

آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله هفتم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۱۸/ آبان/ ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

دفترچه شماره یک

بودجه بندی دروس

هندسه

هندسه (۱)
فصل ۲
صفحه ۲۹ تا ۵۱
هندسه (۳)
فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای
دترمینان و کاربردهای آن)
صفحه ۹ تا ۲۶

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته
فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای
قضیه تقسیم و کاربردها)
صفحه ۱ تا ۱۴

حسابان و ریاضیات پایه

ریاضی (۱)
فصل ۴
صفحه ۶۹ تا ۹۳
حسابان (۱)
فصل ۱ (درس ۲ تا ۴)
صفحه ۷ تا ۲۸
حسابان (۲)
فصل ۱
صفحه ۱ تا ۲۲

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۷۵ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
۷۵ دقیقه		۴۰ سؤال		مجموع

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



حسابان و ریاضیات پایه

۱- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx^2 + x - 2$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر عبارت $x - 1$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲- چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ مفروض است. اگر چندجمله‌ای $f(x - 2)$ بر $x - 3$ و چندجمله‌ای $f(x - 3)$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۶ (۴) -۶

۳- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + ax^3 + 5x^2 + bx + 4$ بر $x^2 + 2x + 4$ بخش پذیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) صفر

۴- اگر معادله $mx^2 + 4x + m + 3 = 0$ دارای دو جواب حقیقی مثبت باشد، در مورد معادله $(m + 3)x^2 - x + m + 4 = 0$ ، کدام مورد صحیح است؟

- (۱) دو جواب حقیقی منفی دارد. (۲) دو جواب حقیقی مثبت دارد.
(۳) دو جواب حقیقی غیر هم علامت دارد. (۴) جواب حقیقی ندارد.

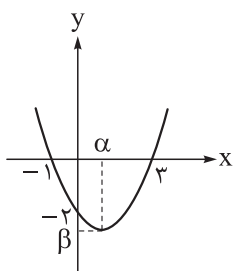
۵- رأس سهمی $y = 2x^2 - (2a + 2)x + a$ روی خط $y = -5$ قرار دارد. مجموع طول نقاط برخورد سهمی با محور x ها کدام است؟

- (۱) ۴ یا -۱ (۲) ۳ یا -۲ (۳) ۳ یا -۱ (۴) ۴ یا -۲

۶- جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 2 = 0$ اعداد α و β هستند و جواب‌های معادله $x^2 + ax^2 + bx + c = 0$ اعداد 2 ، $1 - 2\alpha$ و $1 - 2\beta$ هستند. حاصل $a - b + c$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲۵ (۳) ۱۵ (۴) ۱

۷- نمودار یک تابع درجه دوم (سهمی) در شکل زیر رسم شده است. جواب‌های کدام معادله $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ هستند؟



$$(1) 9x^2 - 39x - 40 = 0$$

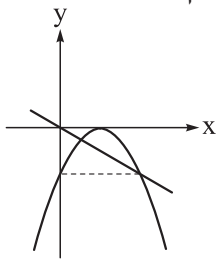
$$(2) 9x^2 - 39x + 40 = 0$$

$$(3) 9x^2 + 39x + 40 = 0$$

$$(4) 9x^2 + 39x - 40 = 0$$

محل انجام محاسبات

۸- خط $2y + x = 0$ و نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار b کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۶

۹- دو ماشین A و B با هم کاری را در ۱۲ روز تمام می‌کنند. اگر ماشین A به تنهایی کار را در ۳۶ روز تمام کند، چند ماشین B هم‌زمان با هم کار کنند تا تمام کار سه‌روزه تمام شود؟

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۱۲

(۱) ۶

۱۰- اگر $\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x-6} = a$ و $\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-6} - 1 = b$ باشد، حاصل ab کدام است؟

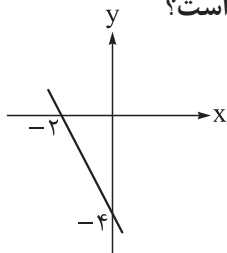
(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) $\frac{3}{4}$

۱۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. عبارت $p(x) = \frac{2x - f(x)}{f(x) - x}$ در کدام بازه مثبت است؟

(۲) $(-\frac{4}{3}, -1)$ (۱) $(-1, \frac{4}{3})$ (۴) $(1, \frac{4}{3})$ (۳) $(-\frac{4}{3}, 1)$

۱۲- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{ax+4}{x-2} > 3$ بازه $(b, +\infty)$ است. حاصل ab کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۱۳- عبارت $p(x) = (x+2)(2x^2 + ax^2 + b)$ همواره نامنفی است. حدود a کدام است؟

(۲) $[-12, -4]$ (۱) $[4, 12]$ (۴) $[-12, 4]$ (۳) $[-4, 12]$

۱۴- نمودار تابع $y = f(1 - \frac{x}{2})$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار به دست آمده مربوط به کدام تابع است؟ (تابع f وارون پذیر است.)

(۲) $y = 2f^{-1}(\frac{x}{2})$ (۱) $y = f^{-1}(\frac{x}{2})$ (۴) $y = f^{-1}(-\frac{x}{2})$ (۳) $y = -2f^{-1}(x)$

محل انجام محاسبات

۱۵- نمودار تابع $f(x) = 2(x-a)^2 - b$ را ۴ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم تا به نمودار تابع $y = -2(x-b)^2 - a$ برسیم. حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۶- توابع $f(x) = \frac{3-2x}{ax+1}$ و $g(x) = (b^2-1)x^2 + bx - 1$ هر دو روی \mathbb{R} اکیداً نزولی هستند. کدام تابع روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است؟

(۱) $f - 2g$ (۲) $g - 2f$ (۳) $f - g$ (۴) $f + g$

۱۷- مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه جواب‌های نامعادله $(\frac{1}{5})^{6x+3} \leq (\frac{1}{125})^{x^2-1}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- اگر $f(x) = 3x + |x - 4|$ و $f(m^2 - 2m + 1) < f(4m - m^2 - 3)$ باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $(1, 2)$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(-2, 1)$

ریاضیات گسسته

۱۹- چند نقطه با مختصات صحیح در تساوی $\frac{2}{x} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{y}$ صدق می کند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۲۰- به ازای چند عدد طبیعی کوچک تر از ۱۰۱ رابطه $3^n - 1 \mid 80$ برقرار است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۵ (۴) ۲۵

۲۱- به ازای چند عدد طبیعی n هر دو عدد $5n + 4$ و $7n + 3$ ، مقسوم علیه مشترک مساوی ۱۷ دارند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۲- اگر a, b و c سه عدد طبیعی بزرگ تر از یک باشند به طوری که $a^2 \mid b^5$ و $b^6 \mid c^7$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a^{15} \mid c^{29}$ (۲) $a^{16} \mid c^{31}$ (۳) $a^{17} \mid b^{33}$ (۴) $a^{18} \mid c^{35}$

۲۳- کدام گزینه، مثال نقض گزاره زیر است؟

«اگر $(x+1)(x+5)$ گویا باشد، آن گاه $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{48}}{x+1}$ گنگ است.»

- (۱) $-3 - \sqrt{3}$ (۲) $-3 + \sqrt{3}$ (۳) $-3 + \sqrt{7}$ (۴) مثال نقض ندارد.

۲۴- A یک زیرمجموعه از مجموعه $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ است. اگر $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج باشد و $n \in A$ ، آن گاه مجموعه A

حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۵- اگر به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $3 + 4m - m^2 - 2m^3 \mid n+1$ ، برای m چند مقدار صحیح به دست می آید؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۲۶- اگر a و b نسبت به هم اول باشند، ب.م.م دو عدد $7a + 2b$ و $3a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۷- عدد طبیعی a مضرب ۷۲ است. اگر مکعب a بر 480 بخش پذیر باشد، مجموع ارقام بزرگ ترین مقدار چهاررقمی a

کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸

۲۸- اگر $4 + 3k \mid 7$ ، آن گاه در رابطه $45k + \alpha \mid 49$ ، مقدار α کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۸ (۳) ۲۴ (۴) ۴۴

محل انجام محاسبات

هندسه

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۳۰- اگر مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} ai + j & ; i - j = 2 \\ i - aj & ; i - j \neq 2 \end{cases}$ برابر با ۷ باشد، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) ۶۸ (۲) ۶۶ (۳) ۶۴ (۴) ۶۲

۳۱- در دستگاه $\begin{cases} ax + (a+1)y = 1 \\ (a+1)x + (a+2)y = -3 \end{cases}$ حاصل $x - y$ کدام است؟

- (۱) $2a + 4$ (۲) -6 (۳) $-2(4a + 3)$ (۴) $-a - 4$

۳۲- دستگاه $\begin{cases} (m-3)y - 4x = 3 \\ 2x - \frac{m-3}{2}y = 1 \end{cases}$ فاقد جواب است. مجموعه مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\mathbb{R} - \{3\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{7, -1\}$ (۴) \emptyset

۳۳- اگر $A^3 = 9I$ باشد، حاصل $(A - 2I)^{-1} - 17(A + 2I)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) $4(A + I)$ (۴) $4A$

۳۴- فرض کنید $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2a & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $2B^6 A$

برابر با -9 باشد، کوچک‌ترین درایه ماتریس A کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -6 (۳) -5 (۴) -8

۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی باشد به طوری که $ACB = I$ ، آن گاه ماتریس مجموع

درایه‌های سطر دوم C کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) -19 (۳) -3 (۴) ۳

محل انجام محاسبات

۳۶- در مثلثی به اضلاع $AB = 6$ ، $AC = 8$ و $BC = 10$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر M ، N و P به ترتیب وسط اضلاع BC ، AC و AB باشند، آن‌گاه مساحت چهارضلعی $MNPH$ کدام است؟

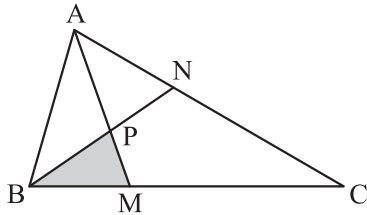
$$6/75 \text{ (۴)}$$

$$6/25 \text{ (۳)}$$

$$8/78 \text{ (۲)}$$

$$7/68 \text{ (۱)}$$

۳۷- مطابق شکل زیر، اگر $\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$ ، آن‌گاه مساحت BMP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



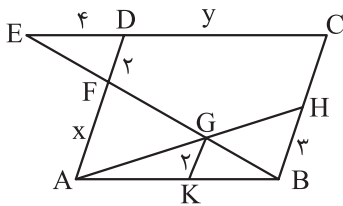
$$\frac{1}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{10} \text{ (۱)}$$

$$\frac{1}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (۳)}$$

۳۸- در شکل زیر، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و $AD \parallel GK$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل $2y + x$ کدام است؟



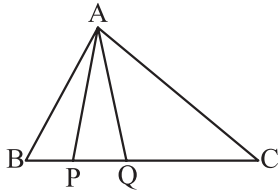
$$24 \text{ (۱)}$$

$$36 \text{ (۲)}$$

$$30 \text{ (۳)}$$

$$20 \text{ (۴)}$$

۳۹- در شکل رسم شده، طول پاره خط BQ واسطه هندسی طول پاره‌های BP و BC است. نسبت مساحت مثلث APQ به مساحت مثلث ABP کدام است؟



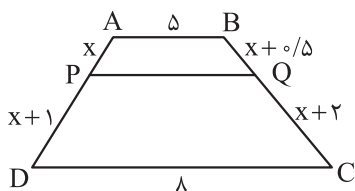
$$\frac{BC}{PQ} \text{ (۲)}$$

$$\frac{QC}{BQ} \text{ (۱)}$$

$$\frac{PQ}{QC - BP} \text{ (۴)}$$

$$\frac{PQ}{QC - PQ} \text{ (۳)}$$

۴۰- مطابق شکل، پاره خط PQ با قاعده‌های دوزنقه $ABCD$ موازی است. طول PQ کدام است؟



$$6/25 \text{ (۱)}$$

$$6 \text{ (۲)}$$

$$5/75 \text{ (۳)}$$

$$5/5 \text{ (۴)}$$

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی
خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

دانشگاه ریاضی

مرحله هفتم

پایه دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

دسترسی به شماره دو دفترچه

بودجه بندی دروس

شیمی

شیمی (۱)
فصل ۲
صفحه ۴۵ تا ۸۴
شیمی (۳)
فصل ۱
(تا ابتدای بازها محلول‌هایی با
 $7 < pH \leq 14$)
صفحه ۱ تا ۲۸

فیزیک

فیزیک (۱)
فصل ۴
صفحه ۸۳ تا ۱۲۶
فیزیک (۳)
فصل ۱
صفحه ۱ تا ۲۸

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۸۰ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
۸۰ دقیقه	۶۵ سؤال			مجموع

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.



فیزیک دوازدهم

۴۱- متحرکی روی محور X براساس اطلاعات جدول زیر از مکان A به مکان B جابه‌جا می‌شود. اگر متحرک حین جابه‌جایی

تنها یک بار تغییر جهت داده باشد، بردار مکان متحرک در لحظه تغییر جهت کدام می‌تواند باشد؟

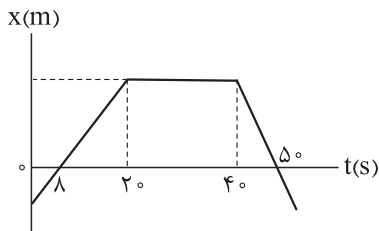
تندی متوسط	سرعت متوسط	بردار مکان B	بردار مکان A
$6 \frac{m}{s}$	$(-2 \frac{m}{s}) \vec{i}$	$(-8m) \vec{i}$	$(+6m) \vec{i}$

- (۱) $(-20m) \vec{i}$ (۲) $(-22m) \vec{i}$ (۳) $(22m) \vec{i}$ (۴) $(18m) \vec{i}$

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر تندی متوسط متحرک در

بازه زمانی صفر تا $50s$ برابر $6/4 \frac{m}{s}$ باشد، بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 10s$ تا $t_2 = 50s$ چند متر

بر مربع ثانیه است؟



۰/۰۵ (۱)

۰/۱ (۲)

۰/۵۵ (۳)

۰/۴۴ (۴)

۴۳- موتورسواری فاصله 400 کیلومتری بین دو شهر را با تندی ثابت $120 \frac{km}{h}$ رفته و پس از رسیدن به شهر دوم، با

تندی ثابت $100 \frac{km}{h}$ به طرف شهر اول بازمی‌گردد. تندی متوسط موتورسوار از ابتدای حرکتش تا لحظه‌ای که مسافت

600 کیلومتر را پیموده، چند کیلومتر بر ساعت است؟

$37/5$ (۴)

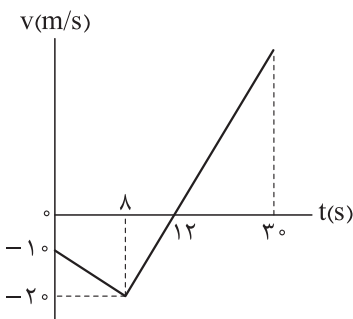
$52/5$ (۳)

110 (۲)

$112/5$ (۱)

۴۴- شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. در چه لحظه‌ای

متحرک به نقطه شروع حرکت خود بازمی‌گردد؟



16 (۱)

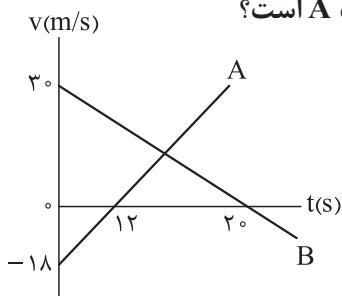
20 (۲)

24 (۳)

28 (۴)

محل انجام محاسبات

۴۵- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که از یک نقطه حرکت خود را شروع کرده‌اند، مطابق شکل است. در لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، تندی متحرک B چند برابر تندی متحرک A است؟

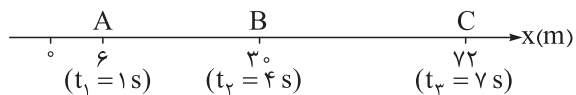


- (۱) ۱
(۲) ۰/۸
(۳) ۰/۶
(۴) ۰/۵

۴۶- توپی که در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند، با تندی $۶۳ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به یک دیوار برخورد کرده و در همان امتداد اولیه با تندی $۲۷ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ بازمی‌گردد. اگر زمان برخورد توپ با دیوار $۰/۴ \text{ s}$ باشد، شتاب متوسط توپ در مدت برخورد با دیوار چند متر بر مربع ثانیه است؟

- (۱) ۲۲۵ (۲) ۹۰ (۳) $۶۲/۵$ (۴) ۲۵

۴۷- مسیر حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است و متحرک در لحظه‌های مشخص شده از نقاط A، B و C می‌گذرد. سرعت متحرک در لحظه عبور از نقطه B چند متر بر ثانیه است؟

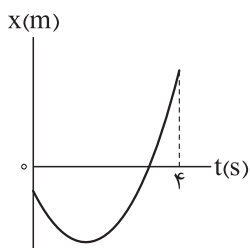


- (۱) ۴۲
(۲) ۱۶
(۳) ۱۵
(۴) ۱۱

۴۸- معادله حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -\frac{3}{4}t^2 + 15t - 24$ است. تندی متوسط متحرک در مدت زمانی که به صورت کندشونده از مبدأ مختصات دور می‌شود، چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) $۴/۵$

۴۹- نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظه $t = ۴ \text{ s}$ ، ۲ برابر تندی در لحظه شروع حرکتش باشد، حرکت این متحرک چند ثانیه به صورت کندشونده بوده است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{3}{4}$

محل انجام محاسبات

۵۰- معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = 3t^2 - 12t + 13$ است. در طی این حرکت، کمترین طول بردار مکان متحرک چند متر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $2/5$ (۴) ۴

۵۱- بردار مکان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می کند، در دو لحظه $t_1 = 3$ s و $t_2 = 7$ s تغییر جهت می دهد. اگر متحرک در مکان $x = -20$ m تغییر جهت دهد، تندی متوسط آن در ۴ ثانیه دوم حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) $12/5$

۵۲- متحرکی با شتاب ثابت 2 m/s^2 روی خط راست در حال حرکت است. اگر بزرگی جابه جایی متحرک در ثانیه دهم و ثانیه یازدهم با هم برابر باشند، بزرگی جابه جایی آن در ثانیه پنجم چند متر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۲۱ (۴) ۷۵

۵۳- خودرویی با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است که راننده یک سرعت گیر را جلوی خود می بیند و از لحظه ای که در فاصله ۳۶ متری سرعت گیر قرار دارد، با شتاب ثابت ترمز می کند. اگر جابه جایی خودرو در ثانیه های دوم و سوم بعد از ترمز به ترتیب $10/5$ m و $7/5$ m باشد، کدام موارد درست است؟

الف) خودرو در ۲ ثانیه قبل از رسیدن به سرعت گیر مسافت ۶ m را می پیماید.

ب) تندی متوسط خودرو از ۲ s قبل از ترمز کردن تا لحظه رسیدن به سرعت گیر $11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.

پ) خودرو ۵ s پس از ترمز به سرعت گیر می رسد.

ت) خودرو با تندی $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از روی سرعت گیر عبور می کند.

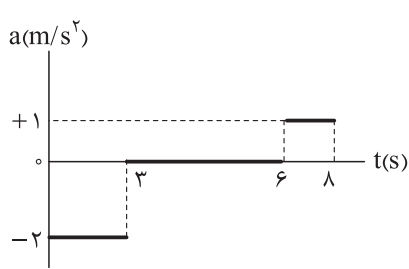
- (۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

۵۴- خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حرکت است که ناگهان راننده، موتورسیکلتی را پیش روی خود می بیند که از حال سکون و با شتاب $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ در جهت حرکت خودرو شروع به حرکت می کند. راننده بلافاصله با شتابی به اندازه $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ترمز می گیرد، اما با سرعت $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به موتورسیکلت برخورد می کند. فاصله موتورسیکلت از خودرو در لحظه ای که راننده شروع به ترمز می کند، چند متر است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) $114/75$ (۳) $74/25$ (۴) $94/5$

محل انجام محاسبات

۵۵- نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر بردار سرعت متحرک در $t_1 = 1s$ به صورت $\vec{v} = (2\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟



$$\frac{15}{8} \quad (1)$$

$$\frac{13}{8} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

۵۶- خودرویی با سرعت ثابت $108 \frac{km}{h}$ در یک مسیر مستقیم در حرکت است. در لحظه گذشتن خودرو از کنار یک خودروی پلیس، خودروی پلیس با شتاب $5 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می کند. فاصله میان دو خودرو در بازه زمانی ۵ s تا ۸ s پس از شروع حرکت پلیس، چند متر تغییر می کند؟

$$7/5 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$2/5 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۵۷- در شرایط خلأ سنگی را از بالای ساختمانی رها می کنیم. اگر سنگ در ثانیه آخر حرکت خود $34/3$ متر را طی کند، تندی سنگ در لحظه رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 9/8 \text{ m/s}^2$)

$$28/9 \quad (4)$$

$$39/2 \quad (3)$$

$$34/9 \quad (2)$$

$$21/6 \quad (1)$$

۵۸- سنگی در شرایط خلأ از ارتفاع H رها می شود. اگر سرعت متوسط سنگ در Δt ثانیه اول حرکت 8 m/s و در Δt ثانیه آخر حرکت 40 m/s باشد، H چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$110/2 \quad (4)$$

$$112/4 \quad (3)$$

$$115/2 \quad (2)$$

$$122/4 \quad (1)$$

۵۹- جسمی از یک بلندی رها می شود و در دو ثانیه آخر سقوطش مسافت 140 متر را طی می کند. تندی جسم هنگام رسیدن به نیمه مسیر چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$20 \quad (4)$$

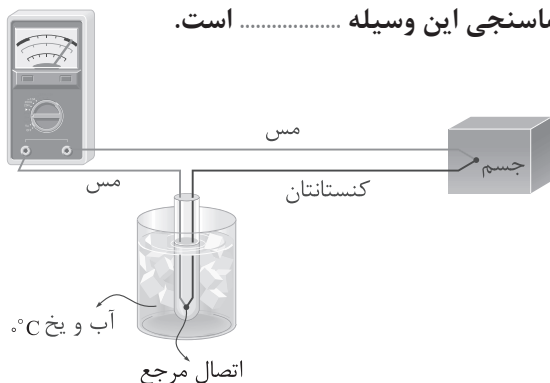
$$30\sqrt{2} \quad (3)$$

$$30 \quad (2)$$

$$40\sqrt{2} \quad (1)$$

فیزیک دهم

۶۰- شکل زیر، یک دماسنج را نشان می دهد و کمیت دماسنجی این وسیله است.



(۱) ترموکوپل، جریان الکتریکی

(۲) ترموکوپل، ولتاژ

(۳) کمینه - بیشینه، جریان الکتریکی

(۴) کمینه - بیشینه، ولتاژ

محل انجام محاسبات

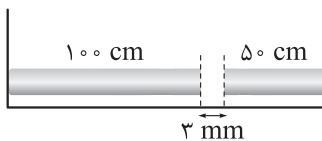
۶۱- اگر دمای جسمی بر حسب درجه سلسیوس $\frac{7}{6}$ برابر شود، دمای آن بر حسب درجه فارنهایت ۹۰ درصد کاهش می‌یابد. دمای اولیه جسم بر حسب کلونین کدام است؟

- ۲۷۸ (۴) ۲۶۸ (۳) ۲۸۸ (۲) ۲۵۸ (۱)

۶۲- دمای یک صفحه فلزی دایره‌ای به شعاع ۲ cm را از ۲۰K به ۱۲۰K می‌رسانیم. اگر محیط دایره ۴ درصد افزایش یابد، قطر دایره چند برابر می‌شود؟

- ۱/۰۸ (۴) ۰/۰۸ (۳) ۱/۰۴ (۲) ۰/۰۴ (۱)

۶۳- مطابق شکل، یک میله بتونی به طول ۵۰ cm و یک میله فولادی به طول ۱۰۰ cm در فاصله ۳ میلی‌متری هم در دمای ۲۰°C قرار دارند. هنگامی که دمای مجموعه را به ۱۳۰°C می‌رسانیم، دو میله به یکدیگر می‌رسند و فضای خالی میان آن‌ها پر می‌شود. اگر ضریب انبساط طولی فولاد $13 \times 10^{-6} K^{-1}$ باشد، ضریب انبساط طولی بتون در SI کدام است؟



۱/۴ × ۱۰^{-۶} (۱)

۱/۲ × ۱۰^{-۶} (۲)

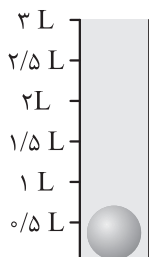
۱/۲ × ۱۰^{-۵} (۳)

۱/۴ × ۱۰^{-۵} (۴)

۶۴- دمای یک قطعه سرب ۲۵°C است. برای آن که حجم این قطعه ۲/۲۵ درصد افزایش یابد، باید دمای قطعه سرب به چند درجه سلسیوس برسد؟ ($3 \times 10^{-5} K^{-1}$ = ضریب انبساط طولی سرب)

- ۵۷۰ (۴) ۲۷۵ (۳) ۲۵۰ (۲) ۷۷۵ (۱)

۶۵- در شکل زیر، گلوله‌ای آلومینیومی به شعاع ۵ cm درون ظرفی لبریز از گلیسیرین در دمای ۸۶°F ته‌نشین شده است. اگر دمای مجموعه به ۱۲۲°F برسد، چند سانتی‌متر مکعب گلیسیرین از ظرف بیرون می‌ریزد؟ (ضریب انبساط طولی آلومینیوم $2 \times 10^{-5} K^{-1}$ ، ضریب انبساط حجمی گلیسیرین $5 \times 10^{-4} K^{-1}$ است، از انبساط ظرف چشم‌پوشی کنید و $\pi \approx 3$)



۳۰/۶ (۱)

۳۵/۶ (۲)

۲۵/۶ (۳)

۲۰/۴ (۴)

محل انجام محاسبات

۶۶- بر روی بسته یک ماده غذایی نوشته شده که هر 30 g از آن ماده، 81 kcal انرژی دارد. اگر 7 g از آن ماده را در یک گرماسنج بمبی بسوزانیم، دمای 600 g آب 20°C را چند درجه سلسیوس افزایش می دهد؟ ($c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ و $1\text{ cal} = 4/2\text{ J}$ و اتلاف گرما ناچیز است).

