

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

مرحله ششم

پایه دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

دفترچه شماره یک

بودجه بندی دروس

هندسه

هندسه (۲)
فصل ۱
(درس ۱)
صفحه ۹ تا ۱۷
هندسه (۳)
فصل ۱ (درس ۲)
صفحه ۲۲ تا ۳۱

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

ریاضی (۱)
فصل ۷
(درس ۲ و ۳)
صفحه ۱۵۲ تا ۱۷۰
ریاضیات گسسته
فصل ۱
(درس ۲ و ۳ تا
ابتدای معادله هم‌نهمی)
صفحه ۹ تا ۲۴

حسابان و ریاضیات پایه

ریاضی (۱)
فصل ۲
صفحه ۲۸ تا ۴۶
حسابان (۱)
فصل ۴
(درس‌های ۱، ۲ و ۳)
صفحه ۹۱ تا ۱۰۹
حسابان (۲)
فصل ۱ (درس ۲)
و فصل ۲ (درس ۱)
صفحه ۱۳ تا ۳۴

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۷۵ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
۷۵ دقیقه		۴۰ سؤال		مجموع

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.



حسابان و ریاضیات پایه

۱- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 3$ بر چندجمله‌ای‌های $x - 2$ و $x + 1$ به ترتیب برابر ۵ و ۲ است. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $ap(x-1) + bp(2-x)$ بر $x - 3$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) -۵

۲- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^6 + 3x^5 + ax^2 + bx + 1$ بر چندجمله‌ای $x^3 + 1$ برابر $x^2 + x + 2$ است. باقی مانده تقسیم $p(x-a)$ بر $x - b$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

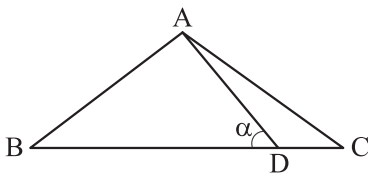
۳- تابع $f(x) = ax^2 + x^2 + (a-3)x^2 + 3x + 7$ روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است. نمودار کدام تابع از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $y = f(x+1)$ (۲) $y = f(x-1)$ (۳) $y = f(x)+1$ (۴) $y = f(x)-1$

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} kx+3 & ; x < 1 \\ -x|x+1| & ; x \geq 1 \end{cases}$ اکیداً یکنواست. حدود k کدام است؟

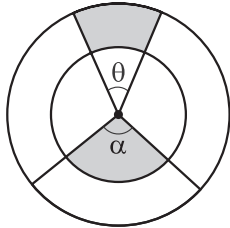
- (۱) $-1 < k < -3$ (۲) $3 < k < 5$ (۳) $-1 < k < 0$ (۴) $-5 \leq k < 0$

۵- در شکل زیر، $AB = AC = 12$ و $BD = 15$ است. اگر $\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ باشد، طول پاره خط CD کدام است؟



- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{3}$

۶- در شکل زیر، دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۶ و ۸ مفروض‌اند. اگر محیط‌ها و مساحت‌های دو ناحیه سایه خورده برابر باشند، زاویه α بر حسب رادیان کدام است؟



- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۷- اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\tan \alpha > \cot \alpha$ باشد، زاویه α بر حسب رادیان، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{13\pi}{20}$ (۲) $\frac{17\pi}{20}$ (۳) $\frac{33\pi}{20}$ (۴) $\frac{29\pi}{20}$

۸- اگر نمودار تابع $y = a + b \sin\left(\frac{x}{ab}\right)$ را $y = 3$ واحد به بالا انتقال دهیم، از بالا بر خط $y = 8$ و اگر 5 واحد به پایین انتقال دهیم، از پایین بر خط $y = -8$ مماس می‌شود. دوره تناوب این تابع کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 6π (۳) 4π (۴) 12π

محل انجام محاسبات

۹- متمم و مکمل زاویه θ به ترتیب زوایای α و β هستند. کدام رابطه همواره برقرار است؟

(۱) $\sin \beta + \cos \alpha = 0$ (۲) $\cos \beta + \sin \alpha = 0$ (۳) $\cos \theta - \cos \beta = 0$ (۴) $\sin \theta + \cos \alpha = 0$

۱۰- حاصل عبارت $P = \frac{2 \sin 252^\circ - \cos 198^\circ}{3 \cos 162^\circ + \sin 108^\circ}$ کدام است؟

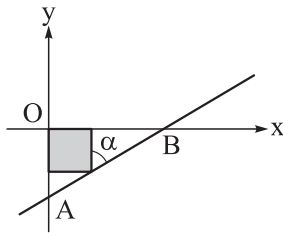
(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۱- برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده x ، رابطه $\sin^2 x - \cos^2 x = 3 \sin^2 x \cos^2 x$ برقرار است. حاصل عبارت

$P = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۲- در شکل زیر، مساحت مثلث AOB ، $\frac{1}{3}$ برابر مساحت مربع رنگی است. حاصل عبارت $P = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$ کدام می‌تواند باشد؟



(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳

(۳) ۲ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۳- به ازای چند عدد طبیعی و یک رقمی a ، تابع $y = 2 \sin \frac{ax}{4}$ روی بازه $(\pi, 2\pi)$ غیریکنوا است؟

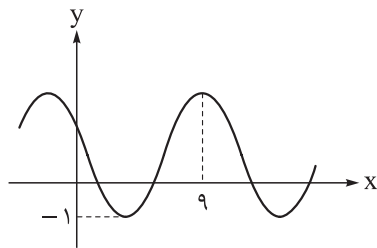
(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴- اندازه دوره تناوب تابع $f(x) = 2a - 1 - 3 \sin \frac{\pi x}{a}$ از اندازه ماکزیمم آن یک واحد بیشتر است. کم‌ترین مقدار تابع

$y = \frac{1}{a} f(x) + a$ کدام است؟

(۱) $-\frac{13}{12}$ (۲) $-\frac{13}{6}$ (۳) $-\frac{17}{6}$ (۴) $-\frac{17}{12}$

۱۵- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است. دوره تناوب تابع $g(x) = \cos(\frac{x}{ab})$ کدام است؟



(۱) $\frac{\pi}{4}$

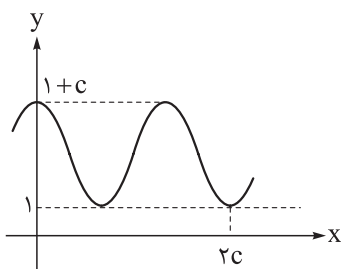
(۲) $\frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۴) $\frac{\pi}{3}$

محل انجام محاسبات

۱۶- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin^2(a\pi x)$ به صورت زیر است. مقدار b کدام است؟



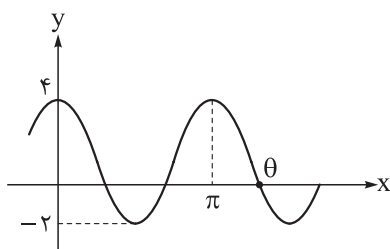
(۱) $0/5$

(۲) $0/75$

(۳) $-0/75$

(۴) $0/5$

۱۷- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos cx$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $\sin^2 \theta$ کدام است؟



(۱) $3/4$

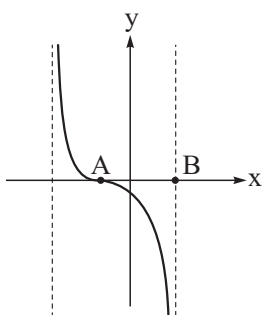
(۲) $1/4$

(۳) $8/9$

(۴) $4/9$

۱۸- نمودار تابع $y = 1 + \tan(ax - \frac{\pi}{3})$ در یک دوره تناوب به صورت زیر است. اگر طول پاره خط AB برابر π باشد،

مقدار a کدام است؟



(۱) $-1/2$

(۲) $-3/4$

(۳) $-1/4$

(۴) $-2/3$

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته

۱۹- چه تعداد از متغیرهای «مدت زمان تأثیر دارو - مسافت مسیر پرتاب نیزه - تعداد کلاس‌های مدرسه - تعداد فرزندان یک خانواده» گسسته هستند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۰- نقاط (a, b) روی منحنی $y = \frac{5x-2}{x+1}$ قرار دارند. اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۱- از رابطه $12y \equiv 16x \pmod{48}$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟

- ۱) $y \equiv 0 \pmod{4}$ ۲) $x \equiv 0 \pmod{3}$ ۳) $4x \equiv 3y \pmod{24}$ ۴) $3y \equiv 4x \pmod{12}$

۲۲- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $9n+5$ و $7n-4$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

- ۶۱ (۱) ۷۱ (۲) ۸۳ (۳) ۹۷ (۴)

۲۳- اگر $a|b$ و $a|c$ ، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست نیست؟

- ۱) $a|b+c$ ۲) $a|b^2+c$ ۳) $a^2|b+c$ ۴) $a^2|bc$

۲۴- اگر a عددی صحیح و فرد و $12+a$ بر b بخش‌پذیر باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم $19+a^2+b^2$ بر 8 ، کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

۲۵- اگر a, b و c سه عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند به طوری که $a^2|b^3$ و $b^4|c^5$ ، کدام گزینه درست است؟

- ۱) $a^5|c^9$ ۲) $a^6|c^{11}$ ۳) $a^7|b^{10}$ ۴) $a^8|c^{15}$

۲۶- چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی 40 وجود دارد که دارای چهار مقسوم‌علیه طبیعی باشد؟

- ۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

۲۷- باقی‌مانده تقسیم عدد $7 \times (18^{43} - 15^{43})$ بر عدد 30 چه قدر است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۲۸- تعداد اعداد سه‌رقمی a به طوری که $13^a \equiv 1 \pmod{17}$ کدام است؟

- ۱۲۵ (۱) ۱۷۵ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۲۵ (۴)

محل انجام محاسبات

هندسه

۲۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر k ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (k+3)x + 3y = 9 \\ 4x + (k-1)y = 6 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

- (۱) $\{3\}$ (۲) $\{-5\}$ (۳) $\{-5, -2\}$ (۴) $\{4, -2\}$

۳۰- مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $2 \cos 2\theta$ (۲) $2 \sin 2\theta$ (۳) $2 \tan 2\theta$ (۴) $2 \cot 2\theta$

۳۱- A و B دو ماتریس وارون پذیر 2×2 اند؛ اگر $A - B = 2AB$ ، آن‌گاه حاصل $|B^{-1} - A^{-1}|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) صفر

۳۲- اگر $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ و $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس

$A^2 + B^2$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & |A| \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان $A - I$ کدام است؟

- (۱) $-0/5$ (۲) $0/5$ (۳) $1/5$ (۴) $-1/5$

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه با فرض $ACA + BCB = ACB + BCA + I$ ، دترمینان

ماتریس C کدام است؟

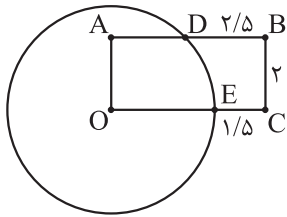
- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۵- اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a & 4b & 6c \\ 3a^2 & 6b^2 & 9c^2 \end{bmatrix}$ برابر k باشد، دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 9bc & 6ac & 3ab \\ 6 & 4 & 2 \\ 3a & 2b & c \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) k (۲) $2k$ (۳) $\frac{3}{2}k$ (۴) $3k$

محل انجام محاسبات

۳۶- مطابق شکل، O مرکز دایره و چهارضلعی $OABC$ مستطیل است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازه شعاع دایره کدام است؟



دایره کدام است؟

(۱) $2/25$

(۲) $2/5$

(۳) $2/75$

(۴) 3

۳۷- در دایره $C(O, R)$ وتر AB به فاصله $\frac{1}{3}R$ از مرکز دایره واقع است. اگر عمود منصف وتر AB دایره را در M و

N قطع کند، مساحت چهارضلعی $AMBN$ چند برابر R^2 است؟

(۴) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

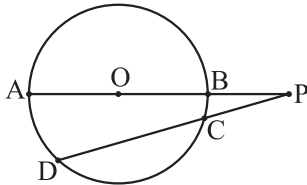
(۳) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(۲) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(۱) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۳۸- مطابق شکل، نقطه O مرکز دایره و طول PC برابر با شعاع دایره است. اگر اندازه کمان BC برابر 15° باشد، فاصله

مرکز دایره از PD چند برابر شعاع است؟



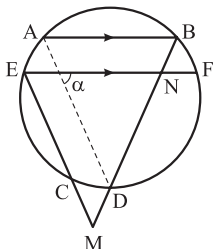
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

۳۹- مطابق شکل $AB \parallel EF$ و $ME = EN = NM$ ، اگر $\widehat{FD} = \widehat{EC} = 21^\circ$ آن گاه زاویه α چند درجه است؟



(۱) 70

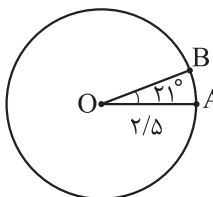
(۲) 65

(۳) $72/5$

(۴) $67/5$

۴۰- مطابق شکل، در دو دایره $C(O, 2/5)$ و $C'(O', 1/5)$ طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابرند. اگر $\widehat{AOB} = 21^\circ$ ،

آن گاه اندازه زاویه β چند درجه است؟



(۴) 35

(۳) $37/5$

(۲) 32

(۱) $32/5$

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی
خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

مرحله ششم

پایه دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

دفترچه شماره دو

بودجه بندی دروس

شیمی

شیمی (۱)
فصل ۳
(از ابتدای رفتار آب و دیگر مولکولها
در میدان الکتریکی)
صفحه ۱۰۳ تا ۱۲۲
شیمی (۳)
فصل ۱
(از ابتدای اسیدها و بازها)
صفحه ۱۳ تا ۳۶

فیزیک

فیزیک (۱)
فصل ۳
صفحه ۵۳ تا ۸۲
فیزیک (۳)
فصل ۱
(از ابتدای حرکت با شتاب ثابت)
و فصل ۲ (تا ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتون)
صفحه ۱۵ تا ۴۶

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۸۰ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
۸۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
		۶۵ سؤال		مجموع

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسانی ها با ما به اشتراک بگذارید.

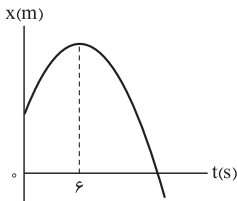


فیزیک دوازدهم

۴۱- سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت $1/2 \text{ m/s}^2$ در مسیری مستقیم حرکت می کند، در دو ثانیه سوم، برابر صفر است. سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیه سوم چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۱۸ (۴) ۹

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت، در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه دوم چند برابر تندی متوسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟

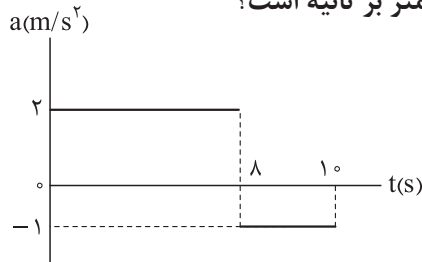


- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{17}{10}$

۴۳- متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور X حرکت می کند. اگر در ۸s اول، سرعت متوسط متحرک برابر 1 m/s و تندی متوسط آن برابر 10 m/s باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم، چند متر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۴۴- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۱۰s اول برابر $13/4 \text{ m/s}$ باشد، تندی متحرک در لحظه $t = 5\text{s}$ چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴

۴۵- خودرویی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت 4 m/s^2 به حرکت درمی آید و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. در نهایت با شتاب ثابتی به بزرگی 8 m/s^2 ، حرکتش کند شده و می ایستد. اگر کل زمان حرکت خودرو ۲۰s و مسافت طی شده توسط آن در این مدت برابر ۳۲۵ m باشد، بیشینه تندی خودرو در حین این حرکت، چند کیلومتر بر ساعت است؟

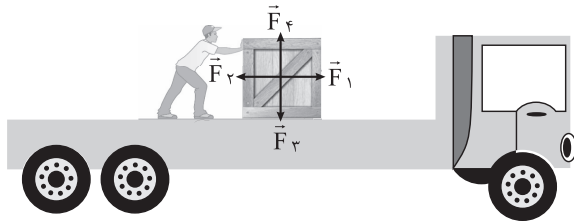
- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۷۲ (۴) ۹۰

۴۶- در شرایط خلأ، گلوله ای از ارتفاع $28/8$ متری سطح زمین رها می شود. این گلوله $0/4 \text{ s}$ قبل از رسیدن به سطح زمین، در ارتفاع چندمتری از سطح زمین قرار دارد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) $2/2$ (۲) $4/4$ (۳) $8/8$ (۴) $17/6$

محل انجام محاسبات

۴۷- شخصی یک جعبه را روی سطح افقی پشت کامیون ساکنی به حرکت درآورده است. در شکل زیر علاوه بر نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند، سه نیروی وزن، عمودی سطح و اصطکاک هم نشان داده شده است. چه تعداد از موارد زیر درباره این نیروها، الزاماً درست است؟ (مقاومت هوا ناچیز است).



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

الف) نیروهای \vec{F}_1 و \vec{F}_2 ، کنش و واکنش‌اند.

ب) واکنش دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 ، به یک جسم وارد می‌شوند.

پ) اندازه نیروی \vec{F}_1 بزرگ‌تر از اندازه نیروی \vec{F}_2 است.

ت) نیروهای وارد بر جعبه متوازن هستند.

۴۸- دو جسم A و B به جرم‌های $m_A = 5 \text{ kg}$ و $m_B = 4 \text{ kg}$ روی محور x قرار دارند. اگر در لحظه‌ای جسم A به جسم B نیروی \vec{i} (۲۰ N) وارد کند، در این لحظه شتاب جسم A بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (به دو جسم در راستای حرکت نیروی دیگری وارد نمی‌شود).

-۵ \vec{i} (۴)-۴ \vec{i} (۳)۵ \vec{i} (۲)۴ \vec{i} (۱)

۴۹- چتربازی از یک بالگرد ساکن در ارتفاع زیاد، رها شده و مدتی پس از آن که سرعتش ثابت شد، چترش را باز می‌کند. در بازه زمانی از لحظه باز شدن چتر تا لحظه‌ای که سرعت چتر باز دوباره به مقدار ثابتی برسد، کدام مورد درباره حرکت چتر باز درست است؟

(۱) جهت شتاب چتر باز به سمت پایین است.

(۲) ابتدا چتر باز مقداری به سمت بالا جابه‌جا می‌شود.

(۳) اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز افزایش می‌یابد.

(۴) اندازه نیروی خالص وارد بر چتر باز کاهش می‌یابد.

۵۰- دو گوی هم‌اندازه A و B به جرم‌های m_A و m_B که $m_B > m_A$ است، از یک بلندی به طور هم‌زمان رها می‌شوند. اگر اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی، در طی حرکت، ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، کدام گوی زودتر به سطح زمین می‌رسد و کدام گوی با تندی بیشتری به سطح زمین برخورد می‌کند؟

A, B (۴)

B, A (۳)

B, B (۲)

A, A (۱)

۵۱- جسمی از ارتفاع بلندی رها شده و پس از مدتی با تندی ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به سطح زمین برسد. این جسم را با تندی بیشتر از v ، از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اندازه شتاب جسم در لحظه‌ای که تندی آن برابر با v می‌شود، کدام است؟ (g ، شتاب گرانش در سطح زمین است).

صفر (۴)

 $\frac{g}{2}$ (۳)

g (۲)

۲g (۱)

محل انجام محاسبات

۵۲- شخصی به جرم 60 kg درون آسانسور ساکنی روی ترازوی فنری ایستاده است. به ترتیب، در حالت‌های «الف» و «ب»، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

الف) آسانسور با شتاب رو به پایین 3 m/s^2 حرکت کند.
ب) کابل آسانسور پاره شود و آسانسور سقوط آزاد کند.

(۱) 600 ، 420 (۲) 600 ، 780 (۳) 420 ، صفر (۴) 780 ، صفر

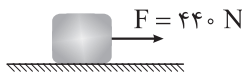
۵۳- در شکل زیر، جعبه‌ای به جرم 80 kg روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازه شتاب جعبه $1/5 \text{ m/s}^2$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جعبه کدام است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

(۱) $0/15$

(۲) $0/4$

(۳) $0/55$

(۴) $0/6$



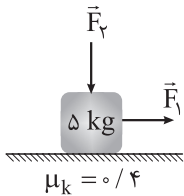
۵۴- مطابق شکل نیروی افقی \vec{F}_1 و نیروی قائم \vec{F}_2 به جسم وارد می‌شود و حرکت جسم با شتاب ثابت 2 m/s^2 به سمت راست تندشونده است. اندازه نیروی \vec{F}_2 را چند نیوتون افزایش دهیم تا در ادامه حرکت، جسم با شتاب ثابت 2 m/s^2 کندشونده حرکت کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۱) 20

(۲) 25

(۳) 40

(۴) 50



۵۵- خودرویی به جرم 1200 kg در یک مسیر مستقیم با تندی ثابت در حال حرکت است. راننده خودرو مانعی را در مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر مسافت واکنش 15 m ، مسافت ترمز 150 m و زمان واکنش راننده $0/5 \text{ s}$ باشد، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ (از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)

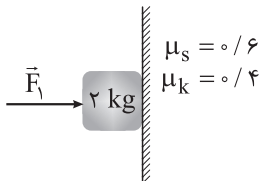
(۱) 2400

(۲) 3600

(۳) 4800

(۴) 7200

۵۶- در شکل زیر، نیروی افقی $F_1 = 40 \text{ N}$ به جسم وارد می‌شود و جسم با تکیه بر دیوار قائم ساکن مانده است. اگر در همین شرایط، نیروی $F_2 = 56 \text{ N}$ در راستای قائم از پایین به بالا به جسم وارد شود، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



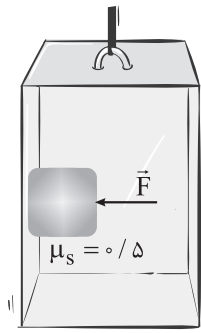
(۱) $\frac{4}{5}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{3}$

محل انجام محاسبات

۵۷- در شکل زیر، شخصی درون یک آسانسور که با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 به طرف پایین شروع به حرکت کرده، جسمی به جرم 2 kg را با نیروی افقی \vec{F} به دیوار قائم آسانسور فشرده است. اگر جسم در آستانه سر خوردن باشد، اندازه نیروی \vec{F} چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۴۸ (۴)

۵۸- به یک فنر قائم یک بار وزنه ۱ نیوتونی و یک بار وزنه ۸ نیوتونی آویزان می‌کنیم. اگر مقدار افزایش طول فنر در حالت دوم $3/5 \text{ cm}$ بیشتر از حالت اول باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟

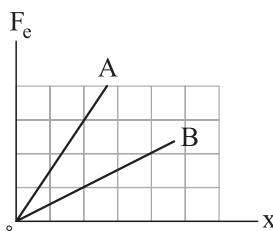
۲۰۰۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۲۰ (۲)

۲ (۱)

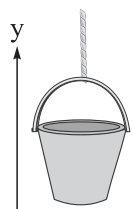
۵۹- نمودار اندازه نیروی کشسانی دو فنر A و B بر حسب تغییر طول آنها نسبت به طول عادی به شکل زیر است. توسط فنر A، جسمی به جرم m و توسط فنر B، جسمی به جرم 2 m روی سطح افقی کشیده می‌شوند. اگر دو جسم با شتاب یکسان شروع به حرکت کنند، افزایش طول فنر A نسبت به حالت عادی آن، چند برابر افزایش طول فنر B نسبت به حالت عادی اش است؟ (فنرها در راستای افق هستند. ضریب اصطکاک جنبشی بین هر یک از دو جسم با سطح، یکسان است.)

 $\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲)

۶ (۳)

 $\frac{1}{6}$ (۴)

۶۰- در شکل زیر، شخصی یک سطل محتوی مصالح را توسط طنابی سبک با شتاب \vec{j} ($1/2 \text{ m/s}^2$) به طرف بالا می‌کشد. اگر اندازه نیروی کشش طناب 20% کاهش یابد، شتاب سطل به چند متر بر مربع ثانیه می‌رسد؟ ($g = 9/8 \text{ m/s}^2$)

 $-\vec{j}$ (۱) \vec{j} (۲) $1/2 \vec{j}$ (۳) $-1/2 \vec{j}$ (۴)

محل انجام محاسبات

فیزیک دهم

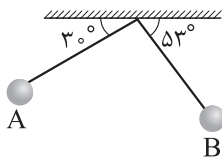
۶۱- به جسمی نیروی $\vec{F} = (\Delta N)\vec{j}$ وارد می‌شود. اگر جابه‌جایی جسم در SI برابر $\vec{d} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ باشد، کار انجام‌شده روی جسم توسط نیروی \vec{F} چند ژول است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) -۴۰ (۴) -۵۰

۶۲- خودرویی با تندی 18 km/h در حال حرکت است. برای آن که انرژی جنبشی خودرو ۴۴ درصد افزایش یابد، تندی آن باید چند متر بر ثانیه تغییر کند؟

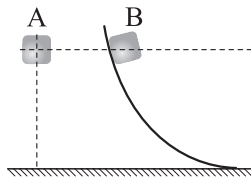
- (۱) ۱ (۲) $2/2$ (۳) $3/6$ (۴) $4/4$

۶۳- در شکل زیر، گلوله آونگی به طول $1/2 \text{ m}$ از نقطه A رها شده و در طرف دیگر تا نقطه B بالا می‌رود. اگر جرم گلوله آونگ 500 g باشد، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن روی گلوله چند ژول است؟ ($\sin 53^\circ = 0/8, g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) $1/2$
(۲) $-1/2$
(۳) $1/8$
(۴) $-1/8$

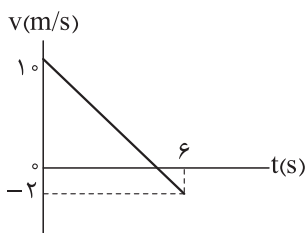
۶۴- در شکل زیر، جسم A از حال سکون سقوط می‌کند و جسم B روی مسیر بدون اصطکاک رها می‌شود. کدام مورد درباره مقایسه تندی (v) و انرژی جنبشی (K) دو جسم در سطح زمین الزاماً درست است؟



- (الف) $v_A > v_B$
(ب) $v_A = v_B$
(پ) $K_A > K_B$
(ت) $K_A = K_B$

- (۱) الف (۲) ب (۳) الف و پ (۴) ب و ت

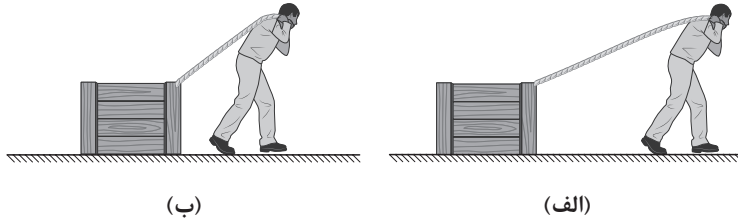
۶۵- نمودار سرعت - زمان متحرکی به جرم 3 kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در دو ثانیه سوم چند ژول است؟



- (۱) -۳۲
(۲) -۱۸
(۳) -۶۴
(۴) صفر

محل انجام محاسبات

۶۶- شخصی جسم ساکنی را یک بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه (شکل ب) روی سطح افقی بدون اصطکاک می کشد. اگر اندازه نیرویی که شخص وارد می کند در دو حالت برابر باشد، پس از جابه جایی یکسان جسم، به ترتیب از راست به چپ در کدام شکل شخص کار بیشتری انجام می دهد و در کدام شکل تندی نهایی جسم بیشتر است؟



(ب)

(الف)

(۴) ب - ب

(۳) ب - الف

(۲) الف - ب

(۱) الف - الف

۶۷- از ارتفاع ۱۰۰ متری سطح زمین، جسمی با تندی 20 m/s پرتاب می شود. در لحظه ای که تندی جسم برابر نصف تندی آن در لحظه برخورد به زمین است، فاصله جسم از سطح زمین چند متر است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

(۴) ۹۰

(۳) ۷۵

(۲) ۵۰

(۱) ۱۰

۶۸- یک توپ فوتبال را از ارتفاع $3/2$ متری سطح زمین با تندی 4 m/s به سمت پایین پرتاب می کنیم و توپ با تندی 8 m/s به سطح زمین می رسد. اگر کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر $3/6 \text{ J}$ - باشد، جرم توپ چند کیلوگرم است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

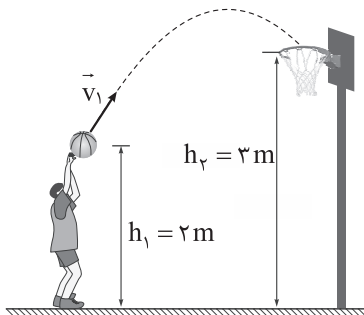
(۴) ۰/۴۵

(۳) ۰/۴

(۲) ۰/۳۵

(۱) ۰/۳

۶۹- در شکل زیر، ورزشکار توبی را با تندی $v_1 = 8 \text{ m/s}$ به طرف سبد پرتاب می کند. اگر از لحظه پرتاب توپ تا لحظه رسیدن آن به دهانه سبد، اندازه کار نیروی مقاومت هوا، نصف انرژی جنبشی توپ در لحظه پرتاب باشد، تندی توپ در لحظه رسیدن به دهانه سبد، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۴

۷۰- شخصی به جرم 50 kg درون آسانسور ساکنی قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 به سمت پایین شروع به حرکت می کند. کار انجام شده روی شخص توسط نیروی عمودی سطح وارد بر آن، در ثانیه اول حرکت چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

(۴) ۴۰۰

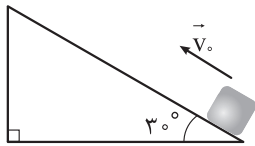
(۳) ۶۰۰

(۲) -۴۰۰

(۱) -۶۰۰

محل انجام محاسبات

۷۱- در شکل زیر، جسمی را با تندی اولیه 10 m/s موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تندی این جسم پس از 2 m جابه‌جایی روی سطح به 2 m/s می‌رسد. در این بازه زمانی، چند درصد از انرژی جنبشی اولیه جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



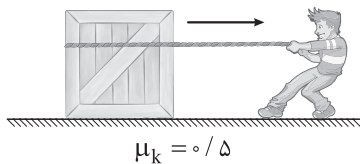
۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

۶۰ (۴)

۵۶ (۳)

۷۲- در شکل زیر، شخصی با نیروی افقی 550 N جعبه‌ای به جرم 100 kg را از حال سکون به حرکت در می‌آورد و پس از 4 s طناب پاره می‌شود. از لحظه شروع حرکت جعبه تا توقف آن، قدرمطلق کار انجام‌شده توسط نیروی اصطکاک روی

جعبه چند کیلوژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۱/۱ (۲)

۰/۲ (۱)

۲/۲ (۴)

۲ (۳)

۷۳- جرم اتاقک بالابری به همراه بار آن 600 kg است. اگر این بالابر در مدت 10 s با تندی ثابت به اندازه 5 m بالا رود، توان متوسط موتور این بالابر چند اسب بخار است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، $1 \text{ hp} = 750 \text{ W}$ و نیروی اتلافی ناچیز است.)

۳۰۰ (۴)

۳۰ (۳)

۴۰ (۲)

۴ (۱)

۷۴- هواپیمایی به جرم 60 t از سطح زمین به حرکت در می‌آید و پس از 5 دقیقه از ارتفاع 625 متری سطح زمین با تندی 100 m/s عبور می‌کند. با چشم‌پوشی از نیروی مقاومت هوا، توان متوسط موتور هواپیما حداقل چند مگاوات است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

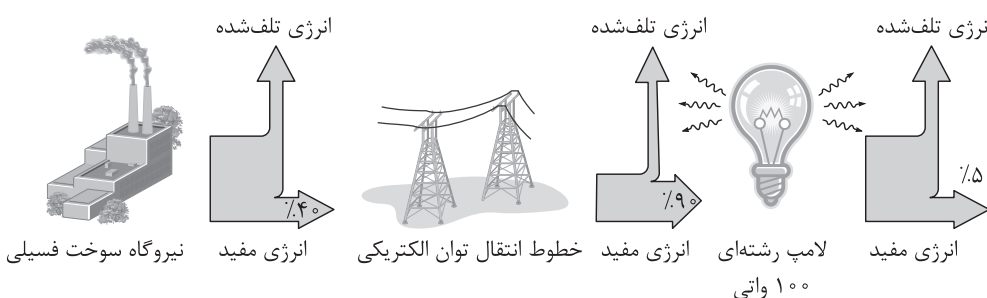
۱۰ (۴)

۱ (۳)

۲۲/۵ (۲)

۲/۲۵ (۱)

۷۵- شکل زیر طرحواره‌ای از درصد انرژی مفید و انرژی تلف شده در یک نیروگاه سوخت فسیلی را از آغاز تا مصرف در یک لامپ رشته‌ای نشان می‌دهد. با مصرف 20 L گازوئیل در نیروگاه، لامپ رشته‌ای به مدت چند ساعت روشن می‌ماند؟ (با سوختن هر لیتر گازوئیل در نیروگاه، 30 MJ انرژی گرمایی تولید می‌شود.)



۳۰۰ (۴)

۳۰ (۳)

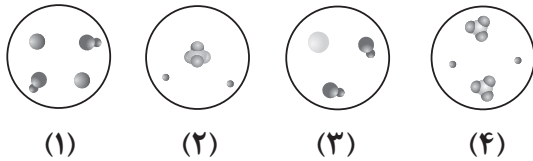
۶۰۰ (۲)

۶۰ (۱)

محل انجام محاسبات

شیمی دوازدهم

۷۶- با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به واکنش برخی اکسیدها با آب است، کدام موارد زیر درست است؟



الف) رنگ کاغذ pH در حضور محلول‌های (۲) و (۳) مشابه یکدیگر است.

ب) حل‌شونده محلول (۱) می‌تواند هیدروکسید فلزی از گروه دوم جدول تناوبی باشد.

پ) حل‌شونده محلول‌های (۲) و (۴) به ترتیب می‌توانند $SO_3(g)$ و $N_2O_5(s)$ باشند.

ت) آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴) از نظر شمار پیوندهای کووالانسی مشابه یکدیگر هستند.

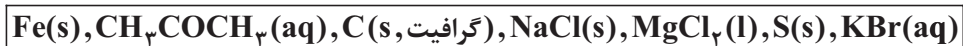
(۱) الف - پ

(۲) الف - ب

(۳) پ - ت

(۴) ب - ت

۷۷- در بین موارد زیر، به ترتیب از راست به چپ، چه تعداد رسانای الکترونی و چه تعداد رسانای یونی وجود دارد؟



(۴) ۳ - ۴

(۳) ۲ - ۲

(۲) ۳ - ۲

(۱) ۳ - ۲

۷۸- با توجه به جدول زیر، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$[H^+]$	درجه یونش	غلظت مولی محلول	اسید
x	۱	۰/۰۴	HA
y	$10^{-1/7}$	۰/۰۲	HB

(۱) ۱۰۰

(۲) ۲۰۰

(۳) ۱۰۰۰

(۴) ۲۰۰۰

۷۹- در محلول ۰/۲ مولار استیک اسید در آب، به ترتیب از راست به چپ، کدام گونه‌ها (بدون در نظر گرفتن مولکول‌های

آب)، بیشترین و کم‌ترین غلظت مولی را دارند؟

(۱) OH^-, H^+

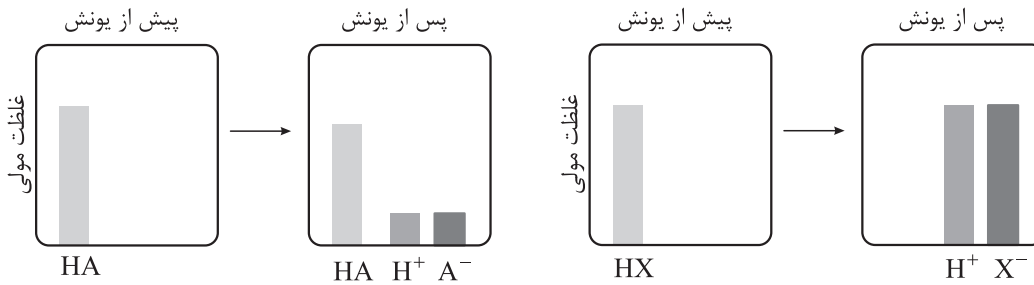
(۲) OH^-, CH_3COOH

(۳) CH_3COOH, CH_3COO^-

(۴) H^+, CH_3COOH

محل انجام محاسبات

۸۰- با توجه به شکل‌های زیر که غلظت نسبی گونه‌ها را در محلول دو اسید HA و HX در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند، کدام موارد از مطالب داده‌شده درست است؟



الف) هر دو اسید HA و HX تک‌پروتون‌دار هستند و با انحلال هر مول از آن‌ها در آب، یک مول H⁺ تولید می‌شود.
 ب) اگر از انحلال هر ۵۰۰ مولکول HA در شرایط معین، ۲۴ یون تولید شده باشد، درصد یونش آن برابر ۲/۴ درصد است.
 پ) اگر عنصرهای A و X هر دو جزء عنصرهای گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشند، واکنش‌پذیری عنصر A بیشتر از عنصر X است.

