه‌های همنهشتی مختلف برای حل این تیپ از سوالات بسیار مهم است.

خودت حل کنی بهتره با استفاده از ویژگی‌های همنهشتی که در درس‌نامه سؤال قبلی مطرح شد هر گزینه را ساده کن.

پاسخ تشریحی

$$37 | 43! \Rightarrow 43! \equiv 0 \equiv 74 \pmod{37} \checkmark$$

$+2 \times 37$

(الف)

(ب) نه ۵۷ \times $5^{1403} \equiv 25 \pmod{62}$ $\xrightarrow{\text{طرفین } \times 5^2}$ $5^{1401} \equiv 1 \pmod{62}$ $\Rightarrow 5^{467} \equiv 1 \pmod{62}$ $\Rightarrow 5^{467} \equiv 1 \pmod{62}$ $\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۴۶۷ می‌رسانیم}}$ $5^3 \equiv 1 \pmod{62}$

(پ) می‌دانیم ضرب ۳ عدد متوالی همواره مضرب ۶ است، چون همواره حداقل یکی از آن‌ها مضرب ۲ و یکی حتماً مضرب ۳ است.

$$a(a+1)(a+2) \equiv 0 \pmod{6} \quad \times$$

$$a-b | (a-b)(a+b) \Rightarrow a-b | a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{a-b} \quad \checkmark$$

(ت)

تست و پاسخ ۱۵۰

اگر $x+1 \equiv -28 \pmod{35}$ و $3-y \equiv -31 \pmod{21}$ ، باقی‌مانده تقسیم $2 - 13xy - 24y + 191x$ بر ۷ کدام است؟

۴ (۲)

۵ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۱۵۲

اگر باقی مانده تقسیم عدد $32a42b$ بر ۱۱۷ برابر ۸۲ و عدد $698c67$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم عدد $cabacb$ بر ۱۷۵ کدام است؟

۲۸ (۴)

۳۶ (۳)

۴۴ (۲)

۵۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این سؤال از سوالات دشوار و زمان بر مبحث هم‌نهشتی است که در آزمون‌ها پرتکرار بوده است.

خودت حل کنی بهتره اول از همه رابطه‌های هم‌نهشتی را به پیمان‌های ۱۳ و ۹ ($13 \times 9 = 117$) بنویس تا از دستگاه‌های معادلاتی a و b را به دست بیاوری. c را هم به همین شکل در عدد دوم محاسبه کن و در نهایت a ، b و c را در $cabacb$ جای گذاری کن و باقی مانده آن را بر ۱۷۵ به دست بیاور.

درس نامه ••• تعیین باقی مانده برای اعداد خاص

عدد	روش تعیین باقی مانده بر آن	بیان ریاضی برای $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$	مثال
۲	فقط به رقم یکان نگاه کنید.	$N \equiv a_0 \pmod{2}$	باقی مانده تقسیم 1648195 بر ۲ برابر ۱ است. (به ۵ نگاه کردیم.)
۳ و ۹	به جمع ارقام نگاه کنید.	$N \equiv \sum_{k=0}^n a_k \pmod{9,3}$	باقی مانده تقسیم 7648 بر ۳ و ۹ مثل باقی مانده $25 = 7+4+6+8$ بر ۳ و ۹ است که می شود ۱ و ۷.
۴، ۲۵ و ۱۰۰	به دو رقم سمت راست نگاه کنید. برای ۴ به (یکان + دهگان) ۲ هم نگاه می کنند.	$N \equiv a_4 a_3 \pmod{4}$ $N \equiv 2a_1 + a_0 \pmod{25}$	باقی مانده تقسیم عدد 137621 بر ۴ مثل باقی مانده ۲۱ بر ۴ است (یا $2 \times 2 + 1$) (۴) که می شود ۱. باقی مانده این عدد بر ۲۵ و ۱۰۰ هم همان ۲۱ است.
۵	مثل ۲، به رقم یکان نگاه کنید.	$N \equiv a_0 \pmod{5}$	باقی مانده 1468 بر ۵ برابر باقی مانده ۸ بر ۵ است، یعنی ۳.
۸	به سه رقم سمت راست نگاه کنید.	$N \equiv a_4 a_3 a_2 \pmod{8}$	باقی مانده 1648197 بر ۸ همان باقی مانده ۱۹۷ بر ۸ است که می شود $5 = 7$.
۱۱	از سمت راست یک در میان کم و جمع کنید.	$N \equiv \sum_{k=0}^{11} (-1)^k a_k \pmod{11}$ $N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots$	باقی مانده تقسیم 46725 بر ۱۱ همان باقی مانده $4 - 6 + 7 - 2 + 5 = 11$ است.
۷، ۱۳ و ۱۰۰۱	از سمت راست سه رقم سه رقم جدا و یک در میان کم و جمع کنید.	$N \equiv a_7 a_6 a_5 - a_4 a_3 a_2 + \dots \pmod{7,13,1001}$	باقی مانده 1648795 بر ۷، ۱۳ و ۱۰۰۱ همان باقی مانده $148 - 648 + 1 = 148$ بر این اعداد است که به ترتیب ۱، ۵ و ۱۴۸ می شود.
۹۹	از سمت راست دوتا دوتا جدا و جمع کنید.	$N \equiv a_1 a_0 + a_3 a_2 + \dots \pmod{99}$	باقی مانده تقسیم 42381 بر ۹۹ برابر باقی مانده $81 + 23 + 4 = 108$ بر ۹۹ یعنی ۹ می شود.
۱۰۱	از سمت راست دوتا دوتا جدا کنید و یکی در میان تفریق و اضافه کنید.	$N \equiv a_1 a_0 - a_3 a_2 + a_5 a_4 - \dots \pmod{101}$	باقی مانده تقسیم 42381 بر ۱۰۱ می شود: $81 - 23 + 4 = 62$
۲۷، ۳۷ و ۹۹۹	از سمت راست سه تا سه تا جدا و جمع کنید.	$N \equiv a_7 a_6 a_5 + a_8 a_7 a_6 + \dots \pmod{27,37,999}$	باقی مانده تقسیم 1648195 بر ۲۷، ۳۷ و ۹۹۹ برابر باقی مانده $844 = 195 + 648 + 1$ بر این اعداد است که به ترتیب ۷، ۳۰ و ۸۴۴ است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه a و b): اگر باقی‌مانده عددی را به پیمانه‌ای بزرگ بخواهیم، گاهی اوقات خیلی خوب است که پیمانه را بشکنیم. از طرفی، ما هیچ نکته‌ای برای محاسبه باقی‌مانده عدد بر ۱۱۷ بلد نیستیم، اما با تبدیل آن به ۱۳×۹ هم پیمانه را کوچک‌تر کردیم و هم می‌توانیم از نکات تعیین باقی‌مانده بر ۹ و ۱۳ استفاده کنیم.

$$۱۱۷ = ۱۳ \times ۹ \Rightarrow \begin{cases} \overline{۳۲a۴۲b} \equiv ۸۲ \\ \overline{۳۲a۴۲b} \equiv ۸۲ \end{cases}$$

$$\overline{۳۲a۴۲b} \equiv ۴۲b - ۳۲a \equiv ۱۰۰ + b - a \equiv ۹ + b - a \equiv ۸۲ \equiv ۱۷ \equiv ۴$$

حاصل $۹ + b - a$ هم ۴ و هم ۱۷ می‌تواند باشد، چون در هر دو صورت a و b می‌توانند یک‌رقمی باشند؛ پس داریم:

$$\begin{cases} ۹ + b - a = ۴ \Rightarrow b - a = -۵ \\ \text{یا} \\ ۹ + b - a = ۱۷ \Rightarrow b - a = ۸ \end{cases}$$

حالا باقی‌مانده همین عدد را بر ۹ محاسبه می‌کنیم.

$$\overline{۳۲a۴۲b} \equiv ۳ + ۲ + a + ۴ + ۲ + b \equiv ۱۱ + a + b \equiv ۱۱ + a + b \equiv ۲ + a + b \equiv ۸۲ \equiv ۱۰ \equiv ۱۹$$

$۲ + a + b = ۱$ که قابل قبول نیست، زیرا a و b که هر دو عدد یک‌رقمی طبیعی هستند نمی‌توانند حاصل جمع منفی داشته باشند، اما ۱۰ و

$$\begin{cases} ۲ + a + b = ۱۰ \Rightarrow a + b = ۸ \\ \text{یا} \\ ۲ + a + b = ۱۹ \Rightarrow a + b = ۱۷ \end{cases}$$

۱۹ هر دو قابل قبول‌اند.

نکته حاصل جمع و تفریق دو عدد همواره یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد.

ما ۴ معادله قابل قبول برای a و b داریم؛ پس برای محاسبه a و b دو دستگاه معادله داریم و طبق نکته بالا این دو دستگاه به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} b - a = ۸ \\ a + b = ۸ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b - a = -۵ \\ a + b = ۱۷ \end{cases}$$

با حل معادلات دستگاه اول $a = ۰$ و $b = ۸$ به دست می‌آید و با حل معادلات دستگاه دوم $a = ۱۱$ و $b = ۶$ به دست می‌آید که قابل قبول نیست. پس در نهایت داریم: $a = ۰$ و $b = ۸$.

گام دوم (محاسبه c): طبق نکته تعیین باقی‌مانده اعداد بر ۱۱، داریم:

$$\overline{۶۹۸c۶۷} \equiv ۰ \Rightarrow ۷ - ۶ + c - ۸ + ۹ - ۶ \equiv ۰ \Rightarrow c - ۴ \equiv ۰ \Rightarrow c = ۴$$

گام سوم (محاسبه باقی‌مانده $cabacb$ بر ۱۷۵):

$$\overline{cabacb} = ۴۰۸۰۴۸$$

۱۷۵ خیلی بزرگ است؛ پس پیمانه را به ۲۵ و ۷ می‌شکنیم. ($۱۷۵ = ۲۵ \times ۷$)

$$۱۷۵ = ۲۵ \times ۷$$

برای باقی‌مانده اعداد بر ۲۵ به دو رقم سمت راست عدد نگاه می‌کنیم.

$$\overline{۴۰۸۰۴۸} \equiv \overline{۴۸} \equiv ۲۳ \equiv ۱۲۳$$

$$\overline{۴۰۸۰۴۸} \equiv \overline{۴۸ - ۴۰۸} \equiv -۳۶۰ \equiv ۴ \equiv ۱۲۳$$

$$\Rightarrow \overline{۴۰۸۰۴۸} \equiv ۱۲۳ \equiv -۵۲ \Rightarrow -\overline{۴۰۸۰۴۸} \equiv ۵۲$$



تست و پاسخ ۱۵۳

در معادله سیاله خطی $114 = 12y - 18x$ ، به ازای کدام مقدار x ، بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی y به دست می‌آید؟

۹۹۷ (۴)

۶۷۱ (۳)

۶۶۱ (۲)

۳۳۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره معادله سیاله از مباحث مهم این فصل کتاب است که به حل آن باید مسلط باشید.

درس نامه

معادله سیاله خطی

معادله $ax + by = c$ را معادله سیاله خطی می‌نامیم. برای x و y دنبال جواب‌های صحیح می‌گردیم.

ثابت می‌شود شرط وجود جواب صحیح در معادله سیاله این است که $(a, b) | c$ یعنی ب.م.م ضرایب y و x عدد ثابت معادله را بشمارد. مثلاً $15x + 9x = 22$ جواب صحیح ندارد، چون ب.م.م ۱۵ و ۹ می‌شود ۳ که ۲۲ را نمی‌شمارد، اما معادله $14x + 8y = 10$ جواب دارد، چون ب.م.م ضرایب می‌شود ۲ و ۱۰ را عادی می‌کند.

حل معادله سیاله خطی

اگر در معادله سیاله خطی شرط $(a, b) | c$ برقرار شد، می‌توانیم y و x را پیدا کنیم.

اول دو طرف معادله را بر (a, b) تقسیم می‌کنیم تا ضرایب کوچک‌تر شوند. بعد ۲ راه داریم:

روش اول: برای حل معادله $a'x + b'y = c'$

اول با جست‌وجوی یک جواب y_0 و x_0 را پیدا می‌کنیم، بعد جواب کلی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = x_0 + kb' \\ y = y_0 - ka' \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

مثلاً در معادله $8x + 12y = 100$ داریم:

جواب دارد. $4 | 100 = (8, 12)$

$$\xrightarrow{\div 4} 2x + 3y = 25$$

یک جواب: $x_0 = 11, y_0 = 1$

جواب کلی:

$$\begin{cases} x = 11 + 3k \\ y = 1 - 2k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌ها را هم ببینید:

k	...	-3	-2	-1	0	1	2	...
x	...	2	5	8	11	14	17	...
y	...	7	5	3	1	-1	-3	...

روش دوم: برای حل $ax + by = c$

یکی از مجهول‌ها را حذف می‌کنیم و ضریب آن را در پیمانه می‌نویسیم.

مثلاً در معادله $8x + 12y = 100$ می‌توانیم بنویسیم:

$$12y \equiv 100 \pmod{8} \quad \text{یا} \quad 8x \equiv 100 \pmod{12}$$

حالا یک معادله همنهشتی داریم که آن را حل می‌کنیم و جواب x یا y به دست می‌آید. این جواب را در معادله سیاله قرار می‌دهیم و مجهول دوم را پیدا می‌کنیم. ادامه حل را ببینید:

$$12y \equiv 100 \pmod{8} \xrightarrow{\text{باقی‌مانده‌ها را بنویسیم}} 4y \equiv 4 \pmod{4} \xrightarrow{\div 4} y \equiv 1 \pmod{4} \xrightarrow{\text{جواب}} y = 2k + 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 8x + 12(2k + 1) = 100$$

$$\Rightarrow 8x = 100 - 24k - 12 \xrightarrow{\div 8} x = 11 - 3k$$

$$\text{پس جواب کلی معادله} \begin{cases} y = 2k + 1 \\ x = 11 - 3k \end{cases} \text{ است. } (k \in \mathbb{Z})$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی گام اول (حل معادله سیاله خطی):

$$18x - 12y = 114 \xrightarrow{\div 6} 3x - 2y = 19$$

$$3x \equiv 19 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 2k + 1 \Rightarrow 3(2k + 1) - 2y = 19 \Rightarrow y = \frac{6k + 3 - 19}{2} = 3k - 8$$

گام دوم (محاسبه بزرگترین عدد سه رقمی y):

$$y \leq 999 \Rightarrow 3k - 8 \leq 999 \Rightarrow 3k \leq 1007 \Rightarrow k \leq 335/66 \Rightarrow k = 335$$

به ازای $k = 335$ بزرگترین مقدار سه رقمی برای y به دست می آید. مقدار x را برای $k = 335$ به دست می آوریم.

$$x = 2k + 1 = 2(335) + 1 = 671$$

تست و پاسخ ۱۵۴

m کوچکترین عدد طبیعی است که $(m+2)! \equiv 48$. به ازای چند عدد سه رقمی n ، معادله سیاله خطی $(2m+14)x + (3m-1)y = 4 - 5n$ دارای جواب صحیح است؟

۹۱ (۴)

۸۲ (۳)

۷۳ (۲)

۶۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته شرط وجود جواب صحیح در معادله سیاله خطی $ax + by = c$ این است که $(a, b) | c$ ، یعنی ب.م.م ضرایب y و x عدد ثابت معادله را بشمارد.