- (۱) $3/15$ (۲) $31/5$ (۳) $7/5$ (۴) 75

۶۷- مقداری آب در دمای جوش، درون یک کتری برقی به توان $4/5\text{ kW}$ داریم. اگر در مدت 10 دقیقه تمام آب بخار شود، جرم آب چند کیلوگرم است؟ ($L_V = 2250\text{ kJ/kg}$)

- (۱) $0/3$ (۲) $2/4$ (۳) $1/2$ (۴) $0/6$

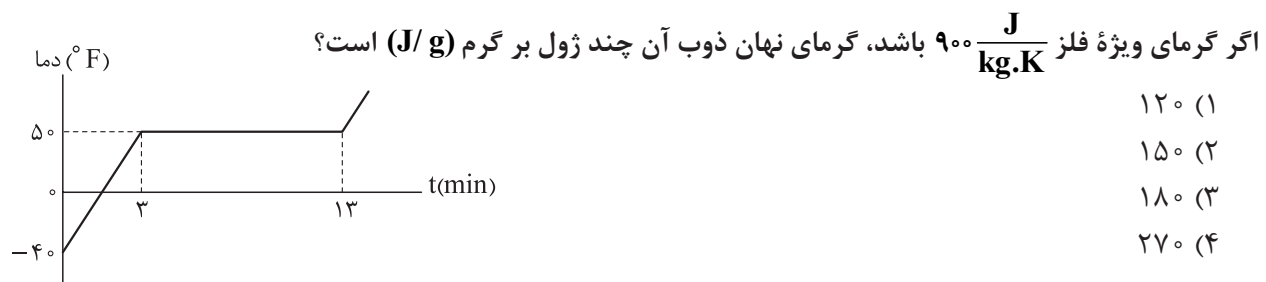
۶۸- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- (الف) تمامی جامدها دارای نقطه ذوب کاملاً مشخص هستند.
 (ب) افزایش فشار وارد بر جسم معمولاً سبب بالارفتن نقطه ذوب جسم می شود.
 (پ) گرمای نهان تبخیر آب با افزایش دمای آن کاهش می یابد.
 (ت) افزایش دما و افزایش مساحت سطح مایع، سبب کاهش آهنگ تبخیر سطحی می شود.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۹- درون یک سماور فلزی، 3 لیتر آب با دمای 25°C قرار دارد. اگر 7 دقیقه طول بکشد تا با روشن کردن گرمکن درون سماور که با آهنگ ثابت 1600 W گرما تولید می کند، دمای آب را به 75°C برسانیم، ظرفیت گرمایی سماور چند ژول بر کلوبین است؟ (از اتلاف گرما چشم پوشی می شود، $\rho_{\text{آب}} = 1\text{ g/cm}^3$ و $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$)

- (۱) 480 (۲) 600 (۳) 840 (۴) 960

۷۰- به یک قطعه فلزی کوچک با آهنگ ثابت گرما می دهیم و نمودار تغییر دمای آن برحسب زمان مطابق شکل است.



۷۱- 800 g یخ با دمای 10°C را درون چند گرم آب با دمای 30°C بیندازیم تا پس از برقراری تعادل گرمایی، 1050 g آب 0°C داشته باشیم؟ (از اتلاف گرما صرف نظر می کنیم، $c_{\text{یخ}} = 2c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و $L_F = 336\text{ J/g}$)

- (۱) 250 (۲) 500 (۳) 800 (۴) 925

محل انجام محاسبات

۷۲- کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) برای لباسهای آتش نشانی، پوشش براق مناسب تر است.

(ب) در فرایند همرفت، ماده جابه جا نمی شود.

(پ) در ساحل دریا و در روز، جریان هوا از ساحل به دریا است.

(ت) انتقال گرما از سطح خورشید به زمین بر اثر پدیده همرفت رخ می دهد.

(۴) ب و ت

(۳) پ

(۲) الف و پ

(۱) الف

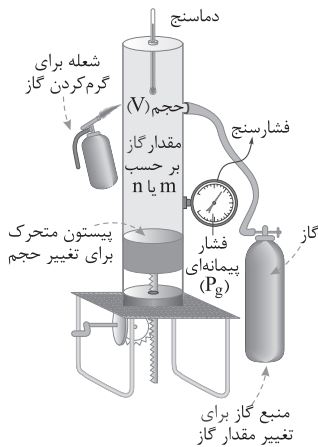
۷۳- دستگاهی که در شکل مقابل می بینید برای آزمایش کدام تحقیق به کار می رود؟

(۱) تحقیق قانون گازهای کامل

(۲) تحقیق قانون آووگادرو

(۳) تحقیق اصل پاسکال

(۴) تحقیق گرماسنجی



۷۴- درون یک مخزن فلزی به حجم 40 L ، جرمهای مساوی از دو گاز هلیوم و نیتروژن وجود دارد و وقتی دمای گاز به 7°C می رسد، فشارسنج متصل به مخزن عدد 7 atm را نشان می دهد. جرم گاز درون مخزن چند گرم است؟ (جرم مولی گازهای هلیوم و نیتروژن به ترتیب 4 g/mol و 28 g/mol ، $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ و فشار هوای محیط 1 atm است.)

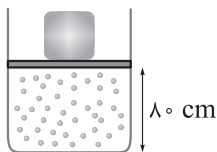
(۴) ۲۰۰

(۳) ۱۵۰

(۲) ۱۰۰

(۱) ۵۰

۷۵- مطابق شکل، درون یک ظرف استوانه‌ای به مساحت قاعده 200 cm^2 ، مقداری گاز آرمانی در تعادل قرار دارد. جرم پیستون و وزنه روی آن مجموعاً 50 kg و اصطکاک پیستون با دیواره ناچیز است. چند کیلوگرم از جرم وزنه کم کنیم تا پیستون 4 cm جابه جا شود؟ (دمای گاز را ثابت در نظر بگیرید، $g = 10 \text{ N/kg}$ و $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ است.)



(۲) ۱۵

(۱) ۱۰

(۴) ۴۰

(۳) ۲۰

محل انجام محاسبات

شیمی دوازدهم

۷۶- کدام مورد درست است؟

- (۱) با استفاده از صابون آنزیم‌دار، نمی‌توان درصد لکه‌های چربی باقی‌مانده روی پارچه را به صفر رساند.
 (۲) از صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، در تنور نان سنگک برای چرب کردن سطح سنگ‌ها استفاده می‌شود.
 (۳) شمار اتم‌های بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی از بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی، یک واحد بیشتر است.
 (۴) مولکول‌های گازی که در اثر واکنش پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب تولید می‌شود، دارای دو عنصر هستند.

۷۷- کدام موارد از عبارات‌های زیر درست است؟

- (الف) ذره‌های سازنده یک نمونه ژله، از ذره‌های سازنده مخلوط اتیلن‌گلیکول در آب بزرگ‌تر است.
 (ب) نمک اسید چرب دومین و سومین عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی، همانند مس (II) سولفات در آب نامحلول هستند.
 (پ) صابون‌های جامد برخلاف صابون‌های مایع، نمی‌توانند فاقد عنصر فلزی باشند.
 (ت) به طور کلی، سرعت افزایش شاخص امید به زندگی در سال‌های اخیر، در نواحی برخوردار از نواحی کم‌برخوردار بیشتر است.

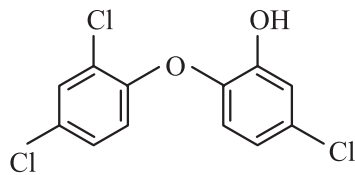
- (۱) الف - پ (۲) ب - پ (۳) الف - ت (۴) ب - ت

۷۸- چند مورد از موارد زیر درست است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

- نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اتیلن‌گلیکول، $1/125$ برابر این نسبت در اوره است.
- فرمول مولکولی یک پاک‌کننده غیرصابونی ۱۸ کربنی با سه پیوند دوگانه، به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است.
- درصد جرمی کربن در وازلین از درصد جرمی این عنصر در بنزین، کم‌تر است.
- پس از ورود صابون به آب، سر آب‌دوست مولکول‌های آن با سر منفی مولکول‌های آب، نیروی جاذبه یون - دوقطبی ایجاد می‌کنند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۹- تری‌کلوسان، ترکیب آروماتیکی است که در گذشته در شوینده‌ها استفاده می‌کردند، ولی به تازگی به دلیل عوارض جانبی برای انسان از شوینده‌ها حذف شده است. دلیل استفاده از این ماده در شوینده‌ها کدام مورد زیر بوده است؟



- (۱) از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی
 (۲) خاصیت گندزدایی و میکروب‌کشی
 (۳) افزایش قدرت پاک‌کنندگی
 (۴) خاصیت بازی مناسب

محل انجام محاسبات

۸۰- به موادی مانند اتانول و شکر که انحلال آن‌ها در آب به شکل است، و به موادی مانند سدیم کلرید و هیدروژن کلرید که انحلال آن‌ها در آب به شکل است، می‌گویند.

- (۱) مولکولی - غیرالکترولیت - یونی - الکترولیت
 (۲) مولکولی - الکترولیت - یونی - غیرالکترولیت
 (۳) یونی - غیرالکترولیت - مولکولی - الکترولیت
 (۴) یونی - الکترولیت - مولکولی - غیرالکترولیت

۸۱- در دمای معین، درصد یونش اسید HA برابر ۴ بوده و درصد یونش اسید HB دو برابر آن است. اگر در دو ظرف جداگانه غلظت HA دو برابر غلظت HB باشد، تفاوت غلظت تعادلی اسیدهای یونش نیافته، چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲/۵ (۴) ۲۵

۸۲- کدام مورد، نادرست است؟

- (۱) در یک واکنش برگشت پذیر که هم‌زمان واکنش‌های رفت و برگشت به طور پیوسته انجام می‌شوند، سرانجام مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند.
 (۲) در سامانه تعادلی، مقدار و غلظت همه ماده‌ها ثابت می‌شوند، ولی لزومی ندارد که با هم برابر شوند.
 (۳) در سامانه تعادلی، سرعت مصرف و تولید همه ماده‌ها ثابت و برابر می‌شود.
 (۴) اگر در یک واکنش مقدار و غلظت حداقل یکی از واکنش‌دهنده‌ها به صفر برسد، سامانه به یقین تعادلی نخواهد بود.

۸۳- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) ثابت تعادل اسیدها فقط به دما بستگی داشته و در دمای معین با تغییر غلظت اولیه اسید، تغییر نمی‌کند.
 (ب) هر چه ثابت یونش یک اسید بیشتر باشد، قوی تر بوده و در دمای معین غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر خواهد بود.
 (پ) هر چه اسید ضعیف تر باشد، آنیون حاصل از آن، تمایل بیشتری به جذب یون هیدرونیوم دارد.
 (ت) در غلظت یکسان، میزان اسیدی بودن محلول شامل فورمیک اسید، به یقین بیشتر از محلول شامل استیک اسید خواهد بود.

- (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) ب - پ (۴) ب - ت

۸۴- چند مورد از موارد زیر درست است؟

- اسیدها و بازها با ثابت یونش بزرگ، الکترولیت قوی به شمار می‌روند.
- اغلب اسیدها و بازهای شناخته شده، قوی هستند.
- در محلول ۰/۱ مولار هیدرویدیک اسید در دمای اتاق، $[I^-] = 0/1 \text{ mol.L}^{-1}$ است.
- در محلول ۰/۱ مولار هیدروسیانیک اسید، $[HCN] > [H^+]$ است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۵- $5/6$ لیتر هیدروژن سیانید، در شرایط STP را در 500 میلی لیتر آب مقطر حل می کنیم. اگر درصد یونش هیدروسیانیک اسید برابر با $0/003$ باشد، ثابت یونش آن به تقریب چند مول بر لیتر خواهد بود؟ (از تغییر حجم در اثر حل شدن گاز صرف نظر کنید.)

$$2/25 \times 10^{-1} \text{ (4)}$$

$$4/5 \times 10^{-1} \text{ (3)}$$

$$2/25 \times 10^{-6} \text{ (2)}$$

$$4/5 \times 10^{-6} \text{ (1)}$$



(ب)



(الف)

۸۶- شکل های مقابل، واکنش دو قطعه نوار منیزیم با ظاهری یکسان را با محلول دو اسید متفاوت در دما و غلظت یکسان نشان می دهند. اگر جرم نوار منیزیم ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) باشد، کدام مورد درباره آن ها درست است؟

(۱) سرعت واکنش در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

(۲) ثابت یونش اسید موجود در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

(۳) در پایان واکنش، حجم گاز آزاد شده در ظرف (الف) دو برابر

ظرف (ب) است.

(۴) درجه یونش اسید موجود در ظرف (ب) در شرایط یکسان، بیشتر از ظرف (الف) است.

۸۷- اگر غلظت تعادلی یون هیدرونیوم در محلول کربنیک اسید در دمای معین برابر با $3 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ بوده و غلظت تعادلی کربنیک اسید در این محلول برابر $0/2$ مولار باشد، غلظت تعادلی یون هیدروژن کربنات (HCO_3^-) و ثابت تعادل یونش اسید در این دما، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$$4/5 \times 10^{-7} - 3 \times 10^{-4} \text{ (2)}$$

$$1/8 \times 10^{-8} - 3 \times 10^{-4} \text{ (1)}$$

$$4/5 \times 10^{-7} - 6 \times 10^{-5} \text{ (4)}$$

$$1/8 \times 10^{-8} - 6 \times 10^{-5} \text{ (3)}$$

۸۸- کدام مورد، نادرست است؟

(۱) دستگاه گردش خون انسان، یک سامانه بازی محسوب می شود.

(۲) تغییر رنگ کاغذ pH، معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول ها است.

(۳) در یک سامانه خنثی، غلظت یون های هیدرونیوم و هیدروکسید با یکدیگر یکسان بوده و برابر با 10^{-7} مول بر لیتر است.

(۴) هر اندازه که غلظت یکی از یون های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد.

۸۹- اگر مخلوط a میلی لیتر از هیدروبرمیک اسید با $\text{pH} = 1/4$ و b میلی لیتر از محلول همان اسید با $\text{pH} = 1/7$ ، دارای

$0/06$ مول یون برمید باشد، a + b می تواند برابر با چند میلی لیتر باشد؟

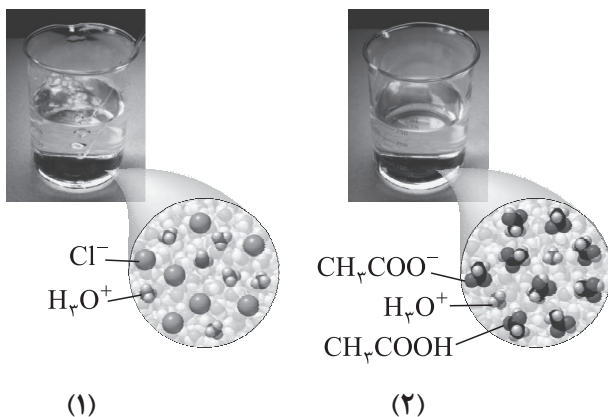
$$1700 \text{ (4)}$$

$$1200 \text{ (3)}$$

$$800 \text{ (2)}$$

$$200 \text{ (1)}$$

محل انجام محاسبات



۹۰- شکل‌های مقابل محلول‌هایی از هیدروکلریک اسید و استیک اسید را نشان می‌دهد. اگر حجم هر یک از محلول‌ها برابر با ۳۱۵ میلی‌لیتر باشد، تفاوت pH این محلول‌ها در دمای 25°C ، کدام است؟ (هر ذره را معادل 0.15 مول در نظر بگیرید.)

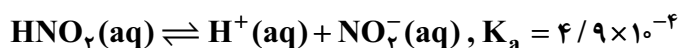
- (۱) 0.48
 (۲) 0.55
 (۳) 0.87
 (۴) 1.02

۹۱- اگر pH محلول اسید قوی HX با pH محلول اسید ضعیف HY برابر باشد، چند مورد از موارد زیر به یقین درست است؟
 ($\text{HX} = 50$, $\text{HY} = 60$: g.mol^{-1})

- شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- اگر غلظت محلول HX برابر با 0.1 مولار بوده و حجم محلول یک لیتر باشد، تفاوت جرم دو اسید حل شده برابر با یک گرم خواهد بود.
- در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با این دو محلول برابر است.
- اگر حجم دو محلول برابر نباشد، رسانایی دو محلول متفاوت خواهد بود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۹۲- اگر در دمای معین و در دو ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HNO_3 در محلول، دو برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول و pH محلول نیترو اسید، برابر $2/15$ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است، $\text{O} = 16, \text{N} = 14, \text{C} = 12, \text{H} = 1$: g.mol^{-1})



- (۱) 0.113 (۲) 0.131 (۳) 0.178 (۴) 0.187

۹۳- غلظت یون هیدروکسید در محلول 0.05 مولار هیدروکلریک اسید، چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول 0.02 مولار هیپوکلرو اسید با $K_a = 4/5 \times 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$ است؟

- (۱) $5/83 \times 10^{-9}$ (۲) $6/67 \times 10^{-9}$ (۳) $1/25 \times 10^{-8}$ (۴) $1/5 \times 10^{-8}$

محل انجام محاسبات

شیمی دهم

۹۴- از کدام یک از موارد زیر برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی و انجماد مواد غذایی در صنعت سرماسازی استفاده می‌شود؟

- (۱) هلیوم (۲) نیتروژن (۳) اکسیژن (۴) آرگون

۹۵- کدام مورد، نادرست است؟

- (۱) جانداران ذره‌بینی، گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.
 (۲) در ساختار لوویس مواد، هرگاه اتم عنصرهای گروه ۱۷، اتم کناری باشند، تنها یک پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند.
 (۳) افزون بر فلزهایی مانند طلا و پلاتین که به حالت آزاد در طبیعت یافت می‌شوند، فلزهایی وجود دارند که با بیش از یک نوع اکسید در طبیعت شناخته شده‌اند.
 (۴) در آرایش الکترون - نقطه‌ای مواد مولکولی، الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌ها طوری کنار آن‌ها چیده می‌شوند که همه اتم‌های سازنده ترکیب، از قاعده هشت‌تایی پیروی کنند.

۹۶- مطابق جدول زیر، کدام گزینه موارد a, b, c و d را به ترتیب از راست به چپ، به درستی نشان می‌دهد؟

نام ترکیب	مس (II) سولفید	b	c	سیلیسیم تترابرمید
فرمول شیمیایی	a	CS _۲	CrO	d

(۱) Cu_۲S - کربن سولفید - کروم اکسید - SiBr_۴

(۲) Cu_۲S - کربن سولفید - کروم (I) اکسید - SBr_۴

(۳) CuS - کربن دی‌سولفید - کروم اکسید - SBr_۴

(۴) CuS - کربن دی‌سولفید - کروم (II) اکسید - SiBr_۴

۹۷- در کدام ردیف‌های جدول زیر، داده‌های مربوط به ترکیب، درست است؟ (منظور از p.e، جفت‌الکترون‌های پیوندی و n.e، جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌ها است.)

ردیف	نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار p.e	$\frac{p.e}{n.e}$
۱	فسفر تری کلرید	PCl _۳	۳	$\frac{۱}{۳}$
۲	کربن مونوکسید	CO	۳	$\frac{۳}{۲}$
۳	گوگرد تری اکسید	SO _۳	۳	$\frac{۱}{۲}$
۴	دی‌نیتروژن مونوکسید	N _۲ O	۴	۱

(۱) ۱ و ۳

(۲) ۱ و ۴

(۳) ۲ و ۳

(۴) ۲ و ۴

محل انجام محاسبات

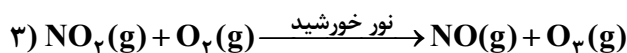
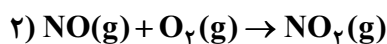
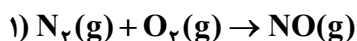
۹۸- نمونه‌ای به جرم ۳/۱۷۵ گرم از فلز X با ۰/۶۰۰ لیتر گاز اکسیژن با چگالی ۳۴/۱ گرم بر لیتر، اکسیدی با فرمول XO تشکیل می‌دهد، جرم مولی عنصر X چند گرم بر مول بوده و در این واکنش، چند گرم فرآورده تولید می‌شود؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) ۶۳/۵ و ۱/۹۸ (۲) ۶۳/۵ و ۳/۹۹ (۳) ۱۲۷ و ۱/۹۸ (۴) ۱۲۷ و ۳/۹۹

۹۹- در واکنش زیر و پس از موازنه آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد جامد، به مجموع ضرایب استوکیومتری مواد گازی شکل، کدام است؟
 $\text{FeCr}_2\text{O}_4(\text{s}) + \text{K}_2\text{CO}_3(\text{s}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3(\text{s}) + \text{K}_2\text{CrO}_4(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g})$

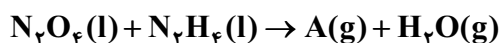
(۱) ۱/۰۶ (۲) ۱/۴۷ (۳) ۲ (۴) ۲/۸

۱۰۰- اوزون تروپوسفری طی واکنش‌های موازنه‌نشده زیر تولید می‌شود. اگر تمام نیتروژن دی‌اکسید تولید شده، در مرحله آخر مصرف شده و منجر به تولید $8/428 \times 10^{24}$ مولکول اوزون شود، چند لیتر گاز نیتروژن با چگالی ۰/۷ گرم بر لیتر مصرف شده است؟ ($O = 16, N = 14 : \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) ۱۵۶/۸ (۲) ۲۸۰ (۳) ۳۱۳/۶ (۴) ۵۶۰

۱۰۱- طبق واکنش موازنه‌نشده زیر، کدام موارد نادرست است؟ ($O = 16, N = 14, H = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)



الف) اگر به جای A، N_2 قرار بگیرد، برای تولید ۰/۹ مول از آن، ۱۹/۲ گرم N_2H_4 نیاز است.

ب) اگر به جای A، NO قرار بگیرد، با مصرف ۹/۲۰ گرم N_2O_4 ، ۸/۹۶ لیتر گاز، در شرایط STP تولید می‌شود.

پ) اگر به جای A، N_2 قرار بگیرد، با مصرف ۰/۲ مول از واکنش‌دهنده‌ها، ۵/۶ گرم از فرآورده تولید می‌شود که در ساختار لوویس خود پیوند اشتراکی بیشتری دارد.

ت) اگر به جای A، NO قرار بگیرد، برای مصرف ۱۴۷/۲ گرم از N_2O_4 ، به تقریب ۱۸/۵ لیتر گاز N_2H_4 در دمای 182°C و فشار ۲atm، مورد نیاز است.

(۱) ب - ت (۲) الف - ب (۳) الف - ت (۴) پ - ت

۱۰۲- کدام مطلب، نادرست است؟ ($S = 32, O = 16, N = 14 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) اوزون و گوگرد دی‌اکسید از لحاظ ساختار لوویس مشابه هستند به همین دلیل رفتار شیمیایی آن‌ها نیز مشابه خواهد بود.

(۲) در بررسی رفتار زمین در برابر پرتوی خورشیدی، حدود ۶۰ درصد پرتوی فرسرخ گسیل شده از زمین وارد فضا می‌شوند و بخش کوچکی از پرتوهای ارسالی خورشید به زمین توسط هواکره جذب می‌شود.

(۳) اگر در دما و فشار یکسان، حجم ۱۲/۸ گرم SO_2 برابر حجم ۱۵/۲ گرم N_2O_x باشد، x برابر ۳ می‌باشد.

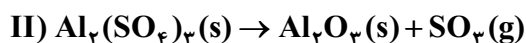
(۴) اوزون و اکسیژن هر دو در حالت مایع به رنگ آبی هستند و در ساختار لوویس اوزون ۱۲ الکترون ناپیوندی مشاهده می‌شود.

محل انجام محاسبات

۱۰۳- کدام مورد درست است؟ ($Cl = ۳۵/۵, P = ۳۱ : g.mol^{-1}$)

- (۱) براساس شواهد، فصل بهار در نیمکره شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته حدود یک ماه زودتر آغاز می‌شود.
- (۲) به منظور تولید $۴۱۲/۵$ گرم فسفر تری کلرید، باید ۱۸۶ گرم فسفر ($P_۴$) با گاز کلر واکنش دهد.
- (۳) با افزایش ارتفاع در لایه تروپوسفر، فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد، اما درصد حجمی آن ثابت است.
- (۴) جاذبه زمین، عامل توزیع گازها در سرتاسر هواکره است.

۱۰۴- پتاسیم پرمنگنات ($KMnO_۴$) و آلومینیم سولفات ($Al_۲(SO_۴)_۳$) طبق واکنش‌های موازنه‌نشده زیر، در ظرف دربار تجزیه می‌شوند. اگر جرم ماده جامد به کاررفته در واکنش (I)، ۲ برابر واکنش (II) باشد، کاهش جرم واکنش (I) چند برابر واکنش (II) است و اگر تفاوت جرم فراورده‌های جامد در واکنش (I)، ۵۵ گرم باشد، جرم واکنش دهنده (II) چند گرم بوده است؟ ($Mn = ۵۵, K = ۳۹, S = ۳۲, Al = ۲۷, O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)



۱۵۸،۰/۲۸۸ (۱) ۷۹،۰/۱۴۲ (۲) ۱۵۸،۰/۱۴۲ (۳) ۷۹،۰/۲۸۸ (۴)

۱۰۵- اگر در فرایندها، مخلوط واکنش به دمای $۲۳۳K$ برسد، کدام گزینه ماده (مواد) با حالت فیزیکی مایع را نشان می‌دهد؟

$H_۲$ (۱) $N_۲$ (۲) $NH_۳$ (۳) $NH_۳$ و $N_۲$ (۴)

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی
خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله هفتم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۱۸/ آبان/ ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	محمد رضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی - کیوان صارمی - حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری
فیزیک	محمد باغبان - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی علیرضا عبداللهی - حمید فدائی فرد - فرزاد نامی - حامد نبی منصور
شیمی	مبین توکل - محمد قهرمانی نژاد - محمد رضا طهرانچی - سجاد ططری فر - محمد رضا طاهری نژاد

نام درس	مستقل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	عادل حسینی	محمد سجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	مهدی خوشنویس منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر
آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	ماهان فنی فر مهدی خوشنویس ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	حمید فدائی فرد	علیرضا جباری	امین امینی	مهدی بابائی مریم حسن لو مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	وحید فارسیان سروش عبادی محمد رضا طاهری نژاد	محمد مرادی وحید فارسیان	احسان رحیمی مهسا خاکی امیررضا نوری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانبور



آزمون آزمائشی خلی سبز

سپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق دوست - راضیہ سادات خلی نسب زہرا صفری - محیا غنی فرد زہرا فرہادی مہر - مریم مسلمی زاده ساعده نمازی - مریم نوری نیا
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه آرائی	سحر ازلی تاش - فاطمہ بخششی مریم حسین زاده - سپیدہ سخایی مائدہ صبری - نیلوفر فرخجستہ مہدیہ گل پور - لیلا نعمت پور



حسابان و ریاضیات پایه

اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx^2 + x - 2$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر عبارت $x - 1$ کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۱

مشاوره این سؤال عیناً سؤال نهایی خرداد ۱۴۰۳ است که برای شما به صورت تستی طرح کرده‌ایم. سؤال ساده‌ای که در قالب کنکور سراسری هم می‌گنجد. این یعنی رویکردهای امتحانات نهایی تغییر کرده است و رفته‌رفته تفاوت‌های امتحانات نهایی و کنکور سراسری در تیپ و نگارش سؤال کم و کم‌تر می‌شود.

Hint $p(-2)$ رو صفر بذار و بعدش $p(1)$ رو حساب کن.

درس‌Box

رابطه تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $x - a$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

باقی مانده خارج قسمت

که r برابر $p(a)$ است.

اگر $p(a)$ برابر صفر باشد، گوییم $p(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** $p(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، پس $p(-2)$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا مقدار m به دست آید:

$$p(-2) = -8 + 4m - 2 - 2 = 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 3$$

گام دوم: و باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$ بر $x - 1$ برابر $p(1)$ است:

$$r = p(1) = 1 + 3 + 1 - 2 = 3$$

ریاضیات

چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ مفروض است. اگر چندجمله‌ای $f(x-2)$ بر $x-3$ و چندجمله‌ای $f(x-3)$ بر $x-2$

۲

بخش پذیر باشد، حاصل ab کدام است؟

-۱ (۱)

۱ (۲)

۶ (۳)

-۶ (۴)

مشاوره در تقسیم چندجمله‌ای‌ها، مثل تابع با آن‌ها برخورد نمی‌کنیم، پس ویژگی‌های توابع را نمی‌توان به این عبارت‌ها نسبت داد. این یعنی ترکیب آن‌ها، مشتق‌گیری از آن‌ها و ... بی‌معنی و غیرمجاز است اما غلطی است که مصطلح شده است و می‌پذیریم. مثلاً در این سؤال $f(x-2)$ معنایی ندارد، اما با همان نگاه تابعی، به جای هر x ، چندجمله‌ای $x-2$ قرار دهید.