ت) pH محلول ۰/۵ مولار HX، بیشتر از محلول ۰/۵ مولار HA است.

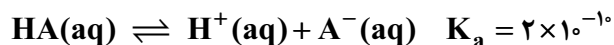
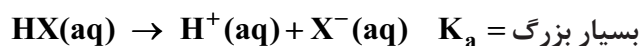
۱) الف - ب - پ ۲) ب - پ ۳) الف - پ ۴) ب - ت

۸۱- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- انحلال برخی از ترکیب‌های مولکولی در آب، به صورت یونی است.
- در یک سامانه تعادلی، واکنش‌های رفت و برگشت با سرعت یکسانی انجام می‌شوند؛ از این رو غلظت مواد شرکت‌کننده در سامانه برابر می‌شود.
- میزان بازی بودن بزاق دهان در مقایسه با روده کوچک بیشتر است.
- در دمای اتاق، حاصل ضرب [H⁺][OH⁻] برای محلول سودسوزآور، بیشتر از این حاصل ضرب برای محلول آمونیاک است.

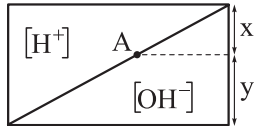
۱) الف ۲) ب ۳) الف ۴) صفر

۸۲- با توجه به معادله‌های داده‌شده، کدام مطلب درست است؟



- با دو برابر کردن غلظت اولیه محلول HX در دمای ثابت، [X⁻] در آن تغییر نمی‌کند.
- محلول آبی HX، یک الکترولیت قوی و محلول آبی HA، غیرالکترولیت محسوب می‌شود.
- با دو برابر کردن غلظت اولیه محلول HA در دمای ثابت، [H⁺] در محلول به تقریب $\sqrt{2}$ برابر می‌شود.
- تفاوت [H⁺] و [X⁻] در محلول HX، بیشتر از تفاوت غلظت [H⁺] و [A⁻] در محلول HA است.

محل انجام محاسبات



۸۳- با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را در محلول‌های آبی در دمای اتاق نشان می‌دهد، اگر $\frac{2y}{3x+y} = 1/5$ باشد، pH محلول A کدام است؟ ($\log 2 = 0/3, \log 3 = 0/5$)

- ۹/۵ (۴) ۸/۵ (۳) ۷/۵ (۲) ۴/۵ (۱)

۸۴- غلظت یون یدید در محلول چند مولار هیدرویدیک اسید با مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول ۰/۲ مولار HA با $K_a = 0/1$ برابر است؟

- ۰/۴ (۴) ۰/۳ (۳) ۰/۲ (۲) ۰/۱ (۱)

۸۵- جاهای خالی زیر به ترتیب در کدام گزینه به درستی تکمیل شده‌اند؟

الف) تفاوت pH محلول ۰/۲ مولار استیک اسید با pH آب خالص، از تفاوت pH آن با pH مخلوطی از آب و صابون مایع در دمای اتاق است.

ب) از محلول آبی حاصل از فراورده واکنش هابر، می‌توان به عنوان استفاده کرد.

پ) pH محلول حاصل از حل کردن ۰/۱ مول باریم هیدروکسید در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر در دمای 25°C ، برابر است. (از تغییر حجم محلول صرف نظر کنید.)

- (۱) بیشتر - شیشه‌پاک‌کن - $13/3$ (۲) بیشتر - لوله‌بازکن - $13/7$
(۳) کم‌تر - شیشه‌پاک‌کن - $13/7$ (۴) کم‌تر - لوله‌بازکن - $13/3$

۸۶- اگر درصد یونش آمونیاک در محلولی از آن با $\text{pH} = 11/7$ برابر با درجه یونش هیدروکلریک اسید در محلولی از آن با $\text{pH} = 1/5$ باشد، نسبت غلظت مولار محلول هیدروکلریک اسید به غلظت مولار محلول آمونیاک، کدام است؟ ($\log 2 = 0/3, \log 3 = 0/5$)

- ۰/۰۱۵ (۴) ۰/۰۶ (۳) ۰/۰۳ (۲) ۰/۱۲ (۱)

۸۷- در کدام گزینه، اثر تغییرهای گفته‌شده بر کمیت مورد نظر به درستی آورده شده است؟

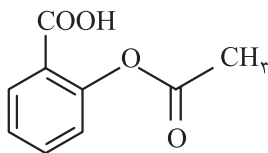
الف) افزایش غلظت اولیه محلول اسید بر مقدار ثابت یونش اسید در دمای ثابت

ب) رقیق کردن محلول یک اسید ضعیف بر درجه یونش اسید

پ) افزایش غلظت محلول اتانول در آب بر رسانایی الکتریکی محلول

- (۱) افزایش - کاهش - افزایش (۲) بدون تأثیر - افزایش - بدون تأثیر
(۳) بدون تأثیر - کاهش - افزایش (۴) کاهش - افزایش - بدون تأثیر

۸۸- آسپرین، یکی از پرکاربردترین داروهای دنیای امروزی به‌ویژه برای بیماران قلبی است که ساختار آن به صورت زیر می‌باشد. اگر نمونه‌ای به جرم ۵/۴ گرم از این ترکیب را در مقداری آب حل کرده و حجم آن را به ۳ لیتر برسانیم، درصد یونش و pH محلول اسیدی حاصل تقریباً چه قدر است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید؛ $\text{H} = 1: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\text{O} = 16$, $\text{C} = 12$, $\text{K}_a = 5 \times 10^{-4}$)



- (۱) $2/7 - 20$ (۲) $2/7 - 40$
(۳) $3/3 - 20$ (۴) $3/3 - 40$

محل انجام محاسبات

۸۹- کدام مطلب درست است؟

- (۱) با افزودن اسید به آب، با وجود افزایش غلظت یون هیدرونیوم، به دلیل کاهش غلظت یون هیدروکسید، رسانایی الکتریکی تغییر قابل توجهی نمی‌کند.
- (۲) برای باز کردن لوله‌ای که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده است، باید از محلول سدیم کلرید استفاده کرد.
- (۳) ترکیب اصلی شیر منیزی برخلاف فرآورده یونی واکنش آن با هیدروکلریک اسید، در دمای اتاق نامحلول است.
- (۴) در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیره معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود ۳ / ۰ مولار است.
- ۹۰- دربارهٔ محلول سود سوزآور (محلول I) و محلول آمونیاک (محلول II) با حجم، دما و pH یکسان، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- شمار مول‌های آغازی دو باز، برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- غلظت مولار یون سدیم در محلول (I) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (II)، برابر است.
- رسانایی الکتریکی دو محلول با هم برابر است.
- مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (I)، از مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (II)، کم‌تر است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۹۱- یک نمونهٔ ۲ لیتری از محلول HCl با $\text{pH} = 1/4$ در اختیار داریم. اگر بخواهیم pH این محلول را به $2/3$ برسانیم، به چند لیتر محلول KOH با $\text{pH} = 12/5$ نیاز داریم و در انتهای این فرایند، غلظت یون K^+ در محلول نهایی بر حسب ppm کدام است؟ (چگالی همهٔ محلول‌ها را برابر چگالی آب در نظر بگیرید؛ $\text{K} = 39 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) ۵۸۵ - ۲ (۲) ۲۹۲ / ۵ - ۱ (۳) ۵۸۵ - ۱ (۴) ۲۹۲ / ۵ - ۲

- ۹۲- اگر در فرمول ، x برابر باشد، ترکیب مورد نظر

- (۱) KHCO_x ، ۲، پتاسیم هیدروژن کربنات است
- (۲) HNO_x ، ۲، اسیدی است که قدرت اسیدی کم‌تری نسبت به هیدروسیانیک اسید دارد
- (۳) HNO_x ، ۳، از انحلال اکسیدهای نیتروژن در آب تولید می‌شود
- (۴) KHCO_x ، ۳، دارای آنیونی است که در ساختار جوش شیرین نیز وجود دارد

- ۹۳- با توجه به جدول زیر که مواد مؤثر موجود در چند ضداسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

شمارهٔ ضداسید	۱	۲	۳
مادهٔ مؤثر	$\text{Al(OH)}_3, \text{NaHCO}_3$	$\text{Al(OH)}_3, \text{Mg(OH)}_2$	NaHCO_3

- (۱) مصرف این داروها، سبب افزایش pH اسید معده می‌شوند.
- (۲) مخلوط مواد مؤثر ضداسید شمارهٔ (۲) با آب، منجر به تشکیل یک سامانهٔ همگن می‌شود.
- (۳) دو مول ضداسید شمارهٔ (۱) که مواد مؤثر آن به نسبت مولی برابر مخلوط شده‌اند، می‌تواند چهار مول HCl را خنثی کند.
- (۴) ضداسید شمارهٔ (۳) به عنوان مادهٔ افزودنی در تهیهٔ شوینده‌ها نیز کاربرد دارد.

محل انجام محاسبات

شیمی دهم

۹۴- کدام موارد زیر درست است؟

- الف) مولکول‌های آب از سر منفی، جذب میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر می‌شوند.
 ب) بامقایسه جهت گیری مولکول‌های A و B در میدان الکتریکی، می‌توان نسبت نقطه جوش این دو مولکول را پیش بینی کرد.
 پ) قدرت نیروهای بین مولکولی آب، حدود دو برابر قدرت نیروهای بین مولکولی هیدروژن سولفید است.
 ت) رفتار مولکول‌های آب از ویژگی‌های ساختاری و حالت هندسی V شکل آن سرچشمه می‌گیرد.
- ۱) الف - ب ۲) ب - پ ۳) الف - ت ۴) پ - ت

۹۵- با توجه به عبارت‌های زیر، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

- a) این مولکول در میدان الکتریکی جهت گیری نمی‌کند.
 b) این مولکول می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.
 c) این مولکول به هر نسبتی در آب حل می‌شود.
 d) این مولکول با انحلال در آب، ماهیت خود را حفظ می‌کند.
- الف) کدام عبارت(ها) برای توصیف مولکول استون (CH_3CCH_3) مناسب است؟
 ب) عبارت (a) کدام یک از مولکول(ها) (HF , CO_2 , CH_4) را توصیف می‌کند؟
 پ) کدام عبارت جمله زیر را توجیه می‌کند؟

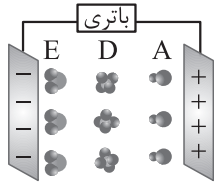
«نقطه جوش NH_3 ، از ترکیب‌های هیدروژن دار عنصرهای هم‌گروه نیتروژن بالاتر است.»

- ۱) c, CH_4 و CO_2 , b
 ۲) c, CO_2
 ۳) c و CH_4 , d, HF
 ۴) c و CH_4 , CO_2 , b

۹۶- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- آب یکی از موادی است که به هر سه حالت جامد، مایع و بخار (گاز) در طبیعت یافت می‌شود.
 - بین مولکول‌های آب در حالت بخار، پیوند هیدروژنی وجود ندارد و مولکول‌ها به صورت آزادانه و منظم از جایی به جای دیگر انتقال می‌یابند.
 - بین مولکول‌های آب در حالت مایع، پیوندهای هیدروژنی سستی وجود دارد؛ به طوری که مولکول‌ها می‌توانند روی هم بلغزند و جابه‌جا شوند.
 - بین مولکول‌های آب در حالت جامد، پیوندهای هیدروژنی قوی وجود دارد و مولکول‌های آب در جاهای به نسبت ثابتی قرار دارند.
 - مبنای شکل دانه‌های برف را می‌توان به وجود شش‌وجهی‌ها در ساختار منظم یخ نسبت داد.
- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات



۹۷- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟

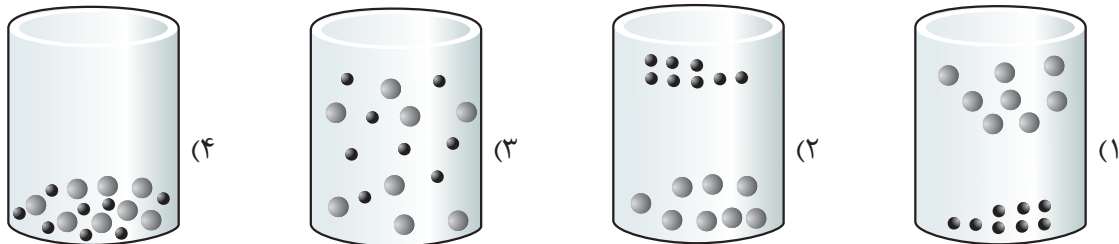
- (۱) گشتاور دوقطبی مولکول‌های A و E برخلاف مولکول D، به یقین بزرگ‌تر از صفر است.
 (۲) اگر نقطه جوش مولکول A، بیشتر از صفر درجه سلسیوس باشد، می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

(۳) اگر در نیروهای جاذبه مولکول E، اتم هیدروژن نقش کلیدی ایفا کند، گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از یک است.

(۴) نقطه جوش مولکول D، به یقین از نقطه جوش سایر ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه آن، کم‌تر است.

۹۸- با توجه به جدول داده‌شده، کدام شکل نمای ذره‌ای بهتری از مخلوط هگزان و کربن تتراکلرید را در دمای اتاق نشان می‌دهد؟

ویژگی	ماده	هگزان (●)	کربن تتراکلرید (●)
جرم مولی ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)		۸۶	۱۵۴
نقطه جوش ($^{\circ}\text{C}$)		۶۸/۷	۷۶/۸
چگالی ($\text{g} \cdot \text{ml}^{-1}$)		۰/۶۶	۱/۵۹



۹۹- با توجه به نمودار مقابل که انحلال‌پذیری گازها در

آب مقطر در دمای ثابت را نشان می‌دهد، کدام گزینه

نادرست است؟ ($\text{N} = ۱۴, \text{O} = ۱۶ : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) به قانون هنری پیرامون گازها مرتبط است.

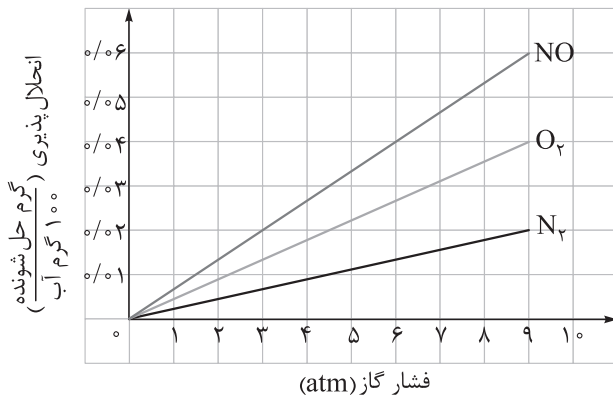
(۲) معادله انحلال‌پذیری گاز نیتروژن برحسب فشار را

می‌توان به صورت $S \approx 2/2 \times 10^{-3} P$ ، نشان داد.

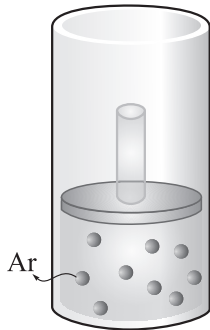
(۳) در فشار ۶ atm، حدود ۲/۶۷ میلی‌مول گاز

نیتروژن مونوکسید در ۲۰۰ گرم آب حل می‌شود.

(۴) با افزودن مقداری نمک به آب، شیب نمودار انحلال‌پذیری گاز اکسیژن افزایش می‌یابد.



محل انجام محاسبات



۱۰۰- شکل روبه‌رو محلول سیرشده‌ای از گاز آرگون در ۲ لیتر آب در دمای 25°C را نشان می‌دهد (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند). اگر انحلال‌پذیری این گاز در آب در فشار 5 atm و دمای 25°C ، برابر 0.03% گرم در 100 گرم آب باشد، فشار گاز در شکل داده‌شده، چند اتمسفر است؟ (هر ذره را معادل 0.03% مول از آن در نظر بگیرید؛ $\text{Ar} = 40\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

۹ (۲)

۱۳ / ۵ (۱)

۲ / ۵ (۴)

۶ / ۷۵ (۳)



۱۰۱- مطابق شکل روبه‌رو، حجم‌های برابری از دو محلول توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر به محلول سمت غشا فشار وارد شود، فرایند اسمز معکوس انجام خواهد شد و با گذشت زمان، تفاوت غلظت مولی دو محلول می‌یابد.

۲) راست - کاهش

۱) راست - افزایش

۴) چپ - افزایش

۳) چپ - کاهش

۱۰۲- کدام گزینه درست است؟

۱) با روش اسمز معکوس می‌توان مخلوطی از آب و اتانول را تا حد مطلوبی به اجزای سازنده تفکیک کرد.

۲) آب تصفیه‌شده به روش صافی کربنی، برخلاف روش تقطیر نیاز به کلرزی ندارد.

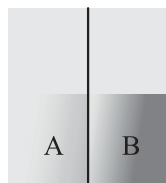
۳) برای حذف حشره‌کش‌ها و میکروب‌ها، روش اسمز معکوس نسبت به تقطیر، کارایی بیشتری دارد.

۴) پلاسیده شدن خیار تازه در آب شور به دلیل پدیده اسمز وارونه است.

۱۰۳- مطابق شکل (الف)، حجم‌های برابری از دو مایع A و B توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند و پس

از مدتی شکل ظرف به صورت (ب) درمی‌آید. اگر مایع اولیه B، محلول ۱۸ درصد جرمی گلوکز ($d = 1.25\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$)

باشد، مایع A کدام مورد می‌تواند باشد؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16\text{ : g}\cdot\text{mol}^{-1}$)



(الف)



(ب)

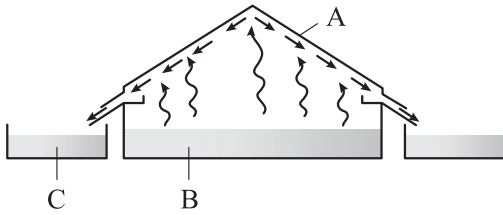
۱) آب مقطر

۲) محلول ۲ مولار گلوکز

۳) محلول ۱۵ درصد جرمی گلوکز

۴) محلول ۱ مولار گلوکز

محل انجام محاسبات



۱۰۴- با توجه به شکل مقابل که روشی برای تهیه آب شیرین از آب دریا را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟

- (۱) این روش تقطیر نام دارد که برخلاف اسمز معکوس، در آن به غشای نیمه‌تراوا و منبع انرژی نیازی نیست.
- (۲) A یک سقف فلزی است که فرایند میعان بر سطح آن انجام می‌شود.
- (۳) در آب تهیه‌شده به این روش، فلزهای سمی و نافلزها، همچنان در آب وجود دارند.
- (۴) اگر B دارای ترکیب‌های آلی فزار باشد، آب تولیدشده در قسمت C باید به کمک روش‌های دیگر دوباره تصفیه شود.
- ۱۰۵- یک تن آب شور با غلظت ۱۶ درصد جرمی از انواع نمک‌ها را به یک دستگاه تصفیه آب که با روش اسمز معکوس کار می‌کند، وارد می‌کنیم. اگر این دستگاه از هر ۴ گرم نمک، ۳ گرم آن را از آب خارج کند، جرم آب تصفیه‌شده خروجی چند کیلوگرم بوده و درصد جرمی نمک باقی‌مانده در آن به تقریب کدام است؟ (فرض کنید غشای نیمه‌تراوا، همه آب خالص اولیه را از خود عبور می‌دهد).

$$۴/۵۴ - ۹۶۰ (۴)$$

$$۴/۷۵ - ۹۶۰ (۳)$$

$$۴/۵۴ - ۸۸۰ (۲)$$

$$۴/۷۵ - ۸۸۰ (۱)$$

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی
خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

پاسخ نامہ آزمون آزمائشی خلی سبز



مرحله ششم

پایہ دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	حسین شفیعزاده- مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	امیر حسین ابومحبوب- محمدطاهر شعاعی- کیوان صارمی- حمید گلزاری- محسن میراسلامی- حسین هاشمی طاهری
فیزیک	محسن توانا- علیرضا جباری- رضا سبزمیدانی- محمدجواد سورچی- نوید شاهی- علیرضا عبدالہی- علیرضا گونہ- حامد نبی منصور
شیمی	مہدی براتی - یاسر راش - سروش عبادی - یاسر عبداللہی

نام درس	مستعمل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	حسین شفیعزاده- مهرداد کیوان	حسین شفیعزاده- مهرداد کیوان	عادل حسینی	عادل حسینی - سجاد داوطلب - محمدسجاد نقیہ	شمیم پهلوان شریف - ماہان فنی فر - ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب - مریم نظری	مہدی خوش نویس - ماہان فنی فر - ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زہرا جالبینوسی - فرزانه خاکپاش - ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی- علیرضا جباری- محمدجواد سورچی	امین امینی	مہدی بابائی- مدیا عیدی- علیرضا گونہ- احسان محمدی- امیر محمدی انزلی- مہدی یوسفی
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی- سروش عبادی	محمد مرادی - وحید فاریسان	احسان رحیمی - ہومن زندگی - مینا نظری

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاچانپور





حسابان دوازدهم و پایه مرتب

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 3$ بر چندجمله‌ای‌های $x-2$ و $x+1$ به ترتیب برابر ۵ و ۲ است.

$p(2)$			
$p(-1)$	-4 (۲)	-8 (۱)	
	-5 (۴)	3 (۳)	

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $ap(x-1) + bp(2-x)$ بر $x-3$ کدام است؟

۲ و ۱- رو جای گذاری کن و با حل یه دستگاه، a و b رو به دست بیار.



درسی Box

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مقسوم، $b(x)$ چندجمله‌ای مقسوم‌علیه، $q(x)$ چندجمله‌ای خارج قسمت و $r(x)$ چندجمله‌ای باقی مانده باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$p(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

(۱) اگر $b(x) = x - a$ باشد، داریم:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r \Rightarrow r = p(a)$$

(۲) اگر $b(x) = (x - a)(x - b)$ باشد، داریم:

$$p(x) = (x - a)(x - b)q(x) + \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta = p(a) \\ \alpha b + \beta = p(b) \end{cases}$$

گام اول: طبق درس باکس، باقی مانده‌های تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-2$ و $x+1$ به ترتیب برابر $p(2)$ و $p(-1)$ است. به همین خاطر در ضابطه چندجمله‌ای $p(x)$ مقادیر $x=2$ و $x=-1$ را جای گذاری می‌کنیم و برابر ۵ و ۲ قرار می‌دهیم:

$$p(2) = 16 - 8 + 4a + 2b + 3 = 5 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -3$$

$$p(-1) = 1 - (-1) + a - b + 3 = 2 \Rightarrow a - b = -3$$

گام دوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 3a = -6 \Rightarrow a = -2 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} b = 1$$

گام سوم: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-3$ مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=3$ است:

$$\xrightarrow{x=3} \text{باقی مانده} = -2p(2) + p(-1) \xrightarrow{\text{فرض سوال } p(2)=5, p(-1)=2} \text{باقی مانده} = (-2)(5) + 2 = -8$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^6 + 3x^5 + ax^2 + bx + 1$ بر چندجمله‌ای $x^3 + x + 2$ برابر $x^2 + x + 2$ است. باقی مانده

تقسیم $p(x - a)$ بر $x - b$ کدام است؟

(۱) ۳۰

(۲) ۳۲

(۳) ۳۴

(۴) ۳۶

مشاوره در سال‌های اخیر، سؤالات خارج از محدوده کتاب‌های درسی در کنکور سراسری دیده شده است و برای حل آن‌ها طبیعتاً چاره‌ای به‌جز مطالعه فراتر از کتاب درسی (البته منظور نظام قدیم آموزشی است) نداریم. این سؤال هم از آن دسته سؤالات است که در نوبت دوم کنکور ۱۴۰۳ مشابه آن دیده شده است. با دقت به گام‌های پاسخ تشریحی، الگوی حل این سؤالات را فرا بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ ، مقدار چندجمله‌ای $f(x)$ است به ازای ریشه‌های چندجمله‌ای $g(x)$ و مهم نیست این ریشه‌ها حقیقی هستند یا نه. اگر حقیقی باشند، طبق مفهومی که تاکنون از کتاب درسی یاد گرفته‌ایم، مشابه پاسخ سؤال قبل عمل می‌کنیم و پیش می‌رویم؛ اما اگر ریشه‌ها حقیقی نباشند یا حتی مرتبه تکرار آن‌ها بیش از یک باشد، باید به گونه دیگری عمل کنیم.

در این سؤال، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $x^3 + 1$ در جواب (های) معادله $x^3 = -1$ رخ می‌دهد.

گام دوم: پس سعی می‌کنیم در بسط چندجمله‌ای $p(x)$ ، عبارت x^3 را جدا کنیم و مقدار آن را برابر -1 قرار دهیم:

$$p(x) = (x^3)_{-1}^2 + 3(x^3)_{-1}x^2 + ax^2 + bx + 1 \Rightarrow r(x) = 1 - 3x^2 + ax^2 + bx + 1$$

$$\Rightarrow r(x) = (a - 3)x^2 + bx + 2$$

گام سوم: بیش از این نمی‌توانیم عبارت x^3 را در چندجمله‌ای $r(x)$ ببینیم، پس باقی مانده تقسیم، همین چندجمله‌ای $r(x) = (a - 3)x^2 + bx + 2$ است. طبق فرض سؤال، این چندجمله‌ای باید با چندجمله‌ای $x^2 + x + 2$ متحد باشد:

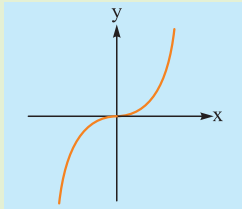
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 1 \Rightarrow a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

گام چهارم: پس $p(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 + x + 1$ است و باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x - 4)$ بر $\frac{x - 1}{x - b}$ برابر $p(-3)$ است:

$$R = p(x - 4)|_{x=1} = p(-3) = \underbrace{(-3)^6 + 3(-3)^5 + 4(-3)^2 + (-3) + 1}_{(3+(-3))(-3)^5} = 34$$

برابر صفر است:

تابع $f(x) = ax^4 + x^3 + (a-3)x^2 + 3x + 7$ روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است. نمودار کدام تابع از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی گذرد؟



۳
۱) $y = f(x+1)$

۲) $y = f(x-1)$

۳) $y = f(x) + 1$

۴) $y = f(x) - 1$

تابع چندجمله‌ای از درجه چهار می‌تونه یکنوا بشه؟

Hint

درس‌Box

مجموعه A ($A \subseteq D_f$) را در نظر بگیرید. به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به مجموعه A ، تابع f :

اکیداً نزولی است.	نزولی است.
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.
اکیداً صعودی است.	صعودی است.
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.

دقت کنید اگر مجموعه A برابر دامنه تابع باشد، آن‌گاه می‌گوییم تابع f روی دامنه خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است؛ هم‌چنین اگر تابعی بر دامنه خود صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه آن را یکنوا می‌نامیم.

الف) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.

ب) تابع ثابت (روی یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

پ) اگر تابع f روی دامنه خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیریکنوا می‌نامیم.

توابع چندجمله‌ای از درجه چهار روی دامنه‌شان که \mathbb{R} است، قطعاً غیریکنوا هستند.

تابع درجه سوم

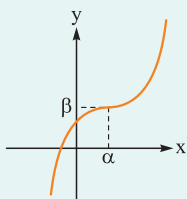
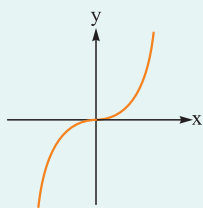
تابع $y = x^3$ را یک تابع درجه سوم می‌نامیم و نمودار آن به صورت مقابل است:

این تابع در $x = 0$ بر محور x مماس است.

با انتقال α واحد به راست و β واحد به بالا، نمودار تابع به صورت مقابل تغییر می‌کند:

ضابطه تابع انتقال یافته $y = (x - \alpha)^3 + \beta$ است.

در این تابع نقطه (α, β) مرکز تقارن نمودار است و خط مماس بر آن در $x = \alpha$ افقی است.



نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

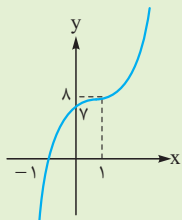
گام اول: طبق درس باکس این سؤال و نکته مربوط به آن، تابع f نمی‌تواند از درجه چهار باشد، پس $a = 0$ است و داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$$

گام دوم: ضابطه تابع f را به صورت مکعب دو جمله‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 = (x-1)^3 + 8$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



گام سوم: و برای این که این نمودار از ناحیه دوم دستگاه مختصات نگذرد، دو راه داریم:

$$\begin{cases} y = f(x-1) & \text{یا 1 واحد به راست ببریم.} \\ y = f(x) - 7 & \text{یا 7 واحد به پایین ببریم.} \end{cases}$$

تابع $f(x) = \begin{cases} kx + 3 & ; x < 1 \\ -x|x+1| & ; x \geq 1 \end{cases}$ اکیداً یکنواست. حدود k کدام است؟ ۴

$$3 < k < 5 \quad (2)$$

$$-10 < k < -3 \quad (1)$$

$$-5 \leq k < 0 \quad (4)$$

$$-10 < k < 0 \quad (3)$$

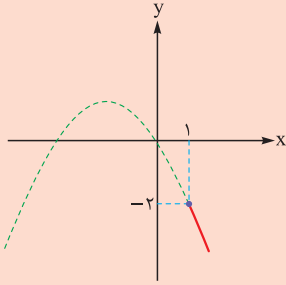


راه حل چنین سوالاتی رسمه، پس رسم کن.

Hint

گام اول: لازم است که نمودار تابع را رسم کنیم. چون برای $x \geq 1$ ضابطه تابع را داریم، ابتدا نمودار این ضابطه را رسم می‌کنیم: پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x \geq 1 \Rightarrow x+1 > 0 \xrightarrow{|x+1|=x+1} y = -x(x+1)$$



گام دوم: همان‌طور که از نمودار پیداست، تابع f باید اکیداً نزولی باشد، بنابراین شیب خط $y = kx + 3$ باید منفی باشد:

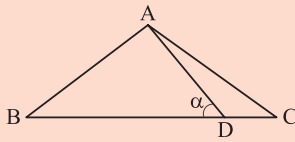
$$\Rightarrow k < 0 \quad (1)$$

گام سوم: دوماً مقدار تابع خطی $y = kx + 3$ در $x = 1$ نباید از -2 کم‌تر باشد:

$$\Rightarrow k + 3 \geq -2 \Rightarrow k \geq -5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} -5 \leq k < 0$$

در شکل زیر، $AB = AC = 12$ و $BD = 15$ است. اگر $\tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ باشد، طول پاره خط CD کدام است؟



$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

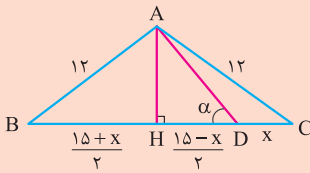
مشاوره در کنکورهای دو سال اخیر، علاقه طراحان به کاربرد مثلثات در هندسه بیشتر شده است. سعی کنید بیشتر از قبل «مثلثات در هندسه» را کار و تمرین کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

این سؤال شبیه به سؤال از کنکور اردیبهشت امساله و راهکارشم رسم ارتفاع AH هستش.

گام اول: باید یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم تا بتوانیم از نسبت‌های مثلثاتی در آن استفاده کنیم. به همین خاطر، ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم:



هدف، محاسبه طول ضلع CD است، پس آن را x می‌گیریم و در نتیجه طول ضلع BC برابر $15 + x$ می‌شود. از آن جا که مثلث ABC متساوی‌الساقین است، ارتفاع AH میانه نیز هست، پس $BH = HC = \frac{15+x}{2}$ است.

گام دوم: برای این که در مثلث AHD از $\tan \alpha$ استفاده کنیم، لازم است ابتدا طول ارتفاع AH را بر حسب x حساب کنیم و برای این کار هم در یکی از مثلث‌های AHC یا AHB از قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$12^2 = \left(\frac{15+x}{2}\right)^2 + AH^2 \Rightarrow 144 = \frac{225 + 30x + x^2}{4} + AH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 144 - \frac{225 + 30x + x^2}{4} = \frac{351 - 30x - x^2}{4}$$

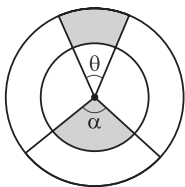
گام سوم: حال می‌توانیم از $\tan \alpha$ استفاده کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{AH}{HD} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{AH^2}{HD^2} = \frac{351 - 30x - x^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{351 - 30x - x^2}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow 7x^2 - 210x + 1575 = 1404 - 120x - 4x^2 \Rightarrow 11x^2 - 90x + 171 = 0$$

با توجه به گزینه‌ها و چک کردن مقادیر آن‌ها، می‌بینیم که $x = 3$ جواب معادله بالا است، در نتیجه $CD = 3$ است.

در شکل زیر، دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۶ و ۸ مفروض‌اند. اگر محیط‌ها و مساحت‌های دو ناحیه سایه‌خورده برابر باشند، زاویه α



یعنی محیط‌ها برابر و مساحت‌ها نیز برابر باشند.

بر حسب رادیان کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

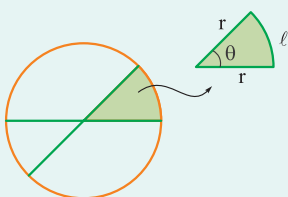
(۳) $\frac{2}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$



قطاع

درس‌Box

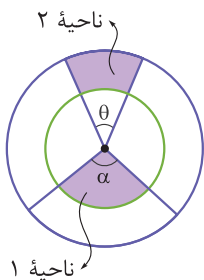


برشی مانند قسمت رنگی شکل مقابل از یک دایره را قطاع می‌نامیم:

اگر شعاع دایره r باشد، طول کمان روبه‌رو به زاویه θ از رابطه $l = r\theta$ به دست می‌آید که θ بر حسب رادیان است، پس محیط قطاع برابر $P = 2r + r\theta$ است.

هم‌چنین مساحت قطاع از رابطه $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ به دست می‌آید.