پاسخ تشریحی طبق فرض مسئله، داریم:

$$(m+2)! \equiv 48 \equiv 0 \Rightarrow 48 | (m+2)!$$

کوچکترین مقدار طبیعی m برای این که در رابطه بالا صدق کند، ۴ است.

$$48 | (4+2)! \Rightarrow 48 | 6!$$

معادله به ازای $m = 4$ به صورت زیر می شود:

$$22x + 11y = 4 - 5n$$

شرط جواب داشتن معادله سیاله را می نویسیم:

$$(22, 11) | 4 - 5n \Rightarrow 11 | 4 - 5n \Rightarrow 5n \equiv 4$$

$$\Rightarrow 5n \equiv 15 \Rightarrow n \equiv 3 \Rightarrow n = 11k + 3$$

$$100 \leq 11k + 3 \leq 999 \Rightarrow 97 \leq 11k \leq 997 \Rightarrow 9 \leq k \leq 90 \Rightarrow k = 9, 10, \dots, 90$$

تعداد k های قابل قبول:

$$90 - 9 + 1 = 82$$

تست و پاسخ ۱۵۵

در یک تقسیم، مقسوم علیه کوچکترین عدد دورقمی ممکن و باقی مانده برابر ۳ است. اگر مقسوم علیه را ۴ واحد کم تر کنیم، باقی مانده برابر ۴ می شود. تعداد مقسوم های چهاررقمی کدام است؟

۱۱۷ (۴)

۱۱۶ (۳)

۱۱۵ (۲)

۱۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال دشواری است که برای حل آن ابتدا باید بتوانید مقدار مقسوم علیه را به دست آورید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا قضیه تقسیم را بنویس و سپس مقدار صحیح مقسوم علیه را به دست بیاور.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی ابتدا برای روابط گفته شده قضیه تقسیم را می نویسیم و b را به دست می آوریم.

$$a = bq + 3$$

$$a = (b - 4)q' + 4$$

b کوچک ترین عدد دورقمی است، اما 10 نمی تواند باشد، چون به ازای $b = 10$ ، a یک بار زوج و یک بار فرد می شود؛ پس $b = 11$.

$$\left. \begin{array}{l} a = 11q + 3 \Rightarrow a \equiv 3 \equiv 25 \\ a = 11q' + 4 \Rightarrow a \equiv 4 \equiv 25 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 25 \Rightarrow a = 11k + 25$$

حالا تعداد اعداد چهاررقمی a را محاسبه می کنیم.

$$1000 \leq a \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq 11k + 25 \leq 9999 \Rightarrow 13 \leq k \leq 129 \Rightarrow k = 13, 14, \dots, 129 \Rightarrow \text{تعداد } k = 129 - 13 + 1 = 117$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

هندسه دوازدهم

تست و پاسخ ۱۵۶

اگر ماتریس‌های ضرایب و مقادیر ثابت دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ را به ترتیب A و B بنامیم، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس $A + B \cdot [x \ y]$ کدام است؟

۰ / ۸ (۴)

۰ / ۸ (۳)

۱ / ۶ (۲)

-۱ / ۶ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون یکی از سؤال‌های ثابت امتحان نهایی درس هندسه (۳) است و تسلط بر حل این مسئله‌ها بسیار ضروری است.

خودت حل کنی بهتره مقادیر X و Y را با حل دستگاه به روش دلخواه به دست آورید.

درس نامه

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید. در این دستگاه $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر ثابت و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات نامیده می‌شوند و دستگاه را می‌توان با معادلهٔ $AX = B$ نمایش داد.

پاسخ تشریحی گام اول: ماتریس‌های ضرایب و مقادیر ثابت را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: دستگاه را به روش حذفی حل می‌کنیم تا مقادیر X و Y را به دست آوریم:

$$2 \times \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} + 2y = -1 \Rightarrow 2y = -\frac{6}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$$

گام سوم: ماتریس خواسته‌شده در صورت سؤال را پیدا می‌کنیم:

$$A + B[x \ y] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس برابر $-\frac{1}{6}$ است.

تست و پاسخ ۱۵۷

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ستون اول ماتریس A^3 کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینهٔ ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

مشاوره محاسبه توان‌های ۲ یا ۳ برای ماتریس‌های مربعی مرتبه (۳) به طور مکرر در امتحان نهایی مطرح شده و در سؤال‌های کنکور مانند سال ۹۹ نیز دیده می‌شود.

خودت حل کنی بهتره ابتدا ستون اول ماتریس A^2 را به دست آورید.

درس نامه ●●

- ۱) ماتریس $A \times$ سطر i ام ماتریس A^{n-1} = سطر i ام ماتریس A^n
- ۲) ستون j ام ماتریس $A^{n-1} \times$ ماتریس A = ستون j ام ماتریس A^n

پاسخ تشریحی گام اول: ستون اول ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 \text{ ستون اول} = A \text{ ماتریس} \times A \text{ ستون اول} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ستون اول ماتریس A^3 را پیدا می‌کنیم:

$$A^3 \text{ ستون اول} = A \text{ ماتریس} \times A^2 \text{ ستون اول} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

تست و پاسخ ۱۵۸

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ و $|AB| = 6$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۵ (۳)

۳۳ (۲)

۳۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره با توجه به این که A ماتریسی از مرتبه 2×3 و B ماتریسی از مرتبه 3×2 است، AB ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ خواهد بود.

درس نامه ●●

- ۱) ماتریس‌های غیرمربعی دترمینان ندارند.
- ۲) اگر A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ و B ماتریسی از مرتبه $n \times m$ باشد، آن‌گاه AB ماتریس مربعی از مرتبه m و BA ماتریس مربعی از مرتبه n است و در نتیجه $|AB|$ و $|BA|$ وجود دارد.

پاسخ تشریحی گام اول: ماتریس AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-1 & 6 \\ 6x-1 & 18 \end{bmatrix}$$

گام دوم: دترمینان ماتریس AB را برابر ۶ قرار می‌دهیم:

$$|AB| = 6 \Rightarrow 18(3x-1) - 6(6x-1) = 6$$

$$\xrightarrow{\div 6} 3(3x-1) - (6x-1) = 1 \Rightarrow 9x-3-6x+1=1 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

گام سوم: مجموع درایه‌های ماتریس AB را با جای‌گذاری مقدار x به دست می‌آوریم:

$$AB \text{ های مجموع درایه} = (3x-1) + 6 + (6x-1) + 18 = 9x + 22 \xrightarrow{x=1} 31$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۱۵۹

اگر ${}^2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ -2 & |A| \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{12} کدام است؟

- (۱) 2^7 (۲) -2^7 (۳) 2^{13} (۴) -2^{13}

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این مدل سؤال‌ها برگرفته از تمرین‌های کتاب درسی و از سؤال‌های پرتکرار در امتحان نهایی و آزمون‌های آزمایشی هستند.

خودت حل کنی بهتره از طرفین تساوی، دترمینان بگیرد.

درس نامه

برای محاسبه توان‌های بزرگ ماتریس مربعی A ، تا حد امکان تلاش می‌کنیم توانی از این ماتریس پیدا کنیم که برابر ماتریس همانی (I) یا مضربی از آن باشد.

به عنوان مثال داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^n = \begin{cases} A: \text{فرد } n \\ I: \text{زوج } n \end{cases}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از فرض سؤال داریم:

$${}^2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ -2 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|A| & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left(\frac{1}{2}|A|\right)^2 - (-1)$$

$$\Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| - 2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

گام دوم: با جای گذاری $|A|$ ، ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|A| & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}|A| \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم: با محاسبه توان‌های ۲ و ۴ ماتریس A ، ماتریس A^{12} را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^4 = -4I \xrightarrow{\text{به توان ۳}} A^{12} = -4^3 I^3 = -2^6 I$$

گام چهارم: ماتریس A^{12} را با درایه‌های آن می‌نویسیم:

$$A^{12} = \begin{bmatrix} -2^6 & 0 \\ 0 & -2^6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2(-2^6) = -2^7$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۱۶۰

اگر سطر سوم ماتریس وارون پذیر A به صورت $[m \quad -1 \quad m-1]$ و ستون سوم ماتریس A^{-1} به صورت $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ m+1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای m کدام است؟

(۱) $\{1, -3\}$ (۲) $\{-1, 3\}$ (۳) $\{-1\}$ (۴) \emptyset

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون پذیر در وارون آن، برابر ماتریس همانی است.

درس نامه

(۱) ماتریس مربعی A وارون پذیر است، هرگاه $|A| \neq 0$ باشد.

(۲) وارون ماتریس مربعی A با نماد A^{-1} نمایش داده می شود و داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

(۳) اگر حاصل ضرب AB قابل تعریف باشد، آن گاه درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس AB برابر است با:

سطر j ام ماتریس $B \times$ سطر i ام ماتریس A

پاسخ تشریحی گام اول: حاصل ضرب ماتریس مربعی وارون پذیر A در وارونش برابر با ماتریس همانی است، پس درایه سطر سوم و ستون سوم حاصل ضرب این دو ماتریس برابر ۱ است.

$$A \times \text{ستون سوم } A^{-1} = \text{سطر سوم } A = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ m+1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow -2m - 1 + m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \quad \text{گام دوم:}$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۶۱

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $AB = A^{-1}$ باشد، آن گاه به ازای کدام مقدار n ، ماتریس $B + nA$ اسکالر است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۳ (۴) چنین مقداری وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره در ماتریس اسکالر، درایه های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند.

درس نامه

(۱) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq 0$ باشد، آن گاه وارون ماتریس A از رابطه زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(۲) ماتریس مربعی A اسکالر است؛ هرگاه تمام درایه های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر بوده و درایه های واقع بر قطر اصلی آن مساوی یکدیگر باشند.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

ریاضیات

پاسخ تشریحی گام اول: وارون ماتریس A را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3 \times 3 - 2 \times 4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس B را از رابطه $AB = A^{-1}$ پیدا می کنیم:

$$AB = A^{-1} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A^{-1} \text{ (از سمت چپ)}} A^{-1}(AB) = A^{-1} \times A^{-1} \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I B = (A^{-1})^2$$

$$\Rightarrow B = (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس $B + nA$ را تشکیل می دهیم:

$$B + nA = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3n & 2n \\ 4n & 3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3n+17 & 2n-12 \\ 4n-24 & 3n+17 \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند و درایه های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند؛ پس داریم:

$$\begin{cases} 2n - 12 = 0 \Rightarrow n = 6 \\ 4n - 24 = 0 \Rightarrow n = 6 \end{cases}$$

با توجه به یکسان بودن درایه های روی قطر اصلی ماتریس $B + nA$ ، این ماتریس به ازای $n = 6$ ، ماتریسی اسکالر است.

تست و پاسخ ۱۶۲

اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر مرتبه ۲ و $A + 4A^{-1} = 3I$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خود حل کنی بهتره طرفین تساوی را در ماتریس A ضرب کنید.

درس نامه

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O} \quad \text{ماتریس مربعی } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ را در نظر بگیرید. طبق قضیه کیلی - همیلتون داریم:}$$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا طرفین تساوی را در A ضرب می کنیم:

$$A + 4A^{-1} = 3I \xrightarrow{\times A} A^2 + 4I = 3A \Rightarrow A^2 - 3A + 4I = \bar{O}$$

گام دوم: رابطه به دست آمده را با قضیه کیلی - همیلتون تطبیق می دهیم:

$$A^2 - 3A + 4I = \bar{O}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O} \Rightarrow ad-bc = 4 \Rightarrow |A| = 4$$

تست و پاسخ ۱۶۳

اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و $B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ ترین درایه روی قطر اصلی ماتریس $B^{-1}A^3B$ کدام است؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خود حل کنی بهتره طرفین تساوی را به توان ۳ برسانید.



درس نامه

$$(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$$

(۱) اگر B ماتریسی مربعی و وارون پذیر و A ماتریسی هم مرتبه با B باشد، آن گاه داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

(۲) برای هر ماتریس قطری مانند A داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: طرفین تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (B^{-1}AB)^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$(B^{-1}AB)^3 = B^{-1}A^3B$$

گام دوم: بنا به درس نامه داریم:

$$B^{-1}A^3B = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

بزرگ‌ترین درایه روی قطر اصلی این ماتریس برابر ۶۴ است.

تست و پاسخ ۱۶۴

اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $A(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۴ (۳)

۷ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون پذیر در وارونش، برابر ماتریس همانی (I) است.

درس نامه

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

اگر A ماتریسی مربعی و وارون پذیر باشد، آن گاه داریم:

$$(A+B)(A+B)^{-1} = I$$

رابطه فوق به هر ماتریس مربعی دیگر قابل تعمیم است؛ به عنوان مثال داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: می‌دانیم حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون پذیر در وارون آن برابر ماتریس همانی (I) است؛ پس برای ماتریس

$$(A+3I)(A+3I)^{-1} = I$$

مربعی $(A+3I)$ داریم:

گام دوم: با توجه به ویژگی توزیع پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع دو ماتریس، رابطه فوق را ساده می‌کنیم:

$$A(A+3I)^{-1} + 3I(A+3I)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow 3(A+3I)^{-1} = I - A(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس $(A+3I)^{-1}$ را وارون می‌کنیم. می‌دانیم وارون وارون هر ماتریس برابر خود آن ماتریس است؛ پس داریم:

$$(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} A+3I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-4 \left(-\frac{1}{4}\right) = 14$$

بنابراین حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر است با:



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

تست و پاسخ ۱۶۵

اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $A + B = \bar{O}$ و $AB = I$ ، آن گاه $(A^x - B^x)^{-1} = aA$ ، مقدار a کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

$$B^{-1} = A, A^{-1} = B$$

(۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و $AB = I$ باشد، آن گاه داریم:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

(۲) اگر A ماتریسی مربعی و وارون پذیر و k عددی حقیقی باشد، داریم:

پاسخ تشریحی: گام اول: با توجه به روابط داده شده، ماتریس های A^x و B^x را محاسبه می کنیم:

$$A + B = \bar{O} \Rightarrow A = -B \xrightarrow{\text{ضرب B از راست}} AB = (-B)B$$

$$\xrightarrow{AB=I} -B^x = I \Rightarrow B^x = -I$$

$$A + B = \bar{O} \Rightarrow B = -A \xrightarrow{\text{ضرب A از چپ}} AB = A(-A)$$

$$\xrightarrow{AB=I} -A^x = I \Rightarrow A^x = -I$$

گام دوم: با توجه به نتایج به دست آمده، ماتریس $(A^x - B^x)^{-1}$ را ساده می کنیم:

$$(A^x - B^x)^{-1} = (AA^x - BB^x)^{-1} = (A(-I) - B(-I))^{-1} = (-A + B)^{-1} = (B + B)^{-1} = (2B)^{-1} = \frac{1}{2} B^{-1}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): با توجه به رابطه $AB = I$ ، می توان نتیجه گرفت $B^{-1} = A$ ؛ پس داریم:

$$\text{طبق گام دوم: } (A^x - B^x)^{-1} = \frac{1}{2} B^{-1} \Rightarrow (A^x - B^x)^{-1} = \frac{1}{2} A \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

فیزیک دوازدهم

تست و پاسخ ۱۶۶

بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 3\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ به ترتیب $(18\text{ m})\vec{i}$ و $(10\text{ m})\vec{i}$ است. بردار مکان متحرک در لحظه $t_3 = 24\text{ s}$ بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $-4\vec{i}$ (۲) $-6\vec{i}$ (۳) $-16\vec{i}$ (۴) $-26\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شاید به این شکل سؤال که حرکت با سرعت ثابت روی محور x به صورت برداری بررسی شود، کم‌تر برخورد کرده‌اید. در هر صورت بهتر است با این تیپ سؤال هم آشنا باشید.

درس نامه

(۱) بردار مکان (\vec{r}) : برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند بردار مکان جسم در آن لحظه نام دارد. وقتی حرکت روی محور x باشد، بردار مکان آن را به صورت \vec{x} نمایش می‌دهیم.

(۲) بردار جابه‌جایی (\vec{d}) : پاره‌خط جهتی است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی وصل می‌کند. $(\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ در حرکت روی محور x ، بردار جابه‌جایی را به صورت $\Delta\vec{x}$ نشان می‌دهیم.