در $f(x-2)$ و $f(x-3)$ به جای x ، ۳ و ۲ بذار.

Hint

گام اول: چندجمله‌ای $f(x-2)$ بر $x-3$ بخش پذیر است، پس $f(3-2) = f(1)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f(3-2) = f(1) = 1 + a + b - 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

گام دوم: چندجمله‌ای $f(x-3)$ بر $x-2$ بخش پذیر است، پس $f(2-3) = f(-1)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f(2-3) = f(-1) = -1 + a - b - 1 = 0 \Rightarrow a - b = 2 \quad (2)$$

گام سوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b = -1$$

پس خواسته سؤال $ab = -1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + ax^3 + \Delta x^2 + bx + 4$ بر $x^2 + 2x + 4$ بخش پذیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

۳

۴ (۱)

۲ (۲)

-۲ (۳)

صفر (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + ax^3 + \Delta x^2 + bx + 4$ بر $x^2 + 2x + 4$ بخش پذیر است، پس مقدار چندجمله‌ای $p(x)$

در ریشه $x^2 + 2x + 4$ برابر صفر است. اما عبارت $x^2 + 2x + 4$ که ریشه حقیقی ندارد. حال با دقت در این عبارت می بینیم که عبارت $x - 2$ چاقی $x - 2$ است، پس طرفین رابطه تقسیم را در $x - 2$ ضرب می کنیم:

$$p(x) = (x^2 + 2x + 4)q(x) \xrightarrow{\times(x-2)} (x-2)p(x) = (x^3 - 8)q(x)$$

گام دوم: حالا می توانیم ریشه $x^3 - 8 = 0$ را در $p(x)$ جای گذاری کنیم. برای این کار هر x^3 ای که می بینیم، به جای آن ۸ قرار می دهیم:

$$p(x) = (x^4 + ax^3 + \Delta x^2 + bx + 4) \xrightarrow{x^3=8} \rightarrow$$

$$\text{باقی مانده } r = (x^3)x + a(x^3) + \Delta x^2 + bx + 4 = 8x + 8a + \Delta x^2 + bx + 4$$

$$= \Delta x^2 + (\Delta + b)x + 8a + 4$$

گام سوم: ریشه غیرحقیقی معادله $x^2 + 2x + 4 = 0$ جایی است که x^2 مساوی $-2x - 4$ است، پس در عبارت

$$\Delta x^2 + (\Delta + b)x + 8a + 4 \text{ به جای } x^2 \text{ عبارت } -2x - 4 \text{ را قرار می دهیم:}$$

$$\Rightarrow r = \Delta(-2x - 4) + (\Delta + b)x + 8a + 4 = (b - 2)x + 8a - 16$$

گام چهارم: باقی مانده باید همواره برابر صفر باشد، پس $b - 2$ و $8a - 16$ هر دو باید صفر باشند:

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \\ 8a - 16 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 0$$

از همان ابتدا می توانستیم به جای x^2 ها عبارت $-2x - 4$ قرار دهیم، به صورت زیر:

$$p(x) = (x^2)^2 + ax(x^2) + \Delta(x^2) + bx + 4$$

$$\Rightarrow r = (-2x - 4)^2 + ax(-2x - 4) + \Delta(-2x - 4) + bx + 4$$

و دوباره اگر x^2 دیدیم، به جای آن $-2x - 4$ قرار می دهیم.

بهبود دیگر

۴

اگر معادله $mx^2 + 4x + m + 3 = 0$ دارای دو جواب حقیقی مثبت باشد، در مورد معادله $(m+3)x^2 - x + m + 4 = 0$ ، کدام

P و S مثبت

 Δ مثبت

مورد صحیح است؟

(۱) دو جواب حقیقی منفی دارد.

(۲) دو جواب حقیقی مثبت دارد.

(۳) دو جواب حقیقی غیرهم علامت دارد.

(۴) جواب حقیقی ندارد.



Hint

شرط دو جواب، اون هم دو جواب مثبت رو دنبال کن تا حدود m در بیاد. Δ ، S و P هر سه مثبتن.

دروس Box

در مورد تعداد جواب‌های حقیقی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ براساس مشخصه $\Delta = b^2 - 4ac$ می‌توان گفت:

$\Delta < 0$: معادله جواب حقیقی ندارد.

$\Delta = 0$: معادله یک جواب (یا همان ریشه مضاعف) دارد که برابر $x_0 = -\frac{b}{2a}$ است.

$\Delta > 0$: معادله دو جواب متمایز دارد که برابر هستند با $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

در مورد علامت‌های جواب‌ها هم در حالت $\Delta > 0$ می‌توان جدول زیر را ارائه کرد:

$P > 0$	$S > 0$	هر دو جواب مثبت هستند.
	$S < 0$	هر دو جواب منفی هستند.
$P < 0$	$S > 0$	جواب‌ها غیرهم علامت‌اند، اما قدرمطلق جواب مثبت بزرگ‌تر است.
	$S < 0$	جواب‌ها غیرهم علامت‌اند، اما قدرمطلق جواب منفی بزرگ‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ما به حدود m نیاز داریم تا در مورد معادله دوم اظهار نظر کنیم. برای این کار شرط‌های لازم در مورد معادله $mx^2 + 4x + m + 3 = 0$ را اعمال می‌کنیم. طبق درس باکس، Δ ، S و P هر سه باید مثبت باشند تا این معادله دو جواب حقیقی و مثبت داشته باشد:

$$1) \Delta = 4^2 - 4(m)(m+3) = 16 - 4m^2 - 12m = -4(m^2 + 3m - 4) = -4(m+4)(m-1)$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} -4(m+4)(m-1) > 0 \Rightarrow (m+4)(m-1) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -4 < m < 1$$

$$2) S = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{m} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$3) P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+3}{m} > 0 \xrightarrow{\text{خارج ریشه‌ها}} m < -3 \text{ یا } m > 0$$

هر سه شرط باید برقرار شوند، پس اشتراک سه مجموعه به دست آمده را در نظر می‌گیریم:

$$(-4 < m < 1) \cap (m < 0) \cap (m < -3 \cup m > 0) = -4 < m < -3$$

گام دوم: حالا با داشتن حدود m، می‌رویم سراغ معادله دوم و باز هم باید از روی Δ ، S و P اظهار نظر کنیم.

$$\underbrace{(m+3)}_a x^2 - x + \underbrace{m+4}_c = 0$$

$$a: -4 < m < -3 \Rightarrow -1 < m+3 < 0 \Rightarrow -1 < a < 0$$

$$c: -4 < m < -3 \Rightarrow 0 < m+4 < 1 \Rightarrow 0 < c < 1$$

a و c در معادله جدید غیر هم علامت‌اند، پس معادله دوم قطعاً دو جواب حقیقی و غیرهم علامت دارد.

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $ac < 0$ (که همان معنای $P < 0$ را می‌دهد) باشد، $\Delta > 0$ است و معادله دو جواب غیرهم علامت دارد.

تیزبازی

رأس سهمی $y = 2x^2 - (2a + 2)x + a$ روی خط $y = -5$ قرار دارد. مجموع طول نقاط برخورد سهمی با محور x ها کدام است؟



جوابهای معادله $y = 0$

عرض رأس سهمی برابر -5 است

۱) ۴ یا -۱

۲) ۳ یا -۲

۳) ۳ یا -۱

۴) ۴ یا -۲



عرض رأس سهمی رو داری، a رو به دست بیار و بعدش S رو حساب کن.



درسی Box

اگر خط افقی $y = k$ بر یک سهمی مماس باشد، به این معنی است که رأس سهمی روی خط $y = k$ و عرض رأس سهمی برابر همان مقدار k است.

رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نقطه $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$ است.

گام اول: رأس سهمی روی خط $y = -5$ است، پس عرض رأس سهمی برابر -5 است. طبق درس باکس، از فرمول $y_s = -\frac{\Delta}{4a}$ استفاده می‌کنیم:

$$-\frac{(-(2a+2))^2 - 4(2)(a)}{4 \times 2} = -5 \Rightarrow \frac{4(a+1)^2 - 4(2a)}{4(2)} = 5 \Rightarrow \frac{a^2 + 2a + 1 - 2a}{2} = 5$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 = 10 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

گام دوم: محل‌های برخورد سهمی $y = 2x^2 - (2a + 2)x + a$ با محور x ها جواب‌های معادله $2x^2 - (2a + 2)x + a = 0$

$$S = -\frac{-2(a+1)}{2} = a+1 \begin{cases} a=3 \rightarrow S=4 \\ a=-3 \rightarrow S=-2 \end{cases}$$

هستند که مجموع آن برابر است با:

پس مجموع جواب‌ها می‌تواند -2 یا 4 باشد.

خط $y = -5$ بر سهمی داده شده مماس است. پس معادله حاصل از تقاطع خط و سهمی باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$2x^2 - 2(a+1)x + a = -5 \Rightarrow 2x^2 - 2(a+1)x + a + 5 = 0$$

پس باید Δ ی این عبارت صفر شود:

$$\Delta = (-2(a+1))^2 - 4(2)(a+5) = 0 \Rightarrow 4(a^2 + 2a + 1) - 4(2a + 10) = 0 \xrightarrow{-4} a^2 + 2a + 1 - 2a - 10 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

از این‌جا به بعد همان روش قبلی است.



به‌چوردیکه

جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 2 = 0$ اعداد α و β هستند و جواب‌های معادله $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ اعداد $2\alpha - 1$ و $2\beta - 1$ هستند. حاصل $a - b + c$ کدام است؟

۱ (۴)

۱۵ (۳)

۲۵ (۲)

۳ (۱)



اول معادله‌ای رو تشکیل بده که جواب‌های اون $2\alpha - 1$ و $2\beta - 1$ باشن، بعدش اون رو در $x - 2$ ضرب کن.

 Hint

گام اول: معادله $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ در اصل به صورت $(x - 2)(x - (2\alpha - 1))(x - (2\beta - 1)) = 0$ بوده است که یعنی

$x - 2$ را در طرفین معادله $(x - (2\alpha - 1))(x - (2\beta - 1)) = 0$ ضرب کرده‌ایم. این هم یعنی در ابتدا باید معادله‌ای تشکیل

دهیم که جواب‌های آن $\alpha' = 2\alpha - 1$ و $\beta' = 2\beta - 1$ باشند.

گام دوم: برای این کار $\alpha' + \beta'$ و $\alpha'\beta'$ را حساب می‌کنیم:

$$S' = \alpha' + \beta' = 2\alpha - 1 + 2\beta - 1 = 2(\alpha + \beta) - 2 \xrightarrow{\text{از معادله اصلی } \alpha + \beta = 5 \text{ است.}} S' = 2(5) - 2 = 8$$

$$P' = \alpha'\beta' = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 \xrightarrow{\text{از معادله اصلی } \alpha\beta = -2 \text{ است.}} P' = 4(-2) - 2(5) + 1 = -17$$

پس این معادله $x^3 - (8)x - 17 = 0$ یا $x^3 - 8x - 17 = 0$ است.

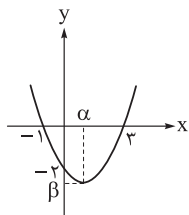
گام سوم: وقت آن رسیده است که $x - 2$ را در آن ضرب کنیم:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - 2)(x^2 - 8x - 17)$$

با جای‌گذاری $x = -1$ در چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + c$ می‌توانیم حاصل $a - b + c$ را حساب کنیم:

$$\xrightarrow{x=-1} -1 + a - b + c = (-3)(-8) \Rightarrow a - b + c = 25$$

نمودار یک تابع درجه دوم (سهمی) در شکل مقابل رسم شده است. جواب‌های کدام معادله $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ هستند؟



$$9x^2 - 39x - 40 = 0 \quad (1)$$

$$9x^2 - 39x + 40 = 0 \quad (2)$$

$$9x^2 + 39x + 40 = 0 \quad (3)$$

$$9x^2 + 39x - 40 = 0 \quad (4)$$



کافیست معادله سهمی رو به دست بیاری، همه چی روشن می شه.

Hint

درس‌نویس Box

معادله سهمی

ضابطه یک سهمی را می توان به صورت $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ نیز نمایش داد. به جدول زیر توجه کنید:

معادله	مختصات رأس	محور تقارن	ماکزیمم (مینیمم)
$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$	$S(x_s, y_s)$	$x = x_s$	y_s
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$x = -\frac{b}{2a}$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

در ردیف آخر، x_1 و x_2 صفرهای سهمی هستند. در حالت کلی ریشه‌های ضابطه تابع f با طول نقاط برخورد نمودار آن با محور x ها را صفرهای تابع f می‌نامیم.

اگر $y = k$ سهمی را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، طول رأس وسط طول‌های این دو نقطه یعنی $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$ است که همان معادله محور تقارن تابع است. از طرفی اگر خط $y = k$ سهمی را در یک نقطه قطع کند، عرض نقطه ماکزیمم (مینیمم) برابر k است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: مقدار α که طول رأس سهمی است، برابر میانگین صفرهای تابع است.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

گام دوم: اما برای محاسبه β لازم است معادله سهمی را به دست آوریم و طبق جدول درس‌باکس از حالت سوم که صفرهای تابع را داریم استفاده می‌کنیم:

$$y = a(x+1)(x-3) \xrightarrow[\text{عرض از مبدأ است}]{x=0 \Rightarrow y=-2} -2 = a(1)(-3) \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

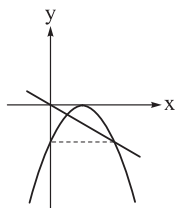
گام سوم: پس معادله سهمی $y = \frac{2}{3}(x+1)(x-3)$ است و اگر $x = \alpha = 1$ را جای‌گذاری کنیم، مقدار β به دست می‌آید:

$$\beta = \frac{2}{3}(2)(-2) = -\frac{8}{3}$$

گام چهارم: در انتها باید معادله‌ای بسازیم که جواب‌های آن $\alpha + \beta = -\frac{8}{3}$ و $\alpha\beta = -\frac{1}{3}$ باشند:

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{8}{3}\right)x + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{13}{3}x + \frac{8}{9} = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 + 39x + 8 = 0$$

خط $2y + x = 0$ و نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار b کدام است؟



۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

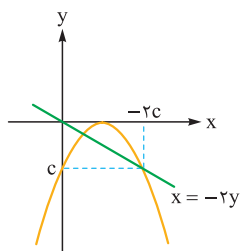
۶ (۴)



از عرض از مبدأ c استفاده کن، یعنی همه پارامترها رو بر حسب c بنویس.

Hint

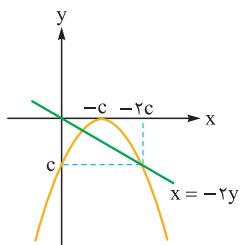
گام اول: عرض از مبدأ سهمی برابر c است و معادله خط نیز $y = -\frac{x}{2}$ است. از آنجا که عرض یکی از نقاط خط و سهمی برابر c است، پس طول این نقطه برابر $-2c$ است:



گام دوم: دو نقطه هم‌عرض با مختصات $(0, c)$ و $(-2c, c)$ روی سهمی قرار دارند و طول رأس سهمی میانگین طول این دو نقطه است، پس:

$$x_s = \frac{0 - 2c}{2} = -c$$

پس معادله سهمی $y = a(x+c)^2$ است.



گام سوم: ضابطه $y = a(x+c)^2$ با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ باید یکسان باشد:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2acx + ac^2$$

$$\Rightarrow c = ac^2 \xrightarrow{c \neq 0} ac = 1$$

$$\Rightarrow b = 2ac = 2$$

ریاضیات

۹

دو ماشین A و B با هم کاری را در ۱۲ روز تمام می‌کنند. اگر ماشین A به تنهایی کار را در ۳۶ روز تمام کند، چند ماشین B هم‌زمان با هم کار کنند تا تمام کار سه‌روزه تمام شود؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)



Hint با یه معادله ساده تعداد روز ماشین B رو حساب کن. تمام!

درس‌نویس Box

اگر شخص ۱ یک کار را به تنهایی در مدت‌زمان t_1 ، شخص ۲ همین کار را به تنهایی در مدت‌زمان t_2 ، ...، شخص n همین کار را به تنهایی در t_n و همه این n شخص کار را با هم در مدت‌زمان T انجام دهند، رابطه زیر بین t_i ها و T برقرار است:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} = \frac{1}{T}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا باید تعداد روزی که طول می‌کشد تا ماشین B به تنهایی کار را تمام کند، به دست آوریم و برای این کار از

درس‌یاکس استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{12} \xrightarrow{t_A=36} \frac{1}{36} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{t_B} = \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow t_B = \text{روز } 18$$

گام دوم: پس باید ۶ ماشین B هم‌زمان کار کنند تا کار در $\frac{18}{6} = 3$ روز تمام شود.

ریاضیات

۱۰ اگر $\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x-6} = a$ و $\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-6} - 1 = b$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

 $\frac{3}{4}$ (۱)

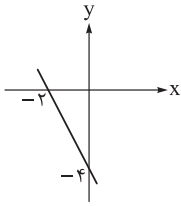
Hint دو تا عبارت مزدوج می‌بینی، در هم ضربشون کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ نیازی به حل معادله گنگ نیست. می‌بینیم که $\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x-6}$ و $\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-6}$ مزدوج یکدیگرند، پس در

یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$\overbrace{(\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x-6})}^a \overbrace{(\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-6})}^{b+1} = a(b+1)$$

$$\Rightarrow (2x+a) - (2x-6) = ab+a \Rightarrow a+6 = ab+a \Rightarrow ab=6$$



نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. عبارت $p(x) = \frac{2x - f(x)}{f(x) - x}$ در کدام بازه مثبت است؟

$$(1) \left(-1, \frac{4}{3}\right)$$

$$(2) \left(-\frac{4}{3}, -1\right)$$

$$(3) \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$$

$$(4) \left(1, \frac{4}{3}\right)$$

۱۱



اول معادله خط رو به دست بیار. بعدش ریشه‌های صورت و مخرج $p(x)$ رو.

Hint

روش‌های نوشتن معادله خط: در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله خط را نوشت:

دکتر Box

معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ	معلوم بودن دو نقطه از خط	معلوم بودن شیب و یک نقطه از خط
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ یا } y = mx + h$

تعیین علامت عبارت‌های جبری در حالت کلی

ابتدا همه عبارت‌ها را تجزیه و ریشه‌ها را می‌یابیم. ریشه‌هایی را که در صورت هستند در جدول مساوی صفر قرار می‌دهیم و در ریشه‌های مخرج، عبارت تعریف نشده است. ریشه‌ها را در جدول به ترتیب صعودی قرار داده و مرتبه ریشه (ساده - مضاعف و ...) را مشخص می‌کنیم. علامت عبارت را در یک فاصله با قراردادن عددی دلخواه از آن بازه، تعیین کرده و علامت سایر بازه‌ها را در مواجهه با ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه فرد عوض کرده ولی در ریشه‌های مکرر مرتبه زوج یا ریشه‌های داخل قدرمطلق تغییر نمی‌دهیم.

گام اول: برای ساختن عبارت $p(x)$ ، به ضابطه تابع f نیاز داریم. طبق جدول درس باکس، معادله خط را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1 \Rightarrow \frac{y}{-4} = -\frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow y = f(x) = -2x - 4$$

گام دوم: حالا عبارت $p(x)$ را می‌سازیم:

$$p(x) = \frac{2x - (-2x - 4)}{(-2x - 4) - x} = \frac{4x + 4}{-3x - 4}$$

گام سوم: و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$-\frac{4}{3}$	-1	
$4x + 4$	-		-	+
$-3x - 4$	+		-	-
$p(x)$	-		+	-

تایم

که می‌بینیم عبارت $p(x)$ فقط در بازه $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$ مثبت است.

به گزینه‌ها که دقت می‌کنید، می‌بینید که بازه‌ها به صورت (a, b) هستند. این یعنی عبارت $p(x)$ در بازه بین ریشه‌هایش (صورت و مخرج) مثبت است. در نتیجه برای حل سؤال، کافی است فقط ریشه‌های صورت و مخرج را حساب کنیم و به جدول تعیین علامت نیازی نداریم.

تیزبازی

مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{ax+4}{x-2} > 3$ بازه $(b, +\infty)$ است. حاصل ab کدام است؟

۱۲

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)


 Hint

حالت‌های تعیین علامت عبارت $\frac{Ax+B}{Cx+D}$ رو در نظر بگیر. ببین این سؤال شبیه کدومشونه؟ و اگر نیست، چه شرطی باید داشته باشیم؟

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا مسئله نامعادله را به مسئله تعیین علامت تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{ax+4}{x-2} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{(a-3)x+10}{x-2} > 0 \quad (*)$$

گام دوم: تعیین علامت عبارت $\frac{(a-3)x+10}{x-2}$ مانند تعیین علامت عبارت درجه دوم است، پس مجموعه جواب‌های نامعادله (*)

یکی از حالت‌های (α, β) یا $\mathbb{R} - [\alpha, \beta]$ است. حال که بازه جواب نامعادله شبیه هیچ کدام از این دو حالت نیست و به صورت $(b, +\infty)$ است، نتیجه می‌گیریم تعیین علامت (*) باید شبیه تعیین علامت یک عبارت درجه اول باشد، در نتیجه $a-3$ باید برابر صفر باشد:

$$\Rightarrow a = 3$$

گام سوم: حالا باید مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{10}{x-2} > 0$ را پیدا کنیم:

$$\frac{10}{x-2} > 0 \xrightarrow{10 \text{ مثبت است}} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

پس $b = 2$ و در نتیجه $ab = 6$ است.

عبارت $p(x) = (x+2)(2x^2 + ax^2 + b)$ همواره نامنفی است. حدود a کدام است؟ **۱۳**

$$p(x) \geq 0$$

(۱) $[4, 12]$

(۲) $[-12, -4]$

(۳) $[-4, 12]$

(۴) $[-12, 4]$



Hint $p(x)$ یا نباید ریشه داشته باشد یا اگر دارد، مضاعف باید باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** عبارت $p(x)$ قطعاً ریشه $x = -2$ را دارد و در ظاهر علامت آن حول $x = -2$ به صورت زیر است:

x	-2
$P(x)$	- +

یعنی علامت عبارت تغییر می‌کند که خلاف فرض سؤال است. پس نتیجه می‌گیریم حتماً $x + 2$ یک بار دیگر در عبارت $p(x)$ تکرار شده است و $x = -2$ ریشه مضاعف آن است.

گام دوم: این یعنی عبارت $2x^3 + ax^2 + b$ حداقل یک ریشه برابر -2 دارد، پس آن را با دانستن عامل $x + 2$ تجزیه می‌کنیم:

$$2x^3 + ax^2 + b = (x+2)(2x^2 + (a-4)x - 2a + 8)$$

گام سوم: پس داریم:

$$p(x) = (x+2)^2(2x^2 + (a-4)x - 2a + 8)$$

حال اگر بخواهیم $p(x)$ را همواره نامنفی کنیم، باید کاری کنیم که عبارت درجه دوم $2x^2 + (a-4)x - 2a + 8$ حداکثر یک ریشه داشته باشد، پس باید Δ ی آن را نامثبت قرار دهیم:

$$\Delta = (a-4)^2 - 4(2)(-2a+8) = a^2 - 8a + 16 + 16a - 64 = a^2 + 8a - 48$$

$$\xrightarrow{\Delta \leq 0} (a+12)(a-4) \leq 0 \Rightarrow -12 \leq a \leq 4$$

نمودار تابع $y = f\left(1 - \frac{x}{4}\right)$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار به دست آمده مربوط

۱۴

به کدام تابع است؟ (تابع f وارون پذیر است.)

وارون می‌کنیم

$$y = 2f^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) \quad (2)$$

$$y = f^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) \quad (1)$$

$$y = f^{-1}\left(-\frac{x}{4}\right) \quad (4)$$

$$y = -2f^{-1}(x) \quad (3)$$



Hint فقط به وارون کردنه که چالشه، انتقال به پایین که کاری نداره.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** تبدیلات گفته شده را روی نمودار تابع f اعمال می‌کنیم. در ضمن یادآوری این نکته لازم است که با قرینه کردن نمودار

یک تابع وارون پذیر نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع وارون آن حاصل می‌شود:

$$y = f\left(1 - \frac{x}{4}\right) \xrightarrow{\text{وارون}} x = f\left(1 - \frac{y}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{y}{4} = f^{-1}(x) \Rightarrow y = 4 - 4f^{-1}(x)$$

گام دوم: حالا ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. در این صورت نمودار تابع $y = -2f^{-1}(x)$ به دست می‌آید.

نمودار تابع $f(x) = 2(x-a)^2 - b$ را ۴ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم

تا به نمودار تابع $y = -2(x-b)^2 - a$ برسیم. حاصل $a+b$ کدام است؟

$$-f(-x)$$

-۶ (۴)

۶ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)



کرتی Box

نوع انتقال	تابع	توضیح	نمودار	ویژگی
افقی	$y = f(x-c)$	نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0 + c, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x-c)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
	$y = f(x+c)$	نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0 - c, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x+c)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
عمودی	$y = f(x) + c$	نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0, y_0 + c)$ روی نمودار تابع $y = f(x) + c$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.
	$y = f(x) - c$	نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0, y_0 - c)$ روی نمودار تابع $y = f(x) - c$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.

انعکاس (قرینه کردن)

تابع خواسته شده	نمودار	روش ترسیم	ویژگی‌ها
$y = -f(x)$		کافی است قرینه تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(x_0, -y_0)$ روی تابع $y = -f(x)$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.
$y = f(-x)$		کافی است قرینه تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(-x_0, y_0)$ روی تابع $y = f(-x)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
$y = -f(-x)$		کافی است قرینه تابع $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(-x_0, -y_0)$ روی تابع $y = -f(-x)$ تبدیل می‌شود. دامنه و برد هر دو تغییر می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به جدول های درس باکس، تبدیل ها را به ترتیب روی نمودار f اعمال می کنیم:

$$f(x) = 2(x-a)^2 - b \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-4} y = 2(x-4-a)^2 - b \xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{y \rightarrow y+4} y+4 = 2(x-4-a)^2 - b$$

$$\Rightarrow y = 2(x-4-a)^2 - b - 4 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}]{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y} y = -2(-x-4-a)^2 + b + 4$$

گام دوم: طبق فرض سؤال، این ضابطه باید با ضابطه $y = -2(x-b)^2 - a$ متحد باشد:

$$-2(x+4+a)^2 + b + 4 = -2(x-b)^2 - a \Rightarrow \begin{cases} 4+a = -b \\ b+4 = -a \end{cases} \Rightarrow a+b = -4$$

توابع $f(x) = \frac{3-2x}{ax+1}$ و $g(x) = (b^2-1)x^2 + bx - 1$ هر دو روی \mathbb{R} اکیداً نزولی هستند. کدام تابع روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است؟ **۱۶**

$$g - 2f \quad (۲)$$

$$f - 2g \quad (۱)$$

$$f + g \quad (۴)$$

$$f - g \quad (۳)$$

Hint جفتشون باید خطی باشن.

درس‌Box

مجموعه A ($A \subseteq D_f$) را در نظر بگیرید. به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به مجموعه A ، تابع f :

اکیداً صعودی است.	صعودی است.	اکیداً نزولی است.	نزولی است.
$x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2$ $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.

دقت کنید اگر بازه مجموعه A برابر دامنه تابع باشد، گوییم تابع f روی دامنه خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. همچنین اگر تابعی روی دامنه خود صعودی (نزولی) باشد، آن گاه آن را یکنوا می‌نامیم.

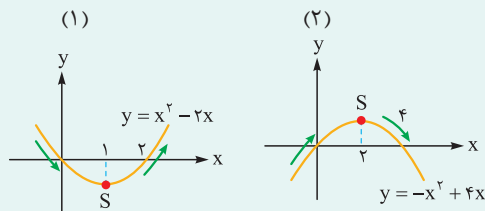
(الف) هر تابع اکیداً صعودی خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی خود یک تابع نزولی است.