گام اول: طبق درس‌باکس محیط‌ها و مساحت‌ها را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



$$\left. \begin{array}{l} \text{ناحیه ۱} \\ \text{محیط: } P_1 = 2(6) + 6\alpha = 12 + 6\alpha \\ \text{مساحت: } S_1 = \frac{1}{2}\alpha(6)^2 = 18\alpha \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ناحیه ۲} \\ \text{محیط: } P_2 = 6\theta + 8\theta + 2(8-6) = 14\theta + 4 \\ \text{مساحت: } S_2 = \frac{1}{2}\theta(8)^2 - \frac{1}{2}\theta(6)^2 = 32\theta - 18\theta = 14\theta \end{array} \right\}$$

گام دوم: محیط‌ها را با هم و مساحت‌ها را نیز با هم برابر می‌گیریم:

$$\text{برابری محیط‌ها: } 12 + 6\alpha = 14\theta + 4 \Rightarrow 4 + 3\alpha = 7\theta$$

$$\text{برابری مساحت‌ها: } 18\alpha = 14\theta \Rightarrow 9\alpha = 7\theta$$

مشخص است که 9α و $4 + 3\alpha$ باید با هم برابر باشند:

$$9\alpha = 4 + 3\alpha \Rightarrow 6\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \text{ rad}$$

اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\tan \alpha > \cot \alpha$ باشد، زاویه α بر حسب رادیان، کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{29\pi}{20} \quad (4)$$

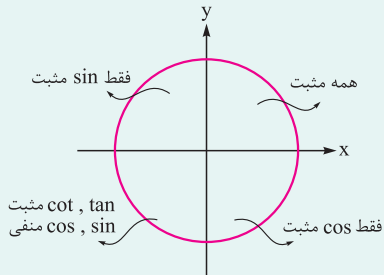
$$\frac{33\pi}{20} \quad (3)$$

$$\frac{17\pi}{20} \quad (2)$$

$$\frac{13\pi}{20} \quad (1)$$

دایره مثلثاتی

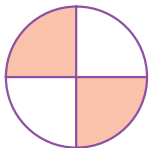
می‌دانیم که دایره مثلثاتی، دایره‌ای است با شعاع ۱ که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات است. علامت نسبت‌های مثلثاتی در این دایره در شکل زیر آمده است:



حال برای درک بهتر، حدود انتهایی کمان θ را که به ازای آن‌ها رابطه مورد نظر برقرار باشد، در هر شکل نشان داده‌ایم:

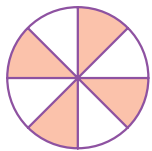
$\sin \theta > \cos \theta$		$ \sin \theta > \cos \theta $ $ \tan \theta > \cot \theta $	
$\cos \theta > \sin \theta$		$ \cos \theta > \sin \theta $ $ \cot \theta > \tan \theta $	
$\tan \theta > \cot \theta$		$\cot \theta > \tan \theta$	

و با همین منطق می‌شود روابط بیشتری را نوشت و حدود قابل قبول برای انتهایی کمان θ را مشخص کرد. این تمرین خودتان باشد.



گام اول: $\sin \alpha \cos \alpha$ منفی است، پس $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ غیر هم‌علامت‌اند. این

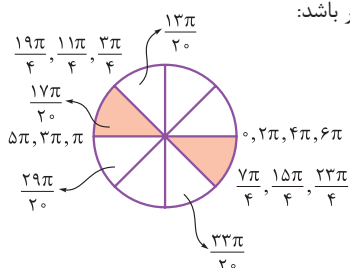
یعنی انتهایی کمان α در ربع‌های دوم یا چهارم است.



گام دوم: طبق درس‌بکس، انتهایی کمان α باید در ناحیه مشخص‌شده شکل زیر

باشد تا رابطه $\tan \alpha > \cot \alpha$ برقرار باشد:

گام سوم: از اشتراک دو نمودار رسم‌شده، حدود انتهایی کمان α باید مطابق شکل زیر باشد:



$$\frac{3\pi}{4} < \frac{17\pi}{20} < \pi$$

که در بین گزینه‌ها فقط $\frac{17\pi}{20}$ شرایط لازم را دارد:



اگر نمودار تابع $y = a + b \sin\left(\frac{x}{ab}\right)$ را ۳ واحد به بالا انتقال دهیم، از بالا بر خط $y = 8$ و اگر ۵ واحد به پایین انتقال دهیم، از پایین بر خط $y = -8$ مماس می‌شود. دوره تناوب این تابع کدام است؟

۱۲π (۴)

۴π (۳)

۶π (۲)

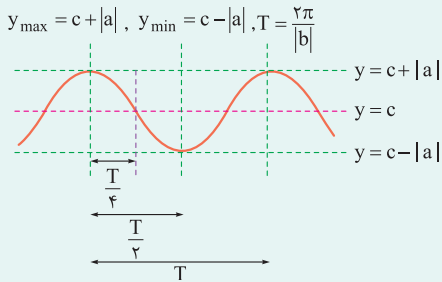
۸π (۱)



کافیست که انتقال لازم رو انجام بدی و فرمول‌های max و min رو بنویسی.



نمودار توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ در حالت کلی به صورت زیر است و روابط زیر برای مقادیر ماکزیمم و مینیمم و هم‌چنین دوره تناوب آن‌ها برقرار است.



● فاصله هر دو ماکزیمم متوالی یا هر دو مینیمم متوالی برابر T است.

● فاصله افقی یک ماکزیمم با مینیمم مجاورش، برابر نصف دوره تناوب $\left(\frac{T}{2}\right)$ است.

گام اول: در ابتدا انتقال‌های مفروض صورت سؤال را انجام می‌دهیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$y = a + b \sin \frac{x}{ab} \begin{cases} \xrightarrow{\text{۳ واحد به بالا}} f(x) = a + 3 + b \sin \frac{x}{ab} \\ \xrightarrow{\text{۵ واحد به پایین}} g(x) = a - 5 + b \sin \frac{x}{ab} \end{cases}$$

گام دوم: حالا با توجه به انتقال‌های گفته شده، متوجه می‌شویم که ماکزیمم تابع f برابر ۸ و مینیمم تابع g برابر -8 است، پس داریم:

$$a + 3 + |b| = 8 \Rightarrow a + |b| = 5$$

$$a - 5 - |b| = -8 \Rightarrow a - |b| = -3$$

گام سوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + |b| = 5 \\ a - |b| = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} |b| = 4$$

گام چهارم: حال دوره تناوب تابع اولیه را به دست می‌آوریم:

$$y = a + b \sin \frac{x}{ab} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{|ab|}} = 2|ab|\pi \xrightarrow{a=1} 2a|b|\pi \xrightarrow{|b|=4} T = 8\pi$$

متمم و مکمل زاویه θ به ترتیب زوایای α و β هستند. کدام رابطه همواره برقرار است؟

$$\begin{cases} \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \\ \beta + \theta = \pi \end{cases}$$

$$\sin \beta + \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\cos \beta + \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\cos \theta - \cos \beta = 0 \quad (3)$$

$$\sin \theta + \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

9



می‌تونی زوایای خاص رو در نظر بگیری و مقدار دهی کنی.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ روش اول:

گام اول: θ و α متمم و θ و β مکمل هستند، پس اگر فرض کنیم $\theta = 3^\circ$ باشد، $\alpha = 6^\circ$ و $\beta = 15^\circ$ خواهد بود.

گام دوم: روابط گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

$$\sin 15^\circ + \cos 6^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0 \quad \times \quad \text{گزینه (1):}$$

$$\cos 15^\circ + \sin 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \checkmark \quad \text{گزینه (2):}$$

$$\cos 3^\circ - \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \neq 0 \quad \times \quad \text{گزینه (3):}$$

$$\sin 3^\circ + \cos 6^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0 \quad \times \quad \text{گزینه (4):}$$

روش دوم:

گام اول: θ و α متمم و θ و β مکمل هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} \theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \theta + \beta = \pi \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

گام دوم: اگر $\cos \beta$ را حساب کنیم، داریم:

$$\cos \beta = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha \Rightarrow \cos \beta + \sin \alpha = 0$$



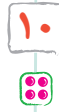
حاصل عبارت $P = \frac{2 \sin 252^\circ - \cos 198^\circ}{3 \cos 162^\circ + \sin 108^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$



اگر دقت کنی تو همه زوایا 18° رو می بینی.

Hint

دروس Box

نسبت های مثلثاتی زاویه های به شکل $k\pi \pm \alpha$

زاویه α را حاده در نظر می گیریم. در آن طرف مساوی همان نسبت را برای α می نویسیم (مثلاً $\sin(k\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$)، سپس مشخص می کنیم که $k\pi \pm \alpha$ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می گیرد. اگر نسبت اولیه در آن ناحیه مثبت بود، پشت حاصل مثبت و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می دهیم، نگاه کنید:

$$\begin{array}{ll} \text{ربع چهارم } (\sin < 0) & \text{ربع سوم } (\cos < 0) \\ \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha & \cos(3\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ربع دوم } (\sin > 0) & \text{ربع سوم } (\tan > 0) \\ \sin(\pi - \alpha) = +\sin \alpha & \tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha \end{array}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های به شکل $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ (فرد k)

α را حاده در نظر می گیریم. اگر \sin داشتیم در آن طرف مساوی می نویسیم $\cos \alpha$ (و بالعکس) و اگر \tan داشتیم در آن طرف مساوی می نویسیم $\cot \alpha$ (و بالعکس)، سپس تعیین می کنیم که $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ در کدام ربع مثلثاتی قرار می گیرد. اگر نسبت اولیه در آن جا مثبت بود، پشت حاصل، مثبت قرار می دهیم و اگر منفی بود، پشت حاصل منفی قرار می دهیم. نگاه کنید:

$$\begin{array}{ll} \text{ربع چهارم } (\sin < 0) & \text{ربع دوم } (\cos < 0) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ربع سوم } (\tan > 0) & \text{ربع دوم } (\cot < 0) \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha \end{array}$$

فلامه بگم! $k\pi$ نسبت رو عوض نمی کنه، ولی $\frac{k\pi}{2}$ (فرد k) نسبت رو عوض می کنه. برای تعیین علامت هم کافیست ببینی که عبارت داخل پرانتز در کدام ربع قرار می گیره.

گام اول: همه زوایا را بر حسب زاویه 18° می نویسیم؛ زیرا با نزدیک ترین مضرب 9° ، فقط 18° اختلاف دارند:

$$\sin 252^\circ = \sin(270^\circ - 18^\circ) = -\cos 18^\circ$$

$$\cos 198^\circ = \cos(180^\circ + 18^\circ) = -\cos 18^\circ$$

$$\cos 162^\circ = \cos(180^\circ - 18^\circ) = -\cos 18^\circ$$

$$\sin 108^\circ = \sin(90^\circ + 18^\circ) = \cos 18^\circ$$

گام دوم: مقدار عبارت P را حساب می کنیم:

$$P = \frac{2(-\cos 18^\circ) - (-\cos 18^\circ)}{3(-\cos 18^\circ) + (\cos 18^\circ)} = \frac{-\cos 18^\circ}{-2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده x ، رابطه $\sin^4 x - 4 \cos^4 x = 3 \sin^2 x \cos^2 x$ برقرار است. حاصل عبارت

$$P = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{3} \text{ (۱)}$$

۱۱



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا عبارت P را به گونه دیگری می‌نویسیم. اگر صورت و مخرج آن را بر $\cos x$ تقسیم کنیم، داریم:

$$P = \frac{3 \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{3 \tan x - 1}{\tan x + 1} \quad (*)$$

گام دوم: پس برای محاسبه P ، فقط به $\tan x$ نیاز داریم. برای محاسبه $\tan x$ نیز طرفین تساوی فرض سؤال را بر $\sin^2 x \cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{4 \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{4 \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}} = \frac{3 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x - \frac{4}{\tan^2 x} = 3$$

$$\xrightarrow{\times \frac{\tan^2 x}{\tan x \neq 0}} \tan^4 x - 4 = 3 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow \tan^4 x - 3 \tan^2 x - 4 = 0$$

گام سوم: برای حل معادله از متغیر جدید $k = \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم:

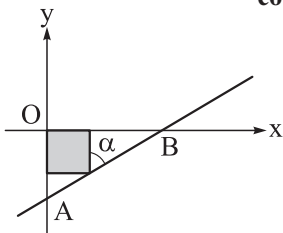
$$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} k_1 = -1, k_2 = 4$$

$\tan^2 x$ که نمی‌تواند منفی باشد، پس $\tan^2 x = 4$ است. از طرفی x حاده است و تانژانت آن مثبت، پس $\tan x = 2$ است.

گام چهارم: طبق رابطه (*) مقدار عبارت P به دست می‌آید:

$$P = \frac{3(2) - 1}{(2) + 1} = \frac{5}{3}$$

در شکل زیر، مساحت مثلث AOB ، $\frac{\lambda}{3}$ برابر مساحت مربع رنگی است. حاصل عبارت $P = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$ کدام می‌تواند باشد؟



۳ (۲)

 $\frac{2}{2}$ (۱) $\frac{4}{3}$ (۴)

۲ (۳)

۱۲



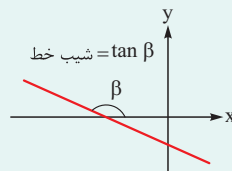
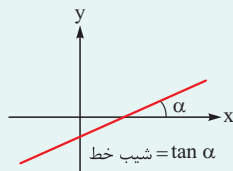
باید شیب خط رو حساب کنی. شیب خط و مثلثات چه ارتباطی دارن؟ ... آفرین، تانژانت.

Hint

درسی Box

شیب خط و تانژانت

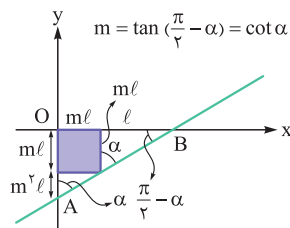
در معادله خط $y = ax + b$ ، شیب خط که همان a باشد، برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با قسمت مثبت محور x ها می‌سازد:



اتجاهای مثلثاتی

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha, \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$



گام اول: فرض می‌کنیم شیب خط برابر m باشد، پس داریم: **پاسخ خیلی تشریحی** ✓

پس روی شکل مسئله، اندازه‌های لازم را بر حسب m داریم.

گام دوم: فرض مسئله را پیاده می‌کنیم: مساحت مثلث AOB ، $\frac{\lambda}{3}$ برابر مساحت مربع است.

$$\Rightarrow \frac{(m+1)l \times (m+m^2)l}{2} = \frac{\lambda}{3} m^2 l^2 \Rightarrow \frac{m(m+1)^2}{2} = \frac{\lambda}{3} m^2 \xrightarrow{\div m} m^2 + 2m + 1 = \frac{16}{3} m$$

$$\Rightarrow m^2 - \frac{10}{3}m + 1 = 0 \Rightarrow (m - \frac{1}{3})(m - 3) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \text{ یا } 3$$

گام سوم: پس $\cot \alpha$ برابر $\frac{1}{3}$ یا 3 و در نتیجه $\tan \alpha$ برابر 3 یا $\frac{1}{3}$ است. حال عبارت P را بر حسب $\tan \alpha$ ساده می‌کنیم:

$$P = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = 4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{اتجاهای درس باکس}} P = 4 \tan \alpha - (1 + \tan^2 \alpha) = -\tan^2 \alpha + 4 \tan \alpha - 1$$

گام چهارم: مقادیر $\tan \alpha = 3$ و $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\tan \alpha = 3 : P = -9 + 12 - 1 = 2$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{3} : P = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{2}{9}$$



۱۳

به ازای چند عدد طبیعی و یک رقمی a ، تابع $y = 2 \sin \frac{ax}{4}$ روی بازه $(\pi, 2\pi)$ غیریکنوا است؟

شامل حداقل یک ماکزیمم یا مینیمم است.

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برای این که تابع داده شده روی بازه $(\pi, 2\pi)$ غیریکنوا باشد، کافی است این بازه شامل حداقل یک نقطه ماکزیمم یا حداقل یک نقطه مینیمم باشد.

گام دوم: این را می دانیم که نقاط به طول $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ماکزیمم یا مینیمم نمودار تابع سینوس هستند. طول این نقاط در تابع

$y = 2 \sin \frac{ax}{4}$ به $\frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{a} = \frac{(4k+2)\pi}{a}$ تبدیل می شود. برای غیریکنوایی، این نقاط باید درون بازه $(\pi, 2\pi)$ باشند:

$$\Rightarrow \pi < \frac{4k+2}{a} \pi < 2\pi \Rightarrow 1 < \frac{4k+2}{a} < 2 \xrightarrow{a \text{ مثبت است}} 2k+1 < a < 2(2k+1)$$

گام سوم: در بین اعداد طبیعی یک رقمی داریم:

$$k=0: 1 < a < 2 \Rightarrow \emptyset$$

$$k=1: 3 < a < 6 \Rightarrow a=4, 5$$

$$k=2: 5 < a < 10 \Rightarrow a=6, 7, 8, 9$$

در نتیجه شش مقدار طبیعی و تک رقمی برای a پیدا می شود.

۱۴

اندازه دوره تناوب تابع $f(x) = 2a - 1 - 3 \sin \frac{\pi x}{a}$ از اندازه ماکزیم آن یک واحد بیشتر است. کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{a} f(x) + a$ کدام است؟

$$-\frac{13}{6} \quad (2)$$

$$-\frac{13}{12} \quad (1)$$

$$-\frac{17}{12} \quad (4)$$

$$-\frac{17}{6} \quad (3)$$



Hint باز هم اون سه فرمول مهم، فقط یک معادله قدرمطلقى هم لابه‌لاش باید حل کنی.

گام اول: ابتدا اندازه دوره تناوب و اندازه ماکزیم تابع را حساب می‌کنیم:

$$\max\{f(x)\} = 2a - 1 + |-3| = 2a + 2 \quad \text{بیشترین مقدار}$$

$$\text{دوره تناوب: } T_f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{|a|}} = 2|a|$$

گام دوم: فرض مسئله را پیاده می‌کنیم:

$$\frac{T_f - \max\{f(x)\} = 1}{2|a| - 2a - 2 = 1} \Rightarrow |a| - a = \frac{3}{2}$$

واضح است که a منفی است، چون اگر مثبت باشد به تساوی غیرممکن $\frac{3}{2} = 0$ می‌رسیم.

$$\xrightarrow{a < 0} -a - a = -2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

گام سوم: ضابطه تابع f را تکمیل می‌کنیم:

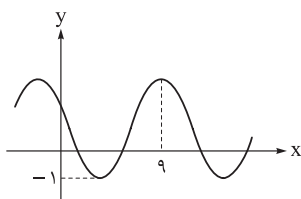
$$f(x) = \overbrace{-\frac{2a-1}{2}}^{-\frac{5}{2}} - 3 \sin \frac{\pi x}{\frac{4}{3}} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{2} + 3 \sin \frac{4\pi x}{3}$$

و سپس ضابطه تابع $y = \frac{1}{a} f(x) + a$ را می‌نویسیم:

$$y = \frac{1}{-\frac{3}{4}} \left(-\frac{5}{2} + 3 \sin \frac{4\pi x}{3} \right) - \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{10}{3} - 4 \sin \frac{4\pi x}{3} - \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{31}{12} - 4 \sin \frac{4\pi x}{3}$$

کمترین مقدار این تابع برابر $\frac{31}{12} - 4 = -\frac{17}{12}$ است.

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است. دوره تناوب تابع $g(x) = \cos\left(\frac{x}{ab}\right)$ کدام است؟



$$\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (4)$$

۱۵



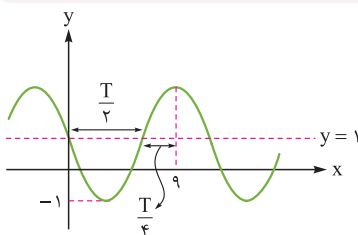
Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ببین انتقال افقی داریم یا نه؟ اگر نداریم دوره تناوب مشخصه و از اون فرمول های مهم استفاده کن.

گام اول: عرض از مبدأ تابع برابر ۱ است و خط $y = 1$ ، خط وسط نمودار تابع است.

این خط را رسم می کنیم:



با توجه به شکل و اندازه های روی آن، $\frac{3}{4}$ برابر دوره تناوب، برابر ۹ شده است:

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{4} = \frac{3T}{4} = 9 \Rightarrow T = 12$$

گام دوم: مقدار مینیمم تابع را هم داریم، پس از فرمول های مهم استفاده می کنیم:

$$y_{\min} = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 12 \Rightarrow |b| = \frac{1}{6}$$

$$T_g = \frac{2\pi}{1} = 2|a||b|\pi$$

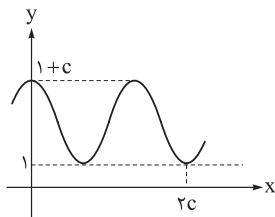
$$T_g = 2 \times 2 \times \frac{1}{6} \pi = \frac{2}{3} \pi$$

گام سوم: دوره تناوب تابع $g(x) = \cos\left(\frac{x}{ab}\right)$ از رابطه زیر به دست می آید:

و با مقادیر به دست آمده در گام دوم داریم:

۱۶

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin^2(ax)$ به صورت زیر است. مقدار b کدام است؟



-۰ / ۵ (۱)

۰ / ۷۵ (۲)

-۰ / ۷۵ (۳)

۰ / ۵ (۴)



Hint

فرمول‌های ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب رو بنویس، ولی با به کم تغییر.

گام اول: به ازای $x = 0$ مقدار ماکزیمم رخ داده است:

$$y_{\max} = 1 + c \Rightarrow f(0) = a = 1 + c \quad (1)$$

و به ازای $\sin^2 = 1$ مقدار مینیمم تابع رخ داده است:

$$y_{\min} = 1 \Rightarrow a + b = 1 \quad (2)$$

گام دوم:

دوره تناوب تابع $y = \sin^2 mx$ از رابطه $\frac{\pi}{|m|}$ به دست می‌آید. دقت دارید که با فرمول اصلی، یک عدد ۲ فرق دارد.



در این سؤال، با توجه به نمودار، $2c$ یک و نیم برابر دوره تناوب تابع است:

$$\Rightarrow \frac{2T}{2} = 2c \Rightarrow T = \frac{4c}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{نکته}} \frac{\pi}{|a|\pi} = \frac{4c}{3} \Rightarrow \frac{1}{|a|} = \frac{4c}{3} \Rightarrow |a|c = \frac{3}{4} \quad (3)$$

گام سوم: دستگاه سه معادله - سه مجهول را حل می‌کنیم. فقط دقت کنید که a مثبت است. (از روی شکل تا بلو نیست؟)

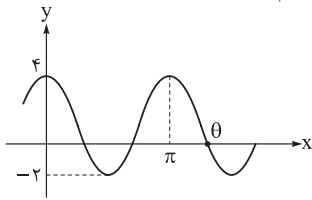
$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a + b = 1 \\ ac = \frac{3}{4} \end{cases}$$

از معادله اول $c = a - 1$ را در معادله سوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a(a-1) = \frac{3}{4} \Rightarrow \underbrace{4a^2 - 4a}_{4a^2 - 4a + 1 - 1} = 3 \Rightarrow (2a-1)^2 = 4 \Rightarrow 2a-1 = \pm 2$$

$$\xrightarrow{a > 0} 2a-1=2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b = -\frac{1}{2}$$

بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos cx$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $\sin^2 2\theta$ کدام است؟



- ۱۷
- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{8}{9}$
- (۴) $\frac{4}{9}$



Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

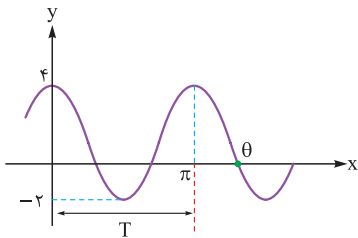
سه تا رابطه کلیدی و مهم رو فراموش نکن، همه جا کارسازه.

گام اول: ابتدا باید ضابطه تابع را پیدا کنیم، یعنی پیدا کردن مقادیر پارامترهای a ، b و c . از روابط مهم y_{\max} ، y_{\min} و T استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} y_{\max} = 4 \Rightarrow a + |b| = 4 \\ y_{\min} = -2 \Rightarrow a - |b| = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} |b| = 3$$

فاصله دو ماکزیمم متوالی تابع برابر π است، پس $T = \pi$ است.

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2$$



گام دوم: حال در مورد علامت پارامترها صحبت کنیم.

نمودار تابع کسینوسی بدون انتقال افقی، در $x = 0$ ماکزیمم دارد، پس ضریب آن یعنی b مثبت است. تابع کسینوس نسبت به علامت کمان ورودی خنثی است؛ یعنی فرقی نمی کند c مثبت باشد یا منفی.

در نهایت ضابطه تابع به صورت $f(x) = 1 + 3 \cos 2x$ نوشته می شود.

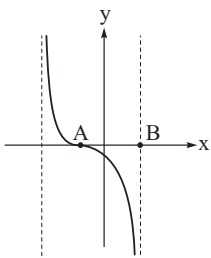
گام سوم: $x = \theta$ یکی از صفرهای تابع است، یعنی $f(\theta) = 0$ است و داریم:

$$f(\theta) = 1 + 3 \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$



نمودار تابع $y = 1 + \tan(ax - \frac{\pi}{3})$ در یک دوره تناوب به صورت زیر است. اگر طول پاره خط AB برابر π باشد، مقدار a کدام است؟



$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (4)$$

۱۸



از روش تبدیل نمودار برو، بین چه جوری $y = \tan x$ به نمودار $y = 1 + \tan(ax - \frac{\pi}{3})$ تبدیل می‌شه؟

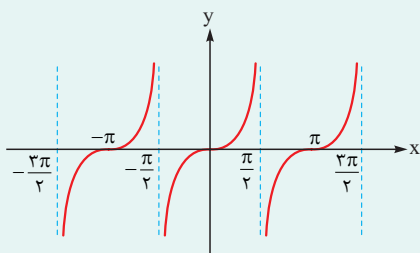
Hint

درسی Box

نمودار تابع تناوب

نمودار تابع $y = \tan x$ با دامنه $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ به صورت زیر است:

در این نمودار:



• مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، مجانب‌های قائم هستند.

• دوره تناوب تابع فاصله بین دو مجانب قائم متوالی است.

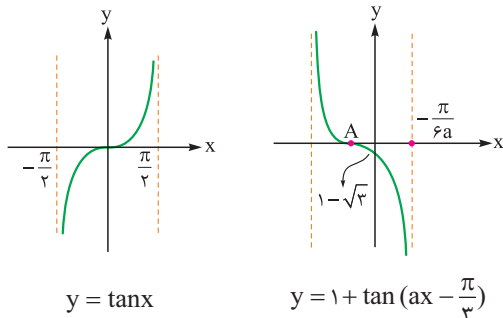
• صفرهای تابع مضارب صحیح π هستند.

• این تابع روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً صعودی است، اما روی دامنه‌اش غیریکنواست.

گام اول: در ابتدا باید بگوییم که a منفی است؛ زیرا تابع صورت سؤال اکیداً نزولی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: برای رسم نمودار تابع صورت سؤال، ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست می‌بریم؛ سپس طول نقاط آن را a تقسیم می‌کنیم و در انتها ۱ واحد به بالا می‌بریم:



$$y = \tan x$$

$$y = 1 + \tan(ax - \frac{\pi}{3})$$

گام سوم: طول نقطه A را پیدا می‌کنیم. در x_A مقدار تابع برابر صفر است:

$$\xrightarrow{x_A} 1 + \tan(ax_A - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow \tan(ax_A - \frac{\pi}{3}) = -1$$

$$\xrightarrow{a \text{ منفی است}} \tan(-ax_A + \frac{\pi}{3}) = 1 = \tan(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow -ax_A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$$

اولین کمان مثبتی که تناوب آن برابر ۱ است. مثبت شده است.

$$\Rightarrow x_A = \frac{12}{a} = \frac{\pi}{12a}$$

گام چهارم: طول پاره خط AB را برابر π قرار می‌دهیم:

$$x_B - x_A = -\frac{\pi}{6a} - \frac{\pi}{12a} = -\frac{3\pi}{12a} = -\frac{\pi}{4a} = \pi \Rightarrow 4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹ چه تعداد از متغیرهای «مدت زمان تأثیر دارو - مسافت مسیر پرتاب نیزه - تعداد کلاس‌های مدرسه - تعداد فرزندان یک خانواده» گسسته هستند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۰ (۰)



مشاوره مبحث رفع خستگی، یک بار برای همیشه یادش بگیر.

درس‌Box

متغیر کمی: متغیری که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است. متغیرهای کمی دو نوع هستند:

(۱) متغیر کمی پیوسته: متغیری که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. مثل مدت زمان پاسخ‌گویی به یک تست.

(۲) متغیر کمی گسسته: متغیری که پیوسته نباشد. مثل تعداد شرکت‌کنندگان در آزمون سراسری.

مدت زمان تأثیر دارو و مسافت مسیر پرتاب نیزه هر عددی را می‌تواند اختیار کند؛ بنابراین متغیرهای کمی پیوسته هستند.

تعداد کلاس‌های مدرسه و تعداد فرزندان یک خانواده متغیرهای کمی گسسته هستند. زیرا مثلاً نمی‌توان گفت یک خانواده دارای $۲/۵$ فرزند

است یا یک مدرسه دارای $\sqrt{۷}$ کلاس است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



نقاط (a, b) روی منحنی $y = \frac{5x-2}{x+1}$ قرار دارند. اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۰



مشاوره بخش نظریه اعداد پای ثابت
آزمون هاسته پس حسابی وقت بذار برایش.

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n | m$$

$$۱) a | b \Rightarrow a | mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$۲) a | b \wedge a | c \Rightarrow a | mb \pm nc \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$۳) a | a$$

Hint

نکته

گام اول: برای آن که $y = \frac{5x-2}{x+1}$ ، عددهای صحیح باشد باید $5x-2$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد، یعنی $5x-2$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد، یعنی $x+1 | 5x-2$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: با استفاده از نکات (۲) و (۳)، داریم:

$$\begin{cases} x+1 | x+1 \\ x+1 | 5x-2 \end{cases} \Rightarrow x+1 | 5(x+1) - (5x-2) \Rightarrow x+1 | 7 \Rightarrow x+1 = \pm 1, \pm 7$$

گام سوم: برای هر یک از مقادیر x ، مقدار y را به دست می آوریم:

$$x+1=1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-2 \quad \checkmark$$

$$x+1=-1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=12 \quad \checkmark$$

$$x+1=7 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=4 \quad \checkmark$$

$$x+1=-7 \Rightarrow x=-8 \Rightarrow y=6 \quad \checkmark$$

بنابراین چهار نقطه با مؤلفه‌های صحیح برای زوج مرتب (x, y) وجود دارد.

از رابطه $16x \equiv 12y \pmod{48}$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟

۲۱

$$x \equiv 0 \pmod{3} \quad (2)$$

$$y \equiv 0 \pmod{4} \quad (1)$$

$$3y \equiv 4x \pmod{12} \quad (4)$$

$$4x \equiv 3y \pmod{24} \quad (3)$$



Hint برو سراغ ویژگی‌های هم‌نهستی!



$$1) \quad ac \equiv bc \pmod{m}, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$2) \quad a \equiv b \pmod{m}, n | m \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا طرفین هم‌نهستی را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$(4) \quad 16x \equiv 12y \pmod{48} \xrightarrow[\text{نکته (1)}]{(4, 48)=4} 4x \equiv 3y \pmod{12} \quad \checkmark$$

$$(1) \quad 4x \equiv 3y \pmod{12} \xrightarrow{4|12} 4x \equiv 3y \pmod{4} \Rightarrow 0 \equiv 3y \pmod{4} \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{4} \quad \checkmark$$

$$(2) \quad 4x \equiv 3y \pmod{12} \xrightarrow{3|12} 4x \equiv 3y \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \quad \checkmark$$

$$(3) \quad 4x \equiv 3y \pmod{24} \quad \text{مثال نقض: } x=3, y=8$$



۲۲

اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $9n + 5$ و $7n - 4$ نسبت به هم اول نباشند، آن گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۹۷ (۴)

۸۳ (۳)

۷۱ (۲)

۶۱ (۱)



$$(a, b) = d \Rightarrow d | a, d | b$$

Hint

تعریف: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه:

درجین Box

الف) $d | a, d | b$

ب) $\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فرض کنیم $(7n - 4, 9n + 5) = d$ ؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d | 9n + 5 \\ d | 7n - 4 \end{cases}$$

گام دوم: می‌دانیم اگر $d | a$ و $d | b$ ، آن گاه $d | ma + nb$ ؛ پس داریم:

$$d | 7(9n + 5) - 9(7n - 4) \Rightarrow d | 71 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 71$$

گام سوم: چون $9n + 5$ و $7n - 4$ نسبت به هم اول نیستند $d \neq 1$ ؛ پس $d = 71$ قابل قبول است.



۲۳ اگر $a|b$ و $a|c$ ، کدام نتیجه گیری لزوماً درست نیست؟

$$a|b^2 + c \quad (۲)$$

$$a|b+c \quad (۱)$$

$$a^2|bc \quad (۴)$$

$$a^2|b+c \quad (۳)$$

Hint برو سراغ ویژگی‌های عاد کردن.



$$۱) a|b, a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$$

$$۲) a|b \Rightarrow a|b^n$$

$$۳) a|b, c|d \Rightarrow ac|bd$$

$$(۱) \text{ گزینه: } a|b, a|c \xrightarrow{\text{نکته (۱)}} a|b+c \quad \checkmark$$

$$(۲) \text{ گزینه: } a|b \xrightarrow{\text{نکته (۲)}} a|b^2, a|c \xrightarrow{\text{نکته (۱)}} a|b^2+c \quad \checkmark$$

$$(۳) \text{ گزینه: } a=۲, b=۶, c=۸ \Rightarrow ۲|۶, ۲|۸ \Rightarrow ۲^۲|۶+۸ \Rightarrow ۴|۱۴ \quad \times$$

$$(۴) \text{ گزینه: } a|b, a|c \xrightarrow{\text{نکته (۳)}} a^2|bc \quad \checkmark$$

پاسخ خیلی تشریحی



اگر a عددی صحیح و فرد و $a + 12$ بر b بخش پذیر باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم $a^2 + b^2 + 19$ بر a کدام است؟

۲۴

۷ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



مربع هر عدد فرد به شکل $8k + 1$ نوشته می شود.



نکته

گام اول: می دانیم a عددی صحیح و فرد است، بنابراین $a + 12$ نیز فرد است؛ پس شمارنده آن یعنی b نیز فرد است. **پاسخ خیلی تشریحی** ✓

گام دوم: طبق نکته بالا، مربع هر عدد فرد به شکل $8k + 1$ است؛ پس:

$$a^2 = 8k + 1, \quad b^2 = 8k' + 1$$

گام سوم:

$$a^2 + b^2 + 19 = (8k + 1) + (8k' + 1) + 19 = 8(k + k') + 21 = 8(k + k') + 16 + 5 = 8 \underbrace{(k + k' + 2)}_q + 5 = 8q + 5$$

پس باقی مانده $a^2 + b^2 + 19$ بر a برابر عدد ۵ است.

۲۵ اگر a, b, c سه عدد طبیعی بزرگتر از یک باشند به طوری که $a^2 | b^3$ و $b^4 | c^5$ ، کدام گزینه درست است؟

$$a^6 | c^{11} \quad (۲)$$

$$a^5 | c^9 \quad (۱)$$

$$a^8 | c^{15} \quad (۴)$$

$$a^7 | b^{10} \quad (۳)$$



$$۱) a | b \Rightarrow a^n | b^n$$

$$۲) a | b, b | c \Rightarrow a | c \text{ (خاصیت تعدی)}$$

$$\begin{cases} a^2 | b^3 & \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۴} a^8 | b^{12} \\ b^4 | c^5 & \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۳} b^{12} | c^{15} \end{cases} \xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} a^8 | c^{15}$$

مثال نقض بقیه گزینه‌ها:

$$a = ۲^{۱۵}, b = ۲^{۱۰}, c = ۲^۸$$

$$(۱) \text{ گزینه: } (۲^{۱۵})^۵ | (۲^۸)^۹ \Rightarrow ۲^{۷۵} | ۲^{۷۲} \quad \times$$

$$(۲) \text{ گزینه: } (۲^{۱۵})^۶ | (۲^۸)^{۱۱} \Rightarrow ۲^{۹۰} | ۲^{۸۸} \quad \times$$

$$(۳) \text{ گزینه: } (۲^{۱۵})^۷ | (۲^{۱۰})^{۱۰} \Rightarrow ۲^{۱۰۵} | ۲^{۱۰۰} \quad \times$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۴۰ وجود دارد که دارای چهار مقسوم‌علیه طبیعی باشد؟

۲۶

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)



یعنی به جز ۱ و خودش باید دو مقسوم‌علیه طبیعی دیگر داشته باشد.