(۳) رابطه سرعت متوسط در حرکت روی محور x :

$$\vec{v}_{av} = \frac{(\Delta\vec{x})}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} \quad \text{سرعت متوسط } (\text{m/s})\vec{i}$$

\vec{x}_1 : بردار مکان متحرک در لحظه t_1

\vec{x}_2 : بردار مکان متحرک در لحظه t_2

وقتی سرعت ثابت است، سرعت متوسط در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

پاسخ تشریحی رابطه سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را با سرعت متوسط در بازه زمانی t_2 تا t_3 برابر قرار می‌دهیم و از آنجا، بردار مکان متحرک در لحظه t_3 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_2}{t_3 - t_2} \Rightarrow \frac{(10\text{ m})\vec{i} - (18\text{ m})\vec{i}}{10\text{ s} - 3\text{ s}} = \frac{\vec{x}_3 - (10\text{ m})\vec{i}}{24\text{ s} - 10\text{ s}}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{8}{7}\text{ m/s}\right)\vec{i} = \frac{\vec{x}_3 - (10\text{ m})\vec{i}}{14\text{ s}} \Rightarrow -(16\text{ m})\vec{i} = \vec{x}_3 - (10\text{ m})\vec{i} \Rightarrow \vec{x}_3 = -(6\text{ m})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۱۶۷

دو خودرو با سرعت‌های ثابت 20 km/h و 30 km/h در مسیری مستقیم از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شوند. فاصله این دو نقطه 900 m است. اگر دو خودرو در یک لحظه در نقطه A باشند، اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به نقطه B چند دقیقه است؟

- (۱) $0/9$ (۲) $1/8$ (۳) $2/7$ (۴) $5/4$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره مدت‌زمان حرکت هر یک از خودروها، در جابه‌جایی از A تا B را به دست آورده و از هم کم کنید.

درس نامه وقتی سرعت متحرک ثابت است، سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط آن با هم برابرند و می‌توان نوشت:

$$v = v_{av} \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

v : سرعت (m/s) Δx : جابه‌جایی (m) Δt : بازه زمانی (s)



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

پاسخ تشریحی گام اول: رابطه سرعت و جابه‌جایی را برای هر یک از دو خودرو نوشته و مدت زمان حرکت آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad \frac{\Delta x_1 = 900 \text{ m} = 0.9 \text{ km}}{v_1 = 20 \text{ km/h}} \rightarrow 20 = \frac{0.9}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{9}{200} \text{ h}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad \frac{\Delta x_2 = 900 \text{ m} = 0.9 \text{ km}}{v_2 = 30 \text{ km/h}} \rightarrow 30 = \frac{0.9}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{9}{300} \text{ h}$$

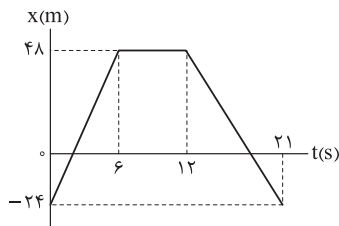
گام دوم: اختلاف زمان رسیدن دو خودرو به نقطه B را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{9}{200} - \frac{9}{300} = \frac{27 - 18}{600} = \frac{9}{600} \text{ h} = \frac{3}{200} \text{ h}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل ساعت (h) به دقیقه (min)}} \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{3}{200} \times 60 = 0.9 \text{ min}$$

تست و پاسخ ۱۶۸

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه‌ای که جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند، بر حسب متر بر مربع ثانیه، کدام است؟



(۱) $0.25 \hat{i}$

(۲) $-0.25 \hat{i}$

(۳) $1.25 \hat{i}$

(۴) $-1.25 \hat{i}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در حل تست‌هایی از حرکت‌شناسی که به نمودارها مربوط می‌شوند، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌ها (رابطه تالس)

می‌تواند مفید باشد و سرعت عمل ما را بالا ببرد.

درس‌نامه

(۱) در حرکت روی محور X هرگاه متحرک از مبدأ مکان یا مبدأ محور ($X = 0$) عبور کند، X تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان عوض می‌شود.
(۲) اگر متحرکی روی محور X حرکت کند و در یک بازه زمانی، نمودار مکان - زمان آن به صورت یک خط شیب‌دار باشد، سرعت متحرک در این بازه زمانی، ثابت است و شیب این خط، سرعت متحرک را نشان می‌دهد. در این بازه زمانی سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط با هم برابرند.

جابه‌جایی (m)

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت
(m/s) بازه زمانی (s)

x_1 : مکان متحرک در لحظه t_1 (m)

x_2 : مکان متحرک در لحظه t_2 (m)

(۳) در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

تغییر سرعت (m/s)

$$a_{av} = v_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

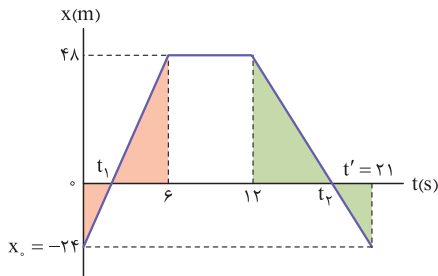
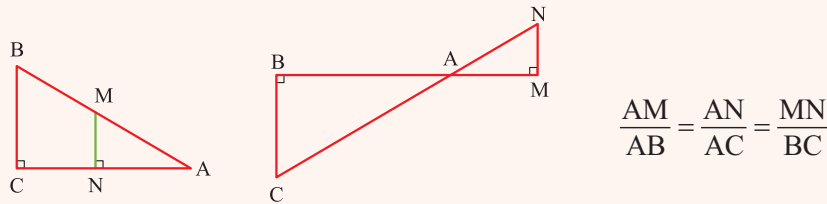
شتاب متوسط
(m/s²) بازه زمانی (s)

v_1 : سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

v_2 : سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)



۴) نسبت تشابه بین اضلاع دو مثلث متشابه به صورت‌های مختلفی نوشته می‌شود که متداول‌ترین آن‌ها در شکل‌های زیر به کار رفته است:



پاسخ تشریحی گام اول: در لحظاتی که نمودار مکان - زمان محور t را قطع کرده

یعنی در لحظه‌های t_1 و t_2 ، x تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان عوض می‌شود. با استفاده از رابطه تالس، این دو لحظه را پیدا می‌کنیم. مثلث‌هایی که هاشور مشابه دارند، با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه بین آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{48}{24} = \frac{6 - t_1}{t_1 - 0} \Rightarrow 2t_1 = 6 - t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s} \quad \text{در بازه زمانی } 0 \text{ تا } 6 \text{ s}$$

$$\frac{48}{24} = \frac{t_2 - 12}{21 - t_2} \Rightarrow 42 - 2t_2 = t_2 - 12 \Rightarrow 54 = 3t_2 \Rightarrow t_2 = 18 \text{ s} \quad \text{در بازه زمانی } 12 \text{ تا } 21 \text{ s}$$

گام دوم: در هر یک از بازه‌های زمانی 0 تا 6 s و 6 s تا 21 s و 21 s تا 21 s سرعت متحرک ثابت است. این دو سرعت ثابت $(v_1$ و $v_2)$ را به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{0 - (-24)}{2 - 0} = \frac{24}{2} = 12 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-24 - 0}{21 - 18} = \frac{-24}{3} = -8 \text{ m/s}$$

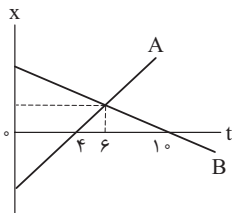
گام سوم: شتاب متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{-8\vec{i} - 12\vec{i}}{18 - 2} = \frac{-20\vec{i}}{16} = -(1/25 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۱۶۹

نمودار مکان - زمان متحرک‌های A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. در

مبدأ زمان، اندازه بردار مکان متحرک A چند برابر اندازه بردار مکان متحرک B است؟



- (۱) $\frac{4}{5}$
 (۲) $\frac{5}{4}$
 (۳) $\frac{6}{5}$
 (۴) $\frac{5}{6}$

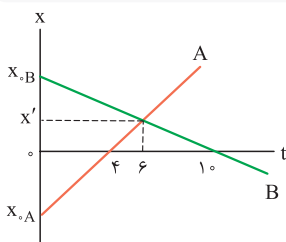
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره برخی تست‌های حرکت‌شناسی، آن‌چنان با مطالب ریاضی و به ویژه درس هندسه، تلفیق می‌شوند که هنگام حل آن‌ها بیشتر

حس می‌کنیم با یک تست ریاضی سروکار داریم تا یک تست فیزیک.

پاسخ تشریحی گام اول: در مبدأ زمان ($t = 0$) اندازه بردار مکان هر متحرک با اندازه مکان اولیه آن

برابر است. یعنی $\frac{|x_{0A}|}{x_{0B}}$ را می‌خواهیم:

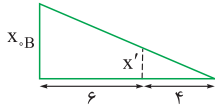




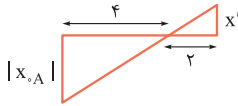
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

فیزیک

گام دوم: نسبت تشابه بین مثلث‌های مشخص شده را می‌نویسیم و مقادیر $X_{\cdot B}$ و $|X_{\cdot A}|$ را بر حسب X' به دست می‌آوریم:



$$\frac{X'}{X_{\cdot B}} = \frac{4}{6+4} \Rightarrow X_{\cdot B} = \frac{10 X'}{4} = 2.5 X'$$



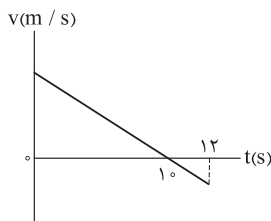
$$\frac{|X_{\cdot A}|}{X'} = \frac{4}{2} \Rightarrow |X_{\cdot A}| = 2X'$$

در پایان، نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|X_{\cdot A}|}{X_{\cdot B}} = \frac{2X'}{2.5X'} = \frac{4}{5}$$

تست و پاسخ ۱۷۰

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در ۱۲ ثانیه اول، مسافت طی شده توسط متحرک 156 m باشد، اندازه سرعت متوسط آن در این بازه زمانی چند متر بر ثانیه است؟



۱۱/۵ (۱)

۱۲ (۲)

۱۲/۵ (۳)

۱۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره بسیاری از مفاهیم و اصطلاحاتی که در صحبت‌های عامیانه، آن‌ها را یکسان محسوب می‌کنیم، در فیزیک، معانی و مفاهیم متفاوتی دارند. مثلاً مسافت با جابه‌جایی فرق دارد یا تندی و سرعت، یکسان نیستند.

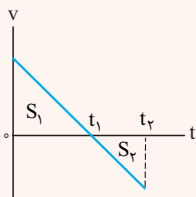
درس نامه

(۱) مقایسه مسافت و جابه‌جایی: مسافت یعنی طول مسیر پیموده شده توسط متحرک و یک کمیت نرده‌ای است. اما جابه‌جایی، برداری است که مکان شروع حرکت را به مکان پایانی آن وصل می‌کند. به طور کلی داریم:

اندازه جابه‌جایی \geq مسافت

تنها در صورتی که حرکت بر مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت باشد، مسافت با اندازه جابه‌جایی برابر می‌شود.

(۲) مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور t در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است. $(S = \Delta x)$ مساحت سطحی را که زیر محور t است، با علامت منفی در نظر می‌گیریم که قدرمطلق این مساحت، برابر با مسافت طی شده در آن بازه زمانی است. $(|S| = \ell)$



Δx : جابه‌جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2

ℓ : مسافت طی شده در بازه زمانی t_1 تا t_2

$$\Delta x = S_1 + S_2$$

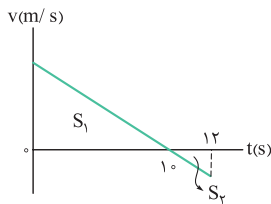
$$\ell = S_1 + |S_2|$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام اول: می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با توان دوم نسبت تشابه آن‌هاست. بنابراین داریم:



$$\frac{|S_2|}{|S_1|} = \left(\frac{12-10}{10-0}\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

گام دوم: مسافت طی شده در ۱۲ ثانیه اول حرکت ۱۵۶ متر است:

$$S_1 + |S_2| = 156 \xrightarrow{S_1 = 25|S_2|} 25|S_2| + |S_2| = 156 \Rightarrow 26|S_2| = 156 \Rightarrow |S_2| = \frac{156}{26} = 6 \Rightarrow S_2 = -6 \text{ m}$$

$$S_1 = 25|S_2| = 25 \times 6 = 150 \text{ m}$$

$$\Delta x = S_1 + S_2 = 150 + (-6) = 144 \text{ m}$$

گام سوم: جابه‌جایی متحرک در ۱۲ ثانیه اول حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{144}{12} = 12 \text{ m/s}$$

گام چهارم: در پایان اندازه سرعت متوسط در ۱۲ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

تست و پاسخ ۱۷۱

سرعت متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در مدت ۸ s از $\vec{v}_1 = (5 \text{ m/s})\vec{i}$ به $\vec{v}_2 = (-10 \text{ m/s})\vec{i}$ می‌رسد.

جابه‌جایی متحرک در این مدت برحسب متر کدام است؟

(۴) $-60 \vec{i}$

(۳) $60 \vec{i}$

(۲) $-20 \vec{i}$

(۱) $20 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

یکی از معادلات حرکت با شتاب ثابت روی محور x، معادله مستقل از شتاب است. شکل برداری این معادله، به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\Delta \vec{x} = \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\right) \Delta t$$

$\Delta \vec{x}$: جابه‌جایی (m)

\vec{v}_1 : سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

\vec{v}_2 : سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)

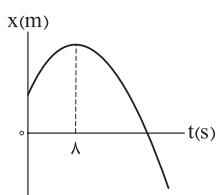
$\Delta t = t_2 - t_1$: بازه زمانی (s)

پاسخ تشریحی با استفاده از معادله مستقل از شتاب، جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta \vec{x} = \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\right) \Delta t \Rightarrow \Delta \vec{x} = \left(\frac{(5 \text{ m/s})\vec{i} + (-10 \text{ m/s})\vec{i}}{2}\right) \times 8 \Rightarrow \Delta \vec{x} = (-5 \text{ m/s})\vec{i} \times 8 = (-40 \text{ m})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۱۷۲

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 9 \text{ s}$ ، با تندی آن در کدام لحظه، برحسب ثانیه، برابر است؟



(۱) ۷

(۲) ۹

(۳) ۱۱

(۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۲

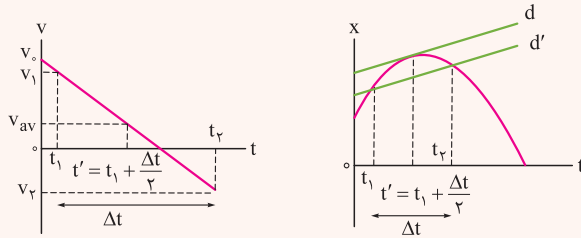


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

فیزیک

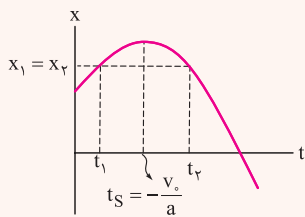
درس نامه

(۱) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در بازه زمانی Δt با سرعت در لحظه $t' = t_1 + \frac{\Delta t}{2}$ برابر است.



$$d \parallel d' \Rightarrow v_{av} = v_{t'}$$

(۲) در حرکت با شتاب ثابت، زمانهایی که نسبت به $t_S = -\frac{v_0}{a}$ (زمان رأس سهمی) تقارن دارند، دارای مکانهای یکسان و تندیهای برابر هستند، البته سرعتها قرینه هم هستند.

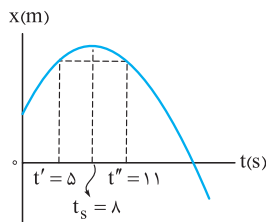


$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_S \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ v_1 = -v_2 \end{cases}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به مورد اول درسنامه، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 9s$ با سرعت در لحظه t' برابر است.