(ب) تابع ثابت (روی یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

(پ) اگر تابع f روی دامنه خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیریکنوا می‌نامیم.

بعضی از توابع در دامنه خود غیریکنوا هستند ولی با محدود کردن دامنه می‌توان تابعی یکنوا به دست آورد.

نمودار دو تابع مقابل را در نظر بگیرید. تابع شکل (۱) در دامنه خود غیریکنوا ولی در بازه $(-\infty, 1]$ نزولی و در بازه $[1, +\infty)$ صعودی است. همچنین تابع شکل (۲) نیز در دامنه خود غیریکنواست، ولی در بازه $(-\infty, 2]$ صعودی و در بازه $[2, +\infty)$ نزولی است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:



تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ روی دامنه خود غیریکنواست، ولی روی بازه قبل از رأس و خود آن، یا بعد از رأس و خود آن

یکنواست؛ به عبارت دیگر این تابع روی هر یک از بازه‌های $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یکنوا است.

نکته تابع $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ فقط در صورتی روی دامنه‌اش اکیداً یکنواست که $C = 0$ باشد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق نکته درس باکس، a باید برابر صفر باشد تا تابع ظاهراً هموگرافیک $f(x) = \frac{3-2x}{ax+1}$ اکیداً یکتا شود، که از قضا اکیداً نزولی است.

$$\xrightarrow{a=0} f(x) = -2x + 3$$

گام دوم: طبق درس باکس، برای این که تابع ظاهراً درجه دوم g روی \mathbb{R} اکیداً یکتا باشد، لازم است که ضریب x^2 صفر شود:

$$\Rightarrow b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1$$

می‌خواهیم که g نیز اکیداً نزولی شود، پس مقدار $b = -1$ را می‌پذیریم:

$$\Rightarrow g(x) = -x - 1$$

گام سوم: حالا تابع داده شده در هر گزینه را می‌سازیم تا ببینیم کدام یک اکیداً صعودی است:

(۱) گزینه: $(f - 2g)(x) = 5$

(۲) گزینه: $(g - 2f)(x) = 3x - 7$

(۳) گزینه: $(f - g)(x) = -x + 4$

(۴) گزینه: $(f + g)(x) = -3x + 2$

که فقط تابع گزینه (۲) اکیداً صعودی است.

مجموع کوچک ترین و بزرگ ترین عضو مجموعه جواب های نامعادله $(\frac{1}{125})^{x^2-1} \leq (\frac{1}{5})^{6x+3}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۷



Hint تابع نمایی $y = (\frac{1}{5})^x$ اکیداً نزولیه.

دربش Box کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

$$f(g(x)) > f(h(x)) \Rightarrow \begin{cases} g(x) < h(x) & \text{تابع } f \text{ نزولی باشد} \\ g(x) > h(x) & \text{تابع } f \text{ صعودی باشد} \end{cases}$$

این قانون در سایر نامساوی ها هم برقرار است.

فقط نکته این قانون این است که حتماً دامنه توابع $f \circ g$ و $f \circ h$ لحاظ شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تابع $f(x) = (\frac{1}{5})^x$ با دامنه \mathbb{R} اکیداً نزولی است. با این فرض نامعادله صورت سؤال را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(6x+3) \leq f(3x^2-3)$$

دقت کنید که $(\frac{1}{125})^{x^2-1}$ را به صورت $(\frac{1}{5})^{3x^2-3}$ $= (\frac{1}{5})^{3(x^2-1)}$ در نظر گرفته ایم.

گام دوم: حالا طبق درس باکس، چون تابع f اکیداً نزولی است. جهت نامساوی عوض می شود و داریم:

$$6x+3 \geq 3x^2-3 \Rightarrow 3x^2-6x-6 \leq 0 \xrightarrow{\div 3} x^2-2x-2 \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه ها}} \underbrace{1-\sqrt{3}}_{\text{کمترین}} \leq x \leq \underbrace{1+\sqrt{3}}_{\text{بیشترین}}$$

کوچک ترین و بزرگ ترین جواب نامعادله به ترتیب $1-\sqrt{3}$ و $1+\sqrt{3}$ است که مجموع آن ها برابر ۲ است.

ریاضیات

اگر $f(x) = 3x + |x - 4|$ و $f(4m - m^2 - 3) < f(m^2 - 2m + 1)$ باشد، حدود m کدام است؟ ۱۸

$$(2) \quad (-2, -1)$$

$$(1) \quad (1, 2)$$

$$(4) \quad (-2, 1)$$

$$(3) \quad (-1, 2)$$

Hint تابع f اکیداً صعودیه.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** تابع $y = ax + |bx|$ با شرط $|a| > |b|$ اکیداً یکنواست. اگر $a > 0$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، اکیداً نزولی است.

گام دوم: پس در این سؤال تابع f اکیداً صعودی است و به کمک درس باکس سؤال قبلی داریم:

$$f(m^2 - 2m + 1) < f(4m - m^2 - 3) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} m^2 - 2m + 1 < 4m - m^2 - 3 \Rightarrow 2m^2 - 6m + 4 < 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 1 < m < 2$$

عددگذاری کنیم. $m = 0$ را امتحان کنیم، زیرا گزینه‌های (۳) و (۴) شامل صفر هستند اما (۱) و (۲) نیستند:

$$\xrightarrow{m=0} f(1) < f(-3) \Rightarrow \text{طبق ضابطه غلط است.}$$

پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) پاسخ صحیح سؤال است. $m = -\frac{1}{4}$ را امتحان می‌کنیم:

$$f\left(\frac{9}{4}\right) < f\left(-\frac{21}{4}\right) \Rightarrow \text{طبق ضابطه غلط است.}$$

پس گزینه (۱) پاسخ صحیح است.

بهبور دیگر

ریاضیات گسسته

۱۹

چند نقطه با مختصات صحیح در تساوی $\frac{2}{x} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{2}$ صدق می‌کند؟

۵ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

تساوی را به صورت معادله‌ای بر حسب x بنویس.

Hint

(۱) عدد صحیح a ، که مخالف صفر است، شمارنده عدد b است - یا b, a را می‌شمارد یا $a | b$ یا b بر a بخش‌پذیر است - هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b = aq$.

دستی‌Box

(۲) کسر $\frac{m}{n}$ ، عددی صحیح است هرگاه n شمارنده m باشد یا $n | m$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با مخرج مشترک‌گیری و طرفین وسطین، معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2y+3}{xy} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4y+6=xy \Rightarrow xy-4y=6 \Rightarrow y(x-4)=6 \Rightarrow y = \frac{6}{x-4}$$

گام دوم: برای اینکه y عددی صحیح باشد باید $x-4$ ، 6 را بشمارد یعنی:

$$x-4 | 6 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = \pm 1 \Rightarrow x = 5, 3 \\ x-4 = \pm 2 \Rightarrow x = 6, 2 \\ x-4 = \pm 3 \Rightarrow x = 7, 1 \\ x-4 = \pm 6 \Rightarrow x = 10, -2 \end{cases}$$

گام سوم: هشت جواب صحیح برای x پیدا شد، در نتیجه هشت مقدار صحیح نیز برای y یافت می‌شود.

$(3, -6), (5, 6), (6, 3), (2, -3), (7, 2), (1, -2), (10, 1), (-2, -1)$

دقت کنید که x و y هر دو باید مخالف صفر باشند، زیرا در مخرج کسرها قرار گرفته‌اند. در این سؤال هیچ مقدار غیر قابل قبولی

نداریم، پس هشت نقطه با مختصات صحیح در این تساوی صدق می‌کنند.

ریاضیات

۲۰ به ازای چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۱ رابطه $۸۰ | ۳^n - ۱$ برقرار است؟

۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)



$$a - b | a^n - b^n$$

اگر a و b اعداد طبیعی باشند و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$۸۰ | ۳^n - ۱ \Rightarrow ۳^۴ - ۱ | ۳^n - ۱ \Rightarrow ۳^۴ - ۱ | (۳^۴)^{\frac{n}{۴}} - ۱^{\frac{n}{۴}}$$

گام دوم: فرض کنیم $b = ۱$ و $a = ۳^۴$; بنابراین:

$$۳^۴ - ۱ | (۳^۴)^{\frac{n}{۴}} - ۱^{\frac{n}{۴}} \Rightarrow a - b | a^{\frac{n}{۴}} - b^{\frac{n}{۴}}$$

گام سوم: طبق نکته بالا $\frac{n}{۴}$ باید عددی طبیعی باشد؛ پس:

$$\frac{n}{۴} = k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = ۴k \Rightarrow ۱ \leq ۴k \leq ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۱ \leq k \leq ۲۵ \Rightarrow k = ۱, ۲, \dots, ۲۵ \Rightarrow n = \{۴, ۸, \dots, ۱۰۰\}$$

بنابراین ۲۵ مقدار مختلف برای n وجود دارد.

ریاضیات

۲۱ به ازای چند عدد طبیعی n هر دو عدد $5n + 4$ و $7n + 3$ ، مقسوم علیه مشترک مساوی ۱۷ دارند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۱) صفر

۲۱



عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه:

۱) $d | a, d | b$

۲) $\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فرض کنیم d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد باشد، پس داریم:

$$(5n + 4, 7n + 3) = d$$

گام دوم:

$$\begin{cases} d | 5n + 4 \xrightarrow{\times 7} d | 35n + 28 \\ d | 7n + 3 \xrightarrow{\times 5} d | 35n + 15 \end{cases} \xrightarrow{-} d | 13 \xrightarrow{d > 0} d = 1 \text{ یا } 13$$

گام سوم: اگر ۱۷ مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد باشد، طبق مورد (۲) درس باکس باید $17 \leq d$ باشد که با مقادیر به دست آمده

برای d در تناقض است، پس به ازای هیچ مقدار طبیعی برای n ، این دو عدد، مقسوم‌علیه مشترک ۱۷ ندارند.

ریاضیات

۲۲ اگر a, b, c سه عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند به طوری که $a^3 | b^5$ و $b^6 | c^7$ ، کدام گزینه درست است؟

$$a^{16} | c^{31} \quad (2)$$

$$a^{15} | c^{29} \quad (1)$$

$$a^{18} | c^{35} \quad (4)$$

$$a^{17} | c^{33} \quad (3)$$



$$1) a | b \Rightarrow a^n | b^n$$

$$2) a | b, b | c \Rightarrow a | c \text{ (خاصیت تعدی)}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} a^3 | b^5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۶}} a^{18} | b^{30} \\ b^6 | c^7 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۵}} b^{30} | c^{35} \end{cases} \xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} a^{18} | c^{35}$$

مثال نقض سایر گزینه‌ها: $c = 2^{18}$ و $b = 2^{21}$ و $a = 2^{35}$

$$(2^{35})^{15} | (2^{18})^{29} \Rightarrow 2^{525} | 2^{522} \quad \times$$

گزینه (۱):

$$(2^{35})^{16} | (2^{18})^{31} \Rightarrow 2^{560} | 2^{558} \quad \times$$

گزینه (۲):

$$(2^{35})^{17} | (2^{18})^{33} \Rightarrow 2^{595} | 2^{594} \quad \times$$

گزینه (۳):



کدام گزینه، مثال نقض گزاره زیر است؟

«اگر $(x+1)(x+5)$ گویا باشد، آن گاه $\frac{\sqrt{7+\sqrt{48}}}{x+1}$ گنگ است.»

(۲) $-3 + \sqrt{3}$

(۱) $-3 - \sqrt{3}$

(۴) مثال نقض ندارد.

(۳) $-3 + \sqrt{7}$

دنبال مثالی باش که ارزش گزاره، نادرست شود.



دروس Box

• به مثالی که برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود، «مثال نقض» می‌گوییم.

• هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم.

• ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با ترکیب شرطی دو گزاره سروکار داریم:

$$\text{اگر } (x+1)(x+5) \text{ گویا باشد، آن گاه } \underbrace{\frac{\sqrt{7+\sqrt{48}}}{x+1}}_q \text{ گنگ است.} \quad p$$

گام دوم: طبق درس باکس، ترکیب شرطی زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. پس دنبال x هستیم که

$$(x+1)(x+5) \text{ گویا باشد، ولی } \frac{\sqrt{7+\sqrt{48}}}{x+1} \text{ گنگ نباشد.}$$

گام سوم: بهترین روش، امتحان گزینه‌ها است:

$$x = -3 - \sqrt{3}$$

$$(x+1)(x+5) = (-3 - \sqrt{3} + 1)(-3 - \sqrt{3} + 5) = (-2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -1 \Rightarrow \text{گزاره } p \text{ درست است.}$$

$$\frac{\sqrt{7+\sqrt{48}}}{x+1} = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{-3-\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}}{-2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{-(2+\sqrt{3})} = -1 \Rightarrow \text{گزاره } q \text{ نادرست است.}$$

در نتیجه گزینه (۱) مثال نقضی برای این گزاره شرطی است.

۲۴ A یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ است. اگر $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج باشد و $n \in A$ ، آن گاه مجموعه A حداکثر چند

عضو دارد؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تمام اعضای مجموعه S را امتحان کن.

دستی Box

برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی:

(۱) اثبات مستقیم

(۲) مثال نقض

(۳) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

(۴) اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

(۵) اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

• اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در یک مسئله را در نظر بگیریم.

گام اول: به روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، تمام حالت‌های مجموعه S را بررسی می‌کنیم.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

n	۲	۳	۴	۵	۶
$\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$	۱	۱۶	۱۰۰	۴۰۰	۱۲۲۵
زوج بودن	x	✓	✓	✓	x

گام دوم: از آن جا که مجموعه A زیرمجموعه S است، پس مجموعه A حداکثر ۳ عضو می‌تواند داشته باشد. $A = \{3, 4, 5\}$

اگر به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $2m^3 - m^2 - 4m + 3$ بر $n+1$ چند مقدار صحیح به دست می‌آید؟ ۲۵

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (صفر) ۳

به ازای هر عدد صحیح a داریم: $a \mid 0$



گام اول: طبق نکته بالا، وقتی این رابطه به ازای هر n صحیح برقرار است که سمت راست رابطه صفر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$2m^3 - m^2 - 4m + 3 = 0$$

گام دوم: معادله را تجزیه می‌کنیم. $m = 1$ در معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$2m^3 - m^2 - 4m + 3 = 0 \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{m=1} (m-1)(2m^2 + m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-1)(2m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین، برای m یک مقدار صحیح به دست می‌آید.



۲۶ اگر a و b نسبت به هم اول باشند، ب.م.م دو عدد $7a + 2b$ و $3a + b$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

عدد طبیعی d را ب. م. م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه:

$$۱) d | a, d | b$$

$$۲) \forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$

گام اول: فرض کنیم d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $7a + 2b$ و $3a + b$ باشد:

$$(3a + b, 7a + 2b) = d$$

گام دوم: طبق مورد (۱) درس باکس داریم:

$$\begin{cases} d | 7a + 2b \xrightarrow{\times 3} d | 21a + 6b \xrightarrow{-} d | b \\ d | 3a + b \xrightarrow{\times 7} d | 21a + 7b \end{cases}$$

$$\begin{cases} d | 7a + 2b \Rightarrow d | 7a + 2b \xrightarrow{-} d | a \\ d | 3a + b \xrightarrow{\times 2} d | 6a + 2b \end{cases}$$

بنابراین d ، مقسوم‌علیه مشترک a و b است.

گام سوم: از آنجایی که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b برابر عدد ۱ است، یعنی $(a, b) = 1$ ، طبق مورد (۲) درس باکس

باید $d \leq 1$ پس $d = 1$.

در واقع می‌توان گفت:

$$\begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \Rightarrow d | (a, b) \Rightarrow d | 1 \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} d = 1$$

عدد طبیعی a مضرب ۷۲ است. اگر مکعب a بر ۴۸۰ بخش پذیر باشد، مجموع ارقام بزرگ ترین مقدار چهاررقمی a کدام است؟



۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)



(۱) برای یافتن ک.م.م دو عدد طبیعی، ابتدا دو عدد را تجزیه می کنیم، سپس پایه های مشترک با بیشترین توان و پایه های غیرمشترک را در یکدیگر ضرب می کنیم.

(۲) اگر m بر a و b بخش پذیر باشد، بر ک.م.م آن ها نیز بخش پذیر است.

$$\begin{aligned} a &| m \\ b &| m \end{aligned} \Rightarrow [a, b] | m$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول:

$$۴۸۰ | a^3 \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۲^5 \times ۳ \times ۵ | a^3 \Rightarrow a^3 = ۲^5 \times ۳ \times ۵ \times q$$

گام دوم: برای این که توان اعداد در دو طرف تساوی مضرب ۳ باشد باید $q = ۲ \times ۳^2 \times ۵^2 \times k^3$ در نظر بگیریم. یعنی:

$$a^3 = ۲^6 \times ۳^3 \times ۵^3 \times k^3$$

گام سوم: از طرفین ریشه سوم می گیریم:

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{۲^6 \times ۳^3 \times ۵^3 \times k^3} \Rightarrow ۶۰ | a$$

گام چهارم: از طرفی می دانیم $a | ۷۲$ ، پس طبق مورد (۲) درس باکس داریم:

$$\begin{cases} ۶۰ | a \\ ۷۲ | a \end{cases} \Rightarrow [۶۰, ۷۲] | a \xrightarrow{[۶۰, ۷۲]=۳۶۰} ۳۶۰ | a \Rightarrow a = ۳۶۰k, (k \in \mathbb{Z})$$

گام پنجم: برای یافتن بزرگ ترین مقدار چهاررقمی a قرار می دهیم $a \leq ۹۹۹۹$ پس:

$$۳۶۰k \leq ۹۹۹۹ \Rightarrow k \leq ۲۷/۷۷۵ \xrightarrow{\text{بزرگ ترین مقدار}} k = ۲۷$$

گام ششم:

$$a = ۳۶۰ \times ۲۷ = ۹۷۲۰ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام } a} ۹ + ۷ + ۲ + ۰ = ۱۸$$

۲۸ اگر $۴ + ۳k + ۷$ ، آن گاه در رابطه $۴۹ | ۹k^2 + ۴۵k + \alpha$ ، مقدار α کدام است؟

۴۴ (۴)

۲۴ (۳)

۲۸ (۲)

۱۶ (۱)

۲۸



برخی ویژگی‌های رابطه عادی کردن:

دروس Box

$$۱) a | b \Rightarrow a | mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$۲) a | b, a | c \Rightarrow a | mb \pm nc, \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$۳) a | b \Rightarrow a^n | b^n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$۷ | ۳k + ۴ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۴۹ | ۹k^2 + ۲۴k + ۱۶ \quad (۱)$$

گام دوم: چون ضریب k در عبارت صورت سوال، برابر ۴۵ است، پس باید $۲۱k$ به رابطه (۱) گام اول اضافه کنیم، داریم:

$$۷ | ۳k + ۴ \xrightarrow{\text{طرفین } \times ۷} ۴۹ | ۲۱k + ۲۸ \quad (۲)$$

گام سوم: سمت راست رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴۹ | ۹k^2 + ۲۴k + ۱۶ \\ ۴۹ | ۲۱k + ۲۸ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴۹ | ۹k^2 + ۴۵k + ۴۴$$

در نتیجه: $\alpha = ۴۴$.

۲۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

۷ (۱)

۶ (۲)

۵ (۳)

۴ (۴)



مشاوره سؤال ساده‌ای است که مشابه آن را هم در کتاب درسی و هم در امتحان‌های نهایی داشته‌ایم.

 **درس‌Box**

ماتریس قطری: ماتریس قطری ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$$

گام اول (محاسبه ماتریس AB): ماتریس $A \times B$ را به دست می‌آوریم: **پاسخ خیلی تشریحی** ✓

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه a و b): می‌دانیم در ماتریس قطری، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -8+2a = 0 \Rightarrow a = 4 \\ b-3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a+b = 7$$

۳۰ اگر مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} ai + j & ; i - j = 2 \\ i - aj & ; i - j \neq 2 \end{cases}$ برابر با ۷ باشد، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۶۸ (۱)

۶۶ (۲)

۶۴ (۳)

۶۲ (۴)

مشاوره تشکیل ماتریس به کمک

درایه عمومی آن، یکی از مباحث مهم، هم در کنکور و هم در امتحان نهایی است، ضمن آن که در حل این سؤال باید بتوانید درایه خاص از ماتریس A^3 را بدون به دست آوردن کل آن محاسبه کنید. روش انجام این کار در درس پاكس گفته شده است.

درس‌Box

درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس ABC به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[A \text{ سطر } i \text{ ام}] \cdot B \cdot \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{ج} \text{ ام} \\ C \end{bmatrix}$$

گام اول (محاسبه a): با توجه به درایه عمومی ماتریس، درایه‌های سطر سوم را به دست آورده و مجموع آن‌ها را ۷ قرار می‌دهیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 7 \Rightarrow (3a + 1) + (3 - 2a) + (3 - 3a) = 7 \Rightarrow a = 0$$

گام دوم (نمایش ماتریس A): a را به دست آوردیم. حالا تمام درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم و ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): خواسته سؤال، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 است. برای محاسبه این درایه از ماتریس A^3 به جای این که ماتریس $A^3 = A \cdot A \cdot A$ را به دست بیاوریم، برای سریع تر شدن حل مسئله، ابتدا سطر دوم ماتریس A را در ماتریس A و سپس حاصل را در ستون سوم ماتریس A ضرب می‌کنیم. حاصل، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 است:

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{سطر دوم } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{ستون سوم } A} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 8 + 24 + 36 = 68$$

۳۱ در دستگاه $\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ حاصل $x-y$ کدام است؟

- (۱) $2a+4$ (۲) -6
 (۳) $-2(4a+3)$ (۴) $-a-4$



حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به کمک ماتریس وارون:

درس Box

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ ، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس

مجهولات دستگاه می‌باشد. در این صورت دستگاه به شکل معادله ماتریسی $AX=B$ نوشته می‌شود و در صورتی که ماتریس A

وارون پذیر باشد (یا $|A| \neq 0$)، با ضرب A^{-1} از چپ در معادله فوق می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

یعنی برای حل دستگاه، باید معکوس ماتریس ضرایب را از سمت چپ در ماتریس مقادیر معلوم ضرب کرد.

وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B می‌باشد

به طوری که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود به صورت $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه وارون ماتریس ضرایب): ابتدا وارون ماتریس ضرایب را به دست می‌آوریم تا در مرحله بعد برای حل دستگاه

معادلاتی از آن استفاده کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a(a+2)-(a+1)^2} \begin{bmatrix} a+2 & -a-1 \\ -a-1 & a \end{bmatrix}$$

گام دوم (حل دستگاه): با توجه به درس باکس، داریم:

$$\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a(a+2)-(a+1)^2} \begin{bmatrix} a+2 & -a-1 \\ -a-1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+2a-a^2-2a-1} \begin{bmatrix} a+2+3a+3 \\ -a-1-3a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4a+5 \\ -4a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a-5 \\ 4a+1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -4a-5, y = 4a+1$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): صورت سؤال مقدار $x+y$ را می‌خواهد. طبق آن چه در گام دوم به دست آوردیم، داریم:

$$x = -4a-5, y = 4a+1 \Rightarrow x-y = -8a-6 = -2(4a+3)$$

دستگاه $\begin{cases} (m-3)y - 4x = 3 \\ 2x - \frac{m-3}{2}y = 1 \end{cases}$ فاقد جواب است. مجموعه مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

∅ (۴)

 $\mathbb{R} - \{7, -1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{3\}$ (۲) \mathbb{R} (۱)

تعبیر هندسی و بحث در تعداد جواب‌های دستگاه

می‌دانیم در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ هر معادله، معرف یک خط در صفحه است. دو خط در صفحه سه وضعیت دارند:

(۱) در یک نقطه متقاطع‌اند. در این صورت نقطه برخورد در هر دو معادله صدق می‌کند؛ پس جواب دستگاه است. برای این که دو خط متقاطع باشند باید شیب آن‌ها نابرابر باشد، یعنی دستگاه جواب منحصره‌فرد دارد اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (در این حالت

دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است ($|A| \neq 0$)).

(۲) با هم نقطه مشترک ندارند (موازی هستند)، یعنی دستگاه جواب ندارد؛ در این صورت: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.

(۳) بر هم منطبق هستند، یعنی دستگاه بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه از خط، جواب دستگاه است؛ در این صورت: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (تحلیل سؤال): مطابق درس باکس برای این که دستگاه معادلات خطی، فاقد جواب باشد، باید خط‌ها موازی باشند و بین

ضرایب معادلات رابطه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ برقرار باشد.

گام دوم (محاسبه مقادیر قابل قبول برای m): مطابق گام اول ابتدا ضرایب را منظم می‌کنیم و پس از آن مقادیر قابل قبول برای

$$m \text{ را به دست می‌آوریم. } \begin{cases} (m-3)y - 4x = 3 \\ -(\frac{m-3}{2})y + 2x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{m-3}{-(m-3)} = \frac{-4}{2} \neq 3 \Rightarrow -2 = -2 \neq 3 \quad \text{با شرط } m \neq 3 \text{ برای آن که دستگاه فاقد جواب باشد، باید:}$$

به یک جواب بدیهی رسیدیم، پس به ازای هر $m \neq 3$ از اعداد حقیقی، این دستگاه معادلات فاقد جواب است.

به ازای $m = 3$ نیز دستگاه فاقد جواب است، چون به صورت زیر است:

$$\begin{cases} -4x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

یعنی به ازای همه مقادیر حقیقی m ، دستگاه فاقد جواب است.

۳۳ اگر $A^3 = 9I$ باشد، حاصل $(A - 2I)^{-1} - 17(A + 2I)^{-1}$ کدام است؟

۴A (۴)

۴(A + I) (۳)

A (۲)

I (۱)



درس‌Box

(۱) توان ماتریس‌ها: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

$$A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A, \dots, A^n = A \cdot A^{n-1} = A^{n-1} \cdot A$$

توجه: اگر A ماتریس مربعی و m و n اعداد طبیعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

$$(A^m)^n = A^{mn} \quad (۴) \quad A^m \times A^n = A^{m+n} \quad (۳) \quad (kA)^n = k^n A^n \quad (۲) \quad I^n = I \quad (۱)$$

(۲) ماتریس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با آن مانند A تعویض‌پذیر است، یعنی $AI = IA = A$ ، پس اتحادهای جبری برای ماتریس‌های A و I برقرارند؛ مثلاً $(A - I)(A + I) = A^2 - I^2 = A^2 - I$.