Hint

گام اول: عدد باید به صورت $n = pq$ که p و q دو عدد اول متمایزند یا به صورت $n = p^3$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

$$۱) n = pq \Rightarrow n \text{ مقسوم‌علیه‌های } \{1, p, q, pq\}$$

$$۲) n = p^3 \Rightarrow n \text{ مقسوم‌علیه‌های } \{1, p, p^2, p^3\}$$

گام دوم: عددهای به فرم p^3 و کوچک‌تر از ۴۰ برابرند با:

$$۲^3, ۳^3$$

گام سوم: عددهای به فرم pq و کوچک‌تر از ۴۰ برابرند با:

$$۲ \times ۳, ۲ \times ۵, ۲ \times ۷, ۲ \times ۱۱, ۲ \times ۱۳, ۲ \times ۱۷, ۲ \times ۱۹$$

$$۳ \times ۵, ۳ \times ۷, ۳ \times ۱۱, ۳ \times ۱۳$$

$$۵ \times ۷$$

گام چهارم: بنابراین $۲ + ۱۲ = ۱۴$ عدد کوچک‌تر مساوی ۴۰ با چهار مقسوم‌علیه طبیعی وجود دارد.

باقی مانده تقسیم عدد $(18^{43} - 15^{43}) \times 7$ بر عدد ۳۰ چه قدر است؟

۲۷

۸ (۲)

۷ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)



مشاوره همنهشتی و بخش پذیری از مباحث مهم نظریه اعداد است که با حل تست‌های مختلف می‌تونی تسلط نسبی روی این مبحث پیدا کنی. ارزش نترس و برو سراغش.



نکته

$$1) \quad ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$2) \quad \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$$

گام اول: ابتدا باقی‌مانده تقسیم عبارت داده شده را بر ۵ و ۶ به دست می‌آوریم:

گام دوم:

$$18 \equiv 3, 15 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 18^{43} \equiv 3^{43} \pmod{5}$$

$$3^2 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{42} \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{43} \equiv -3 \pmod{5}$$

$$18^{43} - 15^{43} \equiv -3 \pmod{5} \xrightarrow{\times 7} (18^{43} - 15^{43}) \times 7 \equiv -21 \equiv 9 \pmod{5}$$

گام سوم:

$$18 \equiv 0, 15 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$3^2 \equiv 3 \pmod{6} \Rightarrow 3^{43} \equiv 3 \pmod{6}$$

$$18^{43} - 15^{43} \equiv -3 \pmod{6} \xrightarrow{\times 7} (18^{43} - 15^{43}) \times 7 \equiv -21 \equiv 9 \pmod{6}$$

گام چهارم: از گام‌های دوم و سوم نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} (18^{43} - 15^{43}) \times 7 \equiv 9 \pmod{5} \\ (18^{43} - 15^{43}) \times 7 \equiv 9 \pmod{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{نکته (۲)}} (18^{43} - 15^{43}) \times 7 \equiv 9 \pmod{[5, 6] = 30}$$



تعداد اعداد سه رقمی a به طوری که $13^a \equiv 1 \pmod{17}$ کدام است؟

۲۸

۲۲۵ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۷۵ (۲)

۱۲۵ (۱)



دنبال توانی از ۱۳ باش که در همزهشتی به پیمانه ۱۷ باقی مانده ۱ داشته باشه.

Hint

گام اول: می دانیم $13 \equiv -4 \pmod{17}$ ، پس به جای ۱۳ قرار می دهیم -4 .

گام دوم: می خواهیم $13^a \equiv 1 \pmod{17}$ را داشته باشیم. از $(-4)^2 = 16$ شروع می کنیم:

$$(-4)^{17} \equiv -1 \Rightarrow (-4)^{2n} \equiv (-1)^n$$

برای آن که $(-1)^n = 1$ شود باید n زوج باشد؛ پس:

$$n = 2k \Rightarrow a = 2n = 4k$$

گام سوم: دنبال اعداد سه رقمی a هستیم:

$$1000 \leq a < 10000 \Rightarrow 1000 \leq 4k < 10000 \xrightarrow{\div 4} 250 \leq k < 2500$$

$$\Rightarrow k = 25, 26, \dots, 249 \Rightarrow 225 \text{ مقدار مختلف}$$

پاسخ خیلی تشریحی

هنگامه

۲۹

به ازای کدام مجموعه مقادیر k دستگاه معادلات

$$\begin{cases} (k+3)x + 3y = 9 \\ 4x + (k-1)y = 6 \end{cases}$$

فاقد جواب است؟

(۱) $\{3\}$ (۲) $\{-5\}$ (۳) $\{-5, -2\}$ (۴) $\{4, -2\}$

مشاوره درس باکس را حتماً بخوانید و روی حالت‌های مختلف تعداد جواب‌های دستگاه‌های دو معادله، دو مجهول خطی مسلط باشید. این تیپ سؤال‌ها، سؤال‌های پرتکراری در آزمون‌های آزمایشی هستند که تا پایان سال تحصیلی در آزمون‌های بعدی هم با آن‌ها مواجه خواهید شد.

Hint

در دستگاه دو معادله، دو مجهول خطی:

(۱) اگر دو خط تشکیل‌دهنده آن بر هم منطبق باشند، بی‌شمار جواب دارد.

(۲) اگر دو خط تشکیل‌دهنده آن متقاطع باشند، یک جواب دارد.

(۳) اگر دو خط تشکیل‌دهنده آن موازی (غیرمنطبق) باشند، جواب ندارد.

دروس

اگر دستگاه دو معادله، دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیریم، می‌توان گفت جواب این دستگاه، نقطه مشترک دو خط $L: ax + by = c$ و $L': a'x + b'y = c'$ است؛ پس:

(۱) اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، یعنی یکی از معادله‌ها ضربی از معادله دیگر باشد، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(۲) اگر این دو خط متقاطع باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر نباشد، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آن‌گاه دستگاه یک جواب (جواب منحصر به فرد) دارد.

(۳) اگر این دو خط موازی باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشد، ولی دو خط بر هم منطبق نباشند، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به درس باکس، باید این دستگاه معادلات نشان‌دهنده دو خط موازی باشد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{k+3}{4} = \frac{3}{k-1} \neq \frac{9}{6} \xrightarrow{(*)} k^2 - k + 3k - 3 = 12 \Rightarrow k^2 + 2k - 15 = 0$$

$$(k+5)(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -5 \Rightarrow \frac{3}{k-1} = \frac{3}{-6} \neq \frac{9}{6} \checkmark & \text{(موازی‌اند)} \\ k = 3 \Rightarrow \frac{3}{k-1} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6} \times & \text{(منطبق‌اند)} \end{cases}$$



مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$2 \sin 2\theta \quad (2)$$

$$2 \cos 2\theta \quad (1)$$

$$2 \cot 2\theta \quad (4)$$

$$2 \tan 2\theta \quad (3)$$

۳۰

مشاوره این سؤال ترکیبی از ماتریس و فرمول‌های مثلثاتی است. سؤال‌های ترکیبی بسیار مورد علاقه طراحان کنکور است.

Hint

وارون ماتریس را به دست بیاور و سپس ماتریس مورد نظر را محاسبه کن، البته به شرطی شروع به حل این سؤال کن که روی فرمول‌های مثلثاتی 2θ مسلط باشی!

درسی Box

$$(1) \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ آن گاه:}$$

$$|A| = ad - bc$$

(الف) دترمینان ماتریس A به این صورت تعریف می‌شود:

(ب) با شرط $|A| \neq 0$ ، ماتریس A وارون‌پذیر است و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(2) اگر A و B دو ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند به طوری که ضرب‌های ماتریسی بین آن‌ها قابل انجام باشد، آن گاه:

$$(rA) \times (sB) = (rs) A \times B = A \times (rs) B = (rs)(A \times B)$$

$$(3) \text{ یادآوری دو رابطه مثلثاتی: } \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}, \quad \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه ماتریس وارون):

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه حاصل ضرب):

$$\begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \begin{bmatrix} 1 - \tan^2 \theta & -2 \tan \theta \\ 2 \tan \theta & 1 - \tan^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} & \frac{-2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} & \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس برابر $2 \cos 2\theta$ است.

۳۱ A و B دو ماتریس وارون پذیر 2×2 اند؛ اگر $A - B = 2AB$ ، آن گاه حاصل $|B^{-1} - A^{-1}|$ کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

صفر (۴)

مشاوره گاهی وقتها از یک رابطه بین ماتریسها می‌خواهیم به یک رابطه دیگر برحسب وارون آنها برسیم، در این تیپ از سوالات طرفین تساوی را در وارون آن ماتریسها ضرب می‌کنیم طوری که بتوانیم ماتریسهای مورد نظرمان را بسازیم.

Hint

رابطه صورت سؤال را از سمت چپ در A^{-1} و از سمت راست در B^{-1} ضرب کن.

درس‌Box

(۱) ماتریس I، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریسهاست؛ یعنی $IA = AI = A$.

(۲) اگر A^{-1} وارون ماتریس مربعی A باشد، آن گاه: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

رابطه را ابتدا در A^{-1} از سمت چپ و سپس در B^{-1} از سمت راست ضرب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$A - B = 2AB \xrightarrow{\times(A^{-1}) \text{ از سمت چپ}} \underbrace{A^{-1}A}_I - A^{-1}B = 2 \underbrace{A^{-1}A}_I B \Rightarrow$$

$$I - A^{-1}B = 2B \xrightarrow{\times(B^{-1}) \text{ از سمت راست}} B^{-1} - A^{-1} \underbrace{BB^{-1}}_I = 2 \underbrace{BB^{-1}}_I$$

$$\Rightarrow B^{-1} - A^{-1} = 2I \xrightarrow{\text{محاسبه دترمینان}} |B^{-1} - A^{-1}| = |2I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 = 4$$

اگر $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ و $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ ، $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر

ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به دست بیاور و سپس با به توان دوم رساندن $A - B$ ، ماتریس حاصل $A^2 + B^2$ را به دست بیاور.

Hint

دربس Box

برای دو ماتریس وارون پذیر 2×2 داریم:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \text{ (الف)}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \text{ (ب)}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \text{ (پ)}$$

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \text{ (ت)}$$

گام اول (محاسبه AB و BA):

می‌دانیم $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ و $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ می‌باشند؛ بنابراین داریم:

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{20-21} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{48-49} \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -12 & 7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه $A^2 + B^2$):

چون $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$ است، پس:

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\dots)^2 = (\dots)^2} (A - B)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - AB - BA + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -30 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - \begin{bmatrix} -12 & 7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -30 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -30 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ 14 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 22 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 + B^2$ برابر با -3 است. $22 - 9 - 16 + 0 = -3$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & A \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ آن گاه دترمینان $A - I$ کدام است؟

۰/۵ (۲)

-۰/۵ (۱)

-۱/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

مشاوره سؤال ساده‌ای است که با دانستن نحوه محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 به دست می‌آید. مشابه این سؤال هم در کنکور و هم در امتحان نهایی آمد.

درس Box

دترمینان ماتریس 3×3

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ آن گاه دترمینان این ماتریس با بسط نسبت به سطر اول، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

به دست می‌آید.

دترمینان هر ماتریس 3×3 دلخواه را می‌توان برحسب هر سطر و ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصر به فرد است. ولی بهتر است براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می‌باشد تا محاسبات ساده‌تر بشود.

به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس 3×3 در محاسبه دترمینان به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول (محاسبه $|A|$):** برای محاسبه دترمینان ماتریس A سطر اول را در نظر می‌گیریم:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + |A| \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = -1 - |A| \Rightarrow |A| = \frac{-1}{2}$$

گام دوم (محاسبه ماتریس $A - I$ و دترمینان آن):

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان ماتریس بالا سطر اول را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow |A - I| = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \times -1 = \frac{1}{2} = 0/5$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه با فرض $ACA + BCB = ACB + BCA + I$ ، دترمینان ماتریس C کدام است؟ ۳۴

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)



درتس Box

(۱) خاصیت شرکت پذیری در ضرب ماتریس‌ها:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(۲) خاصیت توزیع پذیری ضرب ماتریس‌ها (از راست و چپ):

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C, \quad (B + C) \times A = B \times A + C \times A$$

$$A \times C = B \times C, \quad C \times A = C \times B$$

(۳) اگر $A = B$ ، آن گاه:

$$|A_1 A_2 \dots A_n| = |A_1| |A_2| \dots |A_n| \quad \text{اگر } A_n, \dots, A_2, A_1 \text{ ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن گاه}$$

گام اول (تبدیل عبارت صورت سؤال به یک عبارت ساده‌تر): با استفاده از خاصیت توزیع پذیری ضرب ماتریس، عبارت را ✓ پاسخ خیلی تشریحی

ساده می‌کنیم و در نهایت از دو طرف تساوی دترمینان می‌گیریم.

$$ACA + BCB = ACB + BCA + I \Rightarrow ACA - ACB + BCB - BCA = I \Rightarrow AC(A - B) - BC(A - B) = I$$

$$\Rightarrow (AC - BC)(A - B) = I \Rightarrow (A - B)C(A - B) = I \Rightarrow |A - B| |C| |A - B| = |I| = 1$$

گام دوم (محاسبه $|A - B|$):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - B| = 0 - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 = -2$$

گام سوم (محاسبه $|C|$): با توجه به گام اول و دوم داریم:

$$(-2) |C| (-2) = 1 \Rightarrow |C| = \frac{1}{4}$$

اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a & 4b & 6c \\ 3a^2 & 6b^2 & 9c^2 \end{bmatrix}$ برابر k باشد، دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 3bc & 6ac & 3ab \\ 6 & 4 & 2 \\ 3a & 2b & c \end{bmatrix}$ کدام است؟ ۲۵

$3k$ (۴)

$\frac{3}{2}k$ (۳)

$2k$ (۲)

k (۱)



Hint برای محاسبه دترمینان ماتریس B از عامل‌های مشترک هر سطر یا ستون ماتریس B فاکتور بگیر و سپس آن‌ها را در سطر یا ستون‌های مناسب ضرب کن تا به ماتریس A برسی.



اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریسی را در عدد ثابتی ضرب کنید، دترمینان آن ماتریس در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و بالعکس. اگر عدد ثابتی را در یک دترمینان ضرب کنیم، آن عدد ثابت تنها در درایه‌های یک سطر یا یک ستون دلخواه ضرب می‌شوند.



$$k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & kc \\ d & e & kf \\ g & h & ki \end{vmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (فاکتورگیری در سطر اول و دوم): در ماتریس B می‌توان در سطر اول از 3 و در سطر دوم از 2 فاکتور گرفت.

$$|B| = 3 \times 2 \begin{vmatrix} 3bc & 2ac & ab \\ 3 & 2 & 1 \\ 3a & 2b & c \end{vmatrix}$$

گام دوم (فاکتورگیری در ستون اول): هم‌چنین در ماتریس باقی‌مانده می‌توان در ستون اول از 3 و در ستون دوم از 2 فاکتور گرفت.

$$|B| = 3^2 \times 2^2 \begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

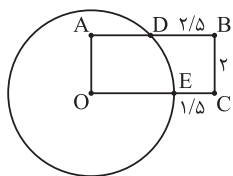
گام سوم (تبدیل ماتریس حاصل به ماتریس A): در مرحله بعد از عبارت abc در سطر اول فاکتور می‌گیریم و سپس a ، b و c را به ترتیب در ستون‌های اول، دوم و سوم ضرب می‌کنیم.

$$|B| = 3^2 \times 2^2 \times abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3^2 \times 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

سپس سطرهای دوم و سوم را به ترتیب در 2 و 3 و در مرحله آخر ستون‌های دوم و سوم را به ترتیب در 2 و 3 ضرب می‌کنیم.

$$|B| = 3 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a & 4b & 6c \\ 3a^2 & 6b^2 & 9c^2 \end{vmatrix} = |A| = k$$

مطابق شکل، O مرکز دایره و چهارضلعی $OABC$ مستطیل است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازه شعاع دایره کدام است؟



۲/۲۵ (۱)

۲/۵ (۲)

۲/۷۵ (۳)

۳ (۴)

۳۶

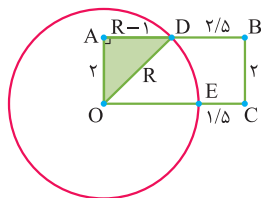


Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (محاسبه AD):

اگر شعاع دایره را R بگیریم، آن‌گاه $OE = OD = R$ و چون چهارضلعی مستطیل است، پس $AB = OC$ بنابراین
در نتیجه $AD + 2/5 = R + 1/5$. $AD = R - 1$

گام دوم (محاسبه R):

در مستطیل $OABC$ داریم: $OA = BC = 2$ حالا برای محاسبه R از فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OAD استفاده می‌کنیم:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2$$

$$R^2 = 2^2 + (R-1)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + R^2 + 1 - 2R \Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2/5$$

۳۷

در دایره $C(O, R)$ ، وتر AB به فاصله $\frac{1}{3}R$ از مرکز دایره واقع است. اگر عمود منصف وتر AB ، دایره را در M و N قطع کند.

مساحت چهارضلعی $AMBN$ چند برابر R^2 است؟

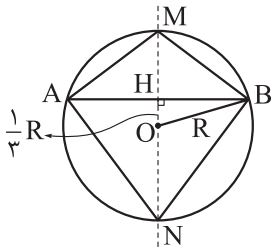
$$\frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (3)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه طول AB): در مثلث OHB طبق فیثاغورس داریم:



$$BH^2 = R^2 - \left(\frac{1}{3}R\right)^2 = \frac{8}{9}R^2 \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{2}}{3}R \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{2}}{3}R$$

گام دوم (محاسبه مساحت $AMBN$): قطرهای چهارضلعی $AMBN$ بر هم عمودند، پس مساحت برابر با نصف حاصل ضرب

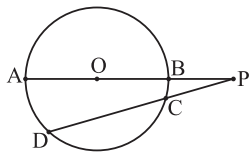
قطرهاست؛ بنابراین داریم:

$$S_{AMBN} = \frac{1}{2} AB \cdot MN = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}R\right)(2R) = \frac{4\sqrt{2}}{3}R^2$$

یادآوری: از سال دهم می‌دانیم مساحت چهارضلعی محدبی که قطرهای آن بر هم عمودند، برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای

آن.

مطابق شکل، نقطه O مرکز دایره و طول PC برابر با شعاع دایره است. اگر اندازه کمان BC برابر 15° باشد، فاصله مرکز دایره از PD



چند برابر شعاع است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$



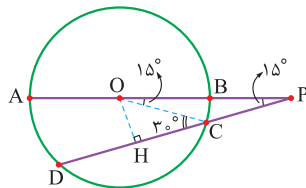
اندازه کمان BC را داری، پس از O به C وصل کن تا با استفاده از زاویه مرکزی روبه‌روی کمان BC و زاویه P، زاویه OCD را به دست بیاوری.

Hint

گام اول (رسم OC و OH): از نقطه O به PD عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. مطلوب مسئله اندازه OH است. همچنین از نقطه O به C وصل می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم (محاسبه \widehat{OCH}): زاویه BOC زاویه‌ای مرکزی است، پس این زاویه برابر با کمان مقابلش، یعنی 15° درجه است و چون بنا به فرض، OC و PC برابرند و مثلث OPC متساوی‌الساقین است (طول ساق‌ها برابر با شعاع دایره)، در نتیجه زاویه P نیز برابر 15° درجه است و بنابر زاویه خارجی در مثلث OCP داریم $\widehat{OCD} = \widehat{P} + \widehat{C} = 3^\circ$.



گام سوم (محاسبه طول OH بر حسب R):

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OHC داریم:

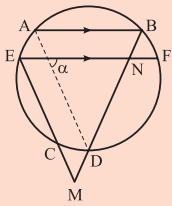
$$\sin 3^\circ = \frac{OH}{OC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{R} \Rightarrow OH = \frac{R}{2}$$

یعنی فاصله O از PD نصف شعاع دایره است.



۳۹

مطابق شکل $AB \parallel EF$ و $ME = EN = NM$ ، اگر $\widehat{FD} = \widehat{EC} = 21^\circ$ ، آن گاه زاویه α چند درجه است؟



۷۰ (۱)

۶۵ (۲)

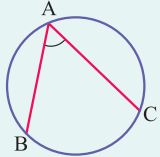
۷۲/۵ (۳)

۶۷/۵ (۴)

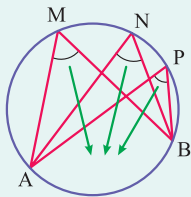
مشاوره این سؤال ترکیبی از محاسبه انواع زاویه‌ها در دایره است که مشابه آن را در کنکور دیده‌ایم.

درس Box

زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن واقع بر دایره و ضلع‌های آن وترهایی از دایره باشند. ثابت می‌شود که اندازه هر زاویه محاطی، نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است:



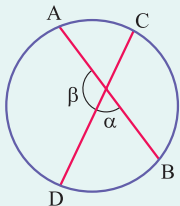
$$\hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{BC}$$



$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \dots = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

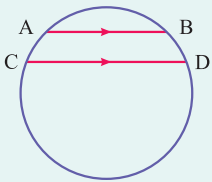
نکته همه زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم برابرند.

زاویه وتری داخلی: اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره، میانگین اندازه کمان‌های روبه‌روی آن است.



$$\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}) \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC})$$

نکته با استفاده از خاصیت زاویه محاطی می‌توان ثابت کرد کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، با هم مساوی‌اند.

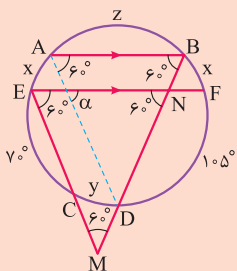


$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

گام اول (تحلیل سؤال): طبق فرض صورت سؤال $\widehat{FD} = 105^\circ$ و $\widehat{EC} = 70^\circ$ و از آنجایی **پاسخ خیلی تشریحی**

که AE و BF کمان‌های محصور بین وترهای موازی هستند پس هر دوی آن‌ها با هم برابرند و آن‌ها را x در نظر می‌گیریم. کمان

CD را y و کمان AB را نیز z در نظر می‌گیریم.





گام دوم (محاسبه اندازه کمانها x و y): مثلث ENM متساوی الاضلاع است، پس $\hat{E} = \hat{N} = \hat{M} = 60^\circ$ ، و چون $AB \parallel EF$ و BN مورب است، پس $\hat{N} = \hat{B} = 60^\circ$. زاویه های E و B محاطی هستند پس اندازه آنها برابر است با نصف کمان روبه روی آنها.

$$\hat{E} \rightarrow 60^\circ = \frac{y + 105^\circ}{2} \Rightarrow y = 15^\circ$$

$$\hat{B} \rightarrow 60^\circ = \frac{(70^\circ + 15^\circ) + x}{2} \Rightarrow x = 35^\circ$$

گام سوم (محاسبه α): زاویه بین دو وتر متقاطع AD و EF در دایره است؛ بنابراین داریم:

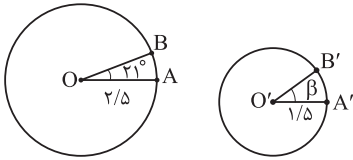
$$\alpha = \frac{\widehat{AE} + \widehat{DF}}{2} = \frac{105^\circ + 35^\circ}{2} = 70^\circ$$



مطابق شکل، در دو دایره $C(O, 2/5)$ و $C'(O', 1/5)$ طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابرند. اگر $\widehat{AOB} = 21^\circ$ ، آن گاه اندازه

۴۰

زاویه β چند درجه است؟



۳۲/۵ (۱)

۳۲ (۲)

۳۷/۵ (۳)

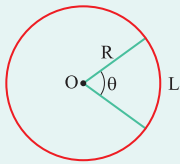
۳۵ (۴)



از فرمول محاسبه طول کمان‌ها استفاده کن و زاویه β را به دست بیاور. **Hint**



درس‌Box



طول کمانی از دایره به شعاع R که زاویه مرکزی نظیر آن θ درجه باشد، برابر است با $L = \frac{\theta}{180^\circ} \pi R$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول (محاسبه طول کمان‌ها):** طبق درس‌باکس داریم:

$$L_{AB} = \frac{21^\circ}{180^\circ} \times 2/5 \pi$$

$$L_{A'B'} = \frac{\beta}{180^\circ} \times 1/5 \pi$$

$$L_{AB} = L_{A'B'} \Rightarrow \frac{21^\circ}{180^\circ} \times 2/5 \pi = \frac{\beta}{180^\circ} \times 1/5 \pi \Rightarrow \beta = 35^\circ$$

گام دوم (محاسبه β):

طول دو کمان با هم برابر است، پس داریم:



فیزیک دوازدهم

۴۱

سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت $1/2 \text{ m/s}^2$ در مسیری مستقیم حرکت می کند، در دو ثانیه سوم، برابر صفر است. سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیه سوم چند متر بر ثانیه است؟

۹ (۴)

۱۸ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)



با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، ابتدا سرعت اولیه متحرک (v_0) را به دست آورید. سپس سرعت متحرک در لحظه های $t_1 = 5 \text{ s}$ و $t_2 = 15 \text{ s}$ را محاسبه کرده و به کمک رابطه $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را پیدا کنید.

(۱) اگر متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت کند و در یک بازه زمانی معین، جابه جایی آن صفر باشد (به محل اولیه خود برگردد)، دقیقاً در وسط این بازه زمانی، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می دهد.



(۲) اگر متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت کند و سرعت آن از v_1 به v_2 برسد، سرعت متوسط آن علاوه بر رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ از رابطه زیر نیز به دست می آید:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

گام اول: سرعت متحرک در دو ثانیه سوم حرکت ($4 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$) صفر است؛ بنابراین در لحظه $t_s = 5 \text{ s}$ سرعت متحرک صفر است. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \text{ s}$$

با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت اولیه (v_0) را حساب می کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=v_s=0, a=1/2 \text{ m/s}^2, t=t_s=5 \text{ s}} 0 = 1/2 \times 5 + v_0 \Rightarrow v_0 = -6 \text{ m/s}$$

گام دوم: ۵ ثانیه سوم حرکت یعنی از لحظه $t_1 = 10 \text{ s}$ تا $t_2 = 15 \text{ s}$. سرعت متحرک در هر یک از این دو لحظه را پیدا می کنیم:

$$v_1 = at_1 + v_0 \xrightarrow{a=1/2 \text{ m/s}^2, t_1=10 \text{ s}, v_0=-6 \text{ m/s}} v_1 = 1/2 \times 10 - 6 = 6 \text{ m/s}$$

$$v_2 = at_2 + v_0 \xrightarrow{a=1/2 \text{ m/s}^2, t_2=15 \text{ s}, v_0=-6 \text{ m/s}} v_2 = 1/2 \times 15 - 6 = 12 \text{ m/s}$$

گام سوم: اکنون می توانیم سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی 10 s تا 15 s را به دست آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9 \text{ m/s}$$

Hint

درس Box

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت، در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در

۴۲

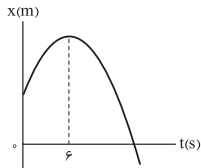
۵ ثانیه دوم چند برابر تندی متوسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{17}{8} \quad (3)$$

$$\frac{17}{10} \quad (4)$$

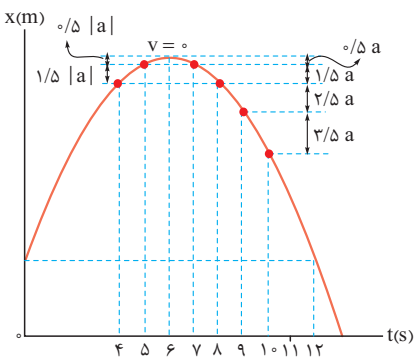
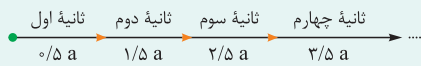


مشاوره در حل بعضی از سؤال‌های حرکت‌شناسی مانند این تست، شاید در ابتدا به نظر برسد که اطلاعات سؤال برای حل آن کافی نیست. اما با کمی دقت و تجربه می‌توان تکنیک‌های ریاضی و فیزیک را با هم ترکیب کرد و با حذف برخی کمیت‌ها به جواب رسید.

دربنی Box

وقتی متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a روی خط راست به حرکت در آید، جابه‌جایی‌های آن در ثانیه‌های متوالی، یک دنباله عددی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن، شتاب متحرک است. جابه‌جایی در ثانیه اول این حرکت همان جمله اول دنباله است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \xrightarrow[t=1s]{v_0=0} \Delta x_1 = \frac{1}{2} a (1)^2 = \frac{1}{2} a$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان داده شده در

لحظه $t = 6s$ صفر است. یعنی سرعت متحرک در این لحظه صفر است. این لحظه خاص مربوط به رأس سهمی است و در طرفین آن تقارن وجود دارد.

گام دوم: ۵ ثانیه دوم یعنی از $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ و چهار ثانیه دوم یعنی از $t'_1 = 4s$ تا $t'_2 = 8s$. اکنون می‌توانیم نسبت اندازه سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه دوم ($|v_{av}|$) به تندی متوسط آن در چهار ثانیه دوم (s_{av}) را به دست آوریم (توجه داشته باشید که در این جا $a < 0$ است):

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\Delta x|}{t_2 - t_1} = \frac{|\frac{1}{2} a t_2^2 - \frac{1}{2} a t_1^2|}{t_2 - t_1} = \frac{|\frac{1}{2} a (10^2 - 5^2)|}{10 - 5} = \frac{|\frac{1}{2} a (100 - 25)|}{5} = \frac{|\frac{1}{2} a (75)|}{5} = \frac{|\frac{15}{2} a|}{5} = \frac{3}{2} |a|$$

$$\Rightarrow \frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{15}{2} |a|}{5} = \frac{3}{2} |a|$$



متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور X حرکت می‌کند. اگر در ۸ s اول، سرعت متوسط متحرک برابر $(8 \text{ m/s})\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر 10 m/s باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم، چند متر است؟

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

دروس Box

(۱) در حرکت با شتاب ثابت روی محور X، رابطه مستقل از سرعت اولیه به صورت زیر است:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

Δx : جابه‌جایی (m)

a: شتاب (m/s^2)

t: زمان (s)

v: سرعت متحرک در لحظه t (m/s)

(۲) در حرکت با شتاب ثابت روی محور X، وقتی در یک بازه زمانی معین، اندازه سرعت متوسط با تندی متوسط برابر نباشد، یعنی اندازه جابه‌جایی با مسافت برابر نیست؛ بنابراین سرعت متحرک در یک لحظه مانند t_s برابر صفر شده و در این لحظه جهت حرکت تغییر کرده است.

اگر از لحظه شروع حرکت ($t_0 = 0$) تا لحظه t_1 جابه‌جایی متحرک را با Δx و مسافت طی شده را با ℓ نمایش دهیم، داریم:

$$t_s = 0$$

$$x_s = 0$$

$$\Delta x$$

$$t_1 \quad \Delta x_1 = \frac{\ell - \Delta x}{2}$$

$$t_2 \quad \Delta x_2 = -\Delta x_1$$

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$v_s = 0$$

گام اول: جابه‌جایی و مسافت طی شده در ۸ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta x}{8-0} \Rightarrow \Delta x = 64 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{\ell}{8-0} \Rightarrow \ell = 80 \text{ m}$$

اندازه جابه‌جایی با مسافت برابر نیست و مسیر حرکت به صورت زیر است:

$$t_s = 0$$

$$x_s = 0$$

$$\Delta x = 64 \text{ m}$$

$$t_1 \quad \Delta x_1 = 8 \text{ m}$$

$$t_2 \quad \Delta x_2 = -8 \text{ m}$$

$$t_s = 0$$

$$v_s = 0$$

گام دوم: رابطه مستقل از سرعت اولیه را در بازه زمانی $t_0 = 0$ تا t_s می‌نویسیم:

$$\Delta x + \Delta x_1 = -\frac{1}{2}a(t_s - t_0)^2 + v_s(t_s - t_0) \xrightarrow[t_0=0, v_s=0]{\Delta x=64 \text{ m}, \Delta x_1=8 \text{ m}} 64 + 8 = -\frac{1}{2}at_s^2 \Rightarrow -144 = at_s^2$$

گام سوم: معادله جابه‌جایی بر حسب زمان را در بازه زمانی t_s تا t_1 می‌نویسیم:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a(t_2 - t_s)^2 + v_s(t_2 - t_s) \xrightarrow[t_2=8 \text{ s}, v_s=0]{\Delta x_2=-8 \text{ m}} -8 = \frac{1}{2}a(8 - t_s)^2 \Rightarrow -16 = a(8 - t_s)^2$$

گام چهارم: روابط به دست آمده در گام‌های دوم و سوم را بر هم تقسیم می‌کنیم تا مقدار t_s و از آنجا t_1 را به دست آوریم:

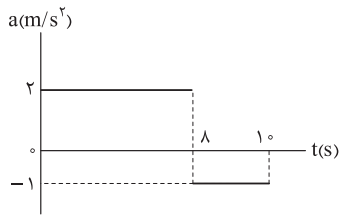
$$\frac{-144}{-16} = \frac{at_s^2}{a(8 - t_s)^2} \Rightarrow 9 = \frac{t_s^2}{(8 - t_s)^2} \Rightarrow 3 = \frac{t_s}{8 - t_s} \Rightarrow 24 - 3t_s = t_s \Rightarrow 24 = 4t_s \Rightarrow t_s = 6 \text{ s}$$

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} \Rightarrow 6 = \frac{t_1 + 8}{2} \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

دو ثانیه سوم یعنی بازه زمانی $t_1 = 4 \text{ s}$ تا $t_s = 6 \text{ s}$ ؛ در این بازه زمانی مسافت طی شده با Δx_1 برابر بوده و 8 m است.

۴۴

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۱۰ s اول برابر $\vec{i} (13/4 \text{ m/s})$ باشد، تندی متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟



۴ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۴ (۴)



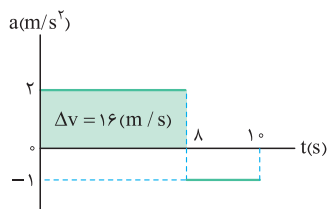
در نمودار شتاب - زمان، مساحت سطح بین نمودار و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه است.

گام اول: جابه جایی (Δx) در ۱۰ ثانیه اول را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 13/4 = \frac{\Delta x}{10} \Rightarrow \Delta x = 134 \text{ m}$$

بخشی از این جابه جایی مربوط به ۸ ثانیه اول (Δx_1) و بقیه آن مربوط به بازه زمانی ۸ s تا ۱۰ s (Δx_2) است.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$



گام دوم: Δx_1 و Δx_2 را به کمک معادله جابه جایی - زمان حساب می کنیم. باید توجه

داشت که سرعت متحرک در لحظه $t = 8 \text{ s}$ برابر است با سرعت اولیه v_0 به اضافه

16 m/s که از مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان به دست می آید.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_0 t_1 \xrightarrow{a_1=2 \text{ m/s}^2, t_1=8 \text{ s}} \Delta x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2 + v_0 \times 8 \Rightarrow \Delta x_1 = 64 + 8v_0$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + (v_0 + 16) t_2 \xrightarrow{a_2=-1 \text{ m/s}^2, t_2=10-8=2 \text{ s}} \Delta x_2 = \frac{1}{2} (-1) 2^2 + (v_0 + 16) \times 2 \Rightarrow \Delta x_2 = -2 + 2v_0 + 32 = 2v_0 + 30$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 134 = 64 + 8v_0 + 2v_0 + 30 \Rightarrow 40 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 4 \text{ m/s}$$

گام سوم: در ۸ ثانیه اول این حرکت، سرعت همواره بزرگتر از صفر است و تغییر جهت نداریم؛ بنابراین در لحظه $t = 5 \text{ s}$ تندی و سرعت متحرک برابر هستند.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=5 \text{ s}, a=2 \text{ m/s}^2} v = 2 \times 5 + 4 = 14 \text{ m/s}$$

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۴۵

خودرویی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت 4 m/s^2 به حرکت درمی آید و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. در نهایت با شتاب ثابتی به بزرگی 8 m/s^2 حرکتش کند شده و می ایستد. اگر کل زمان حرکت خودرو 20 s و مسافت طی شده توسط آن در این مدت برابر 325 m باشد، بیشینه تندی خودرو در حین این حرکت، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۹۰ (۴)

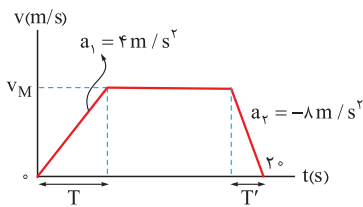
۷۲ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام اول: با استفاده از اطلاعات داده شده در متن تست، نمودار سرعت - زمان آن را در مدت 20 s رسم می کنیم و بیشینه تندی خودرو را با v_M نشان می دهیم.