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5s$$

گام دوم: با توجه به نکته دوم درسنامه، در لحظههای $t' = 5s$ و $t'' = 11s$ که نسبت به رأس سهمی یعنی لحظه $t_S = 8s$ فاصله زمانی یکسانی دارند، تندی متحرک یکسان است (البته سرعتها در این دو لحظه، قرینه هم هستند).



$$|v'| = |v''|, \quad v' = -v''$$

بنابراین اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 9s$ با تندی آن در لحظههای $t' = 5s$ و $t'' = 11s$ برابر است. در گزینهها فقط $t'' = 11s$ وجود دارد و همان گزینه صحیح است.

تست و پاسخ ۱۷۳

تندی متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می کند، هنگام عبور از مکانهای $x_1 = 20m$ و $x_2 = 40m$ به ترتیب $17m/s$ و $23m/s$ است. در لحظه ای که تندی متحرک برابر $1m/s$ است، بردار مکان آن بر حسب متر کدام است؟

(۱) $2\vec{i}$

(۲) $-2\vec{i}$

(۳) $4\vec{i}$

(۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینه (۴)



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

درس نامه •• یکی از معادلات حرکت با شتاب ثابت روی محور X که کاربرد فراوانی دارد، معادله سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) است.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

$$v_1: \text{تندی در مکان } x_1 \text{ (m/s)} \quad v_2: \text{تندی در مکان } x_2 \text{ (m/s)} \quad a: \text{شتاب حرکت (m/s}^2\text{)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: معادله سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) را بین مکان های x_1 و x_2 می نویسیم و شتاب حرکت را به دست می آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 23^2 - 17^2 = 2a(40 - 20) \Rightarrow 529 - 289 = 40a \Rightarrow 240 = 40a \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: معادله سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) را بین مکان های x_1 و x_2 می نویسیم تا مکان x_2 به دست آید:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \xrightarrow[v_2=1 \text{ m/s}, v_1=17 \text{ m/s}]{a=6 \text{ m/s}^2, x_1=20 \text{ m}} 1^2 - 17^2 = 2 \times 6(x_2 - 20) \Rightarrow -288 = 12(x_2 - 20)$$

$$\Rightarrow -24 = x_2 - 20 \Rightarrow x_2 = -4 \text{ m}$$

بنابراین در لحظه ای که تندی متحرک برابر 1 m/s است، بردار مکان متحرک به صورت $\vec{x}_2 = (-4 \text{ m})\vec{i}$ خواهد بود.

به جور دیگه: می توانستیم در گام دوم، معادله سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) را بین مکان های x_2 و x_1 نیز بنویسیم و به همین جواب برسیم.

تست و پاسخ ۱۷۴

جهت حرکت متحرکی که در راستای محور X با شتاب ثابت حرکت می کند، در لحظه $t = 5 \text{ s}$ تغییر می کند. مسافت طی شده توسط متحرک

در ۴ ثانیه اول، چند برابر مسافت طی شده توسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟

$$\frac{1}{2} (4) \quad 4 (3) \quad 3 (2) \quad \frac{3}{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره رسم نمودار سرعت-زمان در حل بسیاری از تست های حرکت شناسی به ما کمک می کند. در این جا، یک بار دیگر کارایی روابط

هندسه در نمودارهای حرکت شناسی را می بینید.

درس نامه ••

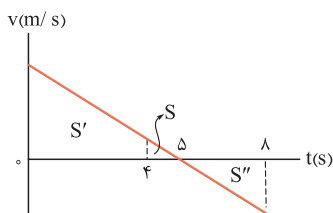
چند ویژگی از نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

(۱) با توجه به این که معادله سرعت در این نوع حرکت، از درجه اول می باشد، نمودار آن به صورت یک خط شیب دار است و شیب آن، شتاب متحرک را نشان می دهد.

(۲) نقطه شروع این نمودار روی محور V، سرعت اولیه (v_0) را نشان می دهد.

(۳) قدرمطلق مساحت سطح بین این نمودار و محور زمان، مسافت پیموده شده در بازه زمانی مورد نظر را نشان می دهد.

(۴) در لحظه ای که جهت حرکت متحرک تغییر می کند (سرعت صفر می شود)، این نمودار، محور t را قطع می کند.



پاسخ تشریحی گام اول: نمودار سرعت - زمان این متحرک را در ۸ ثانیه اول حرکت رسم

می کنیم. این نمودار به صورت یک خط شیب دار است که محور را در لحظه $t = 5 \text{ s}$ قطع می کند.

می توانیم نمودار را با شیب مثبت یا شیب منفی رسم کنیم. این موضوع تأثیری در جواب سؤال ما

ندارد. در این جا نمودار را با شیب منفی رسم می کنیم:

سطح زیر نمودار، در بازه زمانی ۴ s تا ۵ s را با S نشان می دهیم؛ مساحت سطح زیر نمودار در

بازه های زمانی ۰ s تا ۴ s و ۵ s تا ۸ s را نیز به ترتیب با S' و S'' نمایش می دهیم.

گام دوم: می دانیم نسبت مساحت های دو مثلث متشابه، برابر با توان دوم نسبت تشابه آنها است؛ بر این اساس، مساحت های S' و S'' را

$$\frac{S}{S+S'} = \left(\frac{5-4}{5-0}\right)^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow S+S' = 25S \Rightarrow S' = 24S$$

بر حسب S به دست می آوریم:

$$\frac{S''}{S} = \left(\frac{8-5}{5-4}\right)^2 = 9 \Rightarrow S'' = 9S$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام سوم: نسبت مسافت طی شده توسط متحرک در ۴ ثانیه اول (l_1) به مسافت طی شده توسط آن در ۴ ثانیه دوم (l_2) را حساب می‌کنیم:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{S'}{S+S''} = \frac{24S}{S+9S} = \frac{24S}{10S} = \frac{12}{5}$$

تست و پاسخ ۱۷۵

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^2 - 12t + 10$ است. حداقل تندی متوسط متحرک در یک بازه زمانی دلخواه ۴ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

(۱) معادله مکان - زمان و معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

مکان اولیه (m) زمان (s) شتاب (m/s^2)

مکان متحرک (m) سرعت اولیه (m/s)

$$v = a t + v_0$$

شتاب (m/s^2) سرعت اولیه (m/s)

سرعت (m/s) زمان (s)

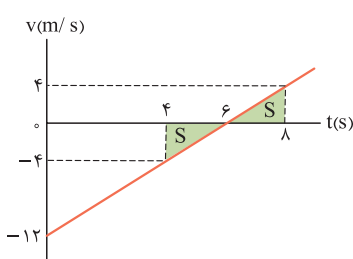
(۲) حداقل تندی متوسط متحرک در یک بازه زمانی معین Δt به ازای حداقل مسافت طی شده در این بازه به دست می‌آید. اگر تندی متحرک در لحظه t' به صفر برسد، متحرک باید $\frac{\Delta t}{2}$ از بازه زمانی را قبل از لحظه t' و $\frac{\Delta t}{2}$ بقیه را بعد از لحظه t' بپیماید.

گام اول: معادله سرعت متحرک را به دست می‌آوریم و لحظه‌ای که سرعت آن به صفر می‌رسد را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = t^2 - 12t + 10 \\ x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} a = 1 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2, v_0 = -12 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 12$$

$$v = 0 \Rightarrow 0 = 2t - 12 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$



گام دوم: حداقل تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $\Delta t = 4 \text{ s}$ زمانی حاصل می‌شود که ۲ s از آن قبل از لحظه $t = 6 \text{ s}$ و ۲ s بعدی آن، بعد از لحظه $t = 6 \text{ s}$ باشد.

$$v = 2t - 12 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 2 \times 4 - 12 = -4 \text{ m/s} \\ t = 8 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 2 \times 8 - 12 = 4 \text{ m/s} \end{cases}$$

گام سوم: مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی ۴ s تا ۶ s را به دست آورده و تندی متوسط متحرک را در این بازه زمانی حساب می‌کنیم:

$$l = S + S = 2S \xrightarrow{S = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \text{ m}} l = 2 \times 4 = 8 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{8 \text{ m}}{4 \text{ s}} \rightarrow s_{av} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s}$$

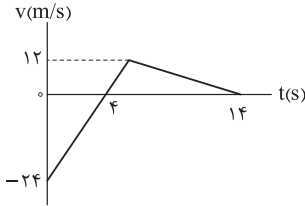


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

تست و پاسخ ۱۷۶

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی ای که متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند و در حال نزدیک شدن به مکان اولیه خود است، اندازه جابه‌جایی آن چند متر است؟



- (۱) ۶۰
(۲) ۴۸
(۳) ۲۴
(۴) ۱۲

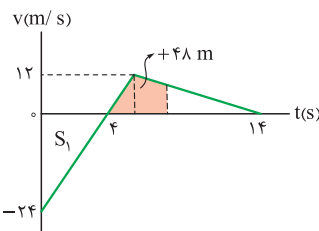
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در حل تست‌های مربوط به نمودار سرعت-زمان، به مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان توجه خاصی داشته باشید.

درس نامه متحرک زمانی به مکان اولیه خود بر می‌گردد که جابه‌جایی آن برابر صفر باشد؛ یعنی $\Delta x = 0$.

پاسخ تشریحی

جابه‌جایی این متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

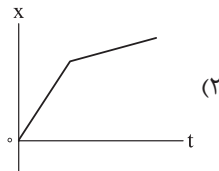
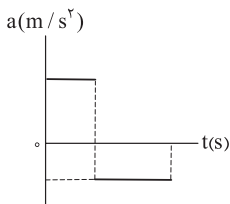


$$S_1 = |\Delta x_1| \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{4(-24)}{2} = -48 \text{ m}$$

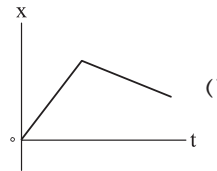
بنابراین زمانی که متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند، یعنی سرعت آن مثبت است، باید ۴۸ m جابه‌جا شود تا جابه‌جایی کل آن به صفر برسد.

تست و پاسخ ۱۷۷

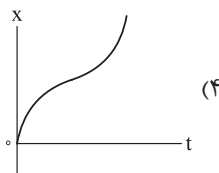
نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. نمودار مکان - زمان آن به صورت کدام شکل می‌تواند باشد؟



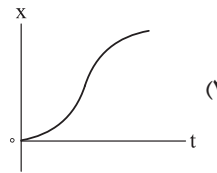
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این هم یک نمونه از تست‌های حرکت‌شناسی است که در آن، یکی از نمودارهای مربوط به حرکت، داده شده و نمودار دیگری بر اساس آن، خواسته می‌شود.

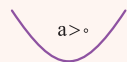
درس نامه

وقتی نمودار شتاب - زمان یک متحرک به صورت خطی افقی، موازی با محور زمان است، شتاب حرکت ثابت است. در هر بازه زمانی که شتاب حرکت ثابت باشد، معادله مکان متحرک از درجه دوم بوده و نمودار مکان - زمان آن به صورت قسمتی از یک سهمی است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک



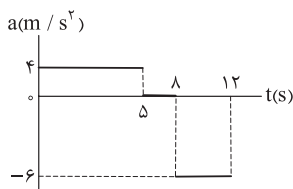
اگر گودی این سهمی روبه بالا باشد، شتاب مثبت است.

اگر گودی این سهمی روبه پایین باشد، شتاب منفی است.

پاسخ تشریحی با توجه به متن درس نامه، در مرحله اول حرکت که شتاب ثابت و مثبت است، نمودار مکان - زمان باید بخشی از یک سهمی و دارای گودی روبه بالا باشد. اما در مرحله دوم حرکت که شتاب ثابت و منفی است، نمودار مکان - زمان باید بخشی از یک سهمی و دارای گودی روبه پایین باشد. بنابراین **۳** درست است.

تست و پاسخ ۱۷۸

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 10$ s فاصله متحرک از مکان اولیه خود بیشینه باشد، در بازه زمانی ای متحرک در جهت محور X حرکت می کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟



۵ / ۲ (۱)

۵ / ۸ (۲)

۷ / ۲۵ (۳)

۸ / ۲۵ (۴)

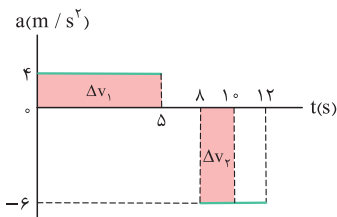
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تست با یک ایده نو طراحی شده است. جزئیات حل آن را به دقت دنبال کنید.

درس نامه

مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، در هر بازه زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه زمانی است. ($S = \Delta v$) مساحت سطحی را که زیر محور زمان است، با علامت منفی و مساحت سطحی را که بالای محور زمان است، با علامت مثبت در نظر می گیریم.

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور t، تغییرات سرعت در بازه زمانی ۰ s تا ۱۰ s را به دست می آوریم:

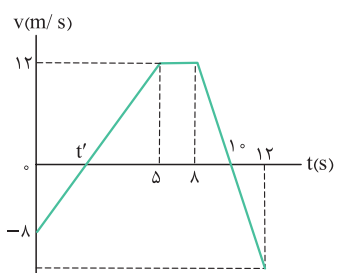


$$\Delta v_1 = (5 - 0) \cdot 4 = 20 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = (10 - 8) \cdot (-6) = -12 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 20 + (-12) = 8 \text{ m/s}$$

گام دوم: نمودار سرعت - زمان متحرک را در بازه زمانی ۰ s تا ۱۲ s رسم می کنیم. از آن جا که در لحظه $t = 10$ s فاصله متحرک از مکان اولیه خود بیشینه است، متحرک باید در لحظه $t = 10$ s تغییر جهت بدهد؛ یعنی سرعت آن صفر شود. در بازه زمانی ۰ s تا ۸ s سرعت متحرک 12 m/s کاهش یافته و به صفر رسیده است. یعنی بیشینه سرعت متحرک 12 m/s است.



$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=5s]{v=12m/s, a=4m/s^2} 12 = 4 \times 5 + v_0 \Rightarrow v_0 = -8 \text{ m/s}$$

گام سوم: در بازه زمانی $(5 - t')$ سرعت متحرک 12 m/s افزایش یافته است. پس می توان نوشت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[a=4m/s^2, \Delta v=12-0=12m/s]{\Delta t=5-t'} 4 = \frac{12}{5-t'} \Rightarrow 5-t'=3 \Rightarrow t'=2 \text{ s}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام چهارم: این متحرک در بازه زمانی ۲s تا ۱۰s در جهت محور X حرکت می‌کند. با استفاده از مساحت زیر نمودار $v-t$ مسافت طی شده در این بازه را به دست می‌آوریم:

$$l = S_{\text{دو زنگه}} = \frac{[(10-2) + (8-5)] \times 12}{2} = 11 \times 6 = 66 \text{ m}$$

و در پایان، تندی متوسط متحرک در این بازه زمانی را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{av}} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{66}{10-2} = \frac{66}{8} = 8.25 \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۱۷۹

خودرویی در کنار جاده ایستاده است. در لحظه‌ای یک موتورسوار با سرعت ثابت 90 km/h از کنار آن می‌گذرد. در همین لحظه، خودرو با شتاب ثابت 2 m/s^2 ، در جهت حرکت موتورسوار، شروع به حرکت می‌کند. خودرو پس از طی مسافت چند متر به موتورسوار می‌رسد؟

۴۰۵۰ (۴)

۲۰۲۵ (۳)

۶۲۵ (۲)

۳۱۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش‌های دوره‌های آخر فصل ۱ کتاب فیزیک ۳ طراحی شده است. در سال‌های اخیر همیشه تعدادی از تست‌های کنکور، دقیقاً از پرسش‌ها و تمرین‌های کتاب درسی برداشت شده‌اند.