(۳) اگر دو ماتریس مربعی A و B به گونه‌ای باشند که $AB = I$ ، آن‌گاه A و B وارون هم هستند و می‌نویسیم $A^{-1} = B$ و $A = B^{-1}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (ایجاد $(A - 2I)$ و $(A + 2I)$): صورت سؤال اطلاعاتی درباره A^3 به ما داده است؛ پس ما برای ساختن عبارت‌های $A - 2I$ و $A + 2I$ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. طبق فرض $A^3 = 9I$ پس $A^3 - 8I = I$ و حالا این عبارت را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} A^3 = 9I \xrightarrow{-8I} A^3 - 8I = I \Rightarrow (A - 2I)(A^2 + 2A + 4I) = I \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = A^2 + 2A + 4I \\ A^3 = 9I \xrightarrow{+8I} A^3 + 8I = 17I \Rightarrow (A + 2I)(A^2 - 2A + 4I) = 17I \Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \frac{1}{17}(A^2 - 2A + 4I) \\ \Rightarrow 17(A + 2I)^{-1} = A^2 - 2A + 4I \end{cases}$$

گام دوم (محاسبه خواسته صورت سؤال): برای ایجاد عبارت خواسته شده باید طرفین دو عبارت به دست آمده در گام اول را از یکدیگر کم کنیم:

$$(A - 2I)^{-1} - 17(A + 2I)^{-1} = (A^2 + 2A + 4I) - (A^2 - 2A + 4I) = 4A$$

۳۴ فرض کنید $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2a & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $2B^6A$ برابر با -9 باشد،

کوچک‌ترین درایه ماتریس A کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -6 (۳) -5 (۴) -8

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه ماتریس A): ماتریس A^{-1} را به دست آورده و آن را وارون می‌کنیم تا ماتریس A را به دست آوریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+a+6 & 2+3a+0 \\ 0+2a+2 & 0+6a+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 & 3a+2 \\ 2a+2 & 6a \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $(A^{-1})^{-1} = A$ ؛ بنابراین داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a+2 & 3a+2 \\ 2a+2 & 6a \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} a+2 & 3a+2 \\ 2a+2 & 6a \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{6a(a+2) - (3a+2)(2a+2)} \begin{bmatrix} 6a & -(3a+2) \\ -(2a+2) & a+2 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه ماتریس B^6): ابتدا ماتریس B^2 را به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = I \Rightarrow (B^2)^3 = I^3 \Rightarrow B^6 = I$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): طبق گام دوم $2B^6A = 2IA = 2A$ پس:

$$2B^6A = 2A = 2 \times \frac{1}{2a-4} \begin{bmatrix} 6a & -(3a+2) \\ -(2a+2) & a+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a-2} \begin{bmatrix} 6a & -(3a+2) \\ -(2a+2) & a+2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس -9 است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{6a}{a-2} + \frac{a+2}{a-2} = -9 \Rightarrow \frac{7a+2}{a-2} = -9 \Rightarrow 7a+2 = 18-9a \Rightarrow 16a = 16 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{bmatrix}$$

بنابراین کوچک‌ترین درایه ماتریس A برابر -3 است.

در مثلثی به اضلاع $AB = 6$ ، $AC = 8$ و $BC = 10$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر M ، N و P به ترتیب وسط اضلاع AC ، BC و AB باشند، آن‌گاه مساحت چهارضلعی $MNPH$ کدام است؟

$$۸/۷۸ (۲)$$

$$۷/۶۸ (۱)$$

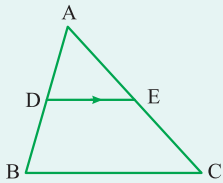
$$۶/۷۵ (۴)$$

$$۶/۲۵ (۳)$$

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ۱۴۰۰ طراحی شده است.

درس‌Box

۱) قضیه تالس در مثلث: هرگاه خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر مثلث را قطع کند، روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کند.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

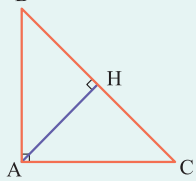
تعمیم قضیه تالس:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۲) عکس قضیه تالس: هرگاه خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.

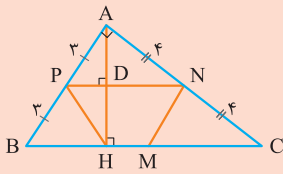
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

۳) روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه: در هر مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر روابط زیر را خواهیم داشت:



$$۱) AB^2 = BH \times BC$$

$$۲) AC^2 = CH \times BC$$



گام اول (رسم شکل مسئله): اضلاع مثلث، اعداد فیثاغورسی هستند و چون طبق فرض مسئله $AP = PB$ و $AN = NC$ ، با توجه به عکس قضیه تالس $PN \parallel BC$ است و شکل مسئله

به صورت مقابل رسم می‌شود و طبق تالس جزء به کل داریم: $\frac{PN}{BC} = \frac{1}{3}$ و می‌دانیم $BC = 10$ پس $PN = 5$.

گام دوم (محاسبه MH): می‌دانیم BM نصف BC و برابر با ۵ است.

برای محاسبه MH ابتدا باید طول BH را محاسبه کنیم. ABC یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن است؛ پس بنا به رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 6^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 3/6$$

$$MH = BM - BH = 5 - 3/6 = 1/4$$

و طول MH برابر است با:

گام سوم (محاسبه DH): طبق قضیه تالس در مثلث ABH ، $\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{3}$ ، پس $AD = DH = \frac{AH}{3}$ ، حالا مساحت

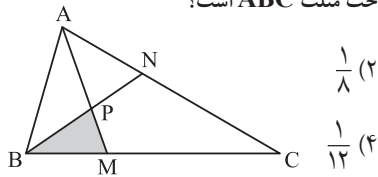
مثلث ABC را یک بار با اضلاع قائمه و یک بار با ارتفاع AH می‌نویسیم تا طول AH و بعد DH را به دست بیاوریم.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AH = \frac{6 \times 8}{10} = 4/8 \Rightarrow DH = \frac{4/8}{3} = 2/4$$

گام چهارم (محاسبه مساحت چهارضلعی): چهارضلعی $MNPH$ یک ذوزنقه است؛ پس:

$$S_{MNPH} = \frac{1}{2} DH \times (MH + PN) = \frac{1}{2} \times 2/4 \times (1/4 + 5) = 1/2 \times 6/4 = 7/68$$

مطابق شکل مقابل، اگر $\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$ ، آن گاه مساحت BMP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{10} \quad (1)$$

$$\frac{1}{12} \quad (4)$$

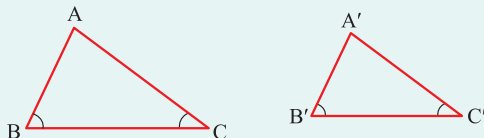
$$\frac{1}{9} \quad (3)$$

مشاوره در سؤال‌های تالس و تشابه، گاهی نیاز به رسم خط اضافه داریم. پاسخ سؤال را به دقت بخوانید تا برای حل سؤال‌های مشابه، ایده داشته باشید.

درسی Box

(۱) هرگاه اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها.

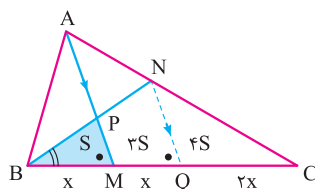
(۲) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

(۳) نسبت مساحت‌ها در دو مثلث متشابه: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (رسم خط موازی با AM): از نقطه N موازی با AM رسم می‌کنیم تا BC را در Q قطع کند، طبق قضیه تالس داریم:



$$NQ \parallel AM \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{MQ}{QC} = \frac{1}{2} \Rightarrow QC = 2MQ$$

حالا برای راحت‌تر شدن محاسبات، فرض می‌کنیم $MQ = x$ ، پس $QC = 2x$ ؛ همچنین با توجه به فرض $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$ داریم $BM = x$.

گام دوم (محاسبه نسبت مساحت مثلث‌ها): مثلث‌های BMP و BNQ طبق قضیه اساسی تشابه متشابه‌اند؛ پس نسبت مساحت‌های آن‌ها، مجذور نسبت تشابه آن‌ها است:

$$\frac{S_{BMP}}{S_{BNQ}} = \left(\frac{BM}{BQ}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{BNQ} = 4S_{BMP}$$

و برای راحت‌تر شدن محاسبات، S_{BMP} را S در نظر می‌گیریم، پس S_{BNQ} برابر $4S$ و S_{MPNQ} که اختلاف این دو مساحت است برابر $3S$ می‌شود؛ همچنین مثلث‌های BNQ و CNQ قاعده و ارتفاع برابر دارند؛ پس مساحت‌های برابر نیز دارند:

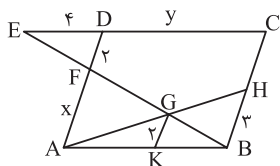
$$S_{CNQ} = S_{BNQ} = 4S$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): در مثلث‌های ABN و BCN ارتفاع مشترک وجود دارد؛ بنابراین:

$$\frac{S_{ABN}}{S_{BCN}} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} = \frac{S_{ABN}}{4S} \Rightarrow S_{ABN} = 2S \Rightarrow S_{ABC} = S_{ABN} + S_{BCN} = 2S + 4S = 6S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{S}{6S} = \frac{1}{6}$$

۳۸ در شکل زیر، $ABCD$ متوازی الاضلاع و $GK \parallel AD$ است، با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل $2y + x$ کدام است؟



۲۴ (۱)

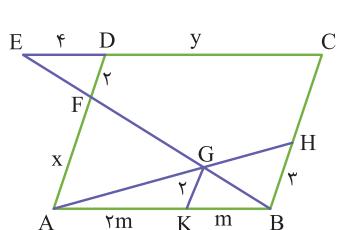
۳۶ (۲)

۳۰ (۳)

۲۰ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام اول (نوشتن تالس در مثلث ABH): در مثلث ABH قضیه تالس را می‌نویسیم:

$$GK \parallel BH \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{GK}{BH} = \frac{2}{3}$$

بنابراین برای راحت‌تر شدن محاسبات در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} AK = 2m \\ AB = 3m \end{cases}$$

گام دوم (محاسبه x): با توجه به قضیه تالس در مثلث ABF داریم:

$$GK \parallel AF \Rightarrow \frac{GK}{AF} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{m}{3m} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2 \times 3 = 6$$

گام سوم (محاسبه y): دو مثلث DFE و AFB به دلیل برابری زاویه‌ها متشابه‌اند، نسبت تشابه را می‌نویسیم:

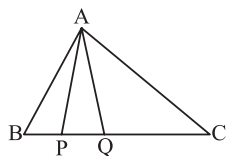
$$\triangle AFB \sim \triangle DFE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{6}{2} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow y = 12$$

گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال):

$$2y + x = 2 \times 12 + 6 = 24 + 6 = 30$$

در شکل رسم شده، طول پاره خط BQ واسطه هندسی طول پاره خط‌های BP و BC است. نسبت مساحت مثلث APQ به مساحت مثلث

ABP کدام است؟



$$\frac{BC}{PQ} \quad (۲)$$

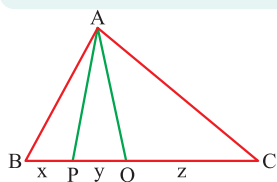
$$\frac{QC}{BQ} \quad (۱)$$

$$\frac{PQ}{QC - BP} \quad (۴)$$

$$\frac{PQ}{QC - PQ} \quad (۳)$$

$$b^2 = a \times c$$

واسطه هندسی: اگر c , b و a سه عدد حقیقی باشند، b واسطه هندسی a و c است، اگر و تنها اگر:



گام اول (تحلیل سؤال): به جای BP , PQ , QC , x , y و z می‌گذاریم:

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

حال طبق فرض، BQ واسطه هندسی BP و BC است، پس داریم:

$$BC \cdot BP = BQ^2 \Rightarrow (x + y + z)x = (x + y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + xy + xz$$

$$\Rightarrow y^2 + xy = xz \Rightarrow y(x + y) = xz \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{x + y} \Rightarrow \frac{PQ}{BP} = \frac{QC}{BQ}$$

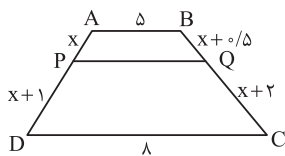
گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): مثلث‌های ABP و APQ هم‌ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایشان

است؛ بنابراین با توجه به گام اول، داریم:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABP}} = \frac{PQ}{BP} = \frac{QC}{BQ}$$

ریاضیات

۴۰. مطابق شکل، پاره خط PQ با قاعده‌های دوزنقه ABCD موازی است. طول PQ کدام است؟



۱) ۶/۲۵

۲) ۶

۳) ۵/۷۵

۴) ۵/۵

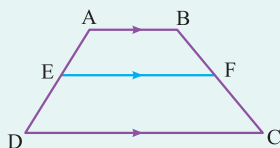
مشاوره یکی از روش‌های حل چنین سؤال‌هایی، رسم یکی از قطرهای دوزنقه و استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ایجادشده است.

Hint

ابتدا با استفاده از تالس در دوزنقه، X را به دست بیاور و برای محاسبه طول PQ، یکی از قطرها را رسم کن.

دروس Box

قضیه تالس در دوزنقه: اگر از نقطه‌ای روی یکی از ساق‌های دوزنقه، خطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم، این خط ساق‌ها را به یک نسبت تقسیم می‌کند:



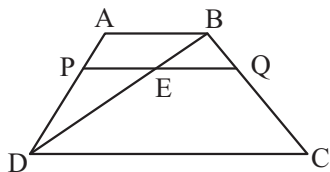
$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه X): طبق تالس در دوزنقه داریم:

$$AB \parallel PQ \parallel DC \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+2}{x+5} \Rightarrow x(x+5) = (x+1)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

گام دوم (محاسبه PQ): برای محاسبه PQ، ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم تا PQ را در E قطع کند، سپس با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های به‌وجودآمده، PE و EQ را به دست می‌آوریم:



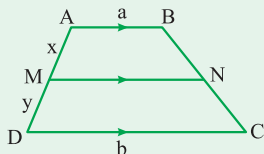
$$\triangle DAB \text{ تعمیم تالس در } \Rightarrow \frac{PE}{E} = \frac{2}{3} \Rightarrow PE = \frac{1}{3}$$

$$\triangle BCD \text{ تعمیم تالس در } \Rightarrow \frac{EQ}{E} = \frac{1}{3} \Rightarrow EQ = \frac{1}{3}$$

پس:

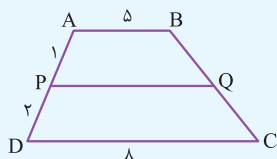
$$PQ = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 6$$

در شکل مقابل، MN با قاعده‌های دوزنقه موازی است، داریم:



$$MN \parallel AB \parallel DC \Rightarrow MN = \frac{bx + ay}{x + y}$$

به کمک نکته بالا، وقتی X را پیدا کردیم، می‌توانیم بگوییم:



$$PQ = \frac{1 \times 8 + 2 \times 5}{1 + 2} = \frac{18}{3} = 6$$

نکته

به‌جور دیگر

پایه دوازدهم ریاضی
شروع از مهر
هجدهم آبان‌ماه ۱۴۰۳
مرحله هفتم

متحرکی روی محور X براساس اطلاعات جدول زیر از مکان A به مکان B جابه‌جا می‌شود. اگر متحرک حین جابه‌جایی تنها یک بار تغییر جهت داده باشد، بردار مکان متحرک در لحظه تغییر جهت کدام می‌تواند باشد؟

تندی متوسط	سرعت متوسط	بردار مکان B	بردار مکان A
$6 \frac{m}{s}$	$(-2 \frac{m}{s}) \vec{i}$	$(-8m) \vec{i}$	$(+6m) \vec{i}$

$$(-22m) \vec{i} \quad (2)$$

$$(18m) \vec{i} \quad (4)$$

$$(-20m) \vec{i} \quad (1)$$

$$(22m) \vec{i} \quad (3)$$

مشاوره حرکت‌شناسی یکی از مباحث فیزیک است که دامنه طرح سوالات در آن بسیار وسیع است. این تست فیزیک از آن‌هاست که مشابه آن در کنکورهای سراسری کمتر دیده شده است.



Hint

ابتدا بازه زمانی حرکت و مسافت پیموده شده توسط متحرک را به دست آورید؛ سپس دو حالت ممکن برای چنین حرکتی را تحلیل کنید.

دروس Box

(1) در حرکت روی محور X، سرعت متوسط و تندی متوسط از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{جابه‌جایی (m)}$$

\downarrow سرعت متوسط ($\frac{m}{s}$)

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \quad \text{مسافت (m)}$$

\downarrow تندی متوسط ($\frac{m}{s}$)

(2) در حرکت روی خط راست، متحرک در لحظه‌ای می‌تواند تغییر جهت دهد که متوقف شود.

(3) بردار مکان (\vec{r})، برداری است که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند.

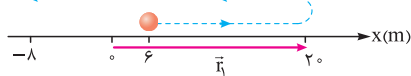
گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه سرعت متوسط، بازه زمانی این حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \frac{v_{av} = -2 \frac{m}{s}}{\Delta x = x_B - x_A = -8 - 6 = -14m} \rightarrow -2 = \frac{-14}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 7s$$

گام دوم: به کمک رابطه تندی متوسط، مسافت طی شده توسط متحرک را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \quad \frac{s_{av} = 6 \frac{m}{s}}{\Delta t = 7s} \rightarrow 6 = \frac{l}{7} \Rightarrow l = 42m$$

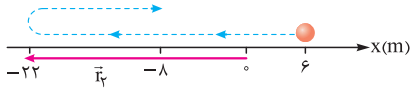
گام سوم: با توجه به اطلاعات موجود، دو حالت زیر می‌تواند وجود داشته باشد. در هر مورد، مسیر حرکت روی محور X به صورت خط چین نشان داده شده است.



حالت اول:

$$\vec{r}_i = (20m) \vec{i}$$

حالت دوم:

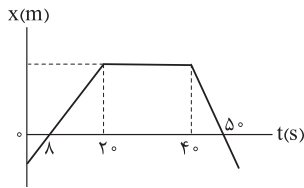


$$\vec{r}_f = (-22m) \vec{i}$$

حالت اول در گزینه‌ها موجود نیست، اما حالت دوم مطابق گزینه (2) است.

نمودار مکان - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل است. اگر تندی متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا 50 s برابر $6/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 10\text{ s}$ تا $t_2 = 50\text{ s}$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

۴۲



۰/۰۵ (۱)

۰/۱ (۲)

۰/۵۵ (۳)

۰/۴۴ (۴)

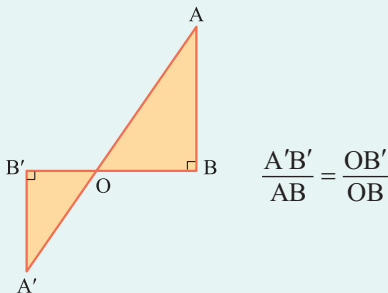
ابتدا مسافت طی شده توسط متحرک را به دست آورید؛ سپس مکان متحرک را در لحظه های $t_1 = 0\text{ s}$ و $t_2 = 20\text{ s}$ مشخص کنید. در پایان نیز سرعت متحرک را در لحظه های t_1 و t_2 حساب کرده و شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید.

Hint

(۱) در نمودارهای حرکت شناسی، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث های متشابه (رابطه تالس) کاربرد فراوانی دارد. جهت یادآوری

دربین Box

به شکل مقابل توجه کنید:



(۲) وقتی در یک بازه زمانی، سرعت متحرک ثابت است؛ سرعت متحرک در هر لحظه با سرعت متوسط در این بازه زمانی برابر است.

(۳) وقتی نمودار مکان - زمان متحرک در یک بازه زمانی به صورت یک خط شیبدار با شیب ثابتی باشد، سرعت متحرک در این بازه زمانی ثابت است.

(۴) در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می گوئیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_{av} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \text{ شتاب متوسط}$$

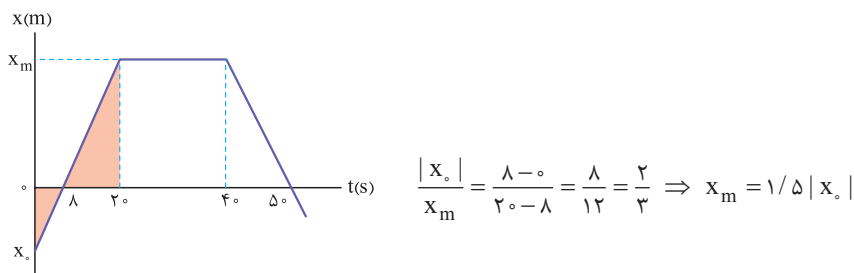
$$v_1 = \text{سرعت متحرک در لحظه } t_1 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$v_2 = \text{سرعت متحرک در لحظه } t_2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

گام اول: با استفاده از رابطه تندی متوسط، مسافت طی شده در مدت 50 s را حساب می کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 50\text{ s}} \frac{s_{av} = 6/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\Delta t = 50\text{ s}} \Rightarrow 6/4 = \frac{l}{50} \Rightarrow l = 320\text{ m}$$

گام دوم: به کمک رابطه تالس و تشابه مثلث های رنگی، مکان متحرک را در لحظه های $t = 0\text{ s}$ و $t = 20\text{ s}$ مشخص می کنیم:



از طرفی می دانیم مسافت طی شده برابر با طول مسیر حرکت است؛ بنابراین داریم:

$$l = |x_0| + x_m + x_m \xrightarrow{x_m = 1/5 |x_0|} 320 = |x_0| + 1/5 |x_0| + 1/5 |x_0|$$

$$\Rightarrow 320 = 4 |x_0| \Rightarrow |x_0| = 80\text{ m} \Rightarrow x_0 = -80\text{ m}$$

$$x_m = 1/5 |x_0| = 1/5 \times 80 = 16\text{ m}$$

گام سوم: سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 10 \text{ s}$ همان سرعت متوسط در بازه زمانی 0 s تا 20 s است:

$$v_1 = v_{av} = \frac{x_m - x_0}{t_m - t_0} = \frac{120 - (-80)}{20 - 0} = \frac{200}{20} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سرعت متحرک در لحظه $t_2 = 50 \text{ s}$ همان سرعت متوسط در بازه زمانی 40 s تا 50 s است:

$$v_2 = v'_{av} = \frac{0 - x_m}{50 - 40} = \frac{-120}{10} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام چهارم: شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورده و بزرگی آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-12 - 10}{50 - 10} = -\frac{22}{40} = -0.55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$|a_{av}| = 0.55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

موتورسواری فاصله ۴۰۰ کیلومتری بین دو شهر را با تندی ثابت $۱۲۰ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ رفته و پس از رسیدن به شهر دوم، با تندی ثابت $۱۰۰ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به طرف شهر اول بازمی‌گردد. تندی متوسط موتورسوار از ابتدای حرکتش تا لحظه‌ای که مسافت ۶۰۰ کیلومتر را پیموده، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱۱۲/۵ (۱)

۵۲/۵ (۳)

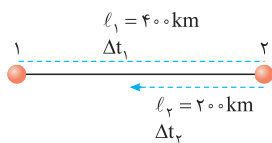
۱۱۰ (۲)

۳۷/۵ (۴)

مشاوره در بسیاری از تست‌های حرکت‌شناسی، تمام یا بخشی از حل سؤال به تفاوت بین مفاهیم مسافت و جابه‌جایی و همچنین مفاهیم تندی متوسط و سرعت متوسط مربوط است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: بازه زمانی حرکت موتورسوار در مسیر رفت از شهر اول به شهر دوم را به دست می‌آوریم:



$$s_{av,1} = \frac{l_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 120 = \frac{400}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{400}{120} = \frac{10}{3} \text{ h}$$

گام دوم: از آن‌جا که در متن سؤال، کل مسیر پیموده شده ۶۰۰ km است، مطابق شکل فوق، موتورسوار ۲۰۰ km به طرف شهر اول برگشته است. بازه زمانی حرکت موتورسوار را در این مرحله نیز به دست می‌آوریم:

$$s_{av,2} = \frac{l_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 100 = \frac{200}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 2 \text{ h}$$

گام سوم: تندی متوسط موتورسوار از ابتدای حرکتش تا لحظه‌ای که مسافت ۶۰۰ km را پیموده است، به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{400 + 200}{\frac{10}{3} + 2} = \frac{600}{\frac{16}{3}} = \frac{1800}{16} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

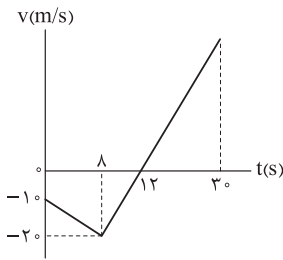
$$\Rightarrow s_{av} = \frac{225}{2} = 112.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

گول نخوری ✖ اگر در گام سوم به جای مسافت از جابه‌جایی استفاده کنید، به گزینه نادرست (۴) می‌رسید.

شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. در چه لحظه‌ای متحرک به نقطه شروع

۴۴

حرکت خود بازمی‌گردد؟



۱۶ (۱)

۲۰ (۲)

۲۴ (۳)

۲۸ (۴)

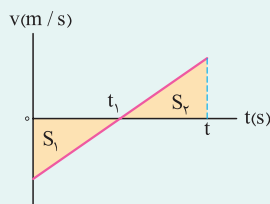
مشاوره وقتی در یک تست حرکت‌شناسی نمودار سرعت - زمان مطرح می‌شود، به مساحت سطح محدود بین نمودار و محور زمان توجه خاصی داشته باشید.

Hint

برای آن که متحرک به نقطه شروع حرکت خود بازگردد، باید جابه‌جایی آن صفر باشد؛ بنابراین باید مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان با محور زمان، در قسمت‌های پایین و بالای محور t هم‌اندازه باشند.