گام دوم: بازه زمانی حرکت تندشونده را با T و بازه زمانی حرکت کندشونده را با T' نشان می دهیم. اکنون رابطه بین T و T' را به دست می آوریم:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{v_M - 0}{T} \Rightarrow 4 = \frac{v_M}{T} \\ a_2 = \frac{0 - v_M}{T'} \Rightarrow -8 = \frac{-v_M}{T'} \Rightarrow 8 = \frac{v_M}{T'} \end{cases}$$

$$\frac{v_M}{T} = \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow T' = \frac{T}{2}$$

گام سوم: از آن جا که در این 20 ثانیه علامت سرعت تغییر نمی کند، یعنی تغییر جهت حرکت نداریم و مسافت با جابه جایی برابر است: $\Delta x = \ell = 325 \text{ m}$

می دانیم مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان در هر بازه زمانی با جابه جایی در آن بازه زمانی برابر است:

$$S_{\text{دورنقه}} = 325 \text{ m} \Rightarrow 325 = \frac{[20 + 20 - (T + T')] \times v_M}{2} \xrightarrow{\substack{T' = \frac{T}{2} \\ v_M = 4T}} 325 = \frac{[40 - (T + \frac{T}{2})] \times 4T}{2} \Rightarrow 325 = (40 - \frac{3}{2}T) 2T$$

$$\Rightarrow 325 = 80T - 3T^2 \Rightarrow 3T^2 - 80T + 325 = 0 \Rightarrow T = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 975}}{3} = \frac{40 \pm 25}{3} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{65}{3} \text{ s} \\ T = 5 \text{ s} \end{cases}$$

$$v_M = 4T \Rightarrow \begin{cases} v_M = 4 \times \frac{65}{3} = \frac{260}{3} \text{ m/s} \Rightarrow v_M = \frac{260}{3} \times 3/6 = 312 \text{ km/h} \\ v_M = 4 \times 5 = 20 \text{ m/s} \Rightarrow v_M = 20 \times 3/6 = 72 \text{ km/h} \end{cases}$$

از بین دو جواب به دست آمده برای v_M ، تندی 72 km/h در گزینه ها وجود دارد.

۴۶

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۲۸/۸ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین، در ارتفاع چندمتری از سطح زمین قرار دارد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۴/۴ (۲)

۲/۲ (۱)

۱۷/۶ (۴)

۸/۸ (۳)

Hint

ابتدا به کمک معادله سرعت - جابه‌جایی، سرعت گلوله هنگام رسیدن به سطح زمین را محاسبه کنید، سپس به کمک معادله سرعت - زمان، سرعت گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین را بیابید. در پایان به کمک معادله مستقل از شتاب، خواسته تست قابل محاسبه است.

دروس Box

اگر جسم فقط تحت تأثیر نیروی وزن خود سقوط کند، به این حرکت سقوط آزاد می‌گویند. سقوط آزاد نمونه‌ای از حرکت با شتاب ثابت ($a = -g$) است.

معادلات حرکت سقوط آزاد (جهت مثبت به طرف بالا در نظر گرفته شده است):

$$v = -gt + v_0$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$$

$$\Delta y = \frac{v + v_0}{2} \Delta t$$

گام اول: به کمک معادله سرعت - جابه‌جایی، سرعت گلوله هنگام رسیدن به سطح زمین را محاسبه می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = -2 \times 10 \times (-28/8) \Rightarrow v^2 = 576 \Rightarrow v = -24 \text{ m/s}$$

گام دوم: به کمک معادله سرعت - زمان، سرعت گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین را به دست می‌آوریم:

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow -24 = -10 \times 0/4 + v_0 \Rightarrow v_0 = -24 + 4 = -20 \text{ m/s}$$

گام سوم: جابه‌جایی گلوله در ۰/۴ s آخر برابر است با:

$$\Delta y = \frac{v + v_0}{2} \Delta t = \frac{-24 + (-20)}{2} \times 0/4 = -8/8 \text{ m}$$

بنابراین گلوله ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین در ارتفاع ۸/۸ متری از سطح زمین قرار دارد.

نکته

در حرکت با شتاب ثابت، اگر سرعت در انتهای یک بازه زمانی معین را داشته باشیم، برای راحتی می‌توانیم حرکت متحرک را برعکس کنیم و بررسی‌هایمان را انجام دهیم. فقط کافی است که در معادلات حرکت با شتاب ثابت به جای a ، $-a$ و به جای سرعت اولیه، سرعت نهایی را قرار دهیم؛ برای نمونه:

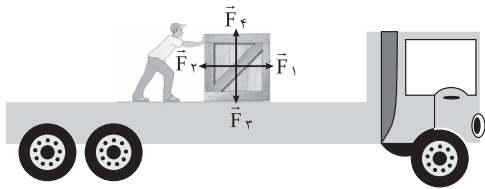
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{\text{برعکس کردن حرکت}} \Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + v_{\text{نهایی}} t$$

تیزبازی پس از محاسبه سرعت رسیدن گلوله به سطح زمین ($v = -24 \text{ m/s}$)، حرکت در ۰/۴ ثانیه آخر را برعکس می‌کنیم تا

جابه‌جایی در این ۰/۴ s به دست آید:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{نهایی}} t = \frac{1}{2} \times 10 \times (0/4)^2 - 24 \times 0/4 = 0/8 - 9/6 = -8/8 \text{ m} \Rightarrow |\Delta y| = 8/8 \text{ m}$$

شخصی یک جعبه را روی سطح افقی پشت کامیون ساکنی به حرکت درآورده است. در شکل زیر علاوه بر نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند، سه نیروی وزن، عمودی سطح و اصطکاک هم نشان داده شده است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ این نیروها، الزاماً درست است؟ (مقاومت هوا ناچیز است).



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

الف) \vec{F}_f نیروی عمودی سطح است که از طرف سطح افقی پشت کامیون به جسم وارد می‌شود. \vec{F}_g هم نیروی وزن جسم است که از طرف کره زمین به جسم وارد می‌شود. با این توضیحات، واضح است که نیروهای \vec{F}_f و \vec{F}_g کنش و واکنش نیستند. ✘

ب) در بررسی عبارت «الف»، با \vec{F}_f آشنا شدیم. هم نیروی اصطکاک است که از طرف سطح افقی پشت کامیون به جسم وارد می‌شود، یعنی هر دوی این نیروها از طرف سطح افقی پشت کامیون به جسم وارد می‌شوند؛ بنابراین واکنش هر دوی این نیروها به سطح افقی پشت کامیون وارد می‌شود. ✓

پ) اگر حرکت جعبه شتابدار باشد، اندازه \vec{F}_f بزرگ‌تر از اندازه \vec{F}_p است، ولی اگر جسم با سرعت ثابت حرکت کند، اندازه این دو نیرو برابر است؛ پس الزاماً این عبارت درست نیست. ✘

ت) اگر حرکت جسم با سرعت ثابت انجام شود، نیروهای وارد بر جسم متوازن‌اند، ولی اگر حرکت جسم شتابدار باشد، این نیروها متوازن نیستند؛ پس این عبارت هم الزاماً درست نیست. ✘



۴۸

دو جسم A و B به جرم‌های $m_A = 5 \text{ kg}$ و $m_B = 4 \text{ kg}$ روی محور x قرار دارند. اگر در لحظه‌ای جسم A به جسم B نیروی 20 N وارد کند، در این لحظه شتاب جسم A بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (به دو جسم در راستای حرکت، نیروی دیگری

وارد نمی‌شود.)

- (۱) $4\vec{i}$
 (۲) $5\vec{i}$
 (۳) $-4\vec{i}$
 (۴) $-5\vec{i}$



Hint ابتدا به کمک قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم B به جسم A وارد می‌کند را بیابید، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب جسم A را محاسبه کنید.

دربس Box

(۱) قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

(۲) قانون سوم نیوتون: هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرو وارد می‌کند؛ به طوری که:

- یکی از این نیروها کنش و دیگری واکنش نامیده می‌شود.
- این نیروها هم‌اندازه و هم‌راستا، ولی در خلاف جهت یکدیگرند:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow F_{12} = F_{21}$$

گام اول: طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم B به جسم A وارد می‌کند، برابر است با: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} = -(20 \text{ N})\vec{i}$$

گام دوم: طبق قانون دوم نیوتون، شتاب جسم A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{BA} = m_A \vec{a}_A \Rightarrow -(20 \text{ N})\vec{i} = 5 \times \vec{a}_A \Rightarrow \vec{a}_A = -(4 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

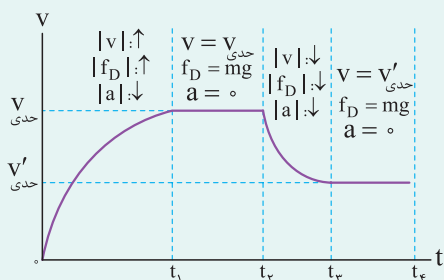
چتربازی از یک بالگرد ساکن در ارتفاع زیاد، رها شده و مدتی پس از آن که سرعتش ثابت شد، چترش را باز می‌کند. در بازه زمانی از لحظه باز شدن چتر تا لحظه‌ای که سرعت چترباز دوباره به مقدار ثابتی برسد، کدام مورد درباره حرکت چترباز درست است؟

- (۱) جهت شتاب چترباز به سمت پایین است.
- (۲) ابتدا چترباز مقداری به سمت بالا جابه‌جا می‌شود.
- (۳) اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز افزایش می‌یابد.
- (۴) اندازه نیروی خالص وارد بر چترباز کاهش می‌یابد.



درس‌Box

اگر چتربازی در مبدأ زمان از یک بلندی رها شود، تندی متحرک شروع به افزایش می‌کند؛ در نتیجه اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر آن هم افزایش می‌یابد؛ بنابراین چون نیروی مخالف حرکت چترباز بزرگ‌تر شده، اندازه شتاب آن کاهش می‌یابد. با افزایش اندازه نیروی مقاومت هوا، فرض می‌کنیم در لحظه t_1 ، اندازه این نیرو، با نیروی وزن برابر شده و چترباز به تندی حدی خود در حالتی که چتر، بسته است ($v_{\text{حدی}}$) می‌رسد. از لحظه t_1 به بعد، تندی ثابت می‌ماند. اگر در لحظه t_2 ، چتر، باز شود، اندازه نیروی مقاومت هوا به طور ناگهانی افزایش می‌یابد. از این لحظه به بعد، چون اندازه نیروی مقاومت هوا بزرگ‌تر از وزن است، تندی چترباز کاهش می‌یابد. با کاهش تندی چترباز، اندازه نیروی مقاومت هوا هم کوچک‌تر می‌شود. این روند تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که



اندازه نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر شده و از این لحظه به بعد که اسم آن را t_2 می‌گذاریم، جسم به تندی حدی خود در حالتی که چتر، باز است ($v'_{\text{حدی}}$) می‌رسد. اگر فرض کنیم در لحظه t_3 چترباز به زمین برسد، نمودار تندی - زمان چترباز در این حرکت به شکل روبه‌رو خواهد بود. در این نمودار، دانستن تحلیل تغییرات ۳ کمیت زیر ضروری است:

الف) تندی؛ که واضح است!

ب) اندازه نیروی مقاومت هوا؛ درست مثل تندی!

پ) اندازه شتاب (و نیروی خالص وارد بر) جسم؛ برای تعیین کاهش و افزایش این کمیت به شیب نمودار توجه می‌کنیم.

چگونگی تغییر این کمیت‌ها را در هر مرحله، روی نمودار مشخص کرده‌ایم.

قبل از باز شدن چتر، چون تندی چترباز ثابت است، نیروی مقاومت هوای وارد بر او با نیروی وزن هم‌اندازه است. هنگامی که چتر، باز می‌شود، به علت افزایش بزرگی (ابعاد) چتر، نیروی مقاومت هوا ناگهان افزایش می‌یابد. در این حالت چون اندازه نیروی مقاومت هوا بیشتر از اندازه نیروی وزن است، در حالی که چترباز به سمت پایین در حرکت است (نادرستی گزینه (۲))، نیروی خالص و در نتیجه شتاب به سمت بالا است (نادرستی گزینه (۱)). چون شتاب و سرعت در خلاف جهت یکدیگرند، با گذشت زمان، تندی چترباز و در نتیجه اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر او کاهش می‌یابد (نادرستی گزینه (۳)). با کاهش اندازه نیروی مقاومت هوا، اندازه نیروی خالص وارد بر چترباز نیز کاهش می‌یابد (درستی گزینه (۴)). این کاهش تا زمانی ادامه می‌یابد که اندازه این نیروی خالص، صفر شده و تندی چترباز دوباره ثابت شود.

پاسخ خیلی تشریحی

در انتهای بازه زمانی مورد بررسی، سرعت چترباز دوباره به مقدار ثابتی می‌رسد، یعنی اندازه شتاب و نیروی خالص وارد بر چترباز به صفر می‌رسد؛ بنابراین واضح است که در این بازه زمانی، اندازه نیروی خالص وارد بر چترباز کاهش می‌یابد و گزینه (۴) حتماً درست است و نیازی نیست سه گزینه دیگر را بررسی کنیم.

تیزبازی

دو گوی هم‌اندازه A و B به جرم‌های m_A و m_B که $m_B > m_A$ است، از یک بلندی به طور هم‌زمان رها می‌شوند. اگر اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی، در طی حرکت، ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، کدام گوی زودتر به سطح زمین می‌رسد و کدام گوی با تندی بیشتری به سطح زمین برخورد می‌کند؟

B, B (۲)

A, A (۱)

A, B (۴)

B, A (۳)



Hint

ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون به مقایسه شتاب دو گوی بپردازید، سپس به کمک معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، مدت‌زمان سقوط دو گوی را مقایسه کنید. در پایان برای مقایسه تندی برخورد گوی‌ها به زمین، از رابطه سرعت - جابه‌جایی استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به هر یک از گوی‌ها، نیروی رو به بالای مقاومت هوا و نیروی رو به پایین وزن وارد می‌شود. به مقایسه شتاب دو گوی می‌پردازیم:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - f_d = ma \Rightarrow a = g - \frac{f_d}{m} \xrightarrow{\substack{\text{یکسان: } \\ m_B > m_A}} a_B > a_A$$

گام دوم: برای مقایسه زمان رسیدن به سطح زمین برای دو گوی، از رابطه $|\Delta y| = \frac{1}{2}at^2$ کمک می‌گیریم:

$$|\Delta y| = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{\substack{\text{یکسان: } \\ a_B > a_A}} t_B < t_A$$

یعنی گوی B زودتر از گوی A به سطح زمین می‌رسد.

گام سوم: برای مقایسه تندی برخورد به سطح زمین از رابطه $v^2 = 2a|\Delta y|$ کمک می‌گیریم:

$$v^2 = 2a|\Delta y| \xrightarrow{\substack{\text{یکسان: } \\ a_B > a_A}} v_B > v_A$$

تندی برخورد گوی B به سطح زمین بیشتر از گوی A است.



۵۱

جسمی از ارتفاع بلندی رها شده و پس از مدتی با تندی ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به سطح زمین برسد. این جسم را با تندی بیشتر از v ، از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اندازه شتاب جسم در لحظه‌ای که تندی آن برابر با v می‌شود، کدام است؟ (g: شتاب گرانش در سطح زمین است.)

۴) صفر

۳) $\frac{g}{2}$

۲) g

۱) $2g$ 

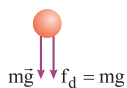
درس box شماره ۱ تست ۴۸ و درس box تست ۴۹ را بخوانید.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در حالت اول، v تندی حدى جسم است و این تندی مربوط به حالتی است که نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم هم‌اندازه با وزن جسم شود. با توجه به این که اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم به تندی آن بستگی دارد، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی تندی جسم برابر با v شود، اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم برابر وزن جسم می‌شود. در حالت دوم، به جسم نیروی رو به پایین وزن وارد می‌شود. از طرفی جسم رو به بالا در حرکت است، پس نیروی مقاومت هوای وارد بر آن به طرف پایین بوده و در لحظه‌ای که تندی جسم برابر v می‌شود، اندازه این نیرو با اندازه نیروی وزن برابر می‌شود (شکل زیر).

اندازه شتاب جسم به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg + f_d = ma \xrightarrow{f_d=mg} 2mg = ma \Rightarrow a = 2g$$

۵۵

شخصی به جرم 60 kg درون آسانسور ساکنی روی ترازوی فنری ایستاده است. به ترتیب، در حالت‌های «الف» و «ب»، مقداری که ترازو

نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

الف) آسانسور با شتاب رو به پایین 3 m/s^2 حرکت کند.

ب) کابل آسانسور پاره شود و آسانسور سقوط آزاد کند.

۶۰۰، ۷۸۰ (۲)

۶۰۰، ۴۲۰ (۱)

صفر، ۷۸۰ (۴)

صفر، ۴۲۰ (۳)



درستی Box

در تست‌های آسانسوری که به جسم، علاوه بر وزن، یک نیروی رو به بالا (\vec{F}) وارد می‌شود (این نیرو می‌تواند نیروی عمودی سطح، نیروی کشسانی فنر یا نیروی کشش نخ باشد)، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

حرکت رو به بالا تندشونده
حرکت رو به پایین کندشونده

اگر شتاب رو به بالا باشد.

$$F = m(g \pm a)$$

حرکت رو به بالا کندشونده
حرکت رو به پایین تندشونده

اگر شتاب رو به پایین باشد.

گام اول: عددی که ترازو نشان می‌دهد، همان نیروی عمودی سطح وارد بر شخص است. در حالت «الف» شتاب رو به پایین است؛

$$F_N = m(g - a) = 60(10 - 3) = 420 \text{ N}$$

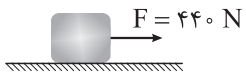
بنابراین:

گام دوم: در حالت «ب» آسانسور سقوط آزاد می‌کند، یعنی شتاب سقوط برابر با g است؛ پس:

$$F_N = m(g - a) \xrightarrow{a=g} F_N = 0$$



در شکل زیر، جعبه‌ای به جرم 8 kg روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازه شتاب جعبه $1/5\text{ m/s}^2$ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جعبه کدام است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)



$$0/4 \quad (2)$$

$$0/6 \quad (4)$$

$$0/15 \quad (1)$$

$$0/55 \quad (3)$$

با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستاهای افقی و قائم و استفاده از رابطه نیروی اصطکاک جنبشی، خواسته تست به دست می‌آید.

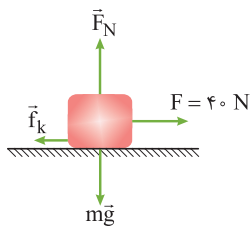
درس box تست 54 را بخوانید.

گام اول: در شکل زیر، نیروهای وارد بر جسم را رسم کردیم. قانون دوم نیوتون را در راستاهای قائم و افقی می‌نویسیم:

$$\text{در راستای قائم: } F_{\text{net}(y)} = 0 \Rightarrow F_N = mg = 80 \times 10 = 800\text{ N}$$

$$\text{در راستای افقی: } F_{\text{net}(x)} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 440 - f_k = 80 \times 1/5 \Rightarrow f_k = 320\text{ N}$$

گام دوم: با داشتن F_N و f_k ، ضریب اصطکاک جنبشی به راحتی قابل محاسبه است.



$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow 320 = \mu_k \times 800 \Rightarrow \mu_k = \frac{320}{800} = 0/4$$

53

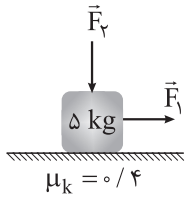


Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

مطابق شکل نیروی افقی \vec{F}_1 و نیروی قائم \vec{F}_2 به جسم وارد می‌شود و حرکت جسم با شتاب ثابت 2 m/s^2 به سمت راست تندشونده است. اندازه نیروی \vec{F}_2 را چند نیوتون افزایش دهیم تا در ادامه حرکت، جسم با شتاب ثابت 2 m/s^2 کندشونده حرکت کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۴۰

(۴) ۵۰

۵۴

مشاوره یکی از مهم‌ترین و تست‌خیزترین مباحث فصل ۲ فیزیک دوازدهم، اصطکاک (و نیروی سطح) است. می‌توان گفت که هر سال، سهم این مبحث در کنکور حداقل یک تست است. برای حل تست‌های این مبحث اولاً باید خوب بدانید انواع نیروهای اصطکاک و نحوه محاسبه آن‌ها کدام است و این‌که هر کدام از آن‌ها در چه شرایطی پدیدار می‌شوند. ثانیاً مهارت کافی در حل تست‌ها، مخصوصاً تست‌های دو حالت را داشته باشید. خلاصه کلام، از این موضوع باید تست‌های زیاد و متنوع حل کنید.

Hint

ابتدا برای دو حالت، شکل مناسبی رسم کنید، سپس کافی است قانون دوم نیوتون را در راستاهای افقی و قائم برای دو حالت بنویسید و با کمی محاسبات به جواب تست برسید.

دروس Box

(۱) فرض کنید مطابق شکل زیر، جسم با یک سطح در تماس است و به آن نیروی محرک ($\vec{F}_{\text{محرک}}$) وارد می‌شود. در این حالت سطح به جسم، دو نیرو وارد می‌کند؛ نیروی عمودی سطح (\vec{F}_N) و نیروی اصطکاک (\vec{f}).

• اگر $f_s < F_{\text{محرک}}$ باشد، جسم ساکن است و نیروی اصطکاک وارد بر آن ایستایی است:

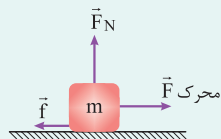
$$f_s = F_{\text{محرک}}$$

• اگر $f_s = F_{\text{محرک}}$ باشد، جسم ساکن و در آستانه حرکت است و نیروی اصطکاک وارد بر آن ایستایی بیشینه است:

ضرب اصطکاک ایستایی

$$f_{s,\text{max}} = F_N \mu_s = F_{\text{محرک}}$$

• اگر $f_s > F_{\text{محرک}}$ باشد، جسم در حال حرکت است و نیروی اصطکاک وارد بر آن جنبشی است:



ضرب اصطکاک جنبشی

$$f_k = F_N \mu_k$$

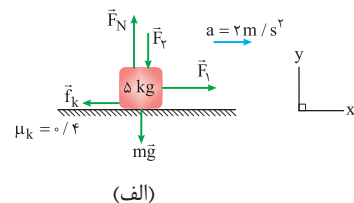
$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

(۲) قانون دوم نیوتون:

گام اول: در حالت اول، چون جسم به صورت تندشونده به سمت راست در حرکت است، شتاب جسم به طرف راست است. با توجه به شکل (الف) قانون دوم نیوتون را در راستای قائم و افقی می‌نویسیم:

$$F_{\text{net}(y)} = 0 \Rightarrow F_N - F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_N = F_2 + mg \quad (\text{I})$$

$$F_{\text{net}(x)} = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma \Rightarrow F_1 = \mu_k F_N + ma = 0.4 F_N + 5 \times 2 = 0.4 F_N + 10 \quad (\text{II})$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: در حالت دوم، چون جسم به صورت کندشونده به سمت راست حرکت می‌کند، شتاب به سمت چپ است. با توجه به شکل (ب) داریم:

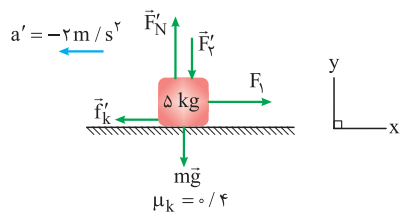
$$F'_{\text{net}(y)} = 0 \Rightarrow F'_N - F'_y - mg = 0 \Rightarrow F'_N = F'_y + mg \quad (\text{III})$$

$$F'_{\text{net}(x)} = 0 \Rightarrow F_y - f'_k = ma' \xrightarrow{(\text{II})} 0.4F_N + 10 - 0.4F'_N = 5 \times (-2)$$

$$\Rightarrow 0.4(F'_N - F_N) = 20 \Rightarrow F'_N - F_N = \frac{20 \times 10}{4} = 50 \text{ N}$$

$$\xrightarrow{(\text{I}), (\text{III})} F'_y + mg - (F_y + mg) = 50$$

$$\Rightarrow F'_y - F_y = 50 \text{ N}$$



(ب)

یعنی اندازه نیروی \vec{F}'_y باید 50 N افزایش یابد.

خودرویی به جرم 1200 kg در یک مسیر مستقیم با تندی ثابت در حال حرکت است. راننده خودرو مانعی را در مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر مسافت واکنش 15 m ، مسافت ترمز 150 m و زمان واکنش راننده 0.5 s باشد، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ (از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید).

۷۲۰۰ (۴)

۴۸۰۰ (۳)

۳۶۰۰ (۲)

۲۴۰۰ (۱)



با داشتن مدت‌زمان واکنش و مسافت واکنش و به کمک معادله جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متحرک به دست می‌آید. در ادامه با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی، شتاب متحرک را به دست آورید. در پایان برای محاسبه اندازه نیروی اصطکاک، از قانون دوم نیوتون کمک بگیرید.



Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در مدت‌زمان واکنش، خودرو با تندی ثابت در حرکت است. این تندی ثابت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 15 = v \times 0.5 \Rightarrow v = 30 \text{ m/s}$$

گام دوم: از لحظه ترمز تا لحظه توقف، در راستای حرکت خودرو فقط نیروی ثابت اصطکاک به آن وارد می‌شود؛ بنابراین حرکت خودرو با شتاب ثابت کند می‌شود. این شتاب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

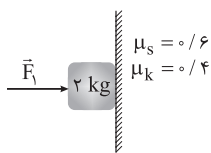
$$v'^2 - v^2 = 2a\Delta x' \Rightarrow 0^2 - 30^2 = 2a \times 150 \Rightarrow a = \frac{-900}{300} = -3 \text{ m/s}^2$$

گام سوم: اندازه نیروی اصطکاک وارد بر خودرو برابر است با:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 0 - f_k = ma \Rightarrow f_k = -ma = -1200 \times (-3) = 3600 \text{ N}$$

۵۶

در شکل زیر، نیروی افقی $F_1 = 40\text{ N}$ به جسم وارد می‌شود و جسم با تکیه بر دیوار قائم ساکن مانده است. اگر در همین شرایط، نیروی $F_2 = 56\text{ N}$ در راستای قائم از پایین به بالا به جسم وارد شود، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)



(۱) $\frac{4}{5}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{5}{12}$

Hint

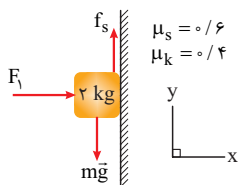
ابتدا برای هر دو حالت، شکل مناسبی رسم کنید و نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنید. در حالت اول، با توجه به ساکن بودن جسم، نیروی اصطکاک وارد بر آن به راحتی قابل محاسبه است. در حالت دوم، ابتدا باید تشخیص دهید که با وارد کردن نیروی F_2 جسم حرکت می‌کند یا نه. سپس نیروی اصطکاک وارد بر جسم را با توجه به این موضوع، محاسبه کنید. در پایان هم نسبت این دو نیروی اصطکاک را به دست آورید.

درس box تست ۵۴ را بخوانید.

درس

پاسخ خیلی تشریحی

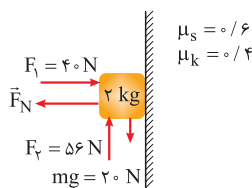
گام اول: مطابق شکل (الف)، نیروهای وارد بر جسم در حالت اول را رسم می‌کنیم. چون جسم ساکن است، نیروی اصطکاک وارد بر آن به صورت زیر به دست می‌آید:



(الف)

$$F_{\text{net}(y)} = 0 \Rightarrow f_s - mg = 0 \Rightarrow f_s = mg = 2 \times 10 = 20\text{ N}$$

گام دوم: نیروهای وارد بر جسم در حالت دوم، مطابق شکل (ب) است. در این حالت، نیروی محرک وارد بر جسم برابر با $F_{\text{محرک}} = F_2 - mg = 56 - 20 = 36\text{ N}$ است. بررسی کنیم که آیا این نیرو می‌تواند باعث حرکت جسم شود یا خیر.



(ب)

$$F_{\text{net}(x)} = 0 \Rightarrow F_1 - F_N = 0 \Rightarrow F_N = 40\text{ N}$$

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N = 0.6 \times 40 = 24\text{ N}$$

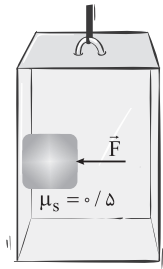
چون $F_{\text{محرک}} > f_{s,\text{max}}$ است، جسم شروع به حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی است، پس:

$$f_k = \mu_k F_N = 0.4 \times 40 = 16\text{ N}$$

$$\frac{f_k}{f_s} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

گام سوم: نسبت خواسته شده برابر است با:

در شکل زیر، شخصی درون یک آسانسور که با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 به طرف پایین شروع به حرکت کرده، جسمی به جرم 2 kg را با نیروی افقی \vec{F} به دیوار قائم آسانسور فشرده است. اگر جسم در آستانه سر خوردن باشد، اندازه نیروی \vec{F} چند نیوتون است ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۴۸ (۴)

۵۷



ابتدا شکل مناسبی رسم کنید و نیروهای وارد بر جسم را مشخص کنید. با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستاهای افقی و قائم، به راحتی به جواب تست می‌رسید.

Hint

درس box تست ۵۴ را بخوانید.

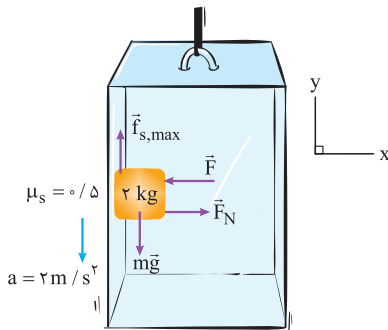
درس

مطابق شکل زیر نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. قانون دوم نیوتون را در راستای‌ها افقی و قائم می‌نویسیم:

$$F_{\text{net}(x)} = 0 \Rightarrow F_N - F = 0 \Rightarrow F_N = F$$

$$F_{\text{net}(y)} = 0 \Rightarrow mg - f_{s,\text{max}} = ma \Rightarrow 2 \times 10 - f_{s,\text{max}} = 2 \times 2 \Rightarrow f_{s,\text{max}} = 16 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \mu_s F_N = 16 \xrightarrow{F_N = F} 0.5 \times F = 16 \Rightarrow F = 32 \text{ N}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓



به یک فنر قائم یک بار وزنه ۱ نیوتونی و یک بار وزنه ۸ نیوتونی آویزان می‌کنیم. اگر مقدار افزایش طول فنر در حالت دوم $3/5 \text{ cm}$

بیشتر از حالت اول باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۲۰
(۳) ۲۰۰
(۴) ۲۰۰۰



مشاوره نیروی فنر هم یکی دیگر از موضوعات پرطرفدار از فصل ۲ فیزیک دوازدهم، بین طراحان است. کلید حل تست‌های این مبحث، قانون هوک به علاوه قانون دوم نیوتون است.



Hint

قانون هوک را برای دو حالت بنویسید و با حل دو معادله در یک دستگاه، تغییر طول فنر در حالت اول را به دست آورید. سپس با یک جای‌گذاری ساده در معادله اولیه، ثابت فنر قابل محاسبه است.

درس box شماره (۱) تست ۵۹ را بخوانید.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قانون هوک را برای دو حالت می‌نویسیم:

$$W_1 = F_{e(1)} \Rightarrow 1 = kx_1 \quad (\text{I})$$

$$W_2 = F_{e(2)} \Rightarrow 8 = kx_2 \xrightarrow{x_2 = x_1 + 3/5(\text{cm})} 8 = k(x_1 + 3/5) \quad (\text{II})$$

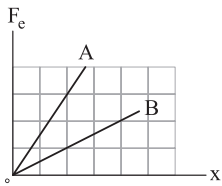
رابطه (II) را بر رابطه (I) تقسیم می‌کنیم تا x_1 به دست آید:

$$\frac{8}{1} = \frac{k(x_1 + 3/5)}{kx_1} \Rightarrow 8x_1 = x_1 + 3/5 \Rightarrow 7x_1 = 3/5 \Rightarrow x_1 = 3/35 \text{ cm}$$

گام دوم: با جای‌گذاری x_1 در رابطه (I)، k به دست می‌آید:

$$1 = k \times 3/35 \Rightarrow k = 35/3 \text{ N/cm}$$

نمودار اندازه نیروی کشسانی دو فنر A و B بر حسب تغییر طول آن‌ها نسبت به طول عادی به شکل زیر است. توسط فنر A، جسمی به جرم m و توسط فنر B، جسمی به جرم ۲m روی سطح افقی کشیده می‌شوند. اگر دو جسم با شتاب یکسان شروع به حرکت کنند، افزایش طول فنر A نسبت به حالت عادی آن، چند برابر افزایش طول فنر B نسبت به حالت عادی‌اش است؟ (فنرها در راستای افق هستند. ضریب اصطکاک جنبشی بین هر یک از دو جسم با سطح، یکسان است.)



$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$6 \quad (3)$$



ابتدا به کمک شیب نمودار $F_e - x$ ، نسبت ثابت فنرها را به دست آورید. سپس به کمک قانون دوم نیوتون برای حرکت افقی اجسام، رابطه‌ای را برای تغییر طول فنر بیابید. در پایان با نوشتن شکل نسبتی این رابطه و به کمک نسبت ثابت فنرها که قبلاً محاسبه کردید، به جواب تست می‌رسید.

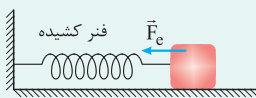
Hint

۱) قانون هوک: اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازه X کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند که اندازه آن از رابطه مقابل به دست می‌آید:

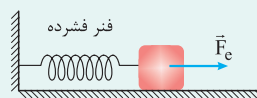
$$F_e = kx$$

ثابت فنر

۲) فنر کشیده، جسم متصل به خود را می‌کشد و فنر فشرده، جسم متصل به خود را هل می‌دهد. شکل‌های زیر را ببینید؛ در این شکل‌ها، \vec{F}_e نیرویی است که فنر به جسم وارد می‌کند.

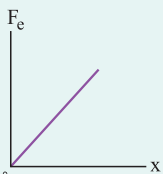


(الف)



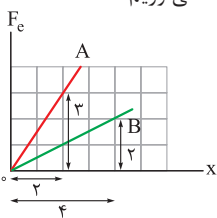
(ب)

۳) شیب نمودار $F_e - x$ برابر با ثابت فنر است.



$$k = \text{شیب نمودار}$$

گام اول: با توجه به شکل (الف)، به کمک شیب نمودار $F_e - x$ ، نسبت ثابت دو فنر A و B را به دست می‌آوریم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**



(الف)

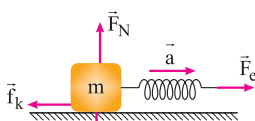
$$A \text{ فنر: } k_A = \frac{F_{e(A)}}{x_A} = \frac{3 \text{ واحد}}{2 \text{ واحد}} = \frac{3}{2} \text{ واحد}$$

$$B \text{ فنر: } k_B = \frac{F_{e(B)}}{x_B} = \frac{2 \text{ واحد}}{4 \text{ واحد}} = \frac{1}{2} \text{ واحد}$$

$$\Rightarrow \frac{k_B}{k_A} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

گام دوم: با توجه به شکل (ب)، قانون دوم نیوتون برای حرکت افقی هر یک از اجسام به صورت زیر است:

$$F_e - f_k = ma \Rightarrow kx - \mu_k F_N = ma \xrightarrow{F_N = mg} kx = m(a + \mu_k g) \Rightarrow x = \frac{m}{k}(a + \mu_k g)$$

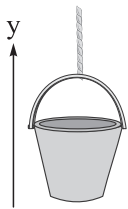


(ب)

این رابطه را به شکل نسبتی برای دو جسم می‌نویسیم (a، μ_k و g برای دو جسم یکسان است):

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{k_B}{k_A} = \frac{m}{2m} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$$

در شکل زیر، شخصی یک سطل محتوی مصالح را توسط طنابی سبک با شتاب $\vec{a} = (1/2 \text{ m/s}^2)\vec{j}$ به طرف بالا می‌کشد. اگر اندازه نیروی کشش طناب 20° درصد کاهش یابد، شتاب سطل به چند متر بر مربع ثانیه می‌رسد؟ ($g = 9/8 \text{ m/s}^2$)



$$-\vec{j} \quad (1)$$

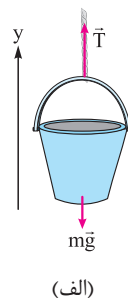
$$\vec{j} \quad (2)$$

$$1/2\vec{j} \quad (3)$$

$$-1/2\vec{j} \quad (4)$$

در حالت اول، قانون دوم نیوتون را بنویسید تا نیروی کشش طناب در این حالت (T_1) به دست آید. T_1 را از روی T_1 به دست می‌آوریم. سپس قانون دوم نیوتون را برای حالت دوم می‌نویسیم تا شتاب سطل در این حالت محاسبه شود.