درس نامه

$$x = vt + x_0$$

(۱) معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

X: مکان متحرک در لحظه t (m)

X₀: مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظه t = 0 (m)

v: سرعت متحرک (m/s)

t: زمان (s)

(۲) هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه، معادله مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

پاسخ تشریحی گام اول: معادله مکان - زمان خودرو (۱) و موتورسوار (۲) را می‌نویسیم و آن‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای که به هم برسند دو متحرک را به دست آوریم. باید توجه داشت که برای موتورسوار، معادله حرکت با سرعت ثابت و برای خودرو، معادله حرکت با شتاب ثابت به کار می‌رود.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = vt + x_0 \xrightarrow{v_0=0, x_0=0} \frac{1}{2} \times 2t^2 = 25t \Rightarrow t=0, t=25 \text{ s}$$

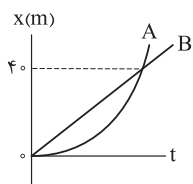
لحظه $t=0$ مربوط به شروع حرکت و لحظه $t=25 \text{ s}$ مربوط به زمانی است که خودرو و موتورسوار، دوباره به هم می‌رسند.

گام دوم: اگر زمان به دست آمده را در هر یک از معادله‌های x_1 یا x_2 قرار دهیم، مسافت طی شده توسط خودرو تا رسیدن به موتورسوار به دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{a=2 \text{ m/s}^2, t=25 \text{ s}} x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times (25)^2 = 625 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۱۸۰

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور X حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. شتاب متحرک A ثابت و تندی آن در مبدأ زمان برابر صفر است. در لحظه‌ای که تندی دو متحرک برابر می‌شود، فاصله آن‌ها از یکدیگر چند متر است؟



۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

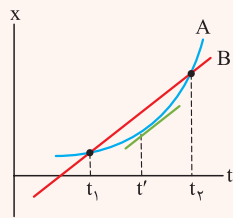
۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

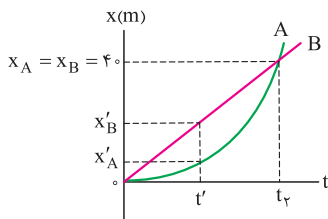


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک



درس نامه ●● اگر نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B (خط راست و A قسمتی از یک سهمی) در دو لحظه t_1 و t_2 یکدیگر را قطع کنند، سرعت متحرک A در لحظه $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر بزرگی سرعت متوسط بین این دو لحظه و برابر بزرگی سرعت متحرک B است.



پاسخ تشریحی گام اول: لحظه‌ای را که دو متحرک دوباره به هم می‌رسند ($x_A = x_B$) با t نشان می‌دهیم. در این صورت با توجه به درس‌نامه، در لحظه $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$ تندی دو متحرک، برابر می‌شود. مکان دو متحرک در این لحظه را با x'_A و x'_B نشان می‌دهیم. (توجه کنید که در این جا چون سرعت همواره مثبت است، تندی و سرعت هر یک از دو متحرک یکسان هستند).

گام دوم: متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند. پس سرعت متوسط آن در تمام بازه‌های زمانی، یکسان است. از این جا می‌توانیم x'_B را حساب کنیم:

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{x_B - 0}{t_2 - 0} = \frac{x'_B - 0}{t' - 0} \quad \frac{x_B = 40 \text{ m}}{t_2 = \frac{1}{2} t_2} \rightarrow \frac{40}{t_2} = \frac{x'_B}{\frac{1}{2} t_2} \Rightarrow x'_B = 20 \text{ m}$$

گام سوم: در لحظه $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$ تندی دو متحرک با هم برابر است:

$$v'_A = v_B \Rightarrow at' + v_{0,A} = \frac{x_B}{t_2} \xrightarrow{t' = \frac{t_1 + t_2}{2}} a \times \frac{t_2}{2} = \frac{40}{t_2} \Rightarrow at_2^2 = 80 \text{ m}$$

اکنون مکان متحرک A را در لحظه t' پیدا می‌کنیم:

$$x'_A = \frac{1}{2} a t'^2 + v_{0,A} t' + x_{0,A} = \frac{1}{2} a \left(\frac{t_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} a t_2^2 \xrightarrow{at_2^2 = 80 \text{ m}} x'_A = \frac{1}{8} \times 80 = 10 \text{ m}$$

$$x'_B - x'_A = 20 - 10 = 10 \text{ m}$$

در پایان فاصله دو متحرک در لحظه t' را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۱۸۱

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h در مبدأ زمان رها می‌شود. اندازه جابه‌جایی گلوله در n ثانیه سوم، چند برابر اندازه جابه‌جایی آن در n ثانیه دوم است؟ ($h > \frac{9}{4} gn^2$)

$$\frac{9n}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5n}{3} \quad (3)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره حرکت سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت محسوب می‌شود. پس وقتی حرکت با شتاب ثابت روی محور x را به خوبی یاد گرفته باشید، در حرکت سقوط آزاد هم مشکلی نخواهید داشت. مثلاً همین تست، یکی از سؤال‌های کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ ریاضی است که با تغییراتی جزئی، تبدیل به یک تست از سقوط آزاد شده است.

درس نامه ●●

در سقوط آزاد یک جسم (بدون سرعت اولیه)، جابه‌جایی آن در n ثانیه m حرکت، از رابطه زیر، به دست می‌آید:

$$\Delta y = (m - 0 / 5) g n^2$$

\downarrow جابه‌جایی (m) \downarrow شتاب گرانش (m/s^2)

پاسخ تشریحی نسبت اندازه جابه‌جایی گلوله در n ثانیه سوم به اندازه جابه‌جایی آن در n ثانیه دوم برابر است با:

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta y_2} = \frac{(3 - 0 / 5) g n^2}{(2 - 0 / 5) g n^2} = \frac{2 / 5}{1 / 5} = \frac{5}{3}$$

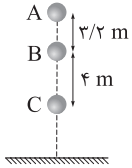


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

تست و پاسخ ۱۸۲

در شکل زیر، در شرایط خلأ، گلوله‌ای از نقطه A رها می‌شود. اندازه سرعت متوسط گلوله در بازه زمانی‌ای که از نقطه B به نقطه C می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



۴ (۱)

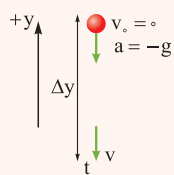
۵ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه



(۱) در سقوط آزاد، تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم، وزن آن است. اگر جهت مثبت محور y را روبه بالا در نظر بگیریم، برای جسمی که از مبدأ محور رها می‌شود می‌توان نوشت:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

معادله مکان - زمان:

$$v = -g t$$

معادله سرعت - زمان:

$$v^2 = -2 g \Delta y$$

معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان):

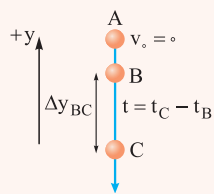
$$v_{av} = \frac{v}{2}$$

معادله سرعت متوسط:

y : مکان جسم (m) g : شتاب گرانش (m/s^2) t : زمان (s)

v : سرعت (m/s) v_{av} : سرعت متوسط (m/s)

(۲) هنگام نوشتن معادلات سقوط آزاد بین دو نقطه دلخواه B و C در طول مسیر داریم:



$$\Delta y_{BC} = -\frac{1}{2} g t^2 + v_B t$$

$$v_C = -g t + v_B$$

$$v_C^2 - v_B^2 = -2 g \Delta y_{BC}$$

$$v_{av} = \frac{v_B + v_C}{2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی، سرعت گلوله را در نقاط B و C به دست می‌آوریم:

$$v_B^2 = -2g(\Delta y_{AB}) \xrightarrow{\frac{g=10 \text{ m/s}^2}{\Delta y_{AB}=-3/2 \text{ m}}} v_B^2 = -2 \times 10 \times (-3/2) = 64 \Rightarrow v_B = -8 \text{ m/s}$$

$$v_C^2 = -2g(\Delta y_{AC}) \xrightarrow{\frac{g=10 \text{ m/s}^2}{\Delta y_{AC}=-7/2 \text{ m}}} v_C^2 = -2 \times 10 \times (-7/2) = 144 \Rightarrow v_C = -12 \text{ m/s}$$

گام دوم: اندازه سرعت متوسط گلوله در فاصله B تا C را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_B + v_C}{2} \xrightarrow{\frac{v_B=-8 \text{ m/s}}{v_C=-12 \text{ m/s}}} v_{av} = \frac{-8 + (-12)}{2} = -10 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}| = 10 \text{ m/s}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

تست و پاسخ ۱۸۳

در شرایط خلأ گلوله‌ای از ارتفاع h رها می‌شود. اگر گلوله در مدت 3 s، از ارتفاع 140 متری به ارتفاع 50 متری سطح زمین برسد، 2 s قبل از رسیدن به سطح زمین، از ارتفاع چند متری عبور می‌کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)

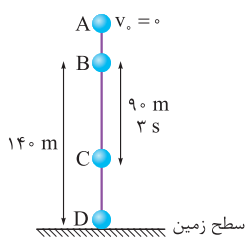
پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

اگر در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h رها شود و کل زمان سقوط آن تا لحظه رسیدن به زمین t ثانیه باشد، مسافتی را که در n ثانیه آخر حرکت طی می‌کند (l) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$l = \frac{1}{2} g n (2t - n)$$

g : شتاب گرانش (m/s^2)



گام اول: معادله جابه‌جایی - زمان را بین دو نقطه B و C می‌نویسیم تا v_B را به دست آوریم:

$$\Delta y_{BC} = -\frac{1}{2} g t_{BC}^2 + v_B \times t_{BC} \xrightarrow[t_{BC}=3s]{g=10 \text{ m/s}^2} -90 = -\frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 + v_B \times 3$$

$$\Rightarrow -90 = -45 + 3v_B \Rightarrow v_B = -\frac{45}{3} = -15 \text{ m/s}$$

گام دوم: معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) را بین دو نقطه A و B می‌نویسیم و فاصله A تا B را حساب می‌کنیم:

$$v_B^2 - v_A^2 = -2g \Delta y_{AB} \xrightarrow[v_A=0, v_B=-15 \text{ m/s}]{g=10 \text{ m/s}^2} (-15)^2 = -2(10) \Delta y_{AB} \Rightarrow \Delta y_{AB} = \frac{225}{-20} = -11.25 \text{ m}$$

گام سوم: کل ارتفاع سقوط از A تا D را حساب می‌کنیم و از آنجا کل زمان سقوط را به دست می‌آوریم:

$$AD = AB + BD \Rightarrow AD = 11.25 + 140 = 151.25 \text{ m}$$

$$\Delta y_{AD} = -\frac{1}{2} g t_{AD}^2 \xrightarrow[\Delta y_{AD} = -151.25 \text{ m}]{g=10 \text{ m/s}^2} -151.25 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t_{AD}^2 \Rightarrow 30.25 = t_{AD}^2 \Rightarrow t_{AD} = 5.5 \text{ s}$$

گام چهارم: مسافتی را که گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت خود پیموده است (l) پیدا می‌کنیم:

$$l = \frac{1}{2} g n (2t - n) \xrightarrow[t=t_{AD}=5.5 \text{ s}, n=2]{g=10 \text{ m/s}^2} l = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 \times (2 \times 5.5 / 5 - 2) \Rightarrow l = 10 \times (9) = 90 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۱۸۴

ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین، 32 m بیشتر از ارتفاع نقطه B نسبت به سطح زمین است. در لحظه‌ای، یک گلوله از نقطه A و $1/6$ s بعد، گلوله دیگری از نقطه B رها می‌شود. اگر دو گلوله با هم به سطح زمین برسند، ارتفاع نقطه A نسبت به سطح زمین چند متر است؟

($g = 10 \text{ m/s}^2$) و مقاومت هوا ناچیز است.

۵۴/۲ (۴)

۴۹/۲ (۳)

۴۴/۲ (۲)

۳۹/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه در معادلات حرکت سقوط آزاد، اگر ارتفاع سقوط را با h و جابه‌جایی را با Δy نشان دهیم می‌توان نوشت:

$$\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{\Delta y = -h} h = \frac{1}{2} g t^2$$

بر این اساس معادله جابه‌جایی - زمان (بدون سرعت اولیه) به صورت زیر نیز به کار می‌رود:

t : زمان سقوط (s)

g : شتاب گرانش (m/s^2)

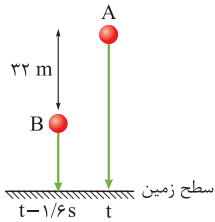
h : ارتفاع سقوط (m)



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

پاسخ تشریحی گام اول: معادله جابه‌جایی - زمان را برای هر یک از دو گلوله می‌نویسیم. اگر زمان سقوط گلوله A را با t نشان دهیم، زمان سقوط گلوله B برابر با $t - 1/6$ s خواهد بود.



$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \begin{cases} h_A = \frac{1}{2} g t^2 \\ h_B = \frac{1}{2} g (t - 1/6)^2 \end{cases}$$

گام دوم: اکنون زمان سقوط گلوله A را به دست می‌آوریم:

$$h_A - h_B = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 - \left(\frac{1}{2} \times 10 \times (t - 1/6)^2 \right) = 5t^2 - 5(t - 1/6)^2 \Rightarrow 32 = 5t^2 - 5(t - 1/6)^2$$

$$\Rightarrow 32 = 5t^2 - 5(t^2 - 2/2t + 2/56) \Rightarrow 32 = 5t^2 - 5t^2 + 5t - 12/8 \Rightarrow 32 + 12/8 = 5t \Rightarrow t = \frac{44/8}{5} = 2/8 \text{ s}$$

گام سوم: ارتفاع سقوط گلوله A را حساب می‌کنیم:

$$h_A = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow[t=2/8 \text{ s}]{g=10 \text{ m/s}^2} h_A = \frac{1}{2} \times 10 \times (2/8)^2 = 5 \times 7/84 = 39/2 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۱۸۵

در شرایط خلأ، از نقطه‌ای به ارتفاع ۱۲۵ m نسبت به سطح زمین، دو گلوله به فاصله زمانی t رها می‌شوند. اگر بیشینه فاصله دو گلوله در حین حرکت آن‌ها ۳۶/۸ m باشد، t برابر چند ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۱/۸ (۴)

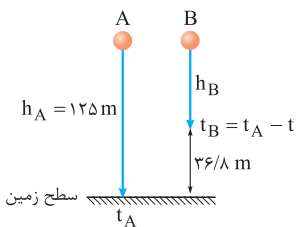
۱/۲ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌نامه وقتی دو گلوله به فاصله زمانی معین، از ارتفاع یکسانی نسبت به سطح زمین رها می‌شوند تا سقوط آزاد کنند، فاصله بین آن‌ها به تدریج بیشتر می‌شود، بنابراین بیشینه این فاصله، در لحظه‌ای خواهد بود که گلوله اول به سطح زمین برسد.