دروس Box

در نمودار سرعت - زمان، مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان، در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است. برای مساحت سطحی که زیر محور t است، $S = |\Delta x|$ و برای مساحت سطحی که بالای محور t است، $S = \Delta x$ به کار می‌رود. مثلاً در نمودار مقابل می‌توان نوشت:



$$S_1 = |\Delta x_1|, \Delta x_1 < 0$$

در بازه زمانی t_1 تا 0 :

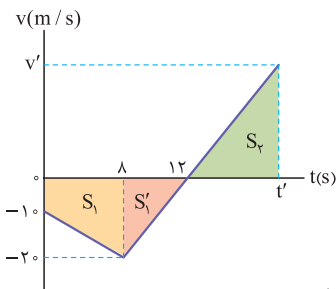
$$S_2 = \Delta x_2$$

در بازه زمانی t_1 تا t :

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

در بازه زمانی 0 تا t :

گام اول: مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در بازه زمانی 0 تا 12 s را حساب می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی**



$$S_1 + S_2' = \left[\frac{(10 + 20) \cdot 8}{2} + \frac{(12 - 8) \cdot 20}{2} \right] = 120 + 40 = 160 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 + \Delta x_2' = -160 \text{ m}$$

گام دوم: برای آن که متحرک به نقطه شروع حرکت خود بازگردد، باید جابه‌جایی آن صفر باشد.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2' + \Delta x_2 = 0 \Rightarrow 0 = -160 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 160 \text{ m}$$

$$\frac{v'}{20} = \frac{(t' - 12)}{12 - 8} \Rightarrow v' = 5(t' - 12)$$

گام سوم: نسبت تشابه بین مثلث‌های S_2 و S_2' را می‌نویسیم:

از طرفی می‌دانیم که مساحت مثلث S_2 با Δx_2 برابر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

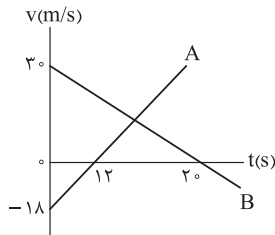
$$\Delta x_2 = \frac{(t' - 12) \times v'}{2} \quad \frac{\Delta x_2 = 160 \text{ m}}{v' = 5(t' - 12)} \rightarrow 160 = \frac{(t' - 12) \times 5(t' - 12)}{2}$$

$$\Rightarrow 64 = (t' - 12)^2 \Rightarrow \begin{cases} t' - 12 = 8 \Rightarrow t' = 20 \text{ s} \\ t' - 12 = -8 \Rightarrow t' = 4 \text{ s} \end{cases} \text{ چون از } 12 \text{ s کوچک‌تر است، قابل قبول نیست.}$$

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که از یک نقطه حرکت خود را شروع کرده‌اند، مطابق شکل است. در لحظه‌ای که دو متحرک به

۴۵

یکدیگر می‌رسند، تندی متحرک B چند برابر تندی متحرک A است؟



۱ (۱)

۰/۸ (۲)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۴)



۱) هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند، می‌توان در آن لحظه، معادله مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

درس‌Box

۲) معادله‌های مکان - زمان - سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور X به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \text{و} \quad v = at + v_0$$

$x =$ مکان متحرک در لحظه t (m)

$x =$ مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (m)

$a =$ شتاب $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

$v_0 =$ سرعت متحرک در لحظه $t = 0$ $\left(\frac{m}{s}\right)$

$v =$ سرعت متحرک در لحظه t $\left(\frac{m}{s}\right)$

$t =$ زمان (s)

گام اول: متحرک A با شتاب ثابت a_A و متحرک B با شتاب ثابت a_B حرکت می‌کنند. شتاب هر یک از آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} = \frac{0 - (-18)}{12 - 0} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} = \frac{0 - 30}{20 - 0} = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2} \frac{m}{s^2}$$

گام دوم: در لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، معادله مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار می‌دهیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B}$$

$$\xrightarrow[\substack{x_{0A}=x_{0B} \\ v_{0A}=-18\frac{m}{s}, v_{0B}=30\frac{m}{s}}]{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} t^2 - 18t = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) t^2 + 30t} \Rightarrow \frac{3}{4} t^2 + \frac{3}{4} t^2 = 48t \Rightarrow \frac{3}{2} t^2 = 48t \Rightarrow \frac{3}{2} t = 48$$

$$\Rightarrow t = 32 \text{ s}$$

گام سوم: سرعت هر یک از دو متحرک را در لحظه $t = 32 \text{ s}$ به دست می‌آوریم. برای این کار از معادله سرعت - زمان استفاده می‌کنیم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow[\substack{a_A = \frac{3}{2} \frac{m}{s^2}, t = 32 \text{ s} \\ v_{0A} = -18 \frac{m}{s}}]{v_A = \frac{3}{2} \times 32 - 18} = 30 \frac{m}{s}$$

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow[\substack{a_B = -\frac{3}{2} \frac{m}{s^2}, t = 32 \text{ s} \\ v_{0B} = 30 \frac{m}{s}}]{v_B = -\frac{3}{2} \times 32 + 30} = -18 \frac{m}{s}$$

گام چهارم: نسبت تندی متحرک B به تندی متحرک A در لحظه $t = 32 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم.

$$\left| \frac{v_B}{v_A} \right| = \frac{18}{30} = 0/6$$

تویی که در امتداد یک خط راست حرکت می کند، با تندی $۶۳ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به یک دیوار برخورد کرده و در همان امتداد اولیه با تندی $۲۷ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ بازمی گردد. اگر زمان برخورد توپ با دیوار $۰/۴ \text{ s}$ باشد، شتاب متوسط توپ در مدت برخورد با دیوار چند متر بر مربع ثانیه است؟

۲۵ (۴)

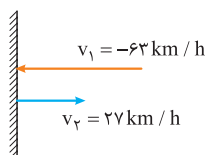
۶۲/۵ (۳)

۹۰ (۲)

۲۲۵ (۱)



گام اول: ابتدا تغییر سرعت توپ را برحسب $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ به دست می آوریم؛ سپس این تغییر سرعت را برحسب $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ می نویسیم:



$$v_1 = -63 \text{ km/h} \quad \Delta v = v_2 - v_1 = 27 - (-63) = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_2 = 27 \text{ km/h} \quad \Delta v = 90 \times \frac{1}{3/6} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

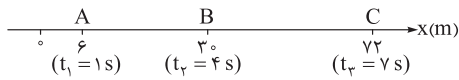
گام دوم: شتاب متوسط توپ در مدت برخورد با دیوار را حساب می کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \Delta t = 0/4 \text{ s}} a_{av} = \frac{25}{0/4} = \frac{25 \cdot 10}{4} = 62/5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مسیر حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است و متحرک در لحظه‌های مشخص شده از

۴۷

نقاط A ، B و C می‌گذرد. سرعت متحرک در لحظه عبور از نقطه B چند متر بر ثانیه است؟



۴۲ (۱)

۱۶ (۲)

۱۵ (۳)

۱۱ (۴)



معادله جابه‌جایی - زمان متحرک را یک بار برای فاصله AB و بار دیگر برای فاصله AC بنویسید و با استفاده از این دو معادله، شتاب متحرک و سرعت آن را در نقطه A حساب کنید. سپس به کمک معادله سرعت - زمان، سرعت متحرک در نقطه B را به دست آورید.

Hint

گام اول: معادله جابه‌جایی - زمان متحرک را یک بار برای فاصله AB و بار دیگر برای فاصله AC می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta x_{AB} = \frac{1}{2} a t_{AB}^2 + v_A t_{AB} \quad \frac{\Delta x_{AB} = 30 - 6 = 24 \text{ m}}{t_{AB} = t_2 - t_1 = 4 - 1 = 3 \text{ s}} \rightarrow 24 = \frac{1}{2} a (3)^2 + v_A \times 3 \xrightarrow{\times (-2)} -48 = -9a - 6v_A$$

$$\Delta x_{AC} = \frac{1}{2} a t_{AC}^2 + v_A t_{AC} \quad \frac{\Delta x_{AC} = 72 - 6 = 66 \text{ m}}{t_{AC} = t_3 - t_1 = 7 - 1 = 6 \text{ s}} \rightarrow 66 = \frac{1}{2} a (6)^2 + v_A \times 6 \Rightarrow 66 = 18a + 6v_A$$

گام دوم: به کمک معادلات به دست آمده در گام اول، مقادیر a و v_A را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} -48 = -9a - 6v_A \\ 66 = 18a + 6v_A \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله}]{\text{مجموع}} 18 = 9a \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$66 = 18 \times 2 + 6v_A \Rightarrow 30 = 6v_A \Rightarrow v_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام سوم: اکنون با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت متحرک در لحظه عبور از نقطه B را حساب می‌کنیم:

$$v_B = at_{AB} + v_A \quad \begin{matrix} a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, t_{AB} = 3 \text{ s} \\ v_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{matrix} \rightarrow v_B = 2 \times 3 + 5 = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

معادله حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، در SI به صورت $x = -\frac{3}{4}t^2 + 15t - 24$ است. تندی متوسط متحرک در

مدت زمانی که به صورت کندشونده از مبدأ مختصات دور می شود، چند متر بر ثانیه است؟

۴/۵ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)



مشاوره در حل بعضی از تست های حرکت شناسی، رسم نمودار مکان-زمان یا نمودار سرعت-زمان می تواند تا حد زیادی به ما کمک کند.

Hint

ابتدا لحظه هایی را که متحرک از مبدأ مختصات می گذرد، به دست آورید. سپس به کمک ویژگی های نمودار مکان-زمان در حرکت با شتاب ثابت، محدوده زمانی و مکانی حرکت کندشونده متحرک را وقتی از مبدأ مختصات دور می شود، تعیین کنید و تندی متوسط خواسته شده را حساب کنید.

درس Box

(۱) نمودار مکان-زمان در حرکت با شتاب ثابت:

با توجه به این که معادله مکان-زمان، در این نوع حرکت از نوع درجه دو می باشد، نمودار آن به صورت قسمتی از یک سهمی است و نقطه شروع آن روی محور x ، مکان اولیه (x_0) را نشان می دهد.



اگر گودی این سهمی رو به بالا باشد، شتاب مثبت است:



اگر گودی این سهمی رو به پایین باشد، شتاب منفی است:

(۲) شیب خط مماس بر هر نقطه از نمودار مکان-زمان، سرعت متحرک در آن لحظه را نشان می دهد. مثلاً شیب خط مماس بر ابتدای این نمودار در لحظه $t = 0$ بیانگر سرعت اولیه متحرک (v_0) است.

(۳) در محدوده ای از نمودار مکان-زمان که بزرگی شیب خط مماس بر نمودار، کاهش می یابد، می گوئیم حرکت کندشونده است. در این محدوده، سرعت و شتاب متحرک، غیرهم علامت هستند ($av < 0$). اما در محدوده ای از نمودار که بزرگی شیب خط مماس بر نمودار، افزایش می یابد، می گوئیم حرکت تندشونده است. در این محدوده، سرعت و شتاب متحرک، هم علامت هستند ($av > 0$).

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا معادله مکان متحرک را برابر با صفر قرار می دهیم تا لحظه هایی را که متحرک از مبدأ مختصات می گذرد، به دست آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}t^2 + 15t - 24 \xrightarrow{\times(-\frac{4}{3})} t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}, t_2 = 8 \text{ s}$$

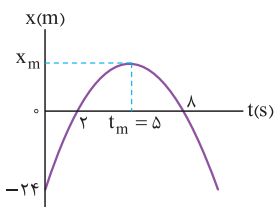
گام دوم: با استفاده از معادله مکان متحرک، شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه آن را حساب می کنیم و به کمک آن ها، معادله سرعت-زمان متحرک را می نویسیم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = -\frac{3}{4}t^2 + 15t - 24 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = -\frac{3}{4} \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}, x_0 = -24 \text{ m}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -3t + 15$$

گام سوم: لحظه ای را که متحرک متوقف می شود، پیدا می کنیم: $v = -3t + 15 \xrightarrow{v=0} 0 = -3t_m + 15 \Rightarrow t_m = 5 \text{ s}$

اکنون می توانیم نمودار مکان-زمان متحرک را رسم کنیم:



در بازه زمانی ۲ s تا ۵ s حرکت متحرک کندشونده است و از مبدأ مختصات دور می شود.

گام چهارم: مکان متحرک در لحظه $t_m = 5 \text{ s}$ را به دست می آوریم:

$$x_m = -\frac{3}{4}t_m^2 + 15t_m - 24 \xrightarrow{t_m=5} x_m = -\frac{3}{4}(25) + 15 \times 5 - 24 = \frac{75}{4} - 24 \Rightarrow x_m = 13/4 \text{ m}$$

گام پنجم: تندی متوسط متحرک در بازه زمانی ۲ s تا ۵ s را حساب می کنیم:

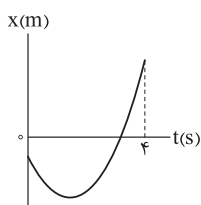
$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{x_m - 0}{t_m - 2} = \frac{13/4}{5-2} = 4/5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

فیزیک

نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظه $t = 4s$ ، $t = 2$ برابر تندی در لحظه شروع حرکتش

۴۹

باشد، حرکت این متحرک چند ثانیه به صورت کندشونده بوده است؟



(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

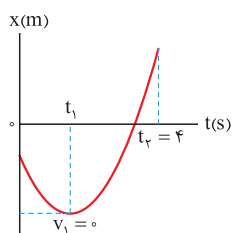


در حرکت با شتاب ثابت، نمودار مکان - زمان به صورت یک سهمی است. وقتی نمودار به رأس این سهمی نزدیک می شود، حرکت آن کندشونده و هنگامی که از رأس این سهمی دور می شود، حرکت آن تندشونده است.

دربسی Box

اگر رأس سهمی، در لحظه t_1 باشد، با توجه به ثابت بودن شتاب در کل حرکت و رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، برای دو بازه صفر تا t_1 و صفر تا t_2 می توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{v_1 - v_0}{t_1 - 0} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - 0} \xrightarrow{v_1=0, v_0 < 0} \frac{0 - v_0}{t_1} = \frac{-2v_0 - v_0}{4 - 0} \Rightarrow -\frac{v_0}{t_1} = -\frac{3v_0}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{4}{3} \text{ s}$$

فیزیک

۵۰ معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 3t^2 - 12t + 13$ است. در طی این حرکت،

کمترین طول بردار مکان متحرک چند متر است؟

۴ (۴)

۲ / ۵ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱) صفر

مشاوره اگر پایه ریاضی خوبی داشته باشید، تست‌های حرکت‌شناسی را با تسلط بیشتر و سریع‌تر پاسخ می‌دهید. پس حداقل‌های لازم در این حوزه را بلد باشید.

یادآوری ریاضی: در یک معادله درجه دوم مانند $x = At^2 + Bt + C$ ، برای تعیین وضعیت ریشه‌های معادله، Δ را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه متفاوت است.

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه مضاعف است.

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه ندارد.

کمترین طول بردار مکان متحرک هنگامی است که مکان متحرک (x) کمترین مقدار خود را داشته باشد.

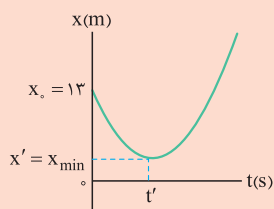
گام اول: با استفاده از شکل کلی معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، کمیت‌های a ، v_0 و x_0 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = 3t^2 - 12t + 13 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 3 \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}, v_0 = -12 \frac{m}{s}, x_0 = 13 m$$

گام دوم: با به دست آوردن Δ ، وضعیت ریشه‌های معادله را مشخص می‌کنیم:

$$\Delta = B^2 - 4AC \xrightarrow[A=3, B=-12, C=13]{} \Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 13 \Rightarrow \Delta = 144 - 156 = -12$$

بنابراین معادله مکان - زمان داده شده در این سؤال، ریشه ندارد و محور t را قطع نمی‌کند. اکنون نمودار مکان - زمان آن را رسم می‌کنیم:



گام سوم: در لحظه t' (رأس سهمی) سرعت متحرک صفر است. این لحظه را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v' = at' + v_0 \xrightarrow[a=6 \frac{m}{s^2}, v_0=-12 \frac{m}{s}, v'=0]{} 0 = 6t' - 12 \Rightarrow 6t' = 12 \Rightarrow t' = 2 s$$

گام چهارم: در لحظه $t' = 2 s$ متحرک کمترین مکان خود را دارد و طول بردار مکان آن کمترین مقدار خود را پیدا می‌کند. پس:

$$x_{\min} = x' = 3t'^2 - 12t' + 13 \xrightarrow{t'=2s} x_{\min} = 3(2)^2 - 12(2) + 13 \Rightarrow x_{\min} = 12 - 24 + 13 = 1 m$$

دروس Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

بردار مکان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور X حرکت می کند، در دو لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 7 \text{ s}$ تغییر جهت می دهد. اگر متحرک در مکان $x = -20 \text{ m}$ تغییر جهت دهد، تندی متوسط آن در ۴ ثانیه دوم حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

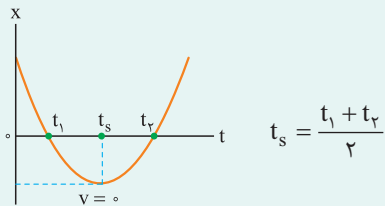
- (۱) ۲۰
(۲) ۱۰
(۳) ۱۵
(۴) ۱۲/۵



درس Box

(۱) در حرکت با شتاب ثابت روی محور X، هرگاه بردار مکان تغییر جهت دهد یعنی $x = 0$ است، اما در لحظه ای که متحرک تغییر جهت می دهد، سرعت آن صفر است.

(۲) در نمودار مکان - زمان مربوط به حرکت روی خط راست و با شتاب ثابت، زمان رأس سهمی (t_s) روی محور تقارن سهمی قرار می گیرد و داریم:

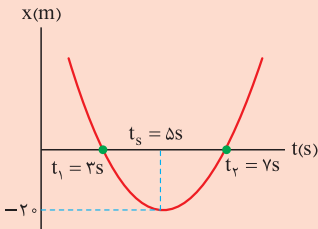


(۳) در حرکت با شتاب ثابت روی محور X، با داشتن یک نقطه از نمودار مکان - زمان و ریشه های معادله (α و β) می توانیم معادله مکان را بنویسیم.

با قراردادن مختصات نقطه معلوم در معادله فوق، k به دست می آید و معادله مکان - زمان کامل می شود.

گام اول: نمودار مکان - زمان این متحرک را رسم می کنیم. این نمودار در لحظه های $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 7 \text{ s}$ که بردار مکان متحرک تغییر جهت می دهد، محور t را قطع می کند. همچنین مکان $x = -20 \text{ m}$ رأس سهمی است؛ زیرا متحرک در این مکان تغییر جهت می دهد و سرعت آن صفر می شود. از طرفی با توجه به قسمت دوم درس باکس داریم:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5 \text{ s}$$



گام دوم: اکنون می توانیم به کمک قسمت سوم درس باکس معادله مکان - زمان سهمی را بنویسیم:

$$x = k(t - \alpha)(t - \beta) \xrightarrow[t = t_s = 5s \Rightarrow x = -20m]{\alpha = t_1 = 3s, \beta = t_2 = 7s} -20 = k(5 - 3)(5 - 7) \Rightarrow -20 = k(-4) \Rightarrow k = 5$$

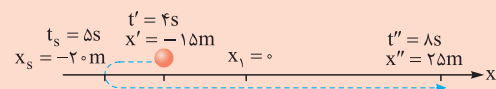
$$\Rightarrow x = 5(t - 3)(t - 7)$$

گام سوم: چهار ثانیه دوم حرکت یعنی از لحظه $t' = 4 \text{ s}$ تا لحظه $t'' = 8 \text{ s}$ مکان متحرک در این دو لحظه را حساب می کنیم.

$$t' = 4 \text{ s} \Rightarrow x' = 5(4 - 3)(4 - 7) = -15 \text{ m}$$

$$t'' = 8 \text{ s} \Rightarrow x'' = 5(8 - 3)(8 - 7) = 25 \text{ m}$$

با توجه به مسیر حرکت متحرک که در شکل زیر با خط چین نشان داده شده است، مسافت طی شده در چهار ثانیه دوم را به دست می آوریم:



$$l = |x_s - x'| + |x'' - x_s| = |-20 + 15| + |25 - (-20)| = 5 + 45 = 50 \text{ m}$$

در پایان نیز تندی متوسط در ۴ ثانیه دوم حرکت را پیدا می کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{50}{8 - 4} = 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

متحرکی با شتاب ثابت -2 m/s^2 روی خط راست در حال حرکت است. اگر بزرگی جابه‌جایی متحرک در ثانیه دهم و ثانیه یازدهم با هم برابر باشند، بزرگی جابه‌جایی آن در ثانیه پنجم چند متر است؟

۷۵ (۴)

۲۱ (۳)

۱۱ (۲)

۹ (۱)


درس‌Box

۱) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، اگر بزرگی جابه‌جایی متحرک در دو بازه زمانی یکسان و متوالی $(t_1 - t_0)$ و $(t_2 - t_1)$ برابر باشد، یعنی متحرک در لحظه t' متوقف شده است.

۲) در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیه v_0 روی محور x ، جابه‌جایی متحرک در ثانیه n م از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_n = (n - 0 / \Delta t) a + v_0$$

گام اول: بزرگی جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی ۹ s تا ۱۰ s و ۱۰ s تا ۱۱ s یکسان است؛ بنابراین سرعت متحرک در لحظه $t' = 10 \text{ s}$ برابر با صفر است. بنابراین می‌توانیم به کمک معادله سرعت - زمان، مقدار v_0 را به دست آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2 \times 10 + v_0 \Rightarrow v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام دوم: با استفاده از قسمت دوم درس‌باکس، جابه‌جایی متحرک در ثانیه پنجم حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_n = (n - 0 / \Delta t) a + v_0 \xrightarrow[n=5, a=-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0=20 \frac{\text{m}}{\text{s}}]{\Delta t=1 \text{ s}} \Delta x_5 = (5 - 0 / 5)(-2) + 20 = -9 + 20 = 11 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی

خودرویی با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است که راننده یک سرعت گیر را جلوی خود می بیند و از لحظه ای که در فاصله ۳۶ متری سرعت گیر قرار دارد، با شتاب ثابت ترمز می کند. اگر جابه جایی خودرو در ثانیه های دوم و سوم بعد از ترمز به ترتیب $۱۰/۵ \text{ m}$ و $۷/۵ \text{ m}$ باشد، کدام موارد درست است؟

- (الف) خودرو در ۲ ثانیه قبل از رسیدن به سرعت گیر مسافت ۶ m را می پیماید.
 (ب) تندی متوسط خودرو از ۲ s قبل از ترمز کردن تا لحظه رسیدن به سرعت گیر $۱۱ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.
 (پ) خودرو ۵ s پس از ترمز به سرعت گیر می رسد.
 (ت) خودرو با تندی $۳ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از روی سرعت گیر عبور می کند.
- (۱) الف و پ
 (۲) الف و ت
 (۳) ب و پ
 (۴) ب و ت



(۱) در یک حرکت کندشونده روی خط راست و با شتاب ثابت a ، متحرک در هر ثانیه نسبت به ثانیه قبل خود به اندازه $|a|$ مسافت کمتری را می پیماید.
 (۲) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط متحرک در یک بازه زمانی، برابر است با سرعت لحظه ای در وسط همین بازه زمانی.

کلاس Box

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اندازه اختلاف جابه جایی های خودرو در ثانیه های دوم و سوم بعد از ترمز، به اندازه قدرمطلق شتاب حرکت است.

$$|a| = 10/5 - 7/5 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

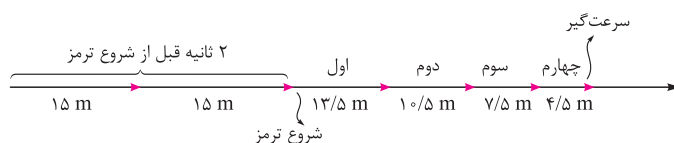
پس جابه جایی خودرو در ثانیه اول پس از ترمز برابر است با:

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = |a| \Rightarrow \Delta x_1 - 10/5 = 3 \Rightarrow \Delta x_1 = 13/5 \text{ m}$$

حالا باید سرعت ثابتی که خودرو قبل از ترمز کردن داشت را به دست آوریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow 13/5 = \frac{1}{2} \times (-3) \times (1)^2 + 1 \times v_0 \Rightarrow v_0 = 15 \text{ m/s}$$

قبل از ترمز کردن، خودرو در هر ثانیه، به اندازه ۱۵ m جابه جا می شود. شکل زیر جابه جایی خودرو در مدت ۲ s قبل از ترمز تا رسیدن به سرعت گیر را نشان می دهد:



گام دوم: عبارت های داده شده را به ترتیب بررسی می کنیم:

(الف) نادرست. خودرو در ۲ ثانیه قبل از رسیدن به سرعت گیر مسافت ۱۲ m را می پیماید.

(ب) درست. از ۲ s قبل از ترمز تا لحظه رسیدن به سرعت گیر، مسافت طی شده توسط خودرو را به دست می آوریم:

$$l = 15 + 15 + 13/5 + 10/5 + 7/5 + 4/5 = 66 \text{ m}$$

تندی متوسط در این بازه زمانی را حساب می کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{66}{6} = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(پ) نادرست. خودرو ۴ ثانیه بعد از شروع ترمز به سرعت گیر می رسد.

(ت) درست. تندی خودرو هنگام عبور از سرعت گیر برابر است با:

$$v = at + v_0 = -3 \times 4 + 15 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت $30 \frac{m}{s}$ در حرکت است که ناگهان راننده، موتورسیکلتی را پیش روی خود می بیند که از حال سکون و با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ در جهت حرکت خودرو شروع به حرکت می کند. راننده بلافاصله با شتابی به اندازه $4 \frac{m}{s^2}$ ترمز می گیرد، اما با سرعت $12 \frac{m}{s}$ به موتورسیکلت برخورد می کند. فاصله موتورسیکلت از خودرو در لحظه ای که راننده شروع به ترمز می کند، چند متر است؟

$$114/75 \quad (2)$$

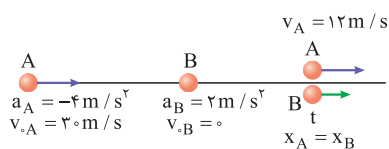
$$120 \quad (1)$$

$$94/5 \quad (4)$$

$$74/25 \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به کمک معادله سرعت - زمان اتومبیل، زمان برخورد اتومبیل (A) به موتورسیکلت (B) را به دست می آوریم:



$$v_A = a_A t + v_{\cdot A} \Rightarrow 12 = -4t + 30 \Rightarrow 4t = 18 \Rightarrow t = 4.5 \text{ s}$$

گام دوم: محل شروع ترمز اتومبیل را به عنوان مبدأ مختصات در نظر گرفته و معادله مکان - زمان هر دو متحرک را می نویسیم و با هم برابر قرار می دهیم تا لحظه برخورد آن ها به دست آید.

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{\cdot A} t + x_{\cdot A} = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{\cdot B} t + x_{\cdot B}$$

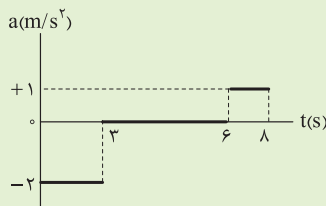
$$\frac{x_{\cdot A} = 0, a_A = -4 \frac{m}{s^2}, v_{\cdot A} = 30 \frac{m}{s}}{a_B = 2 \frac{m}{s^2}, v_{\cdot B} = 0} \rightarrow \frac{1}{2} (-4) t^2 + 30 t = \frac{1}{2} (2) t^2 + x_{\cdot B}$$

$$\Rightarrow -2t^2 + 30t = t^2 + x_{\cdot B} \Rightarrow x_{\cdot B} = -3t^2 + 30t$$

$$\xrightarrow{t=4.5s} x_{\cdot B} = -3(4.5)^2 + 30 \times 4.5 = -3(20.25) + 135 = 74.25 \text{ m}$$

فاصله اولیه موتورسیکلت از اتومبیل در لحظه شروع ترمز، همین $x_{\cdot B}$ یعنی 74.25 m است.

۵۵ نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر بردار سرعت متحرک در $t_1 = 1$ s به صورت $(+2 \frac{m}{s}) \hat{i}$ باشد، تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟



$$\frac{15}{8} \quad (1)$$

$$\frac{13}{8} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

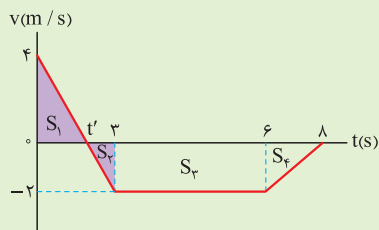
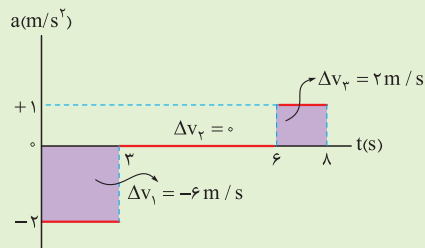
مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با اندازه تغییر سرعت متحرک در آن بازه زمانی است.

دروس Box

گام اول: به کمک معادله سرعت - زمان، سرعت اولیه متحرک (v_0) را به دست می آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=2 \frac{m}{s}, t_1=1 s} \xrightarrow{a=-2 \frac{m}{s^2}} 2 = -2(1) + v_0 \Rightarrow v_0 = 4 \frac{m}{s}$$

گام دوم: با استفاده از مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، تغییرات سرعت در هر مرحله را محاسبه کرده و نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می کنیم.