گام اول: قانون دوم نیوتون را به شکل برداری برای حالت اول (شکل الف) می‌نویسیم تا نیروی کشش طناب در این حالت به دست آید.



$$\vec{a} = (1/2 \text{ m/s}^2)\vec{j}$$

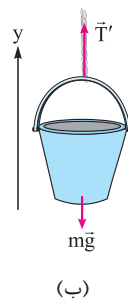
$$\vec{F}_{\text{net}(y)} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} - (9/8 \text{ m})\vec{j} = (1/2 \text{ m})\vec{j} \Rightarrow \vec{T} = (11 \text{ m})\vec{j}$$

(الف)

گام دوم: در حالت دوم، اندازه نیروی کشش طناب 20° درصد کاهش می‌یابد؛ پس:

$$T' = T - \frac{20}{100}T = \frac{80}{100}T \xrightarrow{T=11 \text{ m}} T' = \frac{80}{100} \times 11 \text{ m} = 8/8 \text{ m} \Rightarrow \vec{T}' = (8/8 \text{ m})\vec{j}$$

با توجه به شکل (ب)، قانون دوم نیوتون را به شکل برداری می‌نویسیم تا شتاب سطل در این حالت به دست آید:



$$\vec{F}'_{\text{net}(y)} = m\vec{a}' \Rightarrow \vec{T}' + m\vec{g} = m\vec{a}'$$

$$\Rightarrow (8/8 \text{ m})\vec{j} - (9/8 \text{ m})\vec{j} = m\vec{a}'$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = (-1 \text{ m/s}^2)\vec{j}$$

(ب)

۶۰

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۵

فیزیک دهم

به جسمی نیروی $\vec{F} = (\Delta N)\vec{j}$ وارد می‌شود. اگر جابه‌جایی جسم در SI برابر $\vec{d} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ باشد، کار انجام شده روی جسم توسط نیروی

\vec{F} چند ژول است؟

-50 (4)

-40 (3)

40 (2)

50 (1)

61

مشاوره این تیپ سؤال اخیراً مورد توجه طراحان کنکور قرار گرفته. آگه بلد نیستی همین الان کَلکَشو بکن!

درس‌Box

اگر بردارهای نیرو و جابه‌جایی جسمی در SI به صورت $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ و $\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j}$ باشد، کار نیروی \vec{F} در این جابه‌جایی برابر است با:

$$W = F_x d_x + F_y d_y$$

دقت کنید $F_x d_x$ و $F_y d_y$ به صورت جبری (با در نظر گرفتن علامت) با هم جمع می‌شوند.

طبق رابطهٔ زیر، کار نیروی \vec{F} را حساب می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$W = F_x d_x + F_y d_y \xrightarrow{d_x = 6\text{m}, d_y = -8\text{m}, F_x = 0, F_y = \Delta N} W = (0 \times 6) + (\Delta \times (-8)) = 0 - 40 = -40 \text{ J}$$



۶۲

خودرویی با تندی 18 km/h در حال حرکت است. برای آن که انرژی جنبشی خودرو ۴۴ درصد افزایش یابد، تندی آن باید چند متر بر

ثانیه تغییر کند؟

۱ (۱)

۲/۲ (۲)

۳/۶ (۳)

۴/۴ (۴)

$$K_2 = K_1 + \frac{44}{100} K_1 = 1/44 K_1$$

$$\frac{18}{3/6} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

مشاوره انرژی جنبشی ازون مبحث آسوناس که خیلی توی کنکور مطرح شده. اگه خیلی هم بخوان سختش کنن، درصدی میدن که بازم خیلی راحت. نکته یه وقت از دستش بدی!

درسی Box

جسمی با جرم m که با تندی v در حال حرکت است، دارای انرژی جنبشی K است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

جرم (kg)

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

تندی (m/s) انرژی جنبشی (J)

طبق رابطه بالا، درمی‌یابیم که انرژی جنبشی جسم با جرم جسم و مربع تندی جسم رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

گام اول: نسبت تندی جسم در حالت دوم به حالت اول را به دست می‌آوریم. طبق رابطه مقایسه‌ای انرژی جنبشی داریم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{K_2 = K_1 + \frac{44}{100} K_1 = \frac{144}{100} K_1, m_1 = m_2} \frac{144}{100} = 1 \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{12}{10} = 1/2$$

گام دوم: تندی جسم را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_2}{v_1} = 1/2 \xrightarrow{v_1 = 18 \text{ km/h}} \frac{v_2}{18} = 1/2 \Rightarrow v_2 = 18 \times 1/2 \text{ km/h}$$

گام سوم: تغییر تندی جسم در دو حالت را بر حسب m/s به دست می‌آوریم:

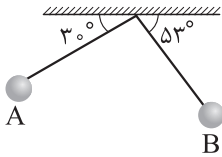
$$v_2 - v_1 = (1/2 \times 18) - 18 = 0/2 \times 18 \text{ km/h} \times \frac{1 \text{ m/s}}{3/6 \text{ km/h}} = 0/2 \times 5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۷

در شکل زیر، گلوله آونگی به طول $1/2\text{m}$ از نقطه A رها شده و در طرف دیگر تا نقطه B بالا می‌رود. اگر جرم گلوله آونگ 500g باشد،

کار انجام شده توسط نیروی وزن روی گلوله چند ژول است؟ ($\sin 53^\circ = 0/8$, $g = 10\text{ N/kg}$)



$$1/2 \quad (1)$$

$$-1/2 \quad (2)$$

$$1/8 \quad (3)$$

$$-1/8 \quad (4)$$

اول تغییر ارتفاع از A تا B رو به دست بیار، بعدش کار نیروی وزن رو حساب کن.

Hint

کار نیروی وزن در یک جابه‌جایی برابر است با:

دزیس Box

$$W_{mg} = -mg\Delta h$$

m: جرم جسم (kg)

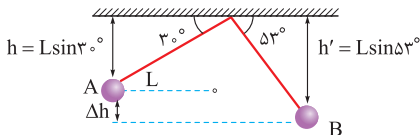
g: شتاب گرانش $g = 10\text{ N/kg}$

Δh : تغییر ارتفاع جسم (m)

تذکر: اگر جسم به سمت بالا برود، $\Delta h > 0$ و اگر جسم به سمت پایین برود، $\Delta h < 0$ خواهد بود.

گام اول: تغییر ارتفاع جسم از A تا B (Δh) را به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر داریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$|\Delta h| = h' - h = L \sin 53^\circ - L \sin 30^\circ = L(\sin 53^\circ - \sin 30^\circ)$$

$$\xrightarrow{L=1/2\text{m}} \xrightarrow{\sin 53^\circ=0/8, \sin 30^\circ=0/5} |\Delta h| = 1/2(0/8 - 0/5) = 1/2 \times 0/3 = 0/36\text{ m}$$

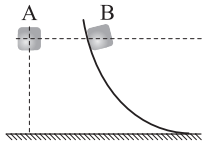
$$\xrightarrow{\text{حرکت رو به پایین}} \xrightarrow{\Delta h < 0} \Delta h = -0/36\text{ m}$$

گام دوم: کار نیروی وزن را در جابه‌جایی از A تا B حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow{\substack{m=500\text{g}=0/5\text{kg} \\ \Delta h=-0/36\text{m}}} W_{mg} = -0/5 \times 10 \times (-0/36) = 1/8\text{ J}$$

در شکل زیر، جسم A از حال سکون سقوط می‌کند و جسم B روی مسیر بدون اصطکاک رها می‌شود. کدام مورد دربارهٔ مقایسهٔ تندی

(v) و انرژی جنبشی (K) دو جسم در سطح زمین الزاماً درست است؟



- (۲) ب
(۴) ب و ت

(الف) $v_A > v_B$

(ب) $v_A = v_B$

(پ) $K_A > K_B$

(ت) $K_A = K_B$

(۱) الف

(۳) الف و پ

مشاوره اخیراً گزینشگر کنکور دوست داره یکی از این سؤالا توی دفترچه باشه. بهت تقلبشو رسوندم که بعداً عذاب وجدان نگیرم!



قضیهٔ کار - انرژی جنبشی:

در یک جابه‌جایی معین کار کل وارد بر یک جسم برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم است و مطابق رابطهٔ زیر داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

W_t : کار کل (J)

ΔK : تغییر انرژی جنبشی (J)

m: جرم (kg)

v_1 : تندی اولیه (m/s)

v_2 : تندی نهایی (m/s)

اگر جسمی از حال سکون رها شود و در هر مسیری رو به پایین حرکت کند و تنها نیروی وزن بر روی آن کار انجام دهد (یعنی اصطکاک و مقاومت هوا ... نداشته باشیم)، تندی نهایی جسم در پایین مسیر (نقطه‌ای که ارتفاع آن به اندازهٔ h کمتر از ارتفاع شروع حرکت است)، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{2gh}$$

با توجه به این که هر دو جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و به اندازهٔ یکسان پایین آمده‌اند و تنها نیرویی که بر روی هر دو جسم کار انجام می‌دهد، نیروی وزن است، طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$v = \sqrt{2gh} \xrightarrow{h_A = h_B} v_A = v_B$$

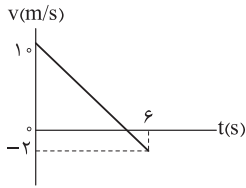
از طرفی با توجه به این که اطلاعاتی در مورد جرم دو جسم نداریم، نمی‌توانیم با قطعیت انرژی جنبشی دو جسم را که به جرم هم بستگی دارد، مقایسه کنیم؛ بنابراین تنها موردی که الزاماً درست است، مورد «ب» است.



پاسخ خیلی تشریحی

۶۵

نمودار سرعت - زمان متحرکی به جرم 3 kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کار کل انجام شده بر روی متحرک در دو ثانیه سوم چند ژول است؟



$$-32 \quad (1)$$

$$-18 \quad (2)$$

$$-64 \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$



چگونه با استفاده از دو نقطه از یک خط، معادله آن را به دست آوریم؟

درس Box

اگر محور عمودی را y و محور افقی را x در نظر بگیریم، معادله خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + y_1$$

گام اول: معادله $v-t$ را به دست می‌آوریم. با توجه به این که نمودار $v-t$ به صورت خطی است، طبق درس box معادله خط را به دست می‌آوریم:

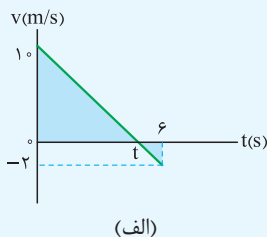
$$v = \left(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \right) t + v_1 \Rightarrow v = \left(\frac{-2 - 10}{6 - 0} \right) t + 10 \Rightarrow v = -2t + 10$$

گام دوم: سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای بازه زمانی دو ثانیه سوم یعنی لحظه‌های $t_1 = 4 \text{ s}$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$v = -2t + 10 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \text{ s} \Rightarrow v_1 = -2(4) + 10 = 2 \text{ m/s} \\ t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow v_2 = -2(6) + 10 = -2 \text{ m/s} \end{cases}$$

په‌چوردیگه

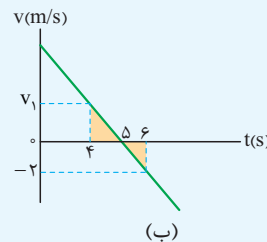
در شکل (الف) مثلث‌های رنگی متشابه‌اند؛ بنابراین t به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\frac{10}{2} = \frac{t}{6-t} \Rightarrow 30 - 5t = t \Rightarrow 6t = 30 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

(الف)

دو ثانیه سوم یعنی بازه زمانی $t_1 = 4 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ با توجه به شکل (ب) و تشابه مثلث‌های رنگی، سرعت در لحظه $t_1 = 4 \text{ s}$ به صورت زیر به دست می‌آید:



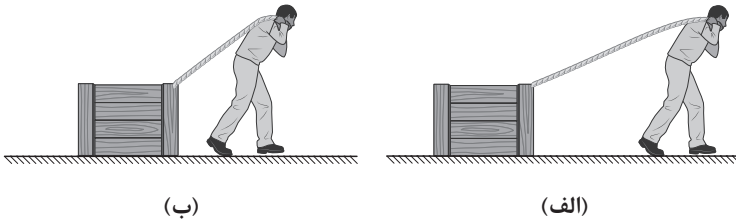
$$\frac{v_1}{2} = \frac{6-5}{5-4} \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$$

گام سوم: با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل را در بازه زمانی $t_1 = 4 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[m=3 \text{ kg}, v_1=2 \text{ m/s}, v_2=-2 \text{ m/s}]{} W_t = \frac{1}{2} \times 3 \times ((-2)^2 - 2^2) = 0$$

شخصی جسم ساکنی را یک بار با طنابی بلند (شکل الف) و بار دیگر با طنابی کوتاه (شکل ب) روی سطح افقی بدون اصطکاک می کشد. اگر اندازه نیرویی که شخص وارد می کند در دو حالت برابر باشد، پس از جابه جایی یکسان جسم، به ترتیب از راست به چپ در کدام شکل شخص کار بیشتری انجام می دهد و در کدام شکل تندی نهایی جسم بیشتر است؟

مشاوره همیشه گفتیم بازم میگویم! سوالاتی کتاب درسی خیلی مهم، خیلی ممکنه کپی همون سوالات رو توی کنکور ببینی.



(۲) الف - ب

(۴) ب - ب

(۱) الف - الف

(۳) ب - الف

جابه جایی (m) کار (J)

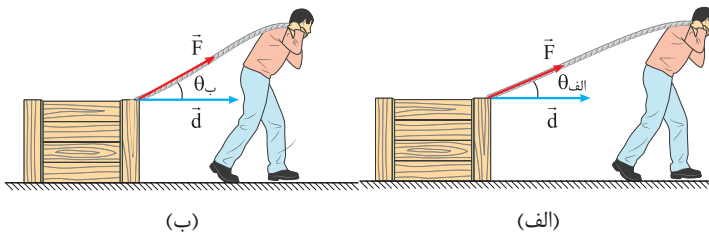
$$W = F d \cos \theta$$

زاویه بین \vec{F} ، \vec{d} ، نیرو (N)

کار نیروی ثابت \vec{F} در جابه جایی \vec{d} از رابطه زیر به دست می آید:

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** کار شخص را در شکل های (الف) و (ب) با هم مقایسه می کنیم. مطابق شکل های زیر داریم:



$$W = Fd \cos \theta \Rightarrow \frac{W_{\text{الف}}}{W_{\text{ب}}} = \frac{F_{\text{الف}}}{F_{\text{ب}}} \times \frac{d_{\text{الف}}}{d_{\text{ب}}} \times \frac{\cos \theta_{\text{الف}}}{\cos \theta_{\text{ب}}}$$

$$\frac{F_{\text{الف}}=F_{\text{ب}}, d_{\text{الف}}=d_{\text{ب}}}{\theta_{\text{الف}} < \theta_{\text{ب}} \Rightarrow \cos \theta_{\text{الف}} > \cos \theta_{\text{ب}}} \rightarrow \frac{W_{\text{الف}}}{W_{\text{ب}}} = 1 \times 1 \times \frac{\cos \theta_{\text{الف}}}{\cos \theta_{\text{ب}}} > 1 \Rightarrow W_{\text{الف}} > W_{\text{ب}}$$

گام دوم: تندی نهایی را در شکل های (الف) و (ب) با هم مقایسه می کنیم. با توجه به این که فقط نیروی شخص بر دو جسم وارد می شود، طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \xrightarrow{W_{t_{\text{الف}}} = W_{\text{الف}}, W_{t_{\text{ب}}} = W_{\text{ب}}, v_{i_{\text{الف}}} = v_{i_{\text{ب}}} = 0} \begin{cases} W_{\text{الف}} = \frac{1}{2} m v_{\text{الف}}^2 \\ W_{\text{ب}} = \frac{1}{2} m v_{\text{ب}}^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_{\text{الف}} = m_{\text{ب}}} \frac{W_{\text{الف}}}{W_{\text{ب}}} = \left(\frac{v_{\text{الف}}}{v_{\text{ب}}} \right)^2 \xrightarrow{W_{\text{الف}} > W_{\text{ب}}} \frac{v_{\text{الف}}}{v_{\text{ب}}} > 1 \Rightarrow v_{\text{الف}} > v_{\text{ب}}$$



۶۷

از ارتفاع ۱۰۰ متری سطح زمین، جسمی با تندی 20 m/s پرتاب می شود. در لحظه‌ای که تندی جسم برابر نصف تندی آن در لحظه برخورد به زمین است، فاصله جسم از سطح زمین چند متر است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

۵۰ (۲)

۱۰ (۱)



دستی Box

(۱) انرژی جنبشی، انرژی وابسته به حرکت اجسام است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

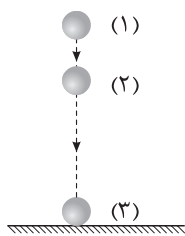
(۲) انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع h نسبت به مبدأ پتانسیل گرانشی از رابطه زیر به دست می آید:

$$U = mgh$$

(۳) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: اگر در مسیر حرکت یک جسم نیروی خارجی، نیروی اصطکاک و مقاومت هوا و ... وجود نداشته باشد، انرژی مکانیکی جسم در تمام طول مسیر ثابت است و می توانیم بگوییم:

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots$$

$$\Delta K = \Delta U$$



گام اول: انرژی مکانیکی جسم را به دست می آوریم. می دانیم با توجه به ناچیز بودن مقاومت هوا، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی مکانیکی در تمام نقاط یکسان است؛ بنابراین مطابق شکل روبه‌رو، انرژی مکانیکی در تمام نقاط (۱)، (۲) و (۳) برابر با E است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$E = E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \Rightarrow E = \left(\frac{1}{2}m \times (20)^2\right) + (m \times 10 \times 100) = 1200 \text{ m}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = E_3 = 1200 \text{ m}$$

گام دوم: انرژی جنبشی جسم را در لحظه برخورد به زمین حساب می کنیم:

$$E_2 = K_2 + U_2 \xrightarrow[U_2=0]{E_2=1200 \text{ m}} K_2 = 1200 \text{ m}$$

گام سوم: انرژی جنبشی جسم را در لحظه‌ای که تندی‌اش نصف تندی لحظه برخورد به زمین است، حساب می کنیم.

می دانیم انرژی جنبشی با مربع تندی جسم رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین در لحظه‌ای که تندی جسم نصف تندی برخورد به زمین است، انرژی جنبشی آن $\frac{1}{4}$ انرژی جنبشی برخورد به زمین است. در نتیجه داریم:

$$K_2 = \frac{1}{4}K_3 \xrightarrow{K_3=1200 \text{ m}} K_2 = \frac{1}{4} \times 1200 \text{ m} = 300 \text{ m}$$

گام چهارم: ارتفاع جسم را در نقطه (۲) حساب می کنیم:

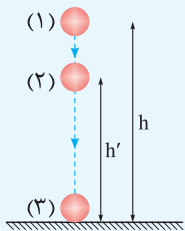
$$E_2 = K_2 + U_2 \xrightarrow[K_2=300 \text{ m}]{E_2=1200 \text{ m}} 1200 \text{ m} = 300 \text{ m} + U_2$$

$$\Rightarrow U_2 = 900 \text{ m} \xrightarrow{U_2=mgh_2} m \times 10 \times h_2 = 900 \text{ m} \Rightarrow h_2 = 90 \text{ m}$$

در شرایطی که جسمی در حال سقوط و مقاومت هوا ناچیز باشد، اگر جسم به اندازه h پایین بیاید، تندی آن از رابطه زیر حساب می شود:

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

نکته



$$v_r = \sqrt{2gh + v_1^2} \Rightarrow v_r = \sqrt{(2 \times 10 \times 100) + (20)^2} = \sqrt{2400} \text{ m/s}$$

$$v_r = \sqrt{2gh' + v_r^2} \xrightarrow[v_r = \frac{1}{2}v_r = \frac{\sqrt{2400}}{2} \text{ m/s}]{v_r = \sqrt{2400} \text{ m/s}} \sqrt{2400} = \sqrt{(2 \times 10 \times h') + \frac{2400}{4}}$$

$$\Rightarrow 2400 = 20h' + 600 \Rightarrow 1800 = 20h' \Rightarrow h' = 90 \text{ m}$$

۶۸

یک توپ فوتبال را از ارتفاع $3/2$ متری سطح زمین با تندی 4 m/s به سمت پایین پرتاب می‌کنیم و توپ با تندی 8 m/s به سطح زمین می‌رسد. اگر کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر $-3/6 \text{ J}$ باشد، جرم توپ چند کیلوگرم است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$\bullet / 35 (2)$$

$$\bullet / 3 (1)$$

$$\bullet / 45 (4)$$

$$\bullet / 4 (3)$$



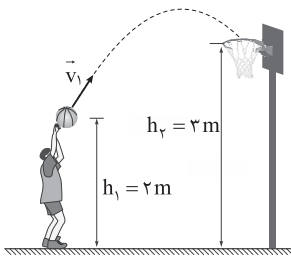
پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \xrightarrow{W_t = W_{mg} + W_f} W_{mg} + W_f = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\xrightarrow{\substack{W_{mg} = -mg\Delta h, W_f = -3/6 \text{ J} \\ v_i = 4 \text{ m/s}, v_f = 8 \text{ m/s}, \Delta h = -3/2 \text{ m}}} (-m \times 10 \times (-3/2)) + (-3/6) = \frac{1}{2} m (\underbrace{8^2 - 4^2}_{64-16}) \Rightarrow 32m - 3/6 = 24m$$

$$\Rightarrow 8m = 3/6 \Rightarrow m = 0/45 \text{ kg}$$

در شکل زیر، ورزشکار تویی را با تندی $v_1 = 8 \text{ m/s}$ به طرف سبد پرتاب می‌کند. اگر از لحظه پرتاب توپ تا لحظه رسیدن آن به دهانه سبد، اندازه کار نیروی مقاومت هوا، نصف انرژی جنبشی توپ در لحظه پرتاب باشد، تندی توپ در لحظه رسیدن به دهانه سبد، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۶۹

مشاوره این مدل سوالات رو می‌تونن با قضیه کار - انرژی جنبشی حل کنن و هم قانون پایستگی انرژی. بین خودت روی کدوم روش تسلط بیشتری داری و انتخاب کن. سعی کن روی یکیش خیلی مسلط‌تر بشی که من پیشنهادم قضیه کار - انرژی جنبشیه!

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$W_t = \Delta K = K_r - K_1 \quad \begin{matrix} W_t = W_{mg} + W_f \\ W_f = -\frac{1}{4}K_1 \end{matrix} \rightarrow W_{mg} - \frac{1}{4}K_1 = K_r - K_1 \Rightarrow W_{mg} = K_r - \frac{1}{4}K_1 = \frac{1}{2}m(v_r^2 - \frac{1}{4}v_1^2)$$

$$\xrightarrow{W_{mg} = -mg\Delta h} -mg\Delta h = \frac{1}{2}m(v_r^2 - \frac{1}{4}v_1^2) \quad \begin{matrix} \Delta h = 3 - 2 = 1 \text{ m} \\ v_1 = 8 \text{ m/s} \end{matrix} \rightarrow -10 \times 1 = \frac{1}{2}(v_r^2 - \frac{1}{4}(8^2))$$

$$\Rightarrow -20 = v_r^2 - 32 \Rightarrow v_r^2 = 12 \Rightarrow v_r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

طبق قانون پایستگی انرژی داریم:

یه جور دیگه

$$E_r - E_1 = W_f \Rightarrow K_r + U_r - (K_1 + U_1) = W_f \Rightarrow K_r - K_1 + \Delta U = W_f \Rightarrow K_r - K_1 + \Delta U = -\frac{1}{4}K_1$$

$$\Rightarrow K_r - \frac{1}{4}K_1 + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}mv_1^2) + mg\Delta h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v_r^2 - \frac{1}{4}v_1^2 + g\Delta h = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}v_r^2) - \underbrace{(\frac{1}{4}(8^2))}_{16} + (10 \times 1) = 0 \Rightarrow v_r^2 = 12 \Rightarrow v_r = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

شخصی به جرم 50 kg درون آسانسور ساکنی قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند. کار انجام شده روی شخص توسط نیروی عمودی سطح وارد بر آن، در ثانیه اول حرکت چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

(۱) -600 (۲) -400 (۳) 600 (۴) 400

۷۰

مشاوره این سؤال به نکته اشتباه رو هدف قرار داده که می‌گن کار نیروی عمود بر به سطح همیشه صفره. حواست باشه هر نکته‌ای رو دیدی یاد بگیر و منطقتش رو بدون، نه این که فقط حفظ کنی.

اول مقدار نیروی عمودی سطح رو به دست بیار، بعدش جابه‌جایی آسانسور رو حساب کن. در نهایت کار ناشی از نیروی عمودی سطح رو حساب کن.

Hint

اگر جسمی بر روی کف آسانسوری قرار داشته باشد، برای محاسبه نیروی عمودی کف آسانسور بر جسم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

شتاب گرانش (m/s^2)

$$F_N = m(g \pm a)$$

اندازه شتاب آسانسور (m/s^2) جرم جسم (kg)

+ : جهت شتاب آسانسور رو به بالا (شروع حرکت رو به بالا)

- : جهت شتاب آسانسور رو به پایین (شروع حرکت رو به پایین)

جهت نیروی عمودی سطح کف آسانسور بر روی جسم، به سمت بالا است.

نکته

گام اول: نیروی عمودی سطح وارد بر جسم از طرف آسانسور را حساب می‌کنیم:

$$F_N = m(g - a) \Rightarrow \text{جهت شتاب رو به پایین} \Rightarrow \text{شروع حرکت رو به پایین}$$

$$\frac{m=50 \text{ kg}}{a=2 \text{ m/s}^2} \rightarrow F_N = 50 \times (10 - 2) = 50 \times 8 = 400 \text{ N}$$

گام دوم: جابه‌جایی در ثانیه اول را حساب می‌کنیم:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \xrightarrow{v_0=0, a=2 \text{ m/s}^2, t=1\text{s}} d = \frac{1}{2} \times 2 \times (1^2) + 0 \times 1 = 1 \text{ m}$$

گام سوم: کار نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$$W_{F_N} = F_N d \cos \theta \xrightarrow{F_N=400 \text{ N}, d=1 \text{ m}, \cos \theta=-1} W_{F_N} = 400 \times 1 \times (-1) = -400 \text{ J}$$

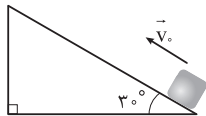
درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

۷۱

در شکل زیر، جسی را با تندی اولیه 10 m/s موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تندی این جسم پس از 4 m جابه‌جایی روی سطح به 2 m/s می‌رسد. در این بازه زمانی، چند درصد از انرژی جنبشی اولیه جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟

$$(g = 10 \text{ N/kg})$$



۱۶ (۱)

۲۰ (۲)

۵۶ (۳)

۶۰ (۴)



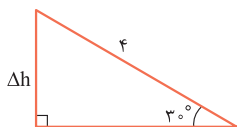
Hint

اول کار کل و کار نیروی وزن رو حساب کن. بعدش کار نیروی اصطکاک رو به دست بیار. در نهایت نسبت کار نیروی اصطکاک به انرژی جنبشی اولیه رو به صورت درصدی حساب کن.

گام اول: کار کل در این جابه‌جایی را با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی حساب می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \times m \times \underbrace{(2^2 - 10^2)}_{-100} = -48 \text{ m}$$

گام دوم: کار نیروی وزن را در این جابه‌جایی حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$W_{mg} = -mg\Delta h \Rightarrow W_{mg} = (-)m \times 10 \times \underbrace{(4 \times \sin 3^\circ)}_2 = -20 \text{ m}$$

گام سوم: کار نیروی اصطکاک را به دست می‌آوریم:

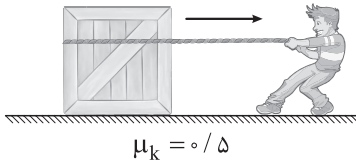
$$W_t = W_{mg} + W_f \Rightarrow -48 \text{ m} = -20 \text{ m} + W_f \Rightarrow W_f = -28 \text{ m}$$

گام چهارم: نسبت درصدی مقدار کار نیروی اصطکاک به انرژی جنبشی اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|W_f|}{K_1} \times 100 = \frac{28 \text{ m}}{\frac{1}{2} m \times 10^2} \times 100 = \frac{28}{5} = 56\%$$

در شکل زیر، شخصی با نیروی افقی 550 N جعبه‌ای به جرم 100 kg را از حال سکون به حرکت در می‌آورد و پس از 4 s طناب پاره می‌شود. از لحظه شروع حرکت جعبه تا توقف آن، قدرمطلق کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک روی جعبه چند کیلوژول است؟

$$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$



$$0/2 \quad (1)$$

$$1/1 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$2/2 \quad (4)$$

مشاوره توی این سؤال حرکت‌شناسی، دینامیک و کار و انرژی به زیبایی با هم ترکیب شدن. حتماً علامت‌گذاری کن، چون خیلی به درد روزای جمع‌بندی می‌خوره!

درس‌ی Box

برای محاسبه جابه‌جایی در سؤالاتی که متحرک در چند بخش با شتاب‌های مختلف مسیر را می‌پیماید، باید طبق استراتژی زیر، مسئله را حل کنیم:

(۱) شتاب را در هر بخش به دست آوریم.

(۲) با داشتن شتاب هر بخش و سرعت اولیه، نمودار $v-t$ را که شیب آن همان شتاب است، رسم می‌کنیم.

(۳) از روی مساحت محصور بین نمودار $v-t$ با محور t ، جابه‌جایی را به دست می‌آوریم.

نیروی اصطکاک جنبشی همواره خلاف جهت حرکت جسم است و طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

ضریب اصطکاک جنبشی

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی عمودی سطح (N) نیروی اصطکاک جنبشی (N)

کار نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با:

مسافت طی شده (m)

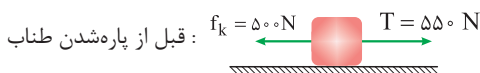
$$W_{f_k} = -f_k d$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_k = \mu_k mg \xrightarrow{\substack{\mu_k = 0.5 \\ m = 100 \text{ kg}}} f_k = 0.5 \times 100 \times 10 = 500 \text{ N}$$

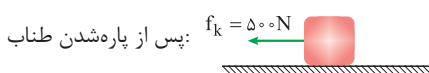
گام دوم: شتاب جسم قبل و پس از پاره شدن طناب را به دست می‌آوریم:

جهت حرکت



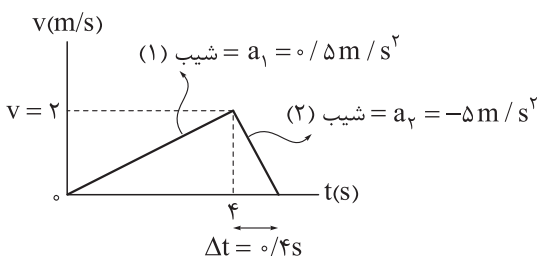
$$F_{\text{net}_1} = ma_1 \Rightarrow 550 - 500 = 100 a_1 \Rightarrow a_1 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

جهت حرکت



$$F_{\text{net}_2} = ma_2 \Rightarrow 0 - 500 = 100 a_2 \Rightarrow a_2 = -5 \text{ m/s}^2$$

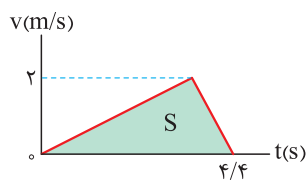
گام سوم: نمودار $v-t$ حرکت را رسم می‌کنیم:





$$\text{شیب} = \frac{\text{عمود}}{\text{افق}} \Rightarrow \begin{cases} (1) \text{ شیب: } 0/5 = \frac{v}{4} \Rightarrow v = 2 \text{ m/s} \\ (2) \text{ شیب: } -5 = \frac{-2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0/4 \text{ s} \end{cases}$$

گام چهارم: جابه‌جایی جسم را در کل حرکت حساب می‌کنیم:



$$d = S = \frac{4/4 \times 2}{2} = 4/4 \text{ m}$$

گام پنجم: کار نیروی اصطکاک را به دست می‌آوریم:

$$W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow W_{f_k} = -500 \times 4/4 = -2000 \text{ J} \times \frac{1 \text{ kJ}}{1000 \text{ J}} = -2/2 \text{ kJ} \Rightarrow |W_{f_k}| = 2/2 \text{ kJ}$$

جرم اتاقک بالابری به همراه بار آن 600 kg است. اگر این بالابر در مدت 10 s با تندی ثابت به اندازه 5 m بالا رود، توان متوسط موتور این بالابر چند اسب بخار است؟ ($1 \text{ hp} = 750 \text{ W}$ ، $g = 10 \text{ N/kg}$ و نیروی اتلافی ناچیز است.)

۳۰۰ (۴)

۳۰ (۳)

۴۰ (۲)

۴ (۱)


درستی Box

توان متوسط برابر است با نسبت کار انجام شده به مدت زمان انجام کار و مطابق رابطه زیر به دست می آید:

$$P_{\text{av}} = \frac{W}{\Delta t}$$

↑ کار (J)
↑ توان متوسط (W)
↓ زمان (s)

گام اول: کار بالابر بر روی جسم را حساب می کنیم. طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم: ✓ **پاسخ خیلی تشریحی**

$$W_t = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow{v_1=v_2} W_t = 0 \xrightarrow{W_t = W_{\text{mg}} + W_{\text{بالابر}}} W_{\text{mg}} + W_{\text{بالابر}} = 0$$

$$\Rightarrow W_{\text{بالابر}} = -W_{\text{mg}} \xrightarrow{W_{\text{mg}} = -mg\Delta h} W_{\text{بالابر}} = mg\Delta h \xrightarrow{m=600 \text{ kg}, \Delta h=5 \text{ m}} W_{\text{بالابر}} = 600 \times 10 \times 5 = 30000 \text{ J}$$

گام دوم: توان متوسط بالابر را حساب می کنیم:

$$P_{\text{av}} = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{W=30000 \text{ J}}{\Delta t=10 \text{ s}}} P_{\text{av}} = \frac{30000}{10} = 3000 \text{ W} \times \frac{1 \text{ hp}}{750 \text{ W}} = 4 \text{ hp}$$



۷۴

هواپیمایی به جرم 60 تن از سطح زمین به حرکت در می‌آید و پس از 5 دقیقه از ارتفاع 625 متری سطح زمین با تندی 100 m/s عبور می‌کند. با چشم‌پوشی از نیروی مقاومت هوا، توان متوسط موتور هواپیما حداقل چند مگاوات است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۱۰ (۴)

۱ (۳)

۲۲/۵ (۲)

۲/۲۵ (۱)



اول کار کل و کار نیروی وزن رو حساب کن. بعدش کار موتور هواپیما رو به دست بیار. در نهایت توان متوسط موتور رو حساب کن.