پاسخ تشریحی گام اول: فرض می‌کنیم گلوله A را رها کرده و t ثانیه بعد، گلوله B را رها کنیم. بر این اساس، اگر زمان سقوط گلوله A را t_A و زمان سقوط گلوله B را t_B در نظر بگیریم می‌توان نوشت:

$$t_B = t_A - t$$

زمانی که گلوله A به زمین می‌رسد، ارتفاع سقوط گلوله B برابر است با:

$$h_B = h_A - 36/8 \xrightarrow{h_A=125 \text{ m}} h_B = 125 - 36/8 = 88/2 \text{ m}$$

گام دوم: زمان سقوط گلوله A را به کمک معادله جابه‌جایی - زمان، حساب می‌کنیم:

$$h_A = \frac{1}{2} g t_A^2 \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{h_A=125 \text{ m}} 125 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_A^2 \Rightarrow t_A^2 = \frac{125}{5} = 25 \Rightarrow t_A = 5 \text{ s}$$

بنابراین زمان سقوط گلوله B برابر است با:

$$t_B = t_A - t \xrightarrow{t_A=5 \text{ s}} t_B = 5 - t$$

گام سوم: معادله جابه‌جایی - زمان را برای گلوله B نیز می‌نویسیم و زمان سقوط t_B را پیدا می‌کنیم:

$$h_B = \frac{1}{2} g t_B^2 \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{h_B=88/2 \text{ m}} 88/2 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_B^2 \Rightarrow t_B^2 = \frac{88/2}{5} = 17/64 \Rightarrow t_B = \sqrt{17/64} = 4/2 \text{ s}$$

در پایان زمان t را به دست می‌آوریم:

$$t_B = 5 - t \xrightarrow{t_B=4/2 \text{ s}} 4/2 = 5 - t \Rightarrow t = 0/8 \text{ s}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

شیمی دوازدهم

تست و پاسخ ۱۸۶

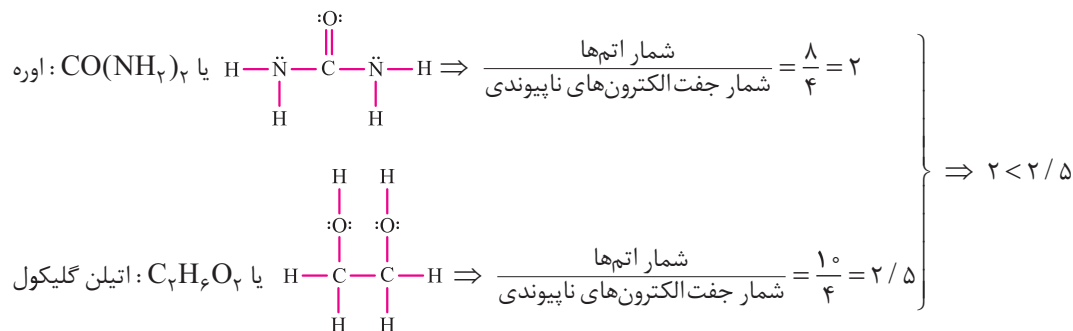
کدام مطلب درست است؟

- (۱) در دهه‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی و نرخ رشد آن در نواحی برخوردار، نسبت به نواحی کم‌برخوردار بیشتر بوده است.
- (۲) در فرایند انحلال روغن زیتون در هگزان همانند فرایند انحلال نمک خوراکی در آب، ماده حل‌شونده ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.
- (۳) شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول وازلین را می‌توان $\frac{3}{4}$ برابر شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول بنزین در نظر گرفت.
- (۴) نسبت شمار اتم‌ها به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در ساختار اوره، کوچک‌تر از این مقدار در ساختار اتیلن گلیکول است.



پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی با توجه به ساختار لوویس و فرمول شیمیایی مولکول‌های اوره و اتیلن گلیکول، خواهیم داشت:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در دهه‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی در نواحی برخوردار، نسبت به نواحی کم‌برخوردار بیشتر بوده است، ولی نرخ رشد امید به زندگی در نواحی کم‌برخوردار، نسبت به نواحی برخوردار، بیشتر بوده است؛ (شیب نمودار امید به زندگی در نواحی کم‌برخوردار از نواحی برخوردار، بیشتر است).

۲) نمک خوراکی (NaCl) یک ترکیب یونی است و هنگام انحلال در آب، ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ نمی‌کند؛ زیرا یون‌های سازنده آن، تفکیک و آبیوشیده می‌شوند، اما روغن زیتون ($C_{57}H_{104}O_6$) یک ترکیب مولکولی است و به صورت مولکولی در هگزان حل می‌شود؛ یعنی ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.

۳

نکته شمار پیوندهای اشتراکی در همه هیدروکربن‌ها را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(1 \times \text{تعداد اتم‌های هیدروژن}) + (4 \times \text{تعداد اتم‌های کربن})}{2}$$

فرمول مولکولی وازلین و بنزین را به ترتیب می‌توان به صورت $C_{25}H_{52}$ و C_8H_{18} در نظر گرفت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{شمار پیوندهای اشتراکی در } C_{25}H_{52} = \frac{(25 \times 4) + (52 \times 1)}{2} = 76 \\ \text{شمار پیوندهای اشتراکی در } C_8H_{18} = \frac{(8 \times 4) + (18 \times 1)}{2} = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در وازلین}}{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در بنزین}} = \frac{76}{25} = 3.04$$

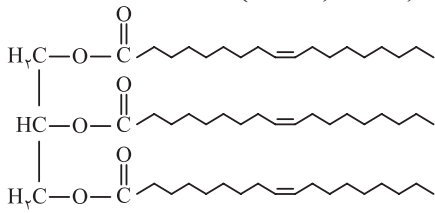


پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۱۸۷

کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ استر بلندزنجیر داده شده، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



(الف) تفاوت جرم مولی الکل سازندهٔ استر مورد نظر با اتانول، برابر ۴۸ است.

(ب) از واکنش یک مول از آن با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، ۳ مول صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{17}H_{34}COONa$ تولید می‌شود.

(پ) این استر سه‌عاملی را می‌توان روغن زیتون در نظر گرفت.

(ت) واکنش‌پذیری این استر بلندزنجیر در شرایط یکسان از چربی موجود

در کوهان شتر، بیشتر است.



(۴) الف - ت

(۳) پ - ت

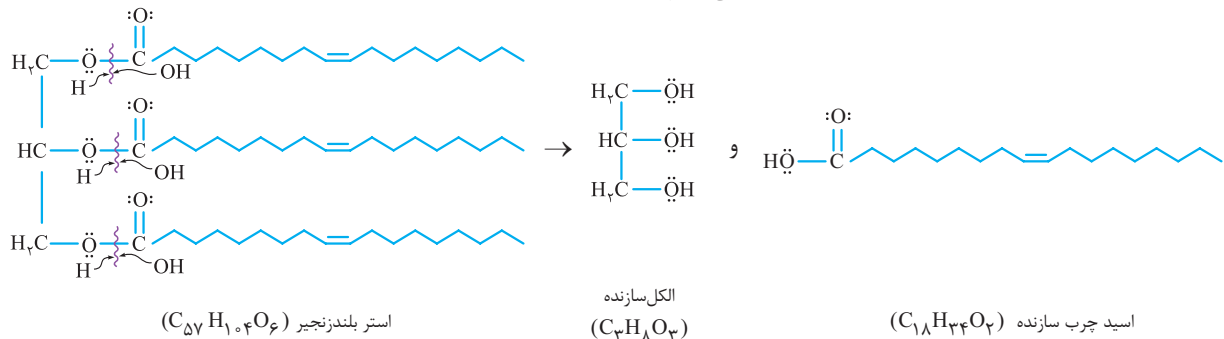
(۲) ب - پ

(۱) الف - ب

پاسخ: گزینه ۳

«پاسخ تشریحی» عبارتهای «پ» و «ت» دربارهٔ استر بلندزنجیر داده شده، درست‌اند.

ابتدا الکل و اسید چرب سازندهٔ استر مورد نظر را تعیین می‌کنیم:

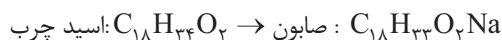


بررسی عبارتهای:

(الف) فرمول مولکولی اتانول، C_2H_6O است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$C_2H_6O \text{ و } C_3H_8O_3 : \text{ تفاوت جرم مولی } C_3H_8O_3 - C_2H_6O = CH_6O_2 = 12 + (2 \times 1) + (2 \times 16) = 46 g.mol^{-1}$$

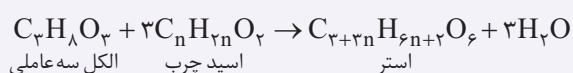
(ب) هر مول از استر بلندزنجیر مورد نظر دارای ۳ مول گروه عاملی استری است که با ۳ مول سدیم هیدروکسید (NaOH) واکنش داده و ۳ مول صابون جامد تولید می‌کند که تفاوت صابون جامد تولید شده با اسید چرب سازندهٔ استر مورد نظر در این است که در صابون جامد تولید شده، یک اتم سدیم به جای هیدروژن گروه کربوکسیل قرار می‌گیرد:



(پ) فرمول شیمیایی ترکیب داده شده مانند مولکول روغن زیتون، $C_{57}H_{110}O_6$ است.

(ت) استر بلندزنجیر مورد نظر به دلیل وجود پیوندهای دوگانه در ساختار خود، ترکیبی سیرنشده و چربی موجود در کوهان شتر با فرمول شیمیایی $C_{57}H_{110}O_6$ ، ترکیبی سیر شده است؛ بنابراین واکنش‌پذیری این استر در شرایط یکسان از چربی کوهان شتر، بیشتر است.

نکته اگر اسیدهای چرب سازندهٔ استر، یکسان و زنجیر هیدروکربنی در آن‌ها سیر شده باشد (گروه آلکیل)، می‌توان نوشت:



در معادله بالا، رابطهٔ میان شمار اتم‌های کربن و هیدروژن استر را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} \text{شمار اتم‌های کربن} &= 3 + 3n = x \\ \text{شمار اتم‌های هیدروژن} &= 6n + 2 = y \end{aligned} \Rightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{6} \Rightarrow y = 2x - 4$$

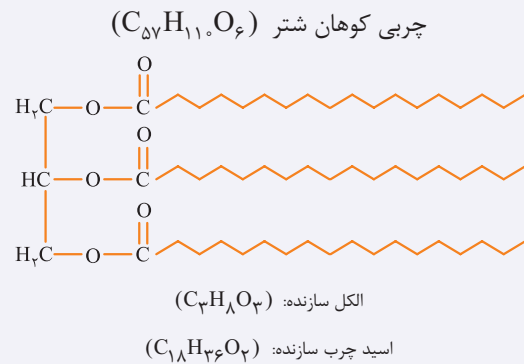
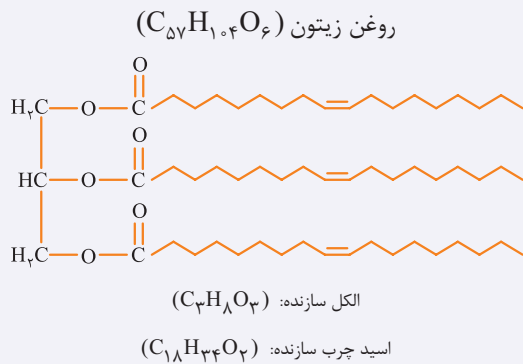
فرمول کلی استرهای سنگین (به شرط R: گروه آلکیل): $C_xH_{2x-4}O_6$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

فرمول چربی کوهان شتر ($C_{57}H_{110}O_6$) از رابطه $C_xH_{2x-4}O_6$ پیروی می‌کند؛ در نتیجه سیر شده است. (پیوند دوگانه $C=C$ ندارد).
 • ساختار روغن زیتون و چربی کوهان شتر در زیر آورده شده است:



تست و پاسخ

چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- ممکن است در ساختار یک صابون، عنصر فلزی وجود نداشته باشد.
- پاک‌کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند.
- صابون از طریق بخش قطبی جزء آنیونی خود با مولکول‌های آب پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.
- شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، $1/8$ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده‌های صابونی است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

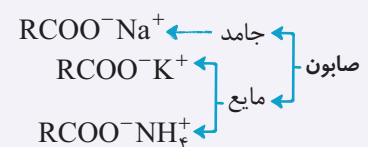
پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم و سوم نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول:

نکته به نمک اسیدهای چرب، صابون می‌گویند. صابون‌های جامد، نمک سدیم اسید چرب و صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم

اسید چرب هستند؛ پس اگر در ساختار اسیدهای چرب به جای هیدروژن متصل به اتم اکسیژن ($-C(=O)-O-H$)، کاتیون K^+ ، Na^+ یا NH_4^+ قرار گیرد، صابون یا همان نمک اسید چرب به دست می‌آید.



یک نوع صابون مایع، نمک آمونیوم اسید چرب با فرمول عمومی $RCOO^-NH_4^+$ است که زنجیره هیدروکربنی آن از اتم‌های نافلزی کربن و هیدروژن تشکیل شده است و در ساختار آن، عنصر فلزی وجود ندارد.

عبارت دوم: پاک‌کننده‌های صابونی همانند پاک‌کننده‌های غیرصابونی با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهند؛ بلکه هر دو پاک‌کننده براساس برهم‌کنش‌های میان ذره‌ها عمل می‌کنند.

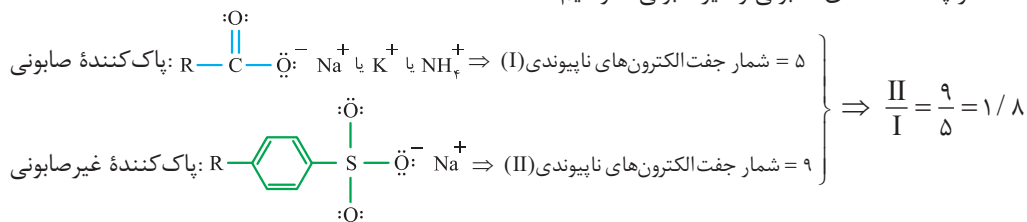
عبارت سوم: صابون از طریق بخشی قطبی جزء آنیونی خود (COO^-)، با مولکول‌های آب جاذبه یون-دوقطبی (نه پیوند اشتراکی!) و از طریق بخش ناقطبی جزء آنیونی خود (R) با مولکول‌های چربی، جاذبه وان‌دروالسی برقرار می‌کند.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

عبارت چهارم: با توجه به ساختار پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، خواهیم داشت:



تست و پاسخ ۱۸۹

محلول و کلونید

با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به دو مخلوط پایدار هستند، کدام مطلب نادرست است؟



۱) آب‌قند، نمونه‌ای از مخلوط (I) و شیر، نمونه‌ای از مخلوط (II) است.

۲) مخلوط آب و روغن از نوع (I) است که با افزودن صابون به نوع (II) تبدیل می‌شود.

۳) مخلوط (II) برخلاف مخلوط (I)، ناهمگن است، اما ذره‌های سازنده هیچ‌کدام از این دو مخلوط با گذشت زمان، ته‌نشین نمی‌شوند.

۴) ذرات سازنده مخلوط (II)، درشت‌تر از ذرات سازنده مخلوط (I) هستند.

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

مقایسه سه دسته از مخلوط‌ها در جدول زیر آورده شده است:

ویژگی	نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلونید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است / ته‌نشین می‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا	
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلوده، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند و آب‌نمک	

پاسخ تشریحی دو مخلوط پایدار، کلونیدها و محلول‌ها هستند. با توجه به شکل‌های داده‌شده، مخلوط (I)، محلول و مخلوط (II)، کلونید

است؛ زیرا محلول‌ها نور را عبور می‌دهند؛ در حالی که کلونیدها نور را پخش می‌کنند و مسیر عبور نور در آن‌ها مشخص است.

مخلوط آب و روغن نوعی محلول نیست، بلکه مخلوطی ناهمگن و ناپایدار است. اگر به این مخلوط، صابون اضافه کنیم، مخلوط حاصل نوعی کلونید خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آب‌قند، نمونه‌ای از محلول‌ها و شیر، نمونه‌ای از کلونیدها است.

۳) کلونید، مخلوطی ناهمگن ولی محلول، مخلوطی همگن است. هر دوی این مخلوط‌ها پایدارند و ذرات سازنده آن‌ها با گذشت زمان، ته‌نشین نمی‌شوند.

۴) ذرات سازنده کلونیدها، توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت و ذرات سازنده محلول‌ها، یون‌ها یا مولکول‌ها هستند؛ بنابراین اندازه ذرات

سازنده کلونیدها، بیشتر از اندازه ذرات سازنده محلول‌ها است.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۱۹۰

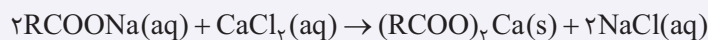
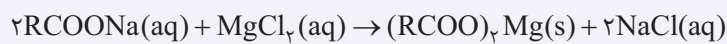
در ساختار صابونی جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، نسبت شمار اتم (های) نافلزی به اتم (های) فلزی برابر ۴۹ است. از واکنش $0/2$ مول از این صابون با مقدار کافی محلول منیزیم کلرید، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود؟ ($Mg = 24, O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

$$\begin{array}{ll} 106/8 (2) & 53/4 (1) \\ 55/8 (4) & 27/9 (3) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره اول با توجه به فرمول عمومی صابون‌های جامد، تعداد اتم‌های کربن زنجیر آلکیلی آن رو به دست بیار، سپس مطابق معادله واکنش صابون‌ها با آب سخت، جرم رسوب تشکیل شده رو محاسبه کن!