به کمک رابطه تالس، لحظه t' را پیدا می کنیم:

$$\frac{4}{2} = \frac{t' - 0}{3 - t'} \Rightarrow t' = 6 - 2t' \Rightarrow 3t' = 6 \Rightarrow t' = 2 \text{ s}$$

گام سوم: قدرمطلق مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان را که با مسافت طی شده برابر است، در بازه زمانی ۸s به دست می آوریم:

$$l = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{2 \times 4}{2} + \frac{1 \times 2}{2} + 3 \times 2 + \frac{2 \times 2}{2} = 13 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{13}{8} \frac{m}{s}$$

خودرویی با سرعت ثابت $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در یک مسیر مستقیم در حرکت است. در لحظه گذشتن خودرو از کنار یک خودروی پلیس، خودروی پلیس با شتاب $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ شروع به حرکت می‌کند. فاصله میان دو خودرو در بازه زمانی 5 s تا 8 s پس از شروع حرکت پلیس، چند متر تغییر می‌کند؟

$$2/5 (2)$$

$$(1) \text{ صفر}$$

$$7/5 (4)$$

$$5 (3)$$

۵۶

مشاوره این تست براساس یکی از پرسش‌های دوره‌های آخر فصل ۱ از کتاب فیزیک ۳ طرح شده و تغییراتی در آن دیده می‌شود.



$$x = vt + x_0$$

معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت مقابل است:

$$x = \text{مکان متحرک در لحظه } t \text{ (m)}$$

$$x_0 = \text{مکان اولیه یا مبدأ حرکت (m)}$$

$$v = \text{سرعت متحرک } \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$t = \text{زمان (s)}$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: لحظه عبور خودرو (A) از کنار خودروی پلیس (B) را به عنوان مبدأ حرکت در نظر می‌گیریم و معادله مکان - زمان هر

یک از آن‌ها را می‌نویسیم ($x_{0A} = x_{0B} = 0$)

$$v_A = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{108}{3.6} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_{0A}=0, v_A=30 \frac{\text{m}}{\text{s}}} x_A = 30t$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0B} t + x_{0B} \xrightarrow{a_B=5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_{0B}=0, x_{0B}=0} x_B = \frac{5}{2} t^2$$

گام دوم: جابه‌جایی هر دو متحرک A و B را در بازه زمانی $t = 5 \text{ s}$ تا $t' = 8 \text{ s}$ به دست می‌آوریم و اختلاف آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ s} \Rightarrow x_A = 30 \times 5 = 150 \text{ m} \\ t' = 8 \text{ s} \Rightarrow x'_A = 30 \times 8 = 240 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow x'_A - x_A = 240 - 150 \Rightarrow \Delta x_A = 90 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ s} \Rightarrow x_B = \frac{5}{2} \times 5^2 = 62.5 \text{ m} \\ t' = 8 \text{ s} \Rightarrow x'_B = \frac{5}{2} \times 8^2 = 160 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow x'_B - x_B = 160 - 62.5 \Rightarrow \Delta x_B = 97.5 \text{ m}$$

$$\Delta x_B - \Delta x_A = 97.5 - 90 = 7.5 \text{ m}$$

در شرایط خلأ سنگی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. اگر سنگ در ثانیه آخر حرکت خود $۳۴/۳$ متر را طی کند، تندی سنگ در لحظه

رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۹/۸ \text{ m/s}^2$)

$$۳۴/۹ (۲)$$

$$۲۱/۶ (۱)$$

$$۲۸/۹ (۴)$$

$$۳۹/۲ (۳)$$



ابتدا کل زمان سقوط که همان لحظه رسیدن سنگ به زمین است را به دست آورید؛ سپس با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت و تندی سنگ در لحظه رسیدن به زمین را پیدا کنید.



درس‌Box

(۱) وقتی جسمی از ارتفاعی رها شده و سقوط آزاد می‌کند، مسافت طی شده در ثانیه آخر حرکت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$l = \frac{1}{2} g (2t - 1)$$

$l =$ مسافت (m)

$g =$ شتاب گرانش در سطح زمین ($\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

$t =$ کل زمان سقوط (s)

$$v = -gt$$

(۲) معادله سرعت - زمان در حرکت سقوط آزاد و بدون سرعت اولیه به صورت مقابل است:

$v =$ سرعت (m/s)

$g =$ شتاب گرانش در سطح زمین ($\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

$t =$ زمان سقوط (s)

در تمام لحظات سقوط آزاد، تندی متحرک برابر با اندازه سرعت آن است.



گام اول: وقتی سنگ رها می‌شود، یعنی سرعت اولیه آن صفر بوده است ($v_0 = 0$)؛ بنابراین با استفاده از رابطه زیر، کل زمان سقوط

آن را به دست می‌آوریم:

$$l = \frac{1}{2} g (2t - 1) \xrightarrow[g = 9/8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]{l = 34/3 \text{ m}} 34/3 = \frac{1}{2} \times 9/8 (2t - 1) \Rightarrow v = 2t - 1 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

گام دوم: اکنون با معلوم بودن زمان رسیدن سنگ به زمین، سرعت و تندی آن را در این لحظه پیدا می‌کنیم:

$$v = -gt \xrightarrow[t = 4 \text{ s}]{g = 9/8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} v = -9/8 \times 4 = -39/2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v| = 39/2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سنگی در شرایط خلأ از ارتفاع H رها می‌شود. اگر سرعت متوسط سنگ در Δt ثانیه اول حرکت 8 m/s و در Δt ثانیه آخر حرکت

۵۸

40 m/s باشد، H چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$115/2 (2)$$

$$122/4 (1)$$

$$110/2 (4)$$

$$112/4 (3)$$

درتس Box

(۱) رابطه سرعت متوسط در حرکت سقوط آزاد، مشابه حرکت روی محور x به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \text{سرعت متوسط } \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\Delta y = \text{جاب‌جایی (m)}$$

$$\Delta t = \text{بازه زمانی (s)}$$

(۲) وقتی جسمی از ارتفاعی رها شده و سقوط آزاد انجام می‌دهد، جابه‌جایی آن در T ثانیه اول حرکت (Δy) و جابه‌جایی آن در T ثانیه آخر حرکت ($\Delta y'$) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gT^2$$

$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gT(\tau t - T)$$

$$t = \text{کل زمان حرکت (s)}$$

$$g = \text{شتاب گرانش در سطح زمین } \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$T = \Delta t = \text{بازه زمانی (s)}$$

گام اول: در Δt ثانیه اول حرکت ($\Delta t = T$) رابطه‌های جابه‌جایی متحرک را می‌نویسیم و از آن‌جا T را به دست می‌آوریم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{cases} \Delta y = -\frac{1}{2}gT^2 \xrightarrow{g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Delta y = -5T^2 \\ \Delta y = v_{av} \times \Delta t \xrightarrow{v_{av}=-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \Delta t=T} \Delta y = -8T \end{cases} \Rightarrow -5T^2 = -8T \Rightarrow T = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ s}$$

گام دوم: جابه‌جایی سنگ در Δt ثانیه آخر حرکت را به دست آورده و از آن‌جا کل زمان سقوط را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta y' = v'_{av} \Delta t \xrightarrow{v'_{av}=-40 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \Delta t=1.6 \text{ s}} \Delta y' = -40 \times 1.6 = -64 \text{ m}$$

$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gT(\tau t - T) \xrightarrow{g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, T=1.6 \text{ s}} -64 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 1.6(\tau t - 1.6) \Rightarrow 8 = \tau t - 1.6$$

$$\Rightarrow \tau t = 9.6 \Rightarrow t = 4/8 \text{ s}$$

گام سوم: اکنون می‌توانیم ارتفاع سقوط (H) را حساب کنیم:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, t=4/8 \text{ s}} H = \frac{1}{2} \times 10 \times (4/8)^2 = 115/2 \text{ m}$$

جسمی از یک بلندی رها می‌شود و در دو ثانیه آخر سقوطش مسافت ۱۴۰ متر را طی می‌کند. تندی جسم هنگام رسیدن به نیمه مسیر چند

متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۲۰ (۴)

۳۰ $\sqrt{2}$ (۳)

۳۰ (۲)

۴۰ $\sqrt{2}$ (۱)

ابتدا کل زمان سقوط و ارتفاع بلندی را به دست آورید، سپس با معلوم بودن جابه‌جایی در نیمه مسیر، تندی جسم در آن جا را به دست آورید.



رابطه مستقل از زمان برای جسمی که از یک بلندی رها می‌شود تا سقوط آزاد نماید، به صورت زیر است:

$$v^2 = -2g\Delta y$$

$$v = \text{سرعت} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$g = \text{شتاب گرانش در سطح زمین} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$\Delta y = \text{جابه‌جایی} (\text{m})$$

گام اول: با استفاده از جابه‌جایی در دو ثانیه آخر سقوط جسم، زمان سقوط آن را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

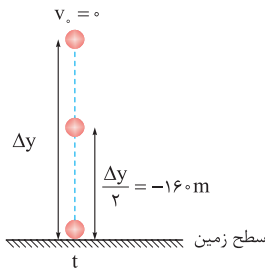
$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gT(2t - T) \xrightarrow[T=2s]{g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \Delta y' = -140 \text{m}} -140 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 2(2t - 2) \Rightarrow 14 = 2t - 2$$

$$\Rightarrow 2t = 16 \Rightarrow t = 8 \text{ s}$$

گام دوم: کل ارتفاع سقوط (Δy) را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[t=8s]{g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Delta y = -\frac{1}{2} \times 10 \times 8^2 = -320 \text{ m}$$

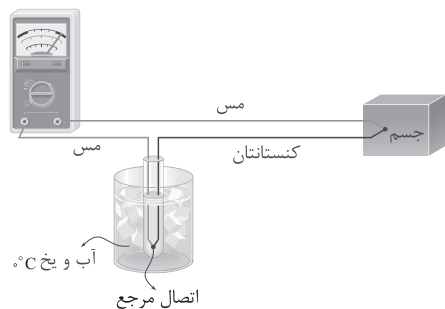
گام سوم: به کمک رابطه مستقل از زمان، سرعت و تندی جسم هنگام رسیدن به نیمه مسیر ($\frac{\Delta y}{2}$) به دست می‌آید:



$$v^2 = -2g\left(\frac{\Delta y}{2}\right) \xrightarrow[\frac{\Delta y}{2} = -160 \text{ m}]{g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} v^2 = -2 \times 10 \times (-160) \Rightarrow v^2 = 3200 \Rightarrow v = -\sqrt{3200} = -40\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$|v| = 40\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

شکل زیر، یک دماسنج را نشان می‌دهد و کمیت دماسنجی این وسیله است.



(۱) ترموکوپل، جریان الکتریکی

(۲) ترموکوپل، ولتاژ

(۳) کمینه - بیشینه، جریان الکتریکی

(۴) کمینه - بیشینه، ولتاژ

مشاوره شکل‌های موجود در کتاب درسی را جدی بگیرید. بعضی از تست‌های کنکور مستقیماً با استفاده از همین شکل‌ها طرح می‌شوند.

درس‌Box

ترموکوپل، نوعی دماسنج است که کمیت دماسنجی آن ولتاژ می‌باشد. ترموکوپل از دو سیم رسانای غیرهم‌جنس مانند مس و کنستانتان تشکیل شده که دو سر آن‌ها به هم تابیده شده است. یک طرف مشترک آن‌ها در دمای مرجع ($^{\circ}\text{C}$) و یک طرف دیگر آن‌ها به جسم یا مکانی متصل است که می‌خواهیم دمای آن را به دست آوریم. در مسیر سیم مسی یک ولت‌سنج قرار دارد که با تغییر دمای محل مورد اندازه‌گیری، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، تغییر می‌کند.

با توجه به متن درس باکس، شکل داده‌شده مربوط به یک ترموکوپل است و کمیت دماسنجی آن ولتاژ می‌باشد. پس گزینه (۲) درست است. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

۶۱ اگر دمای جسمی برحسب درجه سلسیوس $\frac{7}{6}$ برابر شود، دمای آن برحسب درجه فارنهایت ۹۰ درصد کاهش می‌یابد. دمای اولیه جسم برحسب کلون کدام است؟

۲۷۸ (۴)

۲۶۸ (۳)

۲۸۸ (۲)

۲۵۸ (۱)

مشاوره رابطه‌های مربوط به تبدیل یکه‌های دما گاهی مانند این‌جا، به صورت یک تست مستقل مطرح می‌شوند و گاهی به عنوان بخشی از حل یک تست گرما به کار می‌روند.

دستی Box

رایج‌ترین مقیاس‌ها (یکاهای) دما عبارت‌اند از سلسیوس (سانتی‌گراد)، کلون و فارنهایت. رابطه بین این یکه‌ها به صورت زیر است:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32$$

$$T = \theta + 273$$

θ = دما برحسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$)

T = دما برحسب کلون (K)

F = دما برحسب درجه فارنهایت ($^{\circ}\text{F}$)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به متن سؤال، رابطه بین دماهای اولیه و ثانویه را هم برحسب سلسیوس و هم برحسب فارنهایت می‌نویسیم:

$$\theta_r = \frac{7}{6}\theta_1$$

$$F_r = F_1 - \frac{9}{10}F_1 \Rightarrow F_r = \frac{1}{10}F_1$$

گام دوم: با استفاده از رابطه $F = \frac{9}{5}\theta + 32$ می‌توان نوشت:

$$F_r = \frac{1}{10}F_1 \Rightarrow \frac{9}{5}\theta_r + 32 = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{5}\theta_1 + 32\right) \xrightarrow{\theta_r = \frac{7}{6}\theta_1} \frac{9}{5} \times \frac{7}{6}\theta_1 + 32 = \frac{9}{50}\theta_1 + 32/2$$

$$\Rightarrow 2/10\theta_1 - 0/18\theta_1 = 3/2 - 32 \Rightarrow 1/92\theta_1 = -28/8 \Rightarrow \theta_1 = -15^{\circ}\text{C}$$

گام سوم: دمای به دست آمده برحسب درجه سلسیوس را برحسب کلون می‌نویسیم:

$$T_1 = \theta_1 + 273 \Rightarrow T_1 = -15 + 273 = 258\text{K}$$

فیزیک

۶۲ دمای یک صفحه فلزی دایره‌ای به شعاع ۲ cm را از ۲۰K به ۱۲۰K می‌رسانیم. اگر محیط دایره ۴ درصد افزایش یابد، قطر دایره چند برابر می‌شود؟

۱/۰۸ (۴)

۰/۰۸ (۳)

۱/۰۴ (۲)

۰/۰۴ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: اگر محیط دایره را با L و شعاع آن را با R نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$L_2 = L_1 + 0.04L_1 \Rightarrow L_2 = 1.04L_1$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2\pi R_2}{2\pi R_1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{1.04L_1}{L_1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 1.04$$

یعنی شعاع دایره نیز ۴ درصد افزایش می‌یابد.

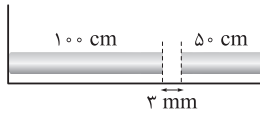
گام دوم: اگر قطر دایره را با d نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{2R_2}{2R_1} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 1.04$$

بنابراین قطر دایره ۴/۱ برابر می‌شود.

گول نخوری ✖ حواستون باشه که مقدار تغییر دما و یا اندازه شعاع دایره در به دست آوردن این پاسخ نقشی نداشتند. پس خیال نکنید که همه اعداد داده‌شده در یک تست حتماً در حل آن به کار می‌روند.

مطابق شکل، یک میله بتونی به طول ۵۰ cm و یک میله فولادی به طول ۱۰۰ cm در فاصله ۳ میلی متری هم در دمای -20°C قرار دارند. هنگامی که دمای مجموعه را به 13°C می‌رسانیم، دو میله به یکدیگر می‌رسند و فضای خالی میان آن‌ها پر می‌شود. اگر ضریب انبساط طولی فولاد $13 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ باشد، ضریب انبساط طولی بتون در SI کدام است؟



$$1/4 \times 10^{-6} \quad (1)$$

$$1/2 \times 10^{-6} \quad (2)$$

$$1/2 \times 10^{-5} \quad (3)$$

$$1/4 \times 10^{-5} \quad (4)$$



مجموع افزایش طول دو میله را برابر با ۳ mm قرار دهید و با نوشتن رابطه انبساط طولی در جامدها، ضریب انبساط طولی بتون را به دست آورید.



Hint

اگر در دمای T_1 طول یک میله برابر L_1 و در دمای T_2 طول آن برابر L_2 باشد، تجربه نشان می‌دهد با افزایش دما، طول میله افزایش می‌یابد.



درس‌Box

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{تغییر طول میله}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \text{تغییر دما (K) یا } (^{\circ}\text{C})$$

$$\alpha = \text{ضریب انبساط طولی که به جنس میله بستگی دارد } \left(\frac{1}{\text{K}}\right) \text{ یا } \left(\frac{1}{^{\circ}\text{C}}\right)$$

L_1 و ΔL باید یکای یکسانی داشته باشند. مثلاً هر دو برحسب متر یا سانتی‌متر یا ... باشند.



نکته

گام اول: افزایش دمای میله‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 13 - (-20) = 15^{\circ}\text{C} \xrightarrow{\Delta T = \Delta\theta} \Delta T = 15^{\circ}\text{K}$$

گام دوم: مجموع افزایش طول دو میله را برابر با ۳ mm یا ۰/۳ cm قرار می‌دهیم:

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0/3 \Rightarrow L_1 \alpha_1 \Delta T + L_2 \alpha_2 \Delta T = 0/3$$

$$\xrightarrow{\substack{\Delta T = 15^{\circ}\text{K} \\ L_1 = 50\text{cm}, L_2 = 100\text{cm}}} 50 \alpha_1 \times 15 + 100 \times 13 \times 10^{-6} \times 15 = 0/3$$

$$\xrightarrow{\div 15} 50 \alpha_1 + 13 \times 10^{-4} = \frac{0/3}{15} \Rightarrow 50 \alpha_1 = 20 \times 10^{-4} - 13 \times 10^{-4} \Rightarrow 50 \alpha_1 = 7 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1/4 \times 10^{-5} \left(\frac{1}{\text{K}}\right)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۴

دمای یک قطعه سرب 25°C است. برای آن که حجم این قطعه $2/25$ درصد افزایش یابد، باید دمای قطعه سرب به چند درجه سلسیوس برسد؟ (ضریب انبساط طولی سرب) $= 3 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$

۵۷۰ (۴)

۲۷۵ (۳)

۲۵۰ (۲)

۷۷۵ (۱)



اگر در دمای T_1 حجم یک جسم برابر V_1 و در دمای T_2 حجم آن برابر V_2 باشد، تجربه نشان می‌دهد با افزایش دما، حجم جسم افزایش می‌یابد.

$$\Delta V = V_1(\alpha) \Delta T$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \text{تغییر حجم}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \text{تغییر دما (K) یا } (^{\circ}\text{C})$$

$$\alpha = \text{ضریب انبساط حجمی } \left(\frac{1}{\text{K}}\right) \text{ یا } \left(\frac{1}{^{\circ}\text{C}}\right)$$

درس‌Box
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وقتی می‌گوییم کمیتی مانند حجم چند درصد تغییر کرده، یعنی:

$$\frac{\Delta V}{V_1} \times 100$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = (\alpha) \Delta T \rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{2/25 \times 10^{-2}}{\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}} \Rightarrow 2/25 \times 10^{-2} = 3 \times 3 \times 10^{-5} \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{2250}{9} = 250 \text{K} \Rightarrow \Delta \theta = 250^{\circ}\text{C}$$

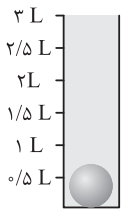
گام دوم: اکنون می‌توانیم دمای قطعه سرب را در حالت دوم به دست آوریم:

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow 250 = \theta_2 - 25 \Rightarrow \theta_2 = 275^{\circ}\text{C}$$

25°C تغییر دمای قطعه است، نه دمای اولیه آن. بی‌توجهی به این موضوع باعث می‌شود که گزینه (۲) را به اشتباه انتخاب کنید.

گول نخوری

در شکل زیر، گلوله‌ای آلومینیومی به شعاع ۵ cm درون ظرفی لبریز از گلیسرین در دمای ۸۶°F ته‌نشین شده است. اگر دمای مجموعه به ۱۲۲°F برسد، چند سانتی‌متر مکعب گلیسرین از ظرف بیرون می‌ریزد؟ (ضریب انبساط طولی آلومینیوم $۲ \times ۱۰^{-۵} \text{K}^{-۱}$ ، ضریب



انبساط حجمی گلیسرین $۵ \times ۱۰^{-۴} \text{K}^{-۱}$ است، از انبساط ظرف چشم‌پوشی کنید و $\pi = ۳$)

	$۳۵/۶$ (۲)	$۳۰/۶$ (۱)
	$۲۰/۴$ (۴)	$۲۵/۶$ (۳)



انبساط حجم گلوله و مایع را جداگانه حساب کنید و مجموع آن‌ها را به دست آورید. به همین اندازه گلیسرین از ظرف بیرون می‌ریزد.



درسی Box

$$\Delta V = V_1 \beta \Delta T$$

رابطه انبساط حجمی مایع، مشابه رابطه انبساط حجمی جامد بوده و به صورت زیر است:

$$\beta = \text{ضریب انبساط حجمی مایع } \left(\frac{1}{\text{K}}\right) \text{ یا } \left(\frac{1}{^\circ\text{C}}\right)$$

$$\beta_{\text{مایع}} > ۳\alpha_{\text{ظرف}}$$

انبساط در مایع‌ها عموماً نسبت به جامدها بیشتر است. یعنی:

$$\Delta F = F_r - F_l = ۱۲۲ - ۸۶ = ۳۶^\circ\text{F}$$

گام اول: تغییر دمای مایع و گلوله را برحسب کلون به دست می‌آوریم:

$$\Delta F = ۱/۸ \Delta \theta \xrightarrow{\Delta F = ۳۶^\circ\text{F}} ۳۶ = ۱/۸ \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = ۲^\circ\text{C}$$

$$\Delta \theta = \Delta T \Rightarrow \Delta T = ۲^\circ\text{K}$$

گام دوم: حجم اولیه گلوله و انبساط حجمی آن را حساب می‌کنیم:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \xrightarrow{R=5\text{cm}} V_1 = \frac{4}{3} \times 3 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_1 = V_1 (\alpha \Delta T) \xrightarrow{\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}, \Delta T = 2^\circ\text{K}} \Delta V_1 = 500 \times 3 \times 2 \times 10^{-5} \times 2 = 0.6 \text{ cm}^3$$

گام سوم: حجم اولیه گلیسرین و انبساط حجمی آن را نیز حساب می‌کنیم:

$$V_1' = \text{حجم گلوله} - \text{حجم ظرف} \xrightarrow{\text{حجم ظرف} = 3\text{L} = 3000 \text{ cm}^3, \text{حجم گلوله} = V_1 = 500 \text{ cm}^3} V_1' = 3000 - 500 = 2500 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_1' = V_1' \beta \Delta T \xrightarrow{\beta = 5 \times 10^{-4} \text{K}^{-1}, \Delta T = 2^\circ\text{K}} \Delta V_1' = 2500 \times 5 \times 10^{-4} \times 2 = 25 \text{ cm}^3$$

گام چهارم: مجموع انبساط حجمی مایع و انبساط حجمی گلوله را به دست می‌آوریم. به همین اندازه گلیسرین از ظرف بیرون می‌ریزد.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_1' = 0.6 + 25 = 25.6 \text{ cm}^3$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



فیزیک

۶۶

بر روی بسته یک ماده غذایی نوشته شده که هر 30 g از آن ماده، 81 kcal انرژی دارد. اگر 7 g از آن ماده را در یک گرماسنج بمبی بسوزانیم، دمای 600 g آب 20°C را چند درجه سلسیوس افزایش می‌دهد؟ ($c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ و $1\text{ cal} = 4/2\text{ J}$ و اتلاف گرما ناچیز است).

۷۵ (۴)

۷/۵ (۳)

۳۱/۵ (۲)

۳/۱۵ (۱)



ابتدا گرمای حاصل از سوختن 7 g از این ماده غذایی را برحسب ژول به دست آورید، سپس به کمک رابطه $Q = mc\Delta\theta$ تغییر دمای آب را حساب کنید.

Hint

(۱) گرماسنج بمبی: نوع خاصی از گرماسنج است که از آن برای تعیین ارزش غذایی مواد، با اندازه‌گیری انرژی آزاد شده از آن‌ها در حین سوختن استفاده می‌شود.

درسی Box

(۲) برای جسمی که در اثر تبادل گرمایی فقط دمای آن تغییر می‌کند (تغییر حالت نمی‌دهد)، می‌توان نوشت:

$$Q = \text{گرما (J)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$c = \text{گرمای ویژه } \left(\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}\right)$$

$$\Delta\theta = \text{تغییر دما } (^\circ\text{C})$$

گام اول: انرژی گرمایی حاصل از سوختن 7 g از این ماده غذایی را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$Q = 7\text{ g} \times \frac{81\text{ kcal}}{30\text{ g}} = 7 \times 2/7 = 18/9\text{ kcal} = 18900\text{ cal}$$

$$Q = 18900\text{ cal} \times \frac{4/2\text{ J}}{1\text{ cal}} = 79380\text{ J}$$

گام دوم: رابطه گرما را برای آب موجود در گرماسنج می‌نویسیم و از آن‌جا تغییر دمای آب را حساب می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[m=600\text{ g}=0/6\text{ kg}]{Q=79380\text{ J}, c=4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}} 79380 = 0/6 \times 4200 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{79380}{2520} = 31/5^\circ\text{C}$$



۷۱

پایه دوازدهم ریاضی
شروع از مهر
هجدهم آبان‌ماه ۱۴۰۳
مرحله هفتم

فیزیک

۶۷ مقداری آب در دمای جوش، درون یک کتری برقی به توان $4/5 \text{ kW}$ داریم. اگر در مدت 10 دقیقه تمام آب بخار شود. جرم آب چند کیلوگرم است؟ ($L_V = 2250 \text{ kJ / kg}$)

۰/۶ (۴)

۱/۲ (۳)

۲/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

مشاوره می‌توان، از آن دسته مطالبی است که قابلیت ترکیب شدن با بسیاری از مطالب فیزیک در پایه‌های مختلف دبیرستان را دارد.

درس‌Box

(۱) توان گرمایی: اگر یک وسیله گرماده با توان P به مدت Δt روشن باشد، گرمای Q را تولید می‌کند.

$$P = \frac{Q}{\Delta t}$$

توان (W) بازه زمانی (s)

(۲) گرمای لازم برای آن که مایعی در دمای جوش خود به بخار تبدیل شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = mL_V$$

جرم (kg) گرمای نهان ویژه تبخیر ($\frac{J}{kg}$) گرمای نهان ویژه تبخیر ($\frac{J}{kg}$) گرمای نهان ویژه تبخیر ($\frac{J}{kg}$)

رابطه توان گرمایی را با رابطه گرمای لازم برای تبخیر مایع ترکیب می‌کنیم و از آنجا جرم مایع بخار شده را به دست می‌آوریم: **پاسخ خیلی تشریحی** ✓

$$\begin{cases} P = \frac{Q}{\Delta t} \\ Q = mL_V \end{cases} \Rightarrow P = \frac{mL_V}{\Delta t} \xrightarrow{P=4/5 \text{ kW}, L_V=2250 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \Delta t=10 \text{ min}=600 \text{ s}} 4/5 = \frac{m \times 2250}{600} \Rightarrow m = \frac{4/5 \times 600}{2250} = \frac{600}{500} = 1/2 \text{ kg}$$

چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

الف) تمامی جامدها دارای نقطه ذوب کاملاً مشخص هستند.

ب) افزایش فشار وارد بر جسم معمولاً سبب بالارفتن نقطه ذوب جسم می شود.

پ) گرمای نهان تبخیر آب با افزایش دمای آن کاهش می یابد.

ت) افزایش دما و افزایش مساحت سطح مایع، سبب کاهش آهنگ تبخیر سطحی می شود.

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱



مشاوره گرچه بیشتر تست های فیزیک در کنکور، شکل محاسباتی دارند، اما گاهی مانند این سؤال تست های مفهومی و توضیحی نیز مطرح می شوند.

پاسخ خیلی تشریحی

عبارتهای داده شده را به ترتیب بررسی می کنیم تا درستی یا نادرستی هر یک معلوم شود:

الف) نادرست؛ جامدهای بی شکل مانند شیشه و جامدهای ناخالصی مانند قیر، نقطه ذوب کاملاً مشخصی ندارند؛ بلکه پیش از

ذوب شدن، خمیری شکل شده و در گستره ای از دما به تدریج ذوب می شوند.

ب) درست؛ معمولاً افزایش فشار وارد بر جسم، شروع فرایند ذوب شدن را به تأخیر می اندازد و سبب بالارفتن نقطه ذوب جسم می شود.