Hint

گام اول: کار کل را حساب می‌کنیم. طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \times 60 \times 10^3 \times (100^2 - 0) = 3 \times 10^8 \text{ J}$$

گام دوم: کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \Rightarrow W_{mg} = -60 \times 10^3 \times 10 \times 625 = -3.75 \times 10^8 \text{ J}$$

گام سوم: کار موتور هواپیما را به دست می‌آوریم:

$$W_t = W_{mg} + W_{\text{موتور}} \Rightarrow 3 \times 10^8 = -3.75 \times 10^8 + W_{\text{موتور}} \Rightarrow W_{\text{موتور}} = 6.75 \times 10^8 \text{ J}$$

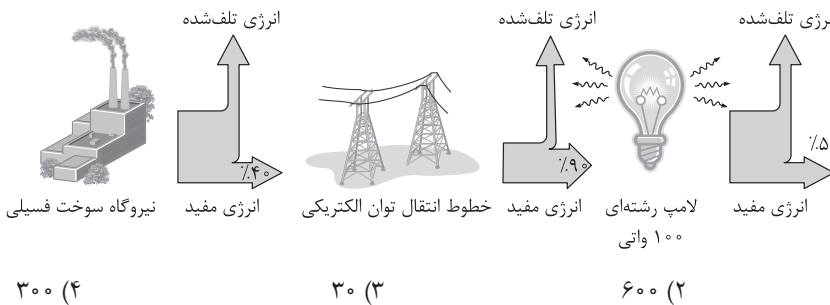
گام چهارم: توان متوسط موتور هواپیما را به دست می‌آوریم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 5 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 300 \text{ s}]{W = 6.75 \times 10^8 \text{ J}} P_{av} = \frac{6.75 \times 10^8 \times 10^6}{300} = 2.25 \times 10^6 \text{ W} \times \frac{1 \text{ MW}}{10^6 \text{ W}} = 2.25 \text{ MW}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل زیر طرحواره‌ای از درصد انرژی مفید و انرژی تلف شده در یک نیروگاه سوخت فسیلی را از آغاز تا مصرف در یک لامپ رشته‌ای نشان می‌دهد. با مصرف ۲۰ L گازوئیل در نیروگاه، لامپ رشته‌ای به مدت چند ساعت روشن می‌ماند؟ (با سوختن هر لیتر گازوئیل در نیروگاه، ۳۰ MJ انرژی گرمایی تولید می‌شود.)

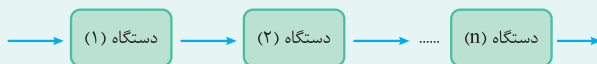
مشاوره توی محاسبات این سؤال، حتماً حواست به صفرها باشه که گیر نیفتی.



بازده برابر است با نسبت کار مفید به کل کار و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{کل}}} = \frac{E_{\text{مفید}}}{E_{\text{مصرفی یا کل}}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی یا مصرفی}}}$$

اگر از کار ورودی تا کار خروجی مطابق شکل زیر، چند بازده داشتیم، بازده کل برابر است با ضرب تمام بازده‌ها در یکدیگر.



$$Ra_{\text{کل}} = Ra_1 \times Ra_2 \times \dots \times Ra_n$$

گام اول: انرژی حاصل از مصرف ۲۰ L گازوئیل (انرژی مصرفی) را حساب می‌کنیم:

$$E_{\text{مصرفی}} = 20 \text{ L} \times \frac{30 \text{ MJ}}{1 \text{ L}} = 600 \text{ MJ}$$

گام دوم: بازده کل را تا رسیدن انرژی به لامپ، حساب می‌کنیم:

$$Ra_{\text{کل}} = Ra_1 \times Ra_2 \rightarrow Ra_{\text{کل}} = \frac{40}{100} \times \frac{90}{100} = 0/4 \times 0/9 = 0/36$$

گام سوم: انرژی مفیدی را که به لامپ می‌رسد، به دست می‌آوریم:

$$Ra_{\text{کل}} = \frac{E_{\text{مفید}}}{E_{\text{مصرفی}}} \Rightarrow 0/36 = \frac{E_{\text{مفید}}}{600} \Rightarrow E_{\text{مفید}} = 216 \text{ MJ}$$

گام چهارم: مدت زمان روشن ماندن لامپ را حساب می‌کنیم:

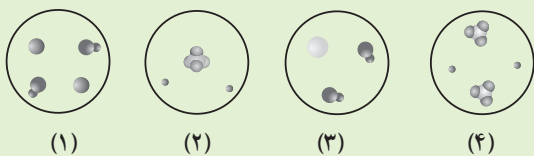
$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow 100 = \frac{216 \times 10^6}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 216 \times 10^4 \text{ s} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 600 \text{ h}$$

درباره Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به واکنش برخی اکسیدها با آب است، کدام موارد زیر درست است؟



الف) رنگ کاغذ pH در حضور محلول‌های (۲) و (۳) مشابه یکدیگر است.

ب) حل‌شونده محلول (۱) می‌تواند هیدروکسید فلزی از گروه دوم جدول تناوبی باشد. $M(OH)_p$

پ) حل‌شونده محلول‌های (۲) و (۴) به ترتیب می‌توانند $SO_3(g)$ و $N_2O_5(s)$ باشند.

ت) آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴) از نظر شمار پیوندهای کووالانسی مشابه یکدیگر هستند.

(۱) الف - پ

(۲) الف - ب

(۳) پ - ت

(۴) ب - ت

مشاوره این سؤال که برگرفته از «خودراییز ما بید» کتاب درسی می‌باشد، در امتحان نهایی (سال ۱۴۰۰) نیز آمده است که نشون می‌ده شکل‌های کتاب درسی چه قدر می‌تونه برای طراحان مهم باشه!



عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند. **پاسخ خیلی تشریحی**

محلول‌هایی که در آن‌ها یون H^+ وجود دارد، خاصیت اسیدی دارند ← (۲) و (۴)

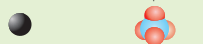
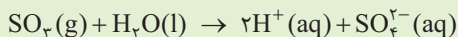
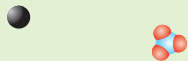
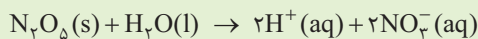
محلول‌هایی که در آن‌ها یون OH^- وجود دارد، خاصیت بازی دارند ← (۱) و (۳)

بررسی عبارت‌ها:

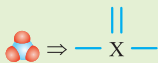
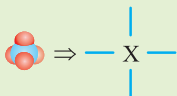
الف) محلول (۲) خاصیت اسیدی دارد و کاغذ pH در آن به رنگ سرخ درمی‌آید، در حالی که محلول (۳) خاصیت بازی دارد و کاغذ pH در آن به رنگ آبی درمی‌آید.

ب) فلزهای گروه دوم جدول، یون دو بار مثبت تشکیل می‌دهند؛ بنابراین فرمول هیدروکسید آن‌ها به صورت $M(OH)_p$ است. در محلول این هیدروکسید، شمار یون‌های OH^- دو برابر شمار یون‌های M^{2+} است، در حالی که در شکل (۱) شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها با هم برابر است.

پ) با توجه به معادله واکنش این اکسیدها با آب، همه پی درسته!



ت) با توجه به مدل فضاپرکن آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴)، در ساختار هر دو آنیون، چهار پیوند اشتراکی وجود دارد:



این آنیون‌ها می‌توانند NO_3^- و SO_3^{2-} باشند.

در بین موارد زیر، به ترتیب از راست به چپ، چه تعداد رسانای الکترونی و چه تعداد رسانای یونی وجود دارد؟



$\text{Fe(s)}, \text{CH}_3\text{COCH}_3(\text{aq}), \text{C(s)}$ (گرافیت), $\text{NaCl(s)}, \text{MgCl}_2(\text{l}), \text{S(s)}, \text{KBr(aq)}$

۲ - ۳ (۲)

۳ - ۲ (۱)

۴ - ۳ (۴)

۲ - ۲ (۳)



رساناها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:



مثال	علت رسانایی	نوع رسانا
فلزها و گرافیت	حرکت الکترون‌ها	الکترونی
محلول‌های الکترولیت و نمک‌های مذاب	حرکت یون‌ها	یونی

پاسخ خیلی تشریحی ✓ رسانای الکترونی: C(s) (گرافیت) و Fe(s)

رساناهای یونی: KBr(aq) ، $\text{MgCl}_2(\text{l})$

دقت کنید که ترکیب‌های یونی در حالت جامد (مانند NaCl(s))، رسانا نیستند، زیرا یون‌ها در حالت جامد نمی‌توانند آزادانه حرکت

کنند. همچنین موادی مانند استون ($\text{CH}_3\text{C}(=\text{O})\text{CH}_3$) که به شکل مولکولی در آب حل می‌شوند، رسانای جریان برق نیستند، زیرا در محلول آن‌ها یون وجود ندارد.



[H ⁺]	درجه یونش	غلظت مولی محلول	اسید
x	۱	۰/۰۴	HA
y	۱۰ ^{-۱/۷}	۰/۰۲	HB

با توجه به جدول زیر، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

- ۱۰۰ (۱)
 ۲۰۰ (۲)
 ۱۰۰۰ (۳)
 ۲۰۰۰ (۴)



مشاوره این سؤال برگرفته از یکی از سؤالات کنکور (ریاضی خارج تیر ۱۴۰۳) می باشد.

اگر غلظت مولی محلول یک اسید برابر M و درجه یونش اسید در محلول برابر α باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید را می توان از رابطه مقابل به دست آورد:

$$[H^+] = M\alpha$$

$$[H^+] = M\alpha \begin{cases} \text{HA محلول: } x = 0.04 \times 1 = 0.04 \text{ mol.L}^{-1} \\ \text{HB محلول: } y = 0.02 \times 10^{-1/7} = 0.02 \times 10^{-2} \times \underbrace{10^{0/3}}_2 = 0.04 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{0.04}{0.04 \times 10^{-2}} = 100$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۹

در محلول ۰/۲ مولار استیک اسید در آب، به ترتیب از راست به چپ، کدام گونه‌ها (بدون در نظر گرفتن مولکول‌های آب)، بیشترین و

کم‌ترین غلظت مولی را دارند؟

اسید ضعیف

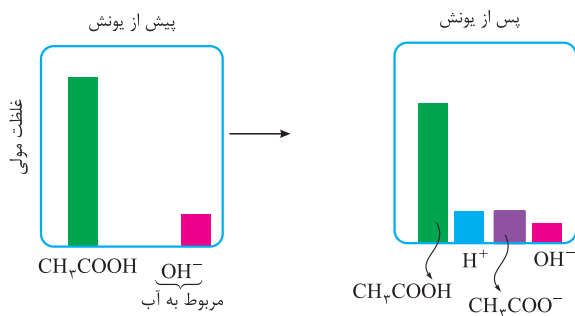


پاسخ خیلی تشریحی ✓

استیک اسید (CH_3COOH) یک اسید ضعیف است و بیشتر به صورت یونیده‌نشده در محلول باقی می‌ماند، به عبارت دیگر غلظت یون‌های حاصل از یونش (H^+ و CH_3COO^-) در محلول آن کم است. از طرفی در محلول‌های اسیدی، $[\text{H}^+]$ از $[\text{OH}^-]$ بیشتر

است؛ بنابراین خواهیم داشت:

غلظت مولی: $\text{CH}_3\text{COOH} > \text{H}^+ = \text{CH}_3\text{COO}^- > \text{OH}^-$





با توجه به شکل‌های زیر که غلظت نسبی گونه‌ها را در محلول دو اسید HA و HX در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند، کدام موارد از مطالب داده شده درست است؟



الف) هر دو اسید HA و HX تک‌پروتون‌دار هستند و با انحلال هر مول از آن‌ها در آب، یک مول H⁺ تولید می‌شود.
 ب) اگر از انحلال هر ۵۰۰ مولکول HA در شرایط معین، ۲۴ یون تولید شده باشد، درصد یونش آن برابر ۲/۴ درصد است.
 پ) اگر عنصرهای A و X هر دو جزء عنصرهای گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشند، واکنش‌پذیری عنصر A بیشتر از عنصر X است.
 ت) pH محلول ۰/۵ مولار HX، بیشتر از محلول ۰/۵ مولار HA است.

۱) الف - ب - پ

۲) ب - پ

۳) الف - پ

۴) ب - ت

مشاوره شناخت اسیدهای قوی

و ضعیف به کمک نمودارهای ستونی یا نمای ذره‌ای محلول، از مباحث مهم فصل اول هستند و سابقه طرح‌شدن در امتحان نهایی (سال ۹۸) و کنکور تجربی ۱۴۰۲ را دارد.



عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی

HA به طور جزئی یونیده شده؛ بنابراین جزو اسیدهای ضعیف است، در حالی که HX به طور کامل به یون تبدیل شده و در نتیجه جزء اسیدهای قوی می‌باشد.

بررسی عبارت‌ها:

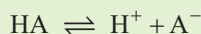
الف)

به اسیدهایی که هر مولکول آن‌ها در آب، فقط می‌تواند یک یون هیدرونیوم تولید کند، اسیدهای تک‌پروتون‌دار می‌گویند. به عبارت دیگر، به اسیدهایی که هر مول از آن‌ها در آب حداکثر می‌تواند یک مول یون H⁺ تولید کند، اسید تک‌پروتون‌دار می‌گویند. HCl، HF، HNO₃، HCN و کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی مانند CH₃COOH، جزء اسیدهای تک‌پروتون‌دار هستند.



HA اسید ضعیف تک‌پروتون‌دار است و هر مول از آن در آب، مقدار ناچیزی یون H⁺ تولید می‌کند.

ب) هر مولکول HA که یونش یابد، دو یون (H⁺ و A⁻) تولید می‌کند؛ بنابراین برای تولید ۲۴ یون کافی است که تنها ۱۲ مولکول یونیده شود:



اولیه: ۵۰۰ ۰ ۰

نهایی: ۵۰۰ - x x x $\Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

$\frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}} \times 100 = \frac{12}{500} \times 100 = 2.4\%$

پ) اگر A و X، هر دو جزو هالوژن‌ها باشند، با توجه به این‌که HA یک اسید ضعیف است؛ بنابراین همان هیدروفلوئوریک اسید فورمون! است؛ پس عنصر A، فلئور (F) است که بیشترین خصلت نافلز و واکنش‌پذیری را در گروه هالوژن‌ها دارد.

ت) در شرایط یکسان، pH محلول اسید قوی HX، کم‌تر از محلول اسید ضعیف HA است.

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- انحلال برخی از ترکیب‌های مولکولی در آب، به صورت یونی است.
- در یک سامانه تعادلی، واکنش‌های رفت و برگشت با سرعت یکسانی انجام می‌شوند؛ از این رو غلظت مواد شرکت کننده در سامانه برابر می‌شود.
- میزان بازی بودن بزاق دهان در مقایسه با روده کوچک بیشتر است.
- در دمای اتاق، حاصل ضرب $[H^+][OH^-]$ برای محلول سود سوزآور، بیشتر از این حاصل ضرب برای محلول آمونیاک است.

۴) صفر

۳) ۳

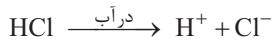
۲) ۲

۱) ۱

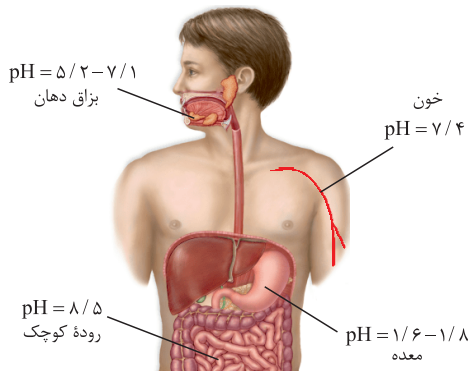


پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط عبارت اول درست است.

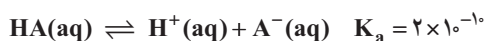
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: مثلاً HCl یک ترکیب مولکولی است ولی در آب، به یون‌های H^+ و Cl^- یونیده می‌شود، یعنی انحلال از نوع یونی است:

عبارت دوم: در حالت تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است و غلظت مواد شرکت کننده در سامانه، ثابت باقی می‌ماند، اما لزوماً غلظت مواد با هم برابر نیست.

عبارت سوم: pH بزاق دهان در محدوده $5/2$ تا $7/1$ و pH روده کوچک حدود $8/5$ است؛ بنابراین میزان بازی بودن روده کوچک بیشتر است.عبارت چهارم: در دمای اتاق، حاصل ضرب $[H^+][OH^-]$ در همه محلول‌های آبی، یکسان و برابر با 10^{-14} است و این موضوع ارتباطی به قوی یا ضعیف بودن اسید و باز ندارد.

با توجه به معادله‌های داده‌شده، کدام مطلب درست است؟



(۱) با دو برابر کردن غلظت اولیه محلول HX در دمای ثابت، $[\text{X}^-]$ در آن تغییر نمی‌کند.

(۲) محلول آبی HX، یک الکترولیت قوی و محلول آبی HA، غیرالکترولیت محسوب می‌شود.

(۳) با دو برابر کردن غلظت اولیه محلول HA در دمای ثابت، $[\text{H}^+]$ در محلول به تقریب $\sqrt{2}$ برابر می‌شود.

(۴) تفاوت $[\text{H}^+]$ و $[\text{X}^-]$ در محلول HX، بیشتر از تفاوت غلظت $[\text{H}^+]$ و $[\text{A}^-]$ در محلول HA است.

مقایسه اسیدهای قوی و ضعیف

اسید	قوی (HX)	ضعیف (HA)
میزان یونش در آب	تقریباً به طور کامل یونش می‌یابد ($\alpha \approx 1$).	به طور جزئی یونش می‌یابد ($\alpha < 1$).
گونه‌های موجود در محلول آبی (به جز مولکول‌های آب)	فقط یون‌های آب‌پوشیده	یون‌های آب‌پوشیده و مولکول‌های اسید یونیده‌نشده
نمای ذره‌ای محلول آبی		
نمودار یونش		
رسانای الکتریکی محلول آبی ^۱	رسانای قوی (لامپ کاملاً روشن در مدار الکتریکی)	رسانای ضعیف (لامپ نیمه‌روشن در مدار الکتریکی)
ثابت یونش (K_a)	بسیار بزرگ $\text{HI, HBr, HCl, H}_2\text{SO}_4$ بزرگ HNO_3	یک عدد مشخص $\text{HF} > \text{HNO}_3 > \text{HCOOH} > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{H}_2\text{CO}_3 > \text{HCN}$
سرعت واکنش با یک فلز در شرایط یکسان	سریع‌تر	آهسته‌تر
خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون هیدرونیوم در محلول با غلظت اولیه یکسان	بیشتر	کم‌تر
pH در غلظت اولیه یکسان	کم‌تر	بیشتر

۱- البته به شرط غلظت کافی!



پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): معادله یونش HX در آب، یک طرفه و K_a آن بسیار بزرگ است؛ بنابراین HX یک اسید قوی است. در محلول اسیدهای قوی تک پروتون دار، غلظت یون‌ها با غلظت اولیه محلول برابر است؛ بنابراین اگر غلظت محلول دو برابر شود، غلظت یون‌های حاصل از یونش نیز دو برابر خواهد شد:



قبل از یونش: M ° °

بعد از یونش: ° M M

گزینه (۲): محلول آبی همه اسیدها، الکترولیت محسوب می‌شود؛ اسید قوی الکترولیت قوی و اسید ضعیف الکترولیت ضعیف به شمار می‌آید.

گزینه (۳): در دمای ثابت، مقدار ثابت یونش برای یک اسید، ثابت است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

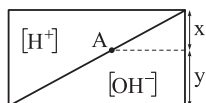
$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} \quad \text{چون } K_a \text{ خیلی کوچک است.} \rightarrow K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M}$$

$$K_a = \text{عدد ثابت} \Rightarrow \frac{[\text{H}^+]_1^2}{M_1} = \frac{[\text{H}^+]_2^2}{M_2} \Rightarrow \frac{[\text{H}^+]_2}{[\text{H}^+]_1} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{2}$$

گزینه (۴): غلظت یون‌های حاصل از یونش اسیدهای تک پروتون دار، با هم برابر است:

° تفاوت $[\text{H}^+]$ و $[\text{X}^-]$: $[\text{H}^+] = [\text{X}^-]$: محلول HX

° تفاوت $[\text{H}^+]$ و $[\text{A}^-]$: $[\text{H}^+] = [\text{A}^-]$: محلول HA



با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را در محلول‌های آبی در دمای اتاق نشان می‌دهد، اگر $\frac{2y}{3x+y} = 1/5$ باشد، pH محلول A کدام است؟

$$(\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.5)$$

$$7/5 \quad (2)$$

$$4/5 \quad (1)$$

$$9/5 \quad (4)$$

$$8/5 \quad (3)$$

۸۳



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا با توجه به نسبت داده شده، رابطه X و y را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2y}{3x+y} = 1/5 \Rightarrow 2y = 4/5x + 1/5y$$

$$\Rightarrow 9/5y = 4/5x \Rightarrow y = 4/9x$$

در دمای اتاق، در محلول‌های آبی داریم:

$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \xrightarrow{[\text{H}^+] = x, [\text{OH}^-] = 4/9x} x \times 4/9x = 10^{-14} \Rightarrow 4x^2 = 10^{-14}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = x = \sqrt{\frac{10^{-14}}{4}} = \frac{10^{-7}}{2} \text{ mol.L}^{-1}$$

بنابراین pH این محلول برابر است با:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log \frac{10^{-7}}{2} = -(\log 10^{-7} - \log 2) = 7 + \log 2 = 7.3$$

غلظت یون یدید در محلول چند مولار هیدرویدیک اسید با مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول 0.2 مولار HA با $K_a = 0.1$ برابر است؟

0.4 (۴)

0.3 (۳)

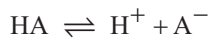
0.2 (۲)

0.1 (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول HA را حساب می‌کنیم:



غلظت اولیه: 0.2 0 0

تغییر غلظت: $-x$ $+x$ $+x$

غلظت نهایی: $0.2-x$ x x

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow 0.1 = \frac{x^2}{0.2-x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 0.1x - 0.02 = 0$$

برای حل معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x^2 + 0.1x - 0.02 = 0$$

$$\Delta = (0.1)^2 - 4(1)(-0.02) = 0.09 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0.3$$

$$x = \frac{-0.1 \pm 0.3}{2} \begin{cases} \text{غ.ق.ق. } x = -0.2 \\ x = 0.1 \end{cases}$$

$$\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = [H^+] + [A^-] = 2x = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: غلظت مولی محلول هیدرویدیک اسید را حساب می‌کنیم.

هیدرویدیک اسید (HI)، یک اسید قوی است و در محلول آن، $[H^+]$ و $[I^-]$ با غلظت اولیه محلول برابر است؛ بنابراین $[I^-]$ در محلول 0.2 مولار هیدرویدیک اسید برابر با 0.2 مولار است.





۸۵

جاهای خالی زیر به ترتیب در کدام گزینه به درستی تکمیل شده‌اند؟

الف) تفاوت pH محلول ۰/۲ مولار استیک اسید با pH آب خالص، از تفاوت pH آن با pH مخلوطی از آب و صابون مایع در دمای اتاق است.

ب) از محلول آبی حاصل از فرآورده واکنش هابر، می‌توان به عنوان استفاده کرد. NH_3

پ) pH محلول حاصل از حل کردن ۰/۱ مول باریم هیدروکسید در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر در دمای 25°C ، برابر است. (از تغییر حجم محلول صرف نظر کنید.)

(۱) بیشتر - شیشه پاک‌کن - ۱۳/۳

(۲) بیشتر - لوله‌بازکن - ۱۳/۷

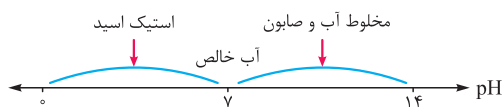
(۳) کم‌تر - شیشه پاک‌کن - ۱۳/۷

(۴) کم‌تر - لوله‌بازکن - ۱۳/۳



پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی موارد:

الف) محلول استیک اسید، خاصیت اسیدی ($\text{pH} < 7$) و مخلوط آب و صابون مایع، خاصیت بازی ($\text{pH} > 7$) دارد اما آب خالص، خنثی ($\text{pH} = 7$) است؛ لذا با توجه به بازی بودن مخلوط آب و صابون مایع، تفاوت pH محلول اسیدی استیک اسید با pH مخلوط آب و صابون، بیشتر از تفاوت pH این مخلوط با آب خالص است:



ب) فرآورده واکنش هابر، آمونیاک (NH_3) است. از محلول آبی آمونیاک که یک باز ضعیف است، به عنوان شیشه‌پاک‌کن استفاده می‌شود؛ نه لوله‌بازکن!

پ) باریم هیدروکسید (Ba(OH)_2) یک باز قوی دو ظرفیتی است و از انحلال هر مول از آن در آب، دو مول یون هیدروکسید (OH^-) تولید می‌شود.

$$\text{OH}^- \text{ مول} = 2 \times \text{Ba(OH)}_2 \text{ مول} = 2 \times 0.1 = 0.2 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{0.2 \text{ mol}}{0.4 \text{ L}} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{0.5} = 2 \times 10^{-14}$$

در نتیجه pH این محلول برابر است با:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 2 \times 10^{-14} = 14 - \log 2 = 14 - 0.3 = 13.7$$

اگر درصد یونش آمونیاک در محلولی از آن با $\text{pH} = 11/7$ برابر با درجه یونش هیدروکلریک اسید در محلولی از آن با $\text{pH} = 1/5$ باشد، نسبت غلظت مولار محلول هیدروکلریک اسید به غلظت مولار محلول آمونیاک، کدام است؟ ($\log 2 = 0/3$ ، $\log 3 = 0/5$)

- (۱) $0/12$ (۲) $0/03$
 (۳) $0/06$ (۴) $0/015$

مشاوره سؤالات مقایسه‌ای بین دو اسید یا دو باز و یا یک اسید و یک باز، در کنکورهای اخیر خیلی مد شده است. ما هم به رسم این کنکورها (ریاضی و تجربی ۱۴۰۰ ریاضی دی ۱۴۰۱ و ...) یکی از این نوع سؤال‌ها را براتون آوردیم.



پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این که هیدروکلریک اسید (HCl) یک اسید قوی محسوب می‌شود؛ در نتیجه درجه یونش (α) آن برابر یک است و در محلول این اسید، غلظت یون H^+ حاصل از یون اسید، برابر با غلظت اولیه اسید است:

$$\text{HCl در محلول: } \text{pH} = 1/5 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/5} = 10^{0/5} \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{HCl}] = [\text{H}^+] \rightarrow \text{غلظت اولیه محلول HCl } (M_{\text{HCl}}) = 0/03 \text{ mol.L}^{-1}$$

درصد یونش محلول آمونیاک، برابر با درجه یونش محلول هیدروکلریک اسید است؛ در نتیجه درصد یونش محلول آمونیاک، برابر ۱٪ است:

$$\text{در محلول آمونیاک: } \text{pH} \xrightarrow{[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}} [\text{H}^+] \xrightarrow{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}} [\text{OH}^-] \xrightarrow{[\text{OH}^-] = M\alpha} \alpha, M$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-11/7} = 10^{0/3} \times 10^{-12} = 2 \times 10^{-12} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-12}} = 5 \times 10^{-3}$$

$$[\text{OH}^-] = M \cdot \alpha \Rightarrow 5 \times 10^{-3} = M \times 0/01 \Rightarrow M = 0/5 \text{ mol.L}^{-1}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\text{غلظت اولیه محلول هیدروکلریک اسید}}{\text{غلظت اولیه محلول آمونیاک}} = \frac{0/03}{0/5} = 0/06$$

۸۷

در کدام گزینه، اثر تغییرهای گفته شده بر کمیت مورد نظر به درستی آورده شده است؟

الف) افزایش غلظت اولیه محلول اسید بر مقدار ثابت یونش اسید در دمای ثابت

ب) رقیق کردن محلول یک اسید ضعیف بر درجه یونش اسید

پ) افزایش غلظت محلول اتانول در آب بر رسانایی الکتریکی محلول

(۱) افزایش - کاهش - افزایش

(۲) بدون تأثیر - افزایش - بدون تأثیر

(۳) بدون تأثیر - کاهش - افزایش

(۴) کاهش - افزایش - بدون تأثیر



پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی سایر گزینه‌ها:

الف) ثابت یونش اسیدی (K_a) مانند هر ثابت تعادل دیگری، فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت اولیه مواد تغییری نمی‌کند.

ب) طبق رابطه $K_a \approx M\alpha^2$ و ثابت بودن K_a ، درجه یونش یک اسید با غلظت محلول آبی رابطه وارونه دارد:

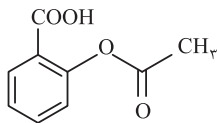
$$M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$$

پس با رقیق کردن محلول یک اسید ضعیف و کاهش M ، درجه یونش اسید افزایش می‌یابد.

پ) اتانول (C_2H_5OH) به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و غیرالکترولیت است؛ یعنی محلول آن رسانای جریان برق نیست؛

بنابراین افزایش غلظت محلول، تأثیری بر رسانایی آن ندارد.

آسپرین، یکی از پرکاربردترین داروها در دنیای امروزی به‌ویژه برای بیماران قلبی است که ساختار آن به صورت زیر می‌باشد. اگر نمونه‌ای به جرم ۵/۴ گرم از این ترکیب را در مقداری آب حل کرده و حجم آن را به ۳ لیتر برسانیم، درصد یونش و pH محلول اسیدی حاصل تقریباً چه قدر است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید؛ $K_a = 5 \times 10^{-4}$, $C = 12$, $O = 16$, $H = 1$: g.mol⁻¹)



$$2/7 - 40 \quad (2)$$

$$2/7 - 20 \quad (1)$$

$$3/3 - 40 \quad (4)$$

$$3/3 - 20 \quad (3)$$

رابطه ثابت یونش (K_a) و درجه یونش (α)

(۱) اگر درجه یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه اسید برابر M باشد، اسید به اندازه $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ در نتیجه می‌توان گفت:



غلظت اولیه	M	°	°
تغییر غلظت	$-M\alpha$	$+M\alpha$	$+M\alpha$
غلظت نهایی	$M - M\alpha$	$M\alpha$	$M\alpha$

$$K_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M^2\alpha^2}{M(1-\alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}, K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]}$$

حالا اگر بخواهیم $[H^+]$ را بر حسب K_a و α به دست آوریم؛ حاصل کار این جور است:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \quad \alpha = \frac{[H^+]}{M} \rightarrow K_a = \frac{M \times \frac{[H^+]^2}{M^2}}{1-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{[H^+]^2}{M(1-\alpha)} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a \cdot M(1-\alpha)}$$

آسپرین با فرمول مولکولی $C_9H_8O_4$ ، دارای یک گروه عاملی استری و یک گروه عاملی کربوکسیل در ساختار خود است و به دلیل همین گروه کربوکسیل، هنگام انحلال در آب خاصیت اسیدی ایجاد می‌کند.

گام اول: غلظت مولی این ماده را در محلول ایجادشده حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی آسپرین} = \frac{\text{جرم مولی آسپرین}}{\text{جرم مولی}} = \frac{5/4}{3} = 0/1 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: درجه یونش اسید را با توجه به فرمول ثابت یونش حساب می‌کنیم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 5 \times 10^{-4} = \frac{0/1 \alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 0/05 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = 0/2$$

بنابراین درصد یونش محلول این اسید برابر است با:

$$\% \alpha = \alpha \times 100 = \%20$$

توجه: برای به دست آوردن درجه یونش، می‌توانیم اعداد $\alpha = 0/2$ و $\alpha = 0/4$ را در معادله جای‌گذاری کنیم و نیازی به حل معادله نیست.

گام سوم: pH محلول ایجادشده را به دست می‌آوریم:

$$[H^+] = M \cdot \alpha = 0/1 \times 0/2 = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log 2 \times 10^{-3} = 3 - \log 2 = 2/7$$



نکته Box



پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام مطلب درست است؟

۸۹

(۱) با افزودن اسید به آب، با وجود افزایش غلظت یون هیدرونیوم، به دلیل کاهش غلظت یون هیدروکسید، رسانایی الکتریکی تغییر قابل توجهی نمی‌کند.

(۲) برای باز کردن لوله‌ای که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده است، باید از محلول سدیم کلرید استفاده کرد.

 $Mg(OH)_2$

(۳) ترکیب اصلی شیر منیزی برخلاف فراورده یونی واکنش آن با هیدروکلریک اسید، در دمای اتاق نامحلول است.

(۴) در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیرۀ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود ۳/۰ مولار است.

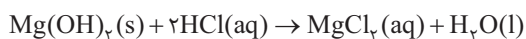
بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): اگرچه با افزودن اسید آب، غلظت یون‌های H^+ افزایش و غلظت یون‌های OH^- کاهش می‌یابد، اما با توجه به افزایش غلظت یون‌های موجود در محلول، رسانایی الکتریکی بیشتر می‌شود. هم‌چنین با افزودن اسید HA به آب، غلظت یون‌های A^- نیز در محلول افزایش می‌یابد.

گزینه (۲): برای باز کردن لوله‌هایی که مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد؛ نه محلول سدیم کلرید!

گزینه (۳): ترکیب اصلی موجود در شیر منیزی، منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$) است که برخلاف منیزیم کلرید ($MgCl_2$) در دمای اتاق در آب نامحلول است.



گزینه (۴): در بدن انسان بالغ، روزانه بین دو تا سه لیتر شیرۀ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم آن حدود ۳/۰ مولار است؛ یعنی pH شیرۀ معده حدود ۵/۱ می‌باشد.

۹۰

در بارهٔ محلول سود سوزآور (محلول I) و محلول آمونیاک (محلول II) با حجم، دما و pH یکسان، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- شمار مول‌های آغازی دو باز، برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- غلظت مولار یون سدیم در محلول (I) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (II)، برابر است.
- رسانایی الکتریکی دو محلول با هم برابر است.
- مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (I)، از مجموع شمار گونه‌های موجود در محلول (II)، کم‌تر است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



مشاوره این تیب سؤال‌های مقایسه‌ای و مفهومی، برای دو اسید زیاد مطرح شده است و احتمال مطرح‌شدن آن برای بازها در کنکورهای آینده خیلی زیاد است، به همین دلیل، ما یکی از سؤالات کنکور (ریاضی ۱۴۰۰) رو براتون شبیه‌سازی کردیم!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

● می‌دانیم که NaOH یک باز قوی و NH_3 یک باز ضعیف است؛ بنابراین برای این که pH دو محلول با هم برابر باشد، باید غلظت مولی محلول NaOH کم‌تر از محلول NH_3 باشد. با توجه به یکسان‌بودن حجم محلول‌ها، نتیجه می‌گیریم که شمار مول‌های NaOH اولیه باید کم‌تر از شمار مول‌های NH_3 اولیه باشد.

● با توجه به برابر بودن pH محلول، $[\text{H}^+]$ و در نتیجه $[\text{OH}^-]$ دو محلول با هم برابر است. در محلول NaOH، $[\text{OH}^-]$ با $[\text{Na}^+]$ و در محلول NH_3 ، $[\text{NH}_4^+]$ با $[\text{OH}^-]$ برابر است:



با توجه به برابر بودن غلظت یون‌ها در دو محلول:

● رسانایی الکتریکی آن‌ها نیز با هم برابر است.

● در محلول NaOH (I)، برخلاف محلول NH_3 (II)، مولکول وجود ندارد؛ بنابراین مجموع شمار گونه‌ها در محلول (I) کم‌تر است.