نکته صابون‌ها در آب سخت و در حضور یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} ، رسوب می‌کنند و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها کاهش می‌یابد. معادله کلی این واکنش‌ها به صورت زیر است:

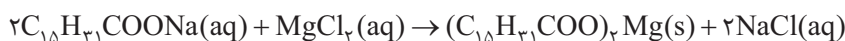


پاسخ تشریحی گام اول: فرمول عمومی صابون‌های جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $C_nH_{2n+1}COONa$ است. با توجه به نسبت داده شده در سؤال، فرمول شیمیایی صابون مورد نظر برابر است با:

$$C_nH_{2n+1}COONa \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های نافلزی (C, H, O)}}{\text{شمار اتم فلزی (Na)}} = \frac{\overset{C}{n} + \overset{H}{2n+1} + \overset{C}{1} + \overset{O}{2}}{1} = \frac{3n+4}{1} \Rightarrow 49 = \frac{3n+4}{1}$$

$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow C_{15}H_{31}COONa$ صابون جامد مورد نظر

گام دوم: در ادامه، معادله موازنه شده واکنش بیان شده در سؤال را می‌نویسیم و در نهایت با توجه به آن و شمار مول‌های صابون جامد مصرف شده، جرم رسوب تشکیل شده از واکنش را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



$$(C_{15}H_{31}COO)_2Mg: 2((16 \times 12) + (31 \times 1) + (2 \times 16)) + 24 = (2 \times 255) + 24 = 534 g.mol^{-1}$$

$$0/2 \text{ mol } C_{15}H_{31}COONa \times \frac{1 \text{ mol } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg}{2 \text{ mol } C_{15}H_{31}COONa} \times \frac{534 \text{ g } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg}{1 \text{ mol } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg}$$

$$= \frac{0/2 \times 534}{1} = 53/4 \text{ g } (C_{15}H_{31}COO)_2Mg$$

تست و پاسخ ۱۹۱

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) فرمول شیمیایی نمک حاصل از واکنش یون کلسیم با صابون جامد که زنجیر آلکیل آن ۱۴ اتم کربن دارد؛ به صورت $C_{30}H_{58}O_4Ca$ است.
 (ب) در شرایط یکسان، ارتفاع کف حاصل از صابون در آب مقطر، نسبت به ارتفاع کف حاصل از صابون در محلول منیزیم کلرید، بیشتر است.
 (پ) در شرایط یکسان، قدرت صابون در از بین بردن لکه‌های چربی روی پارچه پلی‌استری، بیشتر از پارچه نخی است.
 (ت) از صابون فسفردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

(۱) الف - پ (۲) ب - ت (۳) پ - ت (۴) الف - ب

پاسخ: گزینه ۲



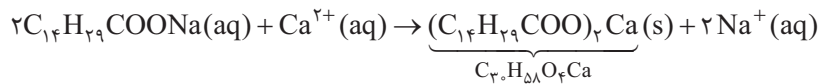
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

پاسخ تشریحی عبارتهای «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی همه عبارت‌ها:

الف) فرمول عمومی صابون جامد با n اتم کربن در زنجیر آلکیلی، به صورت $C_nH_{2n+1}COONa$ است؛ پس صابون جامد مورد نظر همان $C_{14}H_{29}COONa$ می‌باشد که با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش آن با یون کلسیم، رسوب سفیدرنگی با فرمول شیمیایی $C_{30}H_{58}O_4Ca$ در این واکنش تولید می‌شود:



ب) صابون در آب سخت یا همان آب حاوی یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} به خوبی کف نمی‌کند و قدرت پاک‌کنندگی آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین در شرایط یکسان، ارتفاع کف حاصل از صابون در آب مقطر و آب معمولی، نسبت به ارتفاع کف حاصل از صابون در محلول منیزیم کلرید که مشابه آب سخت است، بیشتر می‌باشد.

پ) میزان چسبندگی چربی روی پارچه‌های نخی، کم‌تر از پارچه‌های پلی‌استری است؛ بنابراین در شرایط یکسان، قدرت صابون در آب بین بردن لکه‌های چربی روی پارچه‌های نخی، بیشتر از پارچه‌های پلی‌استری است.

ت) از صابون گوگرددار (نه فسفردار!)، برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۱۹۲

کدام مطلب درست است؟

- از دید آرنیوس، جامدهای یونی اکسیژن‌دار، اسید به شمار می‌آیند.
- محلول مولکول‌های قطبی در آب، نوعی الکترولیت محسوب می‌شود.
- با افزایش غلظت اتیلن گلیکول در محلول آن، رسانایی الکتریکی محلول تغییری نمی‌کند.
- در دمای اتاق، ثابت یونش اسید موجود در باران معمولی از ثابت یونش هیدرویدیک اسید، بیشتر و از ثابت یونش اسیدهای مسبب ایجاد باران اسیدی، کم‌تر است.



پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) بعضی از جامدهای یونی اکسیژن‌دار مانند Na_2O که نوعی اکسید فلزی هستند، باز آرنیوس (نه اسید آرنیوس!) به شمار می‌آیند. البته برخی دیگر از جامدهای یونی اکسیژن‌دار، نه اسید آرنیوس محسوب می‌شوند و نه باز آرنیوس!

۲) لزوماً همه محلول‌های ترکیبات مولکولی قطبی در آب، الکترولیت نیستند؛ به طور مثال برخی مولکول‌های قطبی مانند متانول (CH_3OH)، اتانول (C_2H_5OH) و استون (CH_3COCH_3)، در آب کاملاً به صورت مولکولی حل شده و غیرالکترولیت به شمار می‌آیند.

۳) اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و محلول آبی آن رسانای جریان برق نیست؛ بنابراین در صورت قرارگرفتن در مدار الکتریکی (با هر غلظتی)، لامپ خاموش می‌ماند و روشنایی نخواهد داشت.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

نکته در مورد مواد الکترولیت و غیرالکترولیت، به جدول زیر توجه کنید:

نوع ماده	نحوه حل شدن در آب	رسانایی الکتریکی محلول	روشنایی لامپ در مدار الکتریکی	موارد معروف
غیرالکترولیت	کاملاً مولکولی	نارسانا	خاموش	اغلب مواد آلی مانند اتانول، شکر، اتیلن گلیکول، استون و ...
الکترولیت	الکترولیت قوی	رسانای قوی (به شرط غلظت کافی)	روشن	اسیدهای قوی (مانند HCl)، بازهای قوی (مانند KOH)، نمکها (مانند NaCl)
	الکترولیت ضعیف	رسانای ضعیف	نیمه روشن	اسیدهای ضعیف (مانند اتانویک اسید و HF)، بازهای ضعیف (مانند NH ₃)

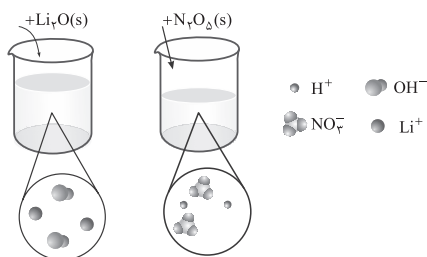
۴ اسید موجود در باران معمولی، (کربنیک اسید (H₂CO₃)) اسید ضعیف و هیدرویدیک اسید (HI) و همچنین اسیدهای مسبب ایجاد باران اسیدی، (نیتریک اسید (HNO₃) و سولفوریک اسید (H₂SO₄)) جزء اسیدهای قوی هستند؛ بنابراین در دمای اتاق، ثابت یونش H₂CO₃، کوچکتر از ثابت یونش HI، HNO₃ و H₂SO₄ می باشد.

نکته در دمای معین، هر چه ثابت یونش اسیدی بزرگتر باشد، آن اسید قوی تر است.

تست و پاسخ ۱۹۳

مطابق شکل های زیر، جرم برابری از دو نوع اکسید را به صورت جداگانه در مقدار معینی آب حل می کنیم. اگر اختلاف مجموع جرم کاتیون های تولیدشده در اثر انحلال این دو ماده با مجموع جرم آنیون های تولیدشده در اثر انحلال آن ها برابر ۱۹۴ گرم باشد، مجموع شمار مول های اولیه

اکسیدها، کدام است؟ (O = ۱۶, N = ۱۴, Li = ۷, H = ۱ : g.mol⁻¹)



۹/۲ (۱)

۴/۶ (۲)

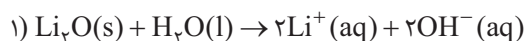
۲/۳ (۳)

۱۸/۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا فرض می کنیم که m گرم از هر یک از ترکیب های Li₂O و N₂O₅ به طور جداگانه در آب حل شده اند. در

ادامه با توجه به معادله موازنه شده واکنش های یونش اسیدها و اختلاف جرم مقادیر داده شده، مقدار m را به صورت زیر به دست می آوریم:



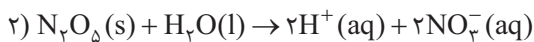
$$? \text{g Li}^+ = m \text{ g Li}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol Li}_2\text{O}}{30 \text{ g Li}_2\text{O}} \times \frac{2 \text{ mol Li}^+}{1 \text{ mol Li}_2\text{O}} \times \frac{7 \text{ g Li}^+}{1 \text{ mol Li}^+} = \frac{1}{30} \times 2 \times 7 \times m = \frac{14}{15} m \text{ g Li}^+$$

$$? \text{g OH}^- = m \text{ g Li}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol Li}_2\text{O}}{30 \text{ g Li}_2\text{O}} \times \frac{2 \text{ mol OH}^-}{1 \text{ mol Li}_2\text{O}} \times \frac{17 \text{ g OH}^-}{1 \text{ mol OH}^-} = \frac{1}{30} \times 2 \times 17 \times m = \frac{34}{15} m \text{ g OH}^-$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی



$$? \text{g H}^+ = \text{m g N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{108 \text{ g N}_2\text{O}_5} \times \frac{2 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5} \times \frac{1 \text{ g H}^+}{1 \text{ mol H}^+} = \frac{1}{54} \times \text{m} = \frac{1}{54} \text{ m g H}^+$$

$$? \text{g NO}_3^- = \text{m g N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{108 \text{ g N}_2\text{O}_5} \times \frac{2 \text{ mol NO}_3^-}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5} \times \frac{62 \text{ g NO}_3^-}{1 \text{ mol NO}_3^-} = \frac{1}{27} \times \frac{31}{54} \times \text{m} = \frac{31}{27} \text{ m g NO}_3^-$$

$$\text{مجموع جرم کاتیون‌های تولیدشده} - \text{مجموع جرم آنیون‌های تولیدشده} = (\text{g OH}^- + \text{g NO}_3^-) - (\text{g Li}^+ + \text{g H}^+)$$

$$\Rightarrow 194 = \left(\frac{17}{18} \text{m} + \frac{31}{27} \text{m}\right) - \left(\frac{7}{18} \text{m} + \frac{1}{54} \text{m}\right) \Rightarrow 194 = \frac{308}{135} \text{m} - \frac{131}{270} \text{m}$$

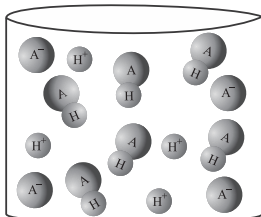
$$\Rightarrow 194 = \frac{616 - 131}{270} \text{m} \Rightarrow 194 = \frac{485}{270} \text{m} = \frac{97}{54} \text{m} \Rightarrow \text{m} = \frac{194 \times 54}{97} = 108 \text{g}$$

گام دوم: با توجه به جرم اولیه اکسیدهای مورد نظر، مجموع شمار مول‌های اولیه Li_2O و N_2O_5 را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{مول Li}_2\text{O} + \text{مول N}_2\text{O}_5 = \frac{108}{30} + \frac{108}{108} = 4/6 \text{ mol}$$

تست و پاسخ ۱۹۴

شکل زیر، محلولی از اسید ضعیف HA را در دما و حجم معین نشان می‌دهد. درجه یونش اسید HA در محلول مورد نظر، چند برابر درجه یونش محلول ۰/۲ مولار اسید ضعیف HB، با غلظت یون هیدرونیوم برابر 4×10^{-3} مول بر لیتر است؟



۲ (۱)

۲۰ (۲)

۰/۲ (۳)

۰/۰۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته برای محاسبه درجه یونش اسیدها می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده کرد:

$$1) \text{ درجه یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار یون H}^+ \text{ (یا آنیون) حاصل از اسید}}{\text{شمار مولکول‌های اسید حل شده}} = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده شده}}{\text{شمار مولکول‌های اسید حل شده}}$$

$$2) \text{ درجه یونش } (\alpha) = \frac{\text{غلظت مولار H}^+ \text{ (یا آنیون) حاصل از اسید}}{\text{غلظت مولار اسید حل شده}} = \frac{\text{غلظت مولار اسید یونیده شده}}{\text{غلظت مولار اسید حل شده}} \quad \left(\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M}\right)$$

پاسخ تشریحی گام اول: به ازای یونیده شدن هر مولکول اسید HA، ۲ یون H^+ و A^- تولید می‌شود؛ بنابراین با توجه به شکل می‌توان گفت که در این محلول، ۴ مولکول اسید HA یونیده شده و ۴ یون H^+ و ۴ یون A^- تولید کرده‌اند؛ در ضمن شمار کل مولکول‌های حل شده اسید HA برابر با ۱۰ بوده است؛ زیرا ۶ مولکول یونیده نشده از اسید HA در شکل موجود است و ۴ مولکول اسید HA یونیده شده و یون‌های حاصل از یونش آن‌ها قابل مشاهده هستند؛ پس خواهیم داشت:

$$\text{درجه یونش اسید HA} = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های اسید حل شده}} = \frac{4}{10} = 0/4$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

گام دوم: درجه یونش اسید HB را با توجه به غلظت یون هیدرونیوم تولیدشده در محلول آن، غلظت اولیه محلول اسید و رابطه درجه یونش به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\text{HB درجه یونش اسید} = \frac{[\text{H}^+]}{M} = \frac{4 \times 10^{-4}}{2} = 2 \times 10^{-2} = 0.02$$

گام سوم: نسبت درجه یونش اسید HA به درجه یونش اسید HB را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\frac{\alpha(\text{HA})}{\alpha(\text{HB})} = \frac{0.04}{0.02} = 2.0$$

تست و پاسخ ۱۹۵

ترتیب رسانایی الکتریکی محلول های زیر، در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)

(a) محلول ۲۵ درصد جرمی نیتریک اسید با چگالی ۱/۲۶ گرم بر میلی لیتر

(b) محلول ۱/۵ مولار استیک اسید با درصد یونش ۸

(c) محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید

(d) محلول ۰/۸ مولار نیترواسید با درجه یونش ۰/۲

b > a > d > c (۴)

a > c > d > b (۳)

d > a > b > c (۲)

a > d > c > b (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکات

۱) هر چه مجموع غلظت یون ها در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است.

۲) برای اسیدهای ضعیف (مانند HA)، رابطه بین غلظت یون ها با درجه یونش و غلظت اولیه محلول، به صورت زیر است:

$$[\text{H}^+] = [\text{A}^-] = M\alpha \Rightarrow 2M\alpha = \text{مجموع غلظت مولی یون ها}$$

۳) اگر درصد جرمی محلولی برابر a و چگالی آن بر حسب g.mL⁻¹ برابر d باشد، غلظت مولی آن محلول از رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}}$$

پاسخ تشریحی باید مجموع غلظت مولی یون ها را در محلول های داده شده حساب کنیم:

$$\text{a) HNO}_3 \text{ محلول مولی} = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 25 \times 1/26}{63} = 5 \text{ mol.L}^{-1}$$

از آن جا که محلول نیتریک اسید، نوعی اسید قوی تک پروتون دار است و به طور کامل در آب یونش می یابد؛ بنابراین به ازای یونیده شدن هر مول اسید HNO₃، دو مول یون (H⁺ و NO₃⁻) تولید می شود؛ پس غلظت یون های حاصل از یونش در محلول نیتریک اسید ۵ مولار، برابر ۱۰ مول بر لیتر است.



$$[\text{H}^+] = M\alpha = 1/5 \times \frac{1}{100} = 0.002 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{غلظت یون های حاصل از یونش محلول استیک اسید} = [\text{H}^+] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] \xrightarrow{[\text{H}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]}$$

$$\text{مجموع غلظت مولی یون ها} = 2[\text{H}^+] = 2 \times 0.002 = 0.004 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{c) } [\text{H}^+] = [\text{HCl}] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

از آنجا که محلول هیدروکلریک اسید، نوعی اسید قوی تک پروتون دار است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد؛ بنابراین به ازای یونیده شدن هر مول اسید HCl، دو مول یون (H^+ و Cl^-) تولید می‌شود؛ پس غلظت یون‌های حاصل از یونش در محلول هیدروکلریک اسید ۱ مولار، برابر ۲ مول بر لیتر است.



$$[H^+] = M\alpha = 0.1 \times 0.2 = 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{غلظت یون‌های حاصل از یونش محلول نیترو اسید} = [H^+] + [NO_3^-] \xrightarrow{[H^+] = [NO_3^-]}$$

$$\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = 2[H^+] = 2 \times 0.02 = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$a > c > d > b$$

$$10 \text{ mol.L}^{-1} \quad 2 \text{ mol.L}^{-1} \quad 0.04 \text{ mol.L}^{-1} \quad 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

تست و پاسخ ۱۹۶

کدام مطلب درست است؟

- ثابت تعادل، بیانی از میزان پیشرفت یک واکنش تا لحظه برقراری تعادل است و به غلظت اولیه واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وابسته است.
- در واکنش‌های تعادلی، در لحظه تعادل، سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها به صفر می‌رسد.
- ثابت ماندن غلظت مواد شرکت‌کننده در تعادل، برخلاف برابری غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، جزء ویژگی‌های واکنش تعادلی است.
- محلول کربوکسیلیک اسیدها در آب، برخلاف محلول هیدروسیانیک اسید، نمونه‌ای از یک سامانه تعادلی است.

پاسخ: گزینه ۳

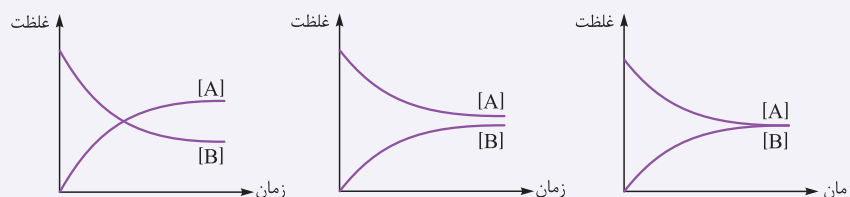
پاسخ تشریحی پس از رسیدن به تعادل، غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش ثابت می‌ماند، اما لزوماً با هم برابر نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ثابت تعادل، بیانی از میزان پیشرفت یک واکنش تا لحظه برقراری تعادل است و برای یک واکنش معین، فقط به دما وابسته است.
- در واکنش‌های تعادلی، از لحظه برقراری تعادل، سرعت مصرف یا تولید واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها با هم برابر می‌شود، ولی *هواستون باشه* که سرعت واکنش‌های رفت و برگشت به صفر نمی‌رسد.

نکته در لحظه تعادل، غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌شود و ممکن است غلظت آن‌ها با یکدیگر برابر باشد یا نباشد، پس

نمودار غلظت - زمان واکنش تعادلی $A(g) \rightleftharpoons B(g)$ می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:



۴) کربوکسیلیک اسیدها همانند هیدروسیانیک اسید (HCN)، جزء اسیدهای ضعیف هستند؛ بنابراین واکنش یونش آن‌ها در آب به صورت تعادلی است.

تست و پاسخ ۱۹۷

با توجه به شکل‌های زیر که رسانایی الکتریکی محلول اسیدهای HA و HB را با غلظت‌های یکسان در دمای $25^\circ C$ نشان می‌دهد، چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست است؟



محلول HA



محلول HB

- غلظت مولار یون هیدرونیوم در محلول‌ها: $HA > HB$
- شمار مولکول‌های دواتمی در محلول‌ها: $HB > HA$
- قدرت اسیدی: $HA > HB$
- سرعت واکنش محلول‌ها با نوار منیزیم: $HB > HA$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

پاسخ تشریحی مقایسه‌های اول، دوم و سوم دربارهٔ محلول اسیدهای HA و HB درست‌اند.

با توجه به شکل‌های داده‌شده، شدت نور لامپ در محلول HA، بیشتر از شدت نور لامپ در محلول HB است، پس HA اسید قوی‌تری نسبت به HB است و در دما و غلظت یکسان، غلظت کاتیون‌های حاصل از یونش اسید یا همان یون هیدرونیوم (H_3O^+)، قدرت اسیدی و سرعت واکنش اسید با نوار منیزیم در محلول HA بیشتر از محلول HB است. درجهٔ یونش اسید HA نسبت به اسید HB، بزرگ‌تر است؛ بنابراین شمار مولکول‌های یونیده‌نشده یا همان مولکول‌های دواتمی در محلول HB، بیشتر از محلول HA می‌باشد.

تست و پاسخ ۱۹۸

۱/۵۳ گرم از یک اسید آلی (RCOOH) با زنجیر هیدروکربنی سیرشده را به مقدار معینی آب اضافه می‌کنیم و حجم محلول را به ۱۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. اگر غلظت یون هیدرونیوم در این محلول، $1/5 \times 10^{-3}$ مولار باشد، به تقریب چند درصد جرم اسید را کربن تشکیل داده

است؟ ($K_a(\text{RCOOH}) = 1/5 \times 10^{-5}$, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)

۶۶ / ۷ (۴)

۶۳ / ۲ (۳)

۵۸ / ۸ (۲)

۵۴ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

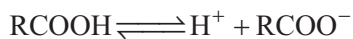
خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطهٔ ثابت یونش و غلظت یون هیدرونیوم، غلظت اولیهٔ محلول رو به دست بیار. بعد با توجه به

جرم اسید و حجم و غلظت محلول، جرم مولی اسید رو حساب کن. با مشخص شدن فرمول اسید ($C_nH_{2n}O_2$)، درصد جرمی کربن در آن رو محاسبه کن!

نکته فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_mH_{2m+1}COOH$ یا $C_nH_{2n}O_2$ است.

پاسخ تشریحی

گام اول: از رابطهٔ ثابت یونش استفاده کرده و غلظت مولی محلول اسید را حساب می‌کنیم:



$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{RCOO}^-]}{[\text{RCOOH}]} \approx \frac{[\text{H}^+]^2}{M} \Rightarrow 1/5 \times 10^{-5} = \frac{(1/5 \times 10^{-3})^2}{M} \Rightarrow M = \frac{1/5 \times 10^{-3} \times 1/5 \times 10^{-3}}{1/5 \times 10^{-5}} = 0.15 \text{ mol.L}^{-1}$$

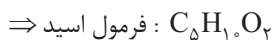
گام دوم: با توجه به جرم اسید و حجم و غلظت محلول، جرم مولی اسید و سپس فرمول مولکولی آن را پیدا می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی اسید} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{1/53}{0.15} = \frac{\text{شمار مول}}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{0.15}{0.1} = 1.5$$

$$\text{جرم مولی اسید} = \frac{1/53}{0.15 \times 0.1} = \frac{1530}{15} = \frac{1500}{15} + \frac{30}{15} = 102 \text{ g.mol}^{-1}$$

فرمول عمومی اسیدهای آلی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است:

$$C_nH_{2n}O_2 \text{ جرم مولی} = 14n + 32 \Rightarrow 14n + 32 = 102 \Rightarrow 14n = 70 \Rightarrow n = 5$$



گام سوم: درصد جرمی کربن در اسید مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$100 \times \frac{\text{جرم مولی اتم عنصر} \times \text{تعداد اتم عنصر در فرمول ترکیب}}{\text{جرم مولی ترکیب}} = 100 \times \frac{\text{جرم عنصر در یک مول ترکیب}}{\text{جرم مولی ترکیب}} = \text{درصد جرمی یک عنصر در ترکیب}$$

$$C_5H_{10}O_2 \text{ در } C \text{ درصد جرمی} = \frac{5 \times 12}{102} \times 100 = \frac{60}{102} \times 100 \rightarrow \text{کمی کم‌تر از } 60\% \rightarrow 58.8\%$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۱۹۹

اسید قوی

در دو ظرف جداگانه، محلول‌های نیتریک اسید و نیترو اسید با دمای یکسان وجود دارند. اگر غلظت آنیون‌های حاصل از یونش این دو اسید با هم برابر و حجم محلول نیترو اسید، دو برابر حجم محلول نیتریک اسید باشد، کدام مطلب درست است؟

اسید ضعیف

- (۱) اگر غلظت اسید در یکی از محلول‌ها افزایش یابد، درصد یونش دو محلول به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شود.
- (۲) شمار مولکول‌های اسید موجود در محلول نیتریک اسید از شمار مولکول‌های اسید موجود در محلول نیترو اسید، بیشتر است.
- (۳) شمار مول‌های آغازی نیترو اسید، بیش از دو برابر شمار مول‌های آغازی نیتریک اسید است.
- (۴) حجم نهایی گاز هیدروژن آزاد شده از واکنش هر دو محلول اسیدی با مقدار کافی فلز منیزیم، یکسان است.

پاسخ: گزینه ۳

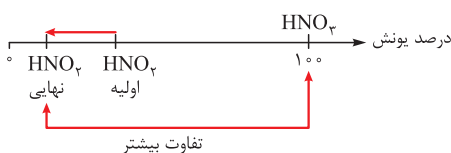
نکته اسیدهای قوی و ضعیف کتاب درسی:

اسیدهای قوی: هیدروکلریک اسید (HCl) - هیدروبرومیک اسید (HBr) - هیدرویدیک اسید (HI) - سولفوریک اسید (H₂SO₄) - نیتریک اسید (HNO₃)
 اسیدهای ضعیف: هیدروفلوئوریک اسید (HF) - نیترو اسید (HNO₂) - فورمیک (متانوئیک) اسید (HCOOH) - استیک (اتانوئیک) اسید (CH₃COOH) - HCN (هیدروسیانیک اسید)

پاسخ تشریحی

نیتریک اسید (HNO₃)، یک اسید قوی و نیترو اسید (HNO₂)، یک اسید ضعیف است. اگر غلظت این دو محلول یکسان باشد، غلظت یون‌های حاصل از یونش نیتریک اسید در محلول بیشتر است، اما غلظت آنیون حاصل از یونش این دو اسید با هم برابر است و این نشان می‌دهد که غلظت اولیه محلول اسید ضعیف (HNO₂) حتماً بیشتر بوده که باعث برابری غلظت آنیون‌ها در دو محلول شده است (در واقع اسید ضعیف به اندازه اسید قوی، یون تولید کرده است؛ بنابراین غلظت محلول اسید ضعیف، بیشتر است).
 بررسی گزینه‌ها:

(۱) درصد یونش اسید قوی HNO₃، همواره برابر ۱۰۰ است و با افزایش غلظت این اسید، مقدار تفاوت درصد یونش دو اسید، تغییری نمی‌کند، از طرفی درصد یونش اسیدهای ضعیف (مانند HNO₂) طبق رابطه $K_a = M\alpha^2$ ، با غلظت آن‌ها رابطه وارونه دارد؛ بنابراین با افزایش غلظت اسید ضعیف، درصد یونش آن کم‌تر شده و تفاوت درصد یونش دو اسید، بیشتر می‌شود:



(۲) نیتریک اسید، یک اسید قوی است و به طور کامل یونش می‌یابد؛ بنابراین در محلول آن (برخلاف محلول نیترو اسید)، تقریباً مولکول اسید یونیده نشده وجود ندارد.

(۳) غلظت اولیه محلول نیترو اسید بیشتر از محلول نیتریک اسید بوده است، از طرفی حجم محلول نیترو اسید، دو برابر حجم محلول نیتریک اسید می‌باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\text{شمار مول حل شونده}}{\text{حجم محلول}} = \text{غلظت مولی} \Rightarrow \frac{\text{مول HNO}_2}{V(\text{HNO}_2)} > \frac{\text{مول HNO}_3}{V(\text{HNO}_3)} \rightarrow \frac{V(\text{HNO}_2)=2V(\text{HNO}_3)}{2} > V(\text{HNO}_3)$$

$$\text{مول HNO}_2 > 2(\text{مول HNO}_3)$$

(۴) حجم نهایی گاز آزاد شده، به شمار مول‌های اسید اولیه بستگی دارد. با توجه به این که هم حجم و هم غلظت محلول نیترو اسید بیشتر است، شمار مول‌های اسید در این محلول بیشتر بوده و در نتیجه حجم گاز آزاد شده در واکنش آن با نوار منیزیم بیشتر خواهد بود.



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

شیمی

تست و پاسخ ۲۰۰

با توجه به معادله یونش و ثابت یونش فورمیک اسید و استیک اسید، اگر در محلول‌هایی از این دو اسید در دمای اتاق، غلظت تعادلی استیک اسید، $2/5$ برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید باشد، نسبت جرم یون فورمات به یون استات در این دو محلول، به تقریب کدام است؟ (حجم هر دو محلول را $0/5$ لیتر در نظر بگیرید؛ $O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



۱ (۴)

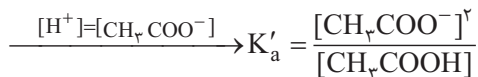
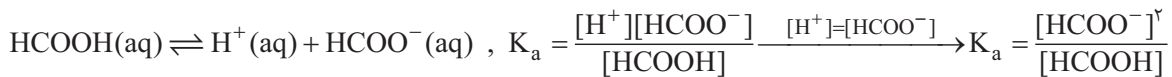
۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا با توجه به معادله موازنه شده واکنش یونش اسیدها، رابطه ثابت یونش را برای هر دو اسید می‌نویسیم، سپس به کمک اطلاعات داده شده، نسبت غلظت تعادلی آنیون‌ها را به دست می‌آوریم:



با توجه به این که نسبت غلظت تعادلی اسیدهای مورد نظر داده شده است و نسبت مقادیر تعادلی آنیون‌های حاصل از یونش را می‌خواهیم، رابطه‌های ثابت یونش دو اسید را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{K_a(HCOOH)}{K'_a(CH_3COOH)} = \frac{\frac{[HCOO^-]^2}{[HCOOH]}}{\frac{[CH_3COO^-]^2}{[CH_3COOH]}} \Rightarrow \frac{1/8 \times 10^{-4}}{1/8 \times 10^{-5}} = \left(\frac{[HCOO^-]}{[CH_3COO^-]} \right)^2 \times 2/5 \Rightarrow \left(\frac{[HCOO^-]}{[CH_3COO^-]} \right)^2 = \frac{10}{2/5} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{[HCOO^-]}{[CH_3COO^-]} = 2$$

گام دوم: با توجه به نسبت غلظت تعادلی آنیون‌ها، نسبت جرم آن‌ها را به دست می‌آوریم. با توجه به این که حجم دو محلول یکسان است، نسبت غلظت تعادلی آن‌ها با نسبت مول آن‌ها رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{[HCOO^-]}{[CH_3COO^-]} = \frac{\text{mol}(HCOO^-)}{\text{mol}(CH_3COO^-)} \xrightarrow{\text{جرم مولی} = \text{مول}} \frac{45}{59} \Rightarrow \frac{g(HCOO^-)}{g(CH_3COO^-)} = \frac{2 \times 45}{59} = \frac{90}{60} = 1/5$$