(۴ گونه) $\text{Na}^+, \text{OH}^-, \text{H}^+, \text{H}_2\text{O}$: گونه‌های محلول (I)

(۵ گونه) $\text{NH}_3, \text{NH}_4^+, \text{OH}^-, \text{H}^+, \text{H}_2\text{O}$: گونه‌های محلول (II)



۹۱

یک نمونه ۲ لیتری از محلول HCl با $\text{pH} = 1/4$ در اختیار داریم. اگر بخواهیم pH این محلول را به $2/3$ برسانیم، به چند لیتر محلول KOH با $\text{pH} = 12/5$ نیاز داریم و در انتهای این فرایند، غلظت یون K^+ در محلول نهایی بر حسب ppm کدام است؟ (چگالی همه محلول‌ها را برابر چگالی آب در نظر بگیرید؛ $\text{K} = 39 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) $585 - 2$ (۲) $292/5 - 1$
 (۳) $585 - 1$ (۴) $292/5 - 2$

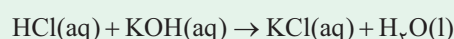
مشاوره سوالات خنثی شدن ناقص اسید و باز، برای اولین بار در کنکور ۱۴۰۳ رشته ریاضی، مطرح شده است. بعید نیست طراحان کنکور دوباره سراغ این موضوع بروند.



گاهی ممکنه اسید و باز قوی رو روی هم بریزن ولی به طور کامل هم‌رنگه رو فنتی نکنن؛ یعنی یکی از اون‌ها کامل مصرف شه و تموم شه و یکی دیگه اضافه بپار! در این موارد می‌توان غلظت H^+ یا OH^- باقی‌مانده در محلول را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$[\text{H}^+] \text{ یا } [\text{OH}^-] = \frac{\overbrace{n_a \cdot M_a \cdot V_a}^{\text{اسید}} - \overbrace{n_b \cdot M_b \cdot V_b}^{\text{باز}}}{V_a + V_b} = \frac{|\text{تعداد مول OH}^- \text{ اولیه} - \text{تعداد مول H}^+ \text{ اولیه}|}{\text{حجم محلول باز} + \text{حجم محلول اسید}}$$

اگر مقدار مربوط به اسید بیشتر از مقدار مربوط به باز باشد، محیط اسیدی خواهد بود و مقدار به‌دست‌آمده از این رابطه، غلظت H^+ را نشان می‌دهد؛ اما اگر مقدار مربوط به باز بیشتر باشد، محیط بازی خواهد بود و مقدار به‌دست‌آمده، غلظت OH^- را نشان می‌دهد. هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی است که براساس معادله زیر با پتاسیم هیدروکسید واکنش می‌دهد:



گام اول: غلظت محلول اولیه و نهایی اسید و غلظت مول پتاسیم هیدروکسید رو حساب کتاب می‌کنیم.

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/4} = 4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \xrightarrow{\alpha=1} [\text{HCl}] = 0/04 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/3} = 0/05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \xrightarrow{\alpha=1} [\text{H}^+] = 0/05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 10^{\text{pH}-14} = 10^{12/5-14} = 10^{-1/5} = 0/03 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \xrightarrow{\alpha=1} [\text{KOH}] = 0/03 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

گام دوم: پس از انجام واکنش، محلول اسیدی اولیه به طور کامل خنثی نشده است، زیرا pH محلول نهایی برابر $2/3$ بوده و در واقع محلول نهایی هم‌چنان خاصیت اسیدی دارد. حجم محلول اسیدی اولیه برابر با ۲ لیتر بوده و غلظت اسید در این محلول نیز برابر $0/04$ مول بر لیتر است، حال اگر حجم محلول KOH به این محلول اسیدی را برابر V در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$[\text{H}^+] = \frac{\overbrace{n_a \cdot M_a \cdot V_a}^{\text{اسید}} - \overbrace{n_b \cdot M_b \cdot V_b}^{\text{باز}}}{V_a + V_b} \rightarrow 0/05 = \frac{(1 \times 0/04 \times 2) - (1 \times 0/03 \times V)}{2 + V}$$

$$\rightarrow 0/01 + 0/05V = 0/08 - 0/03V \rightarrow 0/035V = 0/07 \rightarrow V = \frac{0/07}{0/035} = 2 \text{ L}$$

گام سوم: چگالی محلول‌ها برابر با $1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ است؛ در نتیجه می‌توان گفت در انتهای این فرایند یک محلول با حجم ۴ لیتر و جرم 4000 گرم ایجاد می‌شود؛ بنابراین ابتدا جرم یون K^+ موجود در این محلول را حساب می‌کنیم، سپس غلظت آن را بر حسب ppm به دست می‌آوریم:

$$? \text{ g K}^+ = 2 \text{ L} \times \frac{0/03 \text{ mol KOH}}{1 \text{ L محلول KOH مصرف شده}} \times \frac{1 \text{ mol K}^+}{1 \text{ mol KOH}} \times \frac{39 \text{ g K}^+}{1 \text{ mol K}^+} = 2/34 \text{ g K}^+$$

$$\text{ppm}(\text{K}^+) = \frac{\text{جرم یون K}^+}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{2/34 \text{ g K}^+}{4000 \text{ g محلول}} \times 10^6 = 585$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۹۲

اگر در فرمول ، X برابر باشد، ترکیب مورد نظر

(۱) KHCO_x ، ۲، پتاسیم هیدروژن کربنات است

(۲) HNO_x ، ۲، اسیدی است که قدرت اسیدی کمتری نسبت به هیدروسیانیک اسید دارد

(۳) HNO_x ، ۳، از انحلال اکسیدهای نیتروژن در آب تولید می‌شود

(۴) KHCO_x ، ۳، دارای آنیونی است که در ساختار جوش شیرین نیز وجود دارد



نام چند آنیون حاصل از یونش اسیدهای ضعیف، در جدول زیر آورده شده است:

فرمول آنیون	CN^-	NO_2^-	HCOO^-	CH_3COO^-	HCO_2^-	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-$
نام آنیون	سیانید	نیتريت	فورمات (متانوات)	استات (تانوات)	هیدروژن کربنات	بنزوات

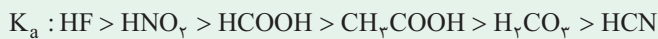


پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۴): اگر X در KHCO_x برابر ۲ باشد، آنیون سازنده ترکیب (HCO_2^-)، همان یون فورمات خواهد بود؛ بنابراین نام ترکیب، پتاسیم فورمات است. اگر X برابر ۳ باشد، آنیون سازنده ترکیب (HCO_2^-)، همان هیدروژن کربنات است که در ساختار جوش شیرین (NaHCO_3) نیز وجود دارد.

گزینه‌های (۲) و (۳): اگر X در HNO_x برابر ۲ باشد، اسید مورد نظر همان نیترو اسید (HNO_2) است که قدرت اسیدی بیشتری نسبت به هیدروسیانیک اسید دارد.

مقایسه قدرت اسیدی اسیدهای ضعیف مطرح شده در کتاب درسی به صورت زیر است:



اگر X در HNO_x برابر ۳ باشد، اسید مورد نظر همان نیتريك اسید است که می‌تواند از انحلال N_2O_5 در آب تولید شود.



از انحلال همه اکسیدهای نیتروژن در آب، HNO_3 تولید نمی‌شود! مثلاً NO که اکسیدی از نیتروژن است، کاملاً به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و با آب واکنش نمی‌دهد.

با توجه به جدول زیر که مواد مؤثر موجود در چند ضداسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

شماره ضداسید	۱	۲	۳
ماده مؤثر	$\text{Al(OH)}_3, \text{NaHCO}_3$	$\text{Al(OH)}_3, \text{Mg(OH)}_2$	NaHCO_3

(۱) مصرف این داروها، سبب افزایش pH اسید معده می‌شوند.

(۲) مخلوط مواد مؤثر ضداسید شماره (۲) با آب، منجر به تشکیل یک سامانه همگن می‌شود.

(۳) دو مول ضداسید شماره (۱) که مواد مؤثر آن به نسبت مولی برابر مخلوط شده‌اند، می‌تواند چهار مول HCl را خنثی کند.

(۴) ضداسید شماره (۳) به عنوان ماده افزودنی در تهیه شوینده‌ها نیز کاربرد دارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

مخلوط آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید با آب، یک مخلوط همگن نیست. هر دو ماده در آب، نامحلول‌اند. مخلوط این مواد با آب (شربت معده) را می‌توان سوسپانسیون در نظر گرفت.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): ضد اسیدها، اسید معده را خنثی کرده و سبب کاهش مقدار اسید معده و در نتیجه افزایش pH آن می‌شوند.

گزینه (۳): درسته! زیرا یک مول Al(OH)_3 ، سه مول HCl و یک مول NaHCO_3 ، یک مول HCl را خنثی می‌کند.



گزینه (۴): با توجه به این‌که NaHCO_3 (جوش شیرین)، خاصیت بازی دارد، می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند، به همین دلیل، برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین اضافه می‌کنند.

شیمی دهم

۹۴

کدام موارد زیر درست است؟

- (الف) مولکول‌های آب از سر منفی، جذب میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر می‌شوند.
- (ب) با مقایسه جهت‌گیری مولکول‌های A و B در میدان الکتریکی، می‌توان نسبت نقطه جوش این دو مولکول را پیش‌بینی کرد.
- (پ) قدرت نیروهای بین مولکولی آب، حدود دو برابر قدرت نیروهای بین مولکولی هیدروژن سولفید است.
- (ت) رفتار مولکول‌های آب از ویژگی‌های ساختاری و حالت هندسی V شکل آن سرچشمه می‌گیرد.
- (۱) الف - ب
- (۲) ب - پ
- (۳) الف - ت
- (۴) پ - ت



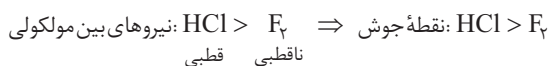
پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) میله شیشه‌ای از لحاظ بار الکتریکی خنثی است، اما بر اثر مالش به موی سر خشک، دارای بار الکتریکی منفی می‌شود؛ در نتیجه مولکول‌های آب از سر مثبت خود (اتم‌های هیدروژن)، جذب میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر می‌شوند.

(ب) در مقایسه نقطه جوش دو ماده، لزوماً ماده‌ای که قطبی باشد (در میدان الکتریکی جهت‌گیری کند)، نقطه جوش بیشتری ندارد و بالعکس. در واقع نیروهای بین مولکولی و نقطه جوش مولکول‌ها، به قطبی بودن و هم‌چنین جرم و حجم آن‌ها بستگی دارد. به عنوان مثال: جرم مولی دو مولکول F_2 و HCl نزدیک به هم است، اما HCl برخلاف F_2 قطبی است؛ در نتیجه نیروی بین مولکولی در آن قوی‌تر بوده و نقطه جوش بالاتری دارد:



اما مواضعی که همواره نیروهای بین مولکولی در مواد قطبی، قوی‌تر از مواد ناقطبی نیست! در برخی موارد، جرم و حجم مولکول ناقطبی به قدری زیاده که نیروهای بین مولکولی آن قوی‌تر از یک مولکول قطبی می‌شود! مثلاً می‌دانیم که ماده ناقطبی I_2 در دمای اتاق جامد و ماده قطبی هیدروژن کلرید (HCl) گاز است؛ پس قطعاً نیروی بین مولکولی در I_2 ، قوی‌تر می‌باشد؛ بنابراین این جرم و حجم زیاد I_2 بر قطبی بودن غلبه کرده!

(پ) گشتاور دوقطبی مولکول‌های H_2O و H_2S به ترتیب برابر با $1/85 D$ و $0/97 D$ است. این کمیت‌ها نشان می‌دهد که میزان قطبیت مولکول‌های آب و قدرت نیروهای بین مولکولی آن، نزدیک به دو برابر مولکول‌های هیدروژن سولفید است.

(ت)

آب تنها ماده‌ای است که به هر سه حالت جامد، مایع و گاز (بخار) در طبیعت وجود دارد.



- توانایی حل کردن اغلب مواد
 - افزایش حجم هنگام انجماد
 - داشتهن نقطه جوش بالا و غیرعادی
 - انحراف باریکه آب از راستای طبیعی به وسیله میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی خشک سر
- برخی از ویژگی‌های آب

رفتار مولکول‌های آب از ویژگی‌های ساختاری آن (نوع اتم‌های سازنده و ساختار مولکول‌ها) سرچشمه می‌گیرد. شکل مولکول‌های آب خمیده (V شکل) بوده و هر اتم هیدروژن با یک پیوند اشتراکی یگانه به اتم مرکزی اکسیژن متصل است:



۹۵

مشاوره این سؤال، یکی از سؤالات امتحان نهایی شیمی دهم خرداد ۱۴۰۳ است.

با توجه به عبارت‌های زیر، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

(a) این مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

(b) این مولکول می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

(c) این مولکول به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

(d) این مولکول با انحلال در آب، ماهیت خود را حفظ می‌کند.

الف) کدام عبارت (ها) برای توصیف مولکول استون (CH_3CCH_3) مناسب است؟

ب) عبارت (a) کدام یک از مولکول (ها) (HF , CO_2 , CH_4) را توصیف می‌کند؟

پ) کدام عبارت جمله زیر را توجیه می‌کند؟

«نقطه جوش NH_3 ، از ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه نیتروژن بالاتر است.»

(۲) c, CO_2 , c

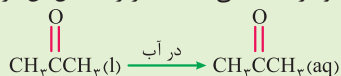
(۱) b, CO_2 و CH_4

(۴) b, CO_2 و CH_4 , d و c

(۳) d, HF و CH_4 , d و c



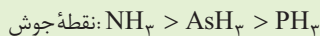
الف) استون به هر نسبتی در آب حل می‌شود (c). هم‌چنین با انحلال در آب، ماهیت خود را حفظ می‌کند (d)، زیرا انحلال آن در آب به صورت مولکولی است.



ب) مولکول‌های CH_4 و CO_2 ، ناقطبی‌اند و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند، اما مولکول‌های دواتمی مانند HF که از دو عنصر متفاوت تشکیل شده‌اند، قطبی‌اند.

پ) NH_3 به دلیل داشتن پیوند $\text{N}-\text{H}$ و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی (b)، نقطه جوش بالاتری نسبت به دیگر ترکیب‌های

هیدروژن‌دار عنصرهای گروه ۱۵ دارد:



↓ ↓ ↓
جرم مولی کم‌تر جرم مولی بیشتر پیوند هیدروژنی

پاسخ خیلی تشریحی

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- آب یکی از موادی است که به هر سه حالت جامد، مایع و بخار (گاز) در طبیعت یافت می‌شود.
- بین مولکول‌های آب در حالت بخار، پیوند هیدروژنی وجود ندارد و مولکول‌ها به صورت آزادانه و منظم از جایی به جای دیگر انتقال می‌یابند.
- بین مولکول‌های آب در حالت مایع، پیوندهای هیدروژنی سستی وجود دارد؛ به طوری که مولکول‌ها می‌توانند روی هم بلغزند و جابه‌جا شوند.
- بین مولکول‌های آب در حالت جامد، پیوندهای هیدروژنی قوی وجود دارد و مولکول‌های آب در جاهای به نسبت ثابتی قرار دارند.
- مبنای شکل دانه‌های برف را می‌توان به وجود شش‌وجهی‌ها در ساختار منظم یخ نسبت داد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط عبارت چهارم درست است.

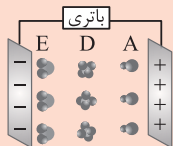
بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: آب تنها ماده‌ای است که به هر سه حالت جامد، مایع و گاز در طبیعت یافت می‌شود.

عبارت دوم: مولکول‌های آب در حالت بخار، به صورت آزادانه و نامنظم از جایی به جای دیگر انتقال می‌یابند.

عبارت سوم: بین مولکول‌های آب در حالت مایع، پیوندهای هیدروژنی قوی وجود دارد.

عبارت پنجم: مبنای شکل دانه‌های برف، وجود شش‌ضلعی‌ها در ساختار منظم یخ است.



با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟

۹۷

(۱) گشتاور دوقطبی مولکول‌های A و E برخلاف مولکول D، به یقین بزرگ‌تر از صفر است.

(۲) اگر نقطه جوش مولکول A، بیشتر از صفر درجه سلسیوس باشد، می‌تواند پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

(۳) اگر در نیروهای جاذبه مولکول E، اتم هیدروژن نقش کلیدی ایفا کند، گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از یک است.

(۴) نقطه جوش مولکول D، به یقین از نقطه جوش سایر ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای هم‌گروه آن، کم‌تر است.



مشاوره این سؤال شبیه ساز یکی از سؤالات کنکور رشته ریاضی (اردیبهشت ۱۴۰۳) است.

بررسی گزینه‌ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): A و E برخلاف D، در میدان الکتریکی جهت‌گیری کرده‌اند؛ بنابراین گشتاور دوقطبی آن‌ها بزرگ‌تر از صفر است.

گزینه (۲): مولکول A یک مولکول قطبی دواتمی است، و چون نقطه جوش آن بیشتر از صفر درجه سلسیوس است، می‌تواند HF باشد که توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

در فشار ۱ atm و دمای 25°C ، همه ترکیب‌های هیدروژن‌دار سه عنصر اول گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ جدول دوره‌ای (به جز H_2O) گازی شکل هستند.

گروه \ دوره	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۲	CH_4	NH_3		HF
۳	SiH_4	PH_3	H_2S	HCl
۴	GeH_4	AsH_3	H_2Se	HBr

همگی در فشار ۱ atm و دمای 25°C به حالت گازند. (نقطه جوش آن‌ها کم‌تر از 25°C است.)

در ضمن بدانید و آگاه باشید! که نقطه جوش همه این ترکیب‌ها (به جز HF و H_2O) منفی (کم‌تر از صفر درجه سلسیوس) است؛ نقطه جوش HF، 19°C و نقطه جوش H_2O ، 100°C است.

گزینه (۳): مولکول E، می‌تواند آب (H_2O) باشد، که جاذبه بین مولکولی آن، پیوند هیدروژنی است. گشتاور دوقطبی آب، بزرگ‌تر از یک ($1/85\text{D}$) می‌باشد.

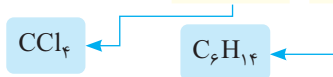
گزینه (۴): فرمول ترکیب‌های هیدروژن‌دار عنصرهای گروه ۱۴، مانند ترکیب D، به فرم XH_4 است. اگر D مولکول SiH_4 باشد، نقطه جوش آن از CH_4 بیشتر است.

نقطه جوش: $\text{CH}_4 < \text{SiH}_4 < \text{GeH}_4$

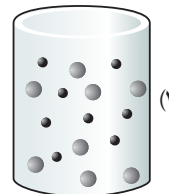
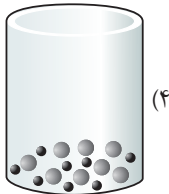
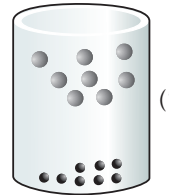
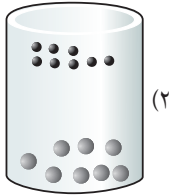


نکته

با توجه به جدول داده شده، کدام شکل نمای ذره‌ای بهتری از مخلوط هگزان و کربن تتراکلرید را در دمای اتاق نشان می‌دهد؟



ویژگی	ماده	هگزان (●)	کربن تتراکلرید (●)
جرم مولی ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)		۸۶	۱۵۴
نقطه جوش ($^{\circ}\text{C}$)		۶۸/۷	۷۶/۸
چگالی ($\text{g} \cdot \text{ml}^{-1}$)		۰/۶۶	۱/۵۹



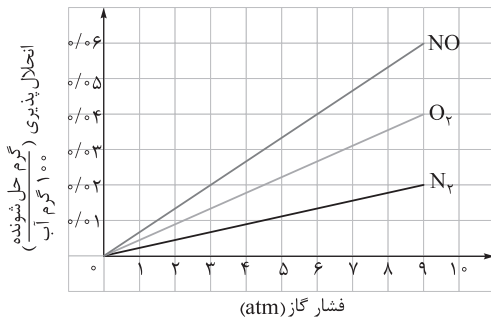
مولکول‌های قطبی و ناقطبی

درس‌Box

هیدروکربن‌ها (C_xH_y)، مولکول‌های ناقطبی‌اند و گشتاور دوقطبی آن‌ها ناچیز و در حد صفر است. هم‌چنین مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن‌ها جفت‌الکترون ناپیوندی ندارد و به آن، اتم‌های یکسانی متصل است، ناقطبی به شمار می‌آیند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ هر دو مولکول هگزان (C_6H_{14}) و کربن تتراکلرید (CCl_4)، ناقطبی‌اند و طبق قاعده «شبيهه، شبيهه را حل می‌کند» در هم حل می‌شوند و مخلوط همگن ایجاد می‌کنند؛ پس *اصلاً کاری به چگالی این دو ماده و این که کی بالا و کی پایین قرار می‌گیره نداریم!* یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) در ضمن با توجه به نقطه جوش آن‌ها (بیشتر از 25°C)، معلومه که این مواد در دمای اتاق به حالت مایع‌اند؛ بنابراین شکل گزینه (۴) که آن‌ها را به حالت جامد در ته ظرف نشان داده، نمی‌تواند درست باشد. در شکل گزینه (۳) همه پی درسته!



با توجه به نمودار مقابل که انحلال پذیری گازها در آب مقطر در دمای ثابت را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ ($N = 14, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) به قانون هنری پیرامون گازها مرتبط است.
 (۲) معادله انحلال پذیری گاز نیتروژن برحسب فشار را می‌توان به صورت $S \approx 2/2 \times 10^{-3} P$ ، نشان داد.

(۳) در فشار ۶ atm، حدود ۲/۶۷ میلی‌مول گاز نیتروژن مونوکسید در ۲۰۰ گرم آب حل می‌شود.

(۴) با افزودن مقداری نمک به آب، شیب نمودار انحلال پذیری گاز اکسیژن افزایش می‌یابد.

۹۹



بررسی گزینه‌ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): کلاً درست! قانون هنری، اثر فشار بر انحلال پذیری گازها را بررسی می‌کند (با افزایش فشار، انحلال پذیری گازها در آب به صورت خطی افزایش می‌یابد).

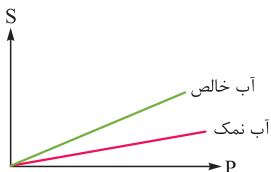
گزینه (۲): عرض از مبدأ نمودار انحلال پذیری گازها برحسب فشار، برابر صفر است؛ بنابراین معادله انحلال پذیری آن‌ها به فرم $S = KP$ است؛ پس کافی است شیب نمودار N_2 را پیدا کنیم:

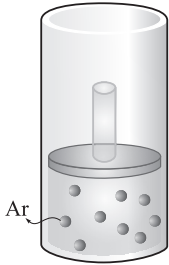
$$K = \frac{\Delta S}{\Delta P} = \frac{0/02 - 0}{9 - 0} = \frac{2}{9} \times 10^{-2} \approx 0/22 \times 10^{-2} \approx 2/2 \times 10^{-3} \Rightarrow S = 2/2 \times 10^{-3} P$$

گزینه (۳): در فشار ۶ atm، ۰/۰۴ گرم NO در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود؛ بنابراین در این شرایط در ۲۰۰ گرم آب، ۰/۰۸ گرم NO حل خواهد شد. حالا باید جرم NO را به مول آن و سپس به میلی‌مول تبدیل کنیم:

$$0/08 \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} \times \frac{1000 \text{ mmol NO}}{1 \text{ mol NO}} = \frac{8}{3} \approx 2/67 \text{ mmol}$$

گزینه (۴): با افزایش مقدار نمک‌ها در آب، انحلال پذیری گازها در آب کاهش می‌یابد؛ بنابراین با افزودن مقداری نمک به آب، شیب نمودار انحلال پذیری گاز اکسیژن کاهش خواهد یافت:





شکل روبه‌رو محلول سیر شده‌ای از گاز آرگون در ۲ لیتر آب در دمای 25°C را نشان می‌دهد (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند). اگر انحلال‌پذیری این گاز در آب در فشار 5 atm و دمای 25°C ، برابر 0.03 گرم در 100 گرم آب باشد، فشار گاز در شکل داده‌شده، چند اتمسفر است؟ (هر ذره را معادل 0.03 مول از آن در نظر بگیرد؛ $(\text{Ar} = 40\text{ g.mol}^{-1})$)

۹ (۲)

۱۳/۵ (۱)

۲/۵ (۴)

۶/۷۵ (۳)

انحلال‌پذیری گاز را در شرایط داده‌شده به ازای 100 گرم آب حساب کن و ببین نسبت به فشار 5 atm ، انحلال‌پذیری چند برابر شده است.

طبق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها در آب، با فشار نسبت مستقیم دارد و در دمای ثابت با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها نیز افزایش می‌یابد.

در ضمن با توجه به خطی بودن نمودار انحلال‌پذیری بر حسب فشار، می‌توان گفت که در دمای ثابت، با n برابر کردن فشار یک گاز، انحلال‌پذیری آن گاز نیز در آب، n برابر می‌شود.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

گام اول: با توجه به شکل داده‌شده، انحلال‌پذیری گاز را در 100 گرم آب حساب می‌کنیم.

در 2 لیتر آب، $0.027 = 0.03 \times 0.09$ مول Ar حل شده است:

$$\text{جرم آب} = 2\text{ L} \times \frac{1000\text{ mL}}{1\text{ L}} \times \underbrace{\frac{1\text{ g}}{1\text{ mL}}}_{\text{چگالی آب}} = 2000\text{ g}$$

$$\text{جرم Ar} = 0.027\text{ mol} \times \frac{40\text{ g}}{1\text{ mol}} = \frac{4 \times 27}{100}\text{ g}$$

بنابراین انحلال‌پذیری آرگون در شرایط داده‌شده، در 100 گرم آب برابر است با:

$$100\text{ g آب} \times \frac{\frac{4 \times 27}{100}\text{ g Ar}}{2000\text{ g آب}} = \frac{4 \times 27}{2000} = 0.054\text{ g Ar}$$

گام دوم: با مقایسه انحلال‌پذیری گاز در شرایط داده‌شده و فشار 5 atm ، فشار گاز در شرایط مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \frac{0.054}{0.03} = \frac{P_2}{5}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{1 \times 5 \times 54}{3} = 9\text{ atm}$$

۱۰۰



Hint



نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓



مطابق شکل رویه‌رو، حجم‌های برابری از دو محلول توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر به محلول سمت غشا فشار وارد شود، فرایند اسمز معکوس انجام خواهد شد و با گذشت زمان، تفاوت غلظت مولی دو محلول می‌یابد.

(۱) راست - افزایش

(۲) راست - کاهش

(۳) چپ - کاهش

(۴) چپ - افزایش

۱۰۱



در فرایند اسمز، مولکول‌های آب به طور خودبه‌خودی از محلول رقیق‌تر وارد محلول غلیظ‌تر می‌شوند. در فرایندی به نام اسمز معکوس، همان‌طور که از اسمش معلوم می‌شود، اتفاقی برخلاف فرایند اسمز رخ می‌دهد؛ یعنی آب از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شود. از اون‌جایی که این فرایند برخلاف قاعده کلی و طبیعی است، باید زور بالا سرش باشه! به عبارت دیگر اسمز معکوس با اعمال فشار انجام خواهد شد.

فرایندی غیرخودبه‌خودی است که طی آن با اعمال فشار بر سطح محلول غلیظ‌تر، مولکول‌های آب برخلاف روند طبیعی (فرایند اسمز) از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شوند.

ابتدا باید ببینیم که کدام محلول غلیظ‌تر است. **پاسخ خیلی تشریحی**

در محلول سمت راست غشا، ۱۲ مولکول آب و ۴ یون و در محلول سمت چپ غشا، ۱۲ مولکول آب و ۶ یون وجود دارد. با توجه به این که نسبت شمار یون‌ها به شمار مولکول‌های آب در محلول سمت چپ، بیشتر است فشار را باید بر این محلول اعمال کرد تا اسمز معکوس انجام شود. در اسمز معکوس، یا جابه‌جایی مولکول‌های آب از محلول غلیظ به رقیق، محلول غلیظ اولیه به مرور غلیظ‌تر و محلول رقیق اولیه، به مرور رقیق‌تر می‌شود؛ بنابراین با گذشت زمان تفاوت غلظت مولی محلول‌ها افزایش می‌یابد:



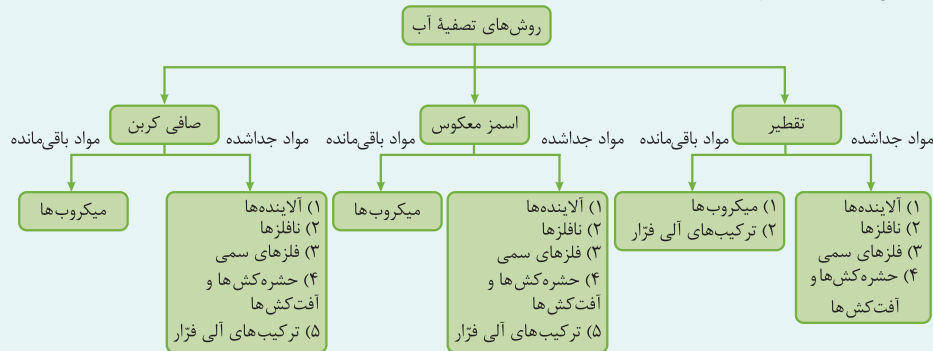
کدام گزینه درست است؟

۱۰۲

- (۱) با روش اسمز معکوس می‌توان مخلوطی از آب و اتانول را تا حد مطلوبی به اجزای سازنده تفکیک کرد.
- (۲) آب تصفیه‌شده به روش صافی کربنی، برخلاف روش تقطیر نیاز به کلر زنی ندارد.
- (۳) برای حذف حشره‌کش‌ها و میکروب‌ها، روش اسمز معکوس نسبت به تقطیر، کارایی بیشتری دارد.
- (۴) پلاسیده‌شدن خیار تازه در آب شور به دلیل پدیده اسمز وارونه است.

مقایسه روش‌های تصفیه آب

درس‌Box



با توجه به این‌که در هر سه روش تصفیه آب، میکروب‌ها در داخل آب باقی می‌مانند، آب تصفیه‌شده در همه این روش‌ها را باید پیش از مصرف کلر زنی کرد، زیرا کلر خاصیت میکروب‌کشی دارد.

با توجه به این‌که اسمز معکوس می‌تواند ترکیب‌های آلی فزّار (از جمله اتانول)، را از آب جدا کند، از این روش می‌توان برای جداسازی

آب و اتانول استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): آب تصفیه‌شده به همه روش‌ها، به دلیل وجود میکروب‌ها، نیاز به کلر زنی دارد.

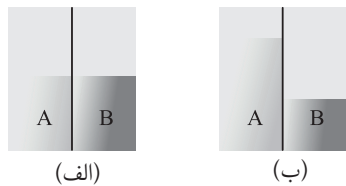
گزینه (۳): هر دو روش اسمز معکوس و تقطیر، حشره‌کش‌ها را حذف می‌کنند اما توانایی حذف میکروب‌ها را ندارند.

گزینه (۴): پلاسیده‌شدن خیار تازه در آب شور به دلیل پدیده اسمز است نه اسمز وارونه! با قراردادن خیار در آب شور طبق پدیده اسمز، مولکول‌های آب از سمت پرآب‌تر، یعنی بافت میوه به سمت محیط غلیظ‌تر یا کم‌آب‌تر یعنی آب شور می‌روند. در نتیجه خیار آب از دست داده و چروکیده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۰۳

مطابق شکل (الف)، حجم‌های برابری از دو مایع A و B توسط یک غشای نیمه‌تراوا از یکدیگر جدا شده‌اند و پس از مدتی شکل ظرف به صورت (ب) درمی‌آید. اگر مایع اولیه B، محلول ۱۸ درصد جرمی گلوکز ($d = 1/25 \text{ g.mL}^{-1}$) باشد، مایع A کدام مورد می‌تواند باشد؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) آب مقطر

(۲) محلول ۲ مولار گلوکز

(۳) محلول ۱۵ درصد جرمی گلوکز

(۴) محلول ۱ مولار گلوکز



نکته

در روش اسمز، آب به طور خالص از سمت محلول رقیق‌تر به سمت محلول غلیظ‌تر جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین با گذشت زمان، سطح مایع در سطح محلول رقیق، کاهش و در سمت محلول غلیظ افزایش می‌یابد.

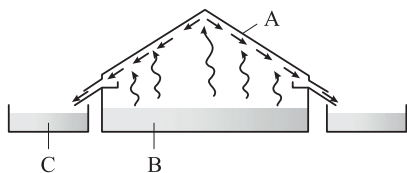
سطح مایع در سمت A افزایش یافته است، یعنی آب از سمت محلول B به سمت محلول A جابه‌جا شده است، در نتیجه محلول B رقیق‌تر و غلظت آن کم‌تر بوده است. ابتدا غلظت مولی محلول B را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی گلوکز (C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = 6(12) + 12(1) + 6(16) = 180 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \times (a) \times \text{درصد جرمی} \times (d)}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{غلظت مولی} = \frac{10 \times 18 \times 1 / 25}{180} = 1/25 \text{ mol.L}^{-1}$$

A می‌تواند محلول ۲ مولار گلوکز باشد \Rightarrow غلظت محلول A < غلظت محلول B

پاسخ خیلی تشریحی ✓



با توجه به شکل مقابل که روشی برای تهیه آب شیرین از آب دریا را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟

۱۰۴

(۱) این روش تقطیر نام دارد که برخلاف اسمز معکوس، در آن به غشای نیمه تراوا و منبع انرژی نیازی نیست.

(۲) A یک سقف فلزی است که فرایند میعان بر سطح آن انجام می‌شود.

(۳) در آب تهیه شده به این روش، فلزهای سمی و نافلزها، همچنان در آب وجود دارند.

(۴) اگر B دارای ترکیب‌های آلی فرار باشد، آب تولید شده در قسمت C باید به کمک روش‌های دیگر دوباره تصفیه شود.



بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): شکل داده شده، مربوط به روش تقطیر است. انرژی مورد نیاز برای انجام این فرایند از پرتوهای خورشیدی تأمین می‌شود؛

یعنی منبع انرژی نیازه! آب که فود به فود تبدیل نمی‌شه!

گزینه (۲): A سقف پلاستیکی است، نه فلزی!

گزینه (۳): با روش تقطیر، فلزهای سمی و نافلزها از آب حذف می‌شوند. در این روش فقط ترکیب‌های آلی فرار و میکروب‌ها در آب باقی می‌مانند.

گزینه (۴): درسته! باید با استفاده از اسمز معکوس یا صافی کربن، ترکیب‌های آلی فرار را از آب حذف کرد.

۱۰۵

یک تن آب شور با غلظت ۱۶ درصد جرمی از انواع نمک‌ها را به یک دستگاه تصفیه آب که با روش اسمز معکوس کار می‌کند، وارد می‌کنیم. اگر این دستگاه از هر ۴ گرم نمک، ۳ گرم آن را از آب خارج کند، جرم آب تصفیه شده خروجی چند کیلوگرم بوده و درصد جرمی نمک باقی مانده در آن به تقریب کدام است؟ (فرض کنید غشای نیمه تراوا، همه آب خالص اولیه را از خود عبور می‌دهد.)

$$۴/۵۴ - ۸۸۰ \quad (۲)$$

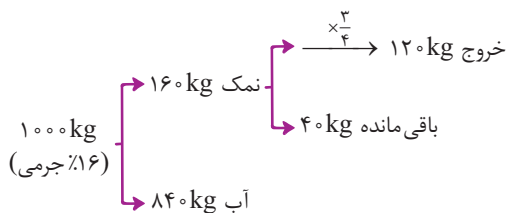
$$۴/۷۵ - ۸۸۰ \quad (۱)$$

$$۴/۵۴ - ۹۶۰ \quad (۴)$$

$$۴/۷۵ - ۹۶۰ \quad (۳)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ابتدا ۱ تن آب شور با غلظت ۱۶ درصد جرمی داریم که طبق اطلاعات سؤال، دستگاه اسمز معکوس، $\frac{۳}{۴}$ نمک آن را از آب جدا می‌کند؛ بنابراین خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \text{جرم آب خروجی (به همراه نمک‌های باقی مانده)} = ۸۴۰ + ۴۰ = ۸۸۰ \text{ kg}$$

$$\text{درصد جرمی نمک باقی مانده} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول (آب و نمک)}} \times 100 = \frac{۴۰}{۸۸۰} \times 100 = \frac{۱۰۰}{۲۲} \approx ۴/۵۴$$