اما در برخی مواد مانند یخ، افزایش فشار به کاهش نقطه ذوب می انجامد.

پ) درست؛ طبق جدول زیر گرمای نهان تبخیر آب با افزایش دمای آن کاهش می یابد. چون با افزایش دمای مایع، فاصله بین مولکولی

افزایش می یابد و نیروی هم چسبی بین مولکول ها کاهش پیدا می کند. در نتیجه انرژی درونی جسم در حالت مایع و بخار به هم نزدیک

شده و گرمای کمتری برای تبخیر آب لازم است.

جدول مقادیر L_v برای آب در دماهای مختلف	
L_v (kJ / kg)	دما ($^{\circ}\text{C}$)
۲۴۹۰	۰
۲۴۵۴	۱۵
۲۳۷۴	۵۰
۲۲۵۶	۱۰۰
۲۱۱۵	۱۵۰
۱۹۴۰	۲۰۰

ت) نادرست؛ افزایش دما و افزایش مساحت سطح مایع سبب می شود که مایع سریع تر بخار شود.

درون یک سماور فلزی، ۳ لیتر آب با دمای 25°C قرار دارد. اگر ۷ دقیقه طول بکشد تا با روشن کردن گرمکن درون سماور که با آهنگ ثابت 1600 W گرما تولید می‌کند، دمای آب به 75°C برسانیم، ظرفیت گرمایی سماور چند ژول بر کلون است؟ (از اتلاف گرما چشم‌پوشی می‌شود. $\rho_{\text{آب}} = 1\text{ g/cm}^3$ و $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$)

۹۶۰ (۴)

۸۴۰ (۳)

۶۰۰ (۲)

۴۸۰ (۱)



۱) وقتی در اثر گرما دمای جسمی تغییر می‌کند، نسبت گرما به تغییر دما را ظرفیت گرمایی می‌گوییم:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

(J) گرما \uparrow
 $C = \frac{Q}{\Delta T}$
 \downarrow ظرفیت گرمایی (J/K)
 \downarrow تغییر دما (K)

$$C = mc$$

(kg) جرم \uparrow
 $C = mc$
 \downarrow ظرفیت گرمایی (J/K)
 \downarrow گرمای ویژه $(\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}})$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

(kg) جرم \uparrow
 $\rho = \frac{m}{V}$
 \downarrow چگالی (kg/m³)
 \downarrow حجم (m³)

۲) نسبت جرم به حجم یک جسم، چگالی آن جسم نام دارد.

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با استفاده از رابطه چگالی، جرم آب موجود در سماور را حساب می‌کنیم:

$$m = \rho V \xrightarrow{\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{g}}{\text{L}}, V = 3\text{L}} m = 1000 \times 3 = 3000\text{ g} = 3\text{ kg}$$

گام دوم: کل گرمای تولیدشده را با مجموع گرمای دریافت‌شده توسط سماور (۱) و آب (۲) برابر قرار می‌دهیم و ظرفیت گرمایی سماور را حساب می‌کنیم:

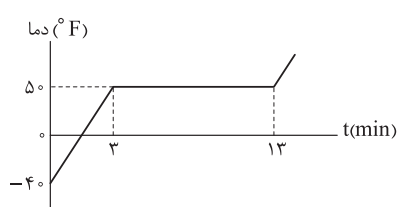
$$P = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta t} \xrightarrow{P = 1600\text{ W}, \Delta t = 60 \times 7 = 420\text{ s}} Q_1 + Q_2 = 1600 \times 420$$

$$Q_1 + Q_2 = m_1 c_1 \Delta T + m_2 c_2 \Delta T \xrightarrow{m_1 c_1 = C_1, m_2 = 3\text{ kg}, c_2 = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}, \Delta T = \Delta\theta = 75 - 25 = 50\text{ K}} 1600 \times 420 = C_1 \times 50 + 3 \times 4200 \times 50$$

$$\xrightarrow{\div 50} 32 \times 420 = C_1 + 3 \times 4200 \Rightarrow C_1 = 32 \times 420 - 3 \times 4200 = 0 / 2 \times 4200 = 840 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

فیزیک

۷۰. به یک قطعه فلزی کوچک با آهنگ ثابت گرما می‌دهیم و نمودار تغییر دمای آن بر حسب زمان مطابق شکل است. اگر گرمای ویژه فلز



باشد، گرمای نهان ذوب آن چند ژول بر گرم (J/g) است؟

۱۲۰ (۱)

۱۵۰ (۲)

۱۸۰ (۳)

۲۷۰ (۴)

ابتدا تغییر دما در مرحله اول گرمادهی را بر حسب کلونین به دست آورید، سپس نسبت $\frac{Q}{\Delta t}$ را در دو مرحله گرمادهی، برابر با هم قرار دهید و از آنجا L_F را حساب کنید.

Hint

دروس Box

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta K$$

(۱) رابطه تغییر دما در دو مقیاس کلونین و فارنهایت به صورت زیر است:

$$\Delta F = \text{تغییر دما } (^\circ F)$$

$$\Delta T = \text{تغییر دما } (K)$$

(۲) رابطه گرمای لازم برای آن‌که یک جسم جامد در دمای ذوب خود از جامد به مایع تبدیل شود:

$$Q = \text{گرما } (J)$$

$$m = \text{جرم } (kg)$$

$$L_F = \text{گرمای نهان ویژه ذوب } (J/kg)$$

گام اول: در مرحله اول گرمادهی که ۳ دقیقه به طول می‌انجامد، دمای جسم بدون تغییر حالت از $^\circ F -40$ به $^\circ F 50$ می‌رسد. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta F = F_2 - F_1 = 50 - (-40) = 90 \text{ } ^\circ F$$

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow 90 = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow \Delta T = 50 \text{ } K$$

در مرحله دوم گرمادهی، جسم در دمای ذوب خود از جامد به مایع تبدیل می‌شود.

گام دوم: وقتی با آهنگ ثابت گرما می‌دهیم، یعنی $\frac{Q}{\Delta t}$ ثابت است و بین دو مرحله مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{Q_1}{\Delta t_1} = \frac{Q_2}{\Delta t_2} \xrightarrow{Q_1 = mc\Delta T, Q_2 = mL_F} \frac{mc\Delta T}{3} = \frac{mL_F}{10} \Rightarrow \frac{900 \times 50}{3} = \frac{L_F}{10} \Rightarrow L_F = 300 \times 50 \times 10$$

$$\Rightarrow L_F = 150000 \frac{J}{kg} = 150 \frac{J}{g}$$

۷۱ ۸۰۰ g یخ با دمای 10°C را درون چند گرم آب با دمای 30°C بیندازیم تا پس از برقراری تعادل گرمایی، 1050 g آب 0°C داشته

باشیم؟ (از اتلاف گرما صرف نظر می‌کنیم، $c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ و $L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}$)

۹۲۵ (۴) ۸۰۰ (۳) ۵۰۰ (۲) ۲۵۰ (۱)



اگر دو یا چند جسم با دماهای متفاوت در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند. یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد که دمای تعادل نام دارد. بنا به قرارداد، برای اجسامی که گرما می‌گیرند، $Q > 0$ و برای اجسامی که گرما از دست می‌دهند، $Q < 0$ است. براساس قانون پایستگی انرژی، با صرف نظر کردن از گرمای تلف‌شده، همان‌قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند؛ پس جمع جبری گرماهای مبادله‌شده بین آن‌ها صفر می‌شود:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0$$

گام اول: توجه داشته باشید که در این‌جا تمام 800 g یخ 10°C به دمای 0°C می‌رسد، اما تمام آن ذوب نمی‌شود. بلکه پس

از برقراری تعادل گرمایی، آب و یخ در دمای 0°C در کنار هم می‌مانند. اگر جرم یخ ذوب‌شده را m' فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$m_1 = 800\text{ g} = \text{جرم اولیه}$$

$$m_2 = 300\text{ g} = \text{جرم آب } 30^{\circ}\text{C}$$

$$\text{یخ } -10^{\circ}\text{C} \xrightarrow[m_1]{Q_1} \text{یخ } 0^{\circ}\text{C} \xrightarrow[m']{Q'_1} \text{آب } 0^{\circ}\text{C} \xleftarrow[m_2]{Q_2} \text{آب } 30^{\circ}\text{C}$$

گام دوم: جمع جبری گرماهای مبادله‌شده را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$Q_1 + Q'_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 \Delta T_1 + m' L_F + m_2 c_2 \Delta T_2 = 0$$

$$\frac{c_1 = c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}, c_2 = c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}, L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}}{\Delta T_1 = 0 - (-10) = 10\text{ K}, \Delta T_2 = 0 - 30 = -30\text{ K}} \rightarrow 800 \times 2100 / 1 \times 10 + m' \times 336 + m_2 \times 4200 / 2 (-30) = 0$$

$$\Rightarrow 800 \times 21 + 336 m' = m_2 \times 126 \quad (\text{I})$$

گام سوم: جرم یخ ذوب‌شده را برحسب m_2 به دست آورده و با نتیجه به دست‌آمده در گام دوم ترکیب می‌کنیم تا m_2 به دست آید:

$$m_2 + m' = 1050 \Rightarrow m' = 1050 - m_2 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow 800 \times 21 + 336(1050 - m_2) = m_2 \times 126 \Rightarrow 369600 = 462 m_2 \Rightarrow m_2 = 800\text{ g}$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

- (الف) برای لباسهای آتش‌نشانی، پوشش براق مناسب‌تر است.
 (ب) در فرایند همرفت، ماده جابه‌جا نمی‌شود.
 (پ) در ساحل دریا و در روز، جریان هوا از ساحل به دریا است.
 (ت) انتقال گرما از سطح خورشید به زمین بر اثر پدیده همرفت رخ می‌دهد.

(۲) الف و پ

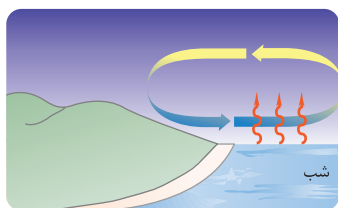
(۴) ب و ت

(۱) الف

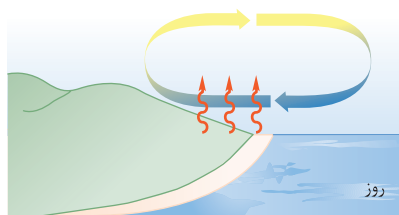
(۳) پ

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارتهای داده‌شده را به ترتیب بررسی کرده و درستی یا نادرستی آنها را تعیین می‌کنیم:
 (الف) درست؛ پوشش‌های براق بازتابنده خوبی برای گرما هستند و جذب گرمایی آنها ناچیز است. به همین دلیل برای لباس‌های آتش‌نشانی مناسب هستند.
 (ب) نادرست؛ در فرایند همرفت جریانی از مایع یا گاز جابه‌جا شده و گرما را منتقل می‌کند.
 (پ) نادرست؛ هنگام روز، زمین ساحل گرم‌تر از آب دریاست و پدیده همرفت موجب نسیمی از سوی دریا به سمت ساحل می‌شود.



شب



روز

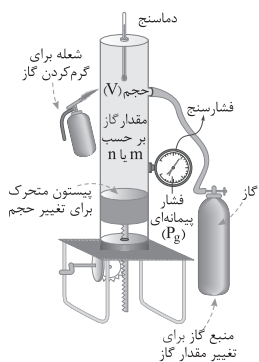
(ت) نادرست؛ انتقال گرما از سطح خورشید به زمین بر اثر پدیده تابش است.

دستگاهی که در شکل مقابل می‌بینید برای آزمایش کدام تحقیق به کار می‌رود؟

۷۳

- ۱) تحقیق قانون گازهای کامل
- ۲) تحقیق قانون آووگادرو
- ۳) تحقیق اصل پاسکال
- ۴) تحقیق گرماسنجی

مشاوره در کنکورهای اخیر به شکل‌ها و جزئیات کتاب‌های درسی، توجه بیشتری می‌شود. پس بهتر است آن‌ها را جدی بگیرید. پاسخ‌گویی به چنین تست‌هایی در همین راستاست.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به وسایل به کاررفته در شکل، رابطه بین فشار، حجم و دمای یک گاز مورد بررسی قرار می‌گیرد. این آزمایش مطابق شکل

صفحه ۱۲۲ کتاب درسی فیزیک ۱ رشته ریاضی مربوط به تحقیق قانون گازهای کامل است.

درون یک مخزن فلزی به حجم 40 L ، جرم‌های مساوی از دو گاز هلیوم و نیتروژن وجود دارد و وقتی دمای گاز به 7°C می‌رسد، فشارسنج متصل به مخزن عدد 7 atm را نشان می‌دهد. جرم گاز درون مخزن چند گرم است؟ (جرم مولی گازهای هلیوم و نیتروژن به ترتیب 4 g/mol و 28 g/mol ، $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ و فشار هوای محیط 1 atm است.)

۲۰۰ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)



Hint

ابتدا به کمک معادله قانون گازهای آرمانی، تعداد کل مول‌های گاز را به دست آورید؛ سپس تعداد مول‌های نیتروژن و هلیوم را جداگانه تعیین کنید. در پایان نیز جرم هر یک از این دو گاز را پیدا کرده و با هم جمع کنید.

درسی Box

(۱) معادله قانون گازهای آرمانی (کامل):

$$PV = nRT$$

$$P = \text{فشار مطلق (Pa)}$$

$$V = \text{حجم (m}^3\text{)}$$

$$n = \text{تعداد مول (mol)}$$

$$R = \text{ثابت جهانی گازها (} \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}\text{)}$$

$$T = \text{دما (K)}$$

تعداد مول

$$m = nM$$

جرم مولی گاز ($\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$) جرم گاز (kg)

$$P = P_0 + P_g$$

(۲) فشارسنج، فشار پیمانه‌ای گاز را نشان می‌دهد:

$$P = \text{فشار مطلق (Pa)}$$

$$P_0 = \text{فشار هوای محیط (Pa)}$$

$$P_g = \text{فشار پیمانه‌ای (Pa)}$$

گام اول: فشار مطلق گاز و دمای گاز برحسب کلونین را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$P = P_0 + P_g \xrightarrow{\substack{P_0 = 1 \text{ atm} \\ P_g = 7 \text{ atm}}} P = 1 + 7 = 8 \text{ atm} \Rightarrow P = 8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T = 0 + 273 = 7 + 273 = 280 \text{ K}$$

اکنون تعداد کل مول‌های گاز را پیدا می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{8 \times 10^5 \times 40 \times 10^{-3}}{8 \times 280} = \frac{400}{28} = \frac{100}{7} \text{ mol}$$

گام دوم: با توجه به این که جرم‌های مساوی از دو گاز هلیوم (۱) و نیتروژن (۲) وجود دارد، می‌توانیم رابطه‌ای بین تعداد مول‌های این دو گاز پیدا کنیم:

$$m_1 = m_2 \xrightarrow{m=nM} n_1 M_1 = n_2 M_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{M_2}{M_1} \xrightarrow{\substack{M_2 = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ M_1 = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}} \frac{n_1}{n_2} = \frac{28}{4} \Rightarrow n_1 = 7n_2$$

گام سوم: نتایج به دست آمده از گام‌های اول و دوم را با هم ترکیب می‌کنیم و مقادیر n_1 و n_2 را حساب می‌کنیم:

$$n = n_1 + n_2 = \frac{100}{7} \xrightarrow{n_1 = 7n_2} 7n_2 + n_2 = \frac{100}{7} \Rightarrow 8n_2 = \frac{100}{7} \Rightarrow n_2 = \frac{100}{56} \text{ mol}$$

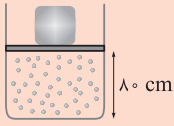
$$n_1 = 7n_2 \Rightarrow n_1 = 7 \times \frac{100}{56} = \frac{100}{8} \text{ mol}$$

گام چهارم: جرم هر یک از دو گاز هلیوم و نیتروژن را محاسبه کرده و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$m_1 = n_1 M_1 \xrightarrow{\substack{n_1 = \frac{100}{8} \text{ mol} \\ M_1 = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}} m_1 = \frac{100}{8} \times 4 = 50 \text{ g}$$

$$m = m_1 + m_2 \xrightarrow{m_1 = m_2 = 50 \text{ g}} m = 50 + 50 = 100 \text{ g}$$

مطابق شکل، درون یک ظرف استوانه‌ای به مساحت قاعده 200 cm^2 ، مقداری گاز آرمانی در تعادل قرار دارد. جرم پیستون و وزنه روی آن مجموعاً 50 kg و اصطکاک پیستون با دیواره ناچیز است. چند کیلوگرم از جرم وزنه کم کنیم تا پیستون 4 cm جابه‌جا شود؟ (دمای گاز را ثابت در نظر بگیرید، $g = 10 \text{ N/kg}$ و $P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ است.)



۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

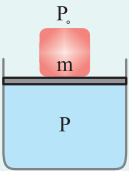
Hint

ابتدا فشار گاز در حالت اول را به دست آورید؛ سپس به کمک قانون گازهای آرمانی فشار گاز در حالت دوم را نیز پیدا کنید و با توجه به آن جرم پیستون و وزنه روی آن را در حالت دوم محاسبه کنید. در پایان نیز اختلاف جرم‌ها را حساب کنید.

درسی Box

(۱) فشار گاز زیر پیستون:

اگر فشار هوای محیط را P_0 فرض کنیم، فشار گاز زیر یک پیستون به مساحت مقطع A از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$P = P_0 + \frac{F}{A}$$

اگر نیروی F ناشی از وزن پیستون و وزنه روی آن باشد، می‌توان نوشت:

$$P = P_0 + \frac{mg}{A}$$

m = جرم پیستون و وزنه روی آن (kg)

A = مساحت قاعده استوانه یا پیستون (m^2)

g = شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

(۲) با توجه به قانون گازهای آرمانی، در دمای ثابت برای مقدار معینی گاز آرمانی می‌توان نوشت:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

P_1 = فشار مطلق گاز در حالت اول (Pa)

P_2 = فشار مطلق گاز در حالت دوم (Pa)

V_1 = حجم گاز در حالت اول (m^3)

V_2 = حجم گاز در حالت دوم (m^3)

گام اول: فشار گاز زیر پیستون در حالت اول را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$P_1 = P_0 + \frac{m_1 g}{A} \xrightarrow{P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}, m_1 = 50 \text{ kg}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, A = 200 \text{ cm}^2 = 200 \times 10^{-4} \text{ m}^2} P = 1 \times 10^5 + \frac{50 \times 10}{200 \times 10^{-4}}$$

$$= 1 \times 10^5 + 25 \times 10^4 = 1.25 \times 10^5 \text{ Pa}$$

گام دوم: به کمک قانون گازهای آرمانی، فشار گاز در حالت دوم را به دست می‌آوریم:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \xrightarrow{V = Ah} P_1 A h_1 = P_2 A h_2 \Rightarrow P_1 h_1 = P_2 h_2$$

$$\xrightarrow{h_1 = 8 \text{ cm}, h_2 = 8 + 4 = 12 \text{ cm}, P_1 = 1.25 \times 10^5 \text{ Pa}} 1.25 \times 10^5 \times 8 = P_2 \times 12 \Rightarrow P_2 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}$$

گام سوم: اکنون جرم پیستون و وزنه روی آن در حالت دوم را پیدا می‌کنیم و اختلاف آن را نسبت به حالت اول تعیین می‌کنیم:

$$P_2 = P_0 + \frac{m_2 g}{A} \xrightarrow{P_2 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}, P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}} 1.04 \times 10^5 = 1 \times 10^5 + \frac{m_2 \times 10}{200 \times 10^{-4}} \Rightarrow 2 \times 10^4 = \frac{m_2}{20} \times 10^4 \Rightarrow m_2 = 40 \text{ kg}$$

پس باید از جرم وزنه 10 kg کم می‌کنیم.

شیمی دوازدهم

کدام مورد درست است؟ ۷۶

- (۱) با استفاده از صابون آنزیم‌دار، نمی‌توان درصد لکه‌های چربی باقی‌مانده روی پارچه را به صفر رساند.
- (۲) از صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، در تنور نان سنگک برای چرب کردن سطح سنگ‌ها استفاده می‌شود.
- (۳) شمار اتم‌های بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی از بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی، یک واحد بیشتر است.
- (۴) مولکول‌های گازی که در اثر واکنش پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب تولید می‌شود، دارای دو عنصر هستند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی گروه SO_3^- و بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی گروه COO^- است؛ بنابراین شمار اتم‌های بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی $1 = 3 - 4$ واحد بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با افزایش دما و استفاده از صابون‌های آنزیم‌دار، می‌توان درصد لکه‌های باقی‌مانده را بر روی پارچه‌هایی که الیاف آن‌ها گروه‌های قطبی قابل توجهی دارند، به صفر رساند. برای مثال درصد لکه‌های چربی باقی‌مانده روی پارچه‌های نخی، پس از استفاده از صابون آنزیم‌دار در دمای 40°C ، به صفر می‌رسد.

گزینه (۲): از صابون مراغه به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود. در تنور نان سنگک از نوعی صابون سنتی (متفاوت با صابون مراغه) استفاده می‌شود.

گزینه (۴): گازی که در اثر واکنش پودر آلومینیم (Al) و سدیم هیدروکسید (NaOH) با آب تولید می‌شود، گاز هیدروژن (H_2) است که مولکول‌های آن دارای دو اتم است، نه دو عنصر!

کدام موارد از عبارتهای زیر درست است؟

۷۷

- (الف) ذره‌های سازنده یک نمونه ژله، از ذره‌های سازنده مخلوط اتیلن گلیکول در آب بزرگ‌تر است.
 (ب) نمک اسید چرب دومین و سومین عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی، همانند مس (II) سولفات در آب نامحلول هستند.
 (پ) صابون‌های جامد برخلاف صابون‌های مایع، نمی‌توانند فاقد عنصر فلزی باشند.
 (ت) به طور کلی، سرعت افزایش شاخص امید به زندگی در سال‌های اخیر، در نواحی برخوردار از نواحی کم‌برخوردار بیشتر است.

(۲) ب - پ

(۱) الف - پ

(۴) ب - ت

(۳) الف - ت

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارتهای «الف» و «پ» درست‌اند.

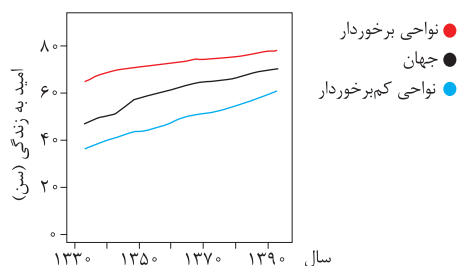
بررسی همه عبارتهای:

(الف) ژله و مخلوط اتیلن گلیکول در آب، به ترتیب کلوئید و محلول هستند. با توجه به این‌که ذره‌های سازنده کلوئیدها، توده‌های مولکولی و ذره‌های سازنده محلول‌ها، مولکول‌ها و یونها هستند، اندازه ذره‌های سازنده ژله بزرگ‌تر است.

(ب) دومین و سومین عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی، منیزیم و کلسیم هستند. نمک‌های اسید چرب این دو عنصر یعنی $(RCOO)_2Ca$ و $(RCOO)_2Mg$ در آب نامحلول هستند، در حالی که مس (II) سولفات ($CuSO_4$) در آب محلول است.
 (پ) صابون‌های جامد، نمک سدیم اسید چرب ($RCOONa$) هستند، در حالی که صابون‌های مایع، نمک پتاسیم اسید چرب ($RCOOK$) یا نمک آمونیوم اسید چرب ($RCOONH_4$) هستند؛ بنابراین صابون‌های جامد، به یقین دارای عنصر فلزی (Na)

هستند، در حالی که صابون‌های مایع، می‌توانند فاقد عنصر فلزی باشند و *اون زمانی است که نمک آمونیوم اسید چرب داشته باشیم!*

(ت) سرعت افزایش شاخص امید به زندگی در سال‌های اخیر که در شکل زیر همان شیب نمودار است، در نواحی برخوردار از نواحی کم‌برخوردار کم‌تر است.



چند مورد از موارد زیر درست است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

- نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اتیلن گلیکول، $1/125$ برابر این نسبت در اوره است.
- فرمول مولکولی یک پاک‌کننده غیرصابونی ۱۸ کربنی با سه پیوند دوگانه، به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است.
- درصد جرمی کربن در وازلین از درصد جرمی این عنصر در بنزین، کم‌تر است.
- پس از ورود صابون به آب، سر آب دوست مولکول‌های آن با سر منفی مولکول‌های آب، نیروی جاذبه یون - دوقطبی ایجاد می‌کنند.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

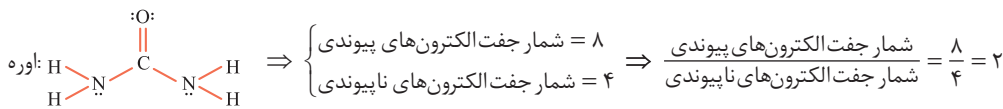
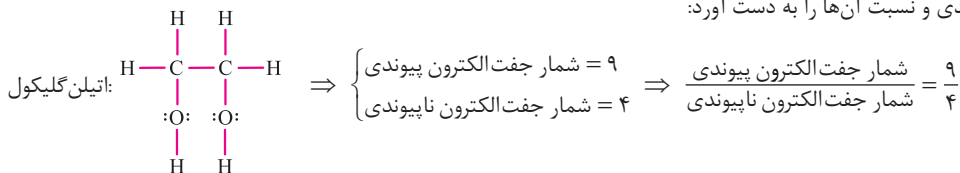
۳ (۳)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای اول و دوم درست‌اند.

بررسی عبارتهای:

- با توجه به ساختار مولکول‌های اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) و اوره ($(CO(NH_2))_2$)، می‌توان شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی و نسبت آن‌ها را به دست آورد:



بنابراین نسبت مورد نظر در مولکول اتیلن گلیکول، $\frac{9}{4} = 1/125$ برابر مولکول اوره است.

- با توجه به این که در حلقه بنزن پاک‌کننده‌های غیرصابونی، سه پیوند دوگانه وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت زنجیر هیدروکربنی پاک‌کننده غیرصابونی مورد نظر، سیر شده است.

فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیر شده، به صورت $C_nH_{2n+1}C_6H_4SO_3Na$ یا $C_nH_{2n-7}SO_3Na$ نوشته می‌شود.

با توجه به ۱۸ کربنی بودن مولکول این پاک‌کننده، می‌توان گفت تعداد اتم‌های H مولکول آن برابر $29 = 7 - (2 \times 18)$ و فرمول مولکولی آن به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است.

- درصد جرمی کربن در وازلین ($C_{25}H_{52}$) و بنزین (C_8H_{18}) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\text{درصد جرمی C در ترکیب} = \frac{\text{جرم مولی C} \times \text{تعداد اتم C}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{درصد جرمی C در } C_{25}H_{52} = \frac{25 \times 12}{(25 \times 12) + (52 \times 1)} \times 100 \approx 85.7\% \\ \text{درصد جرمی C در } C_8H_{18} = \frac{8 \times 12}{(8 \times 12) + (18 \times 1)} \times 100 \approx 84.2\% \end{cases}$$

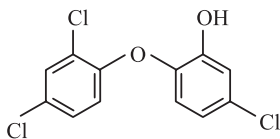
بنابراین درصد جرمی کربن در وازلین از بنزین بیشتر است.

با افزایش تعداد اتم‌های کربن در آلکان‌ها (با فرمول عمومی C_nH_{2n+2})، درصد جرمی اتم‌های کربن افزایش و درصد جرمی اتم‌های هیدروژن کاهش می‌یابد.

- پس از ورود صابون به آب، سر آب دوست مولکول‌های آن یعنی COO^- ، با سر مثبت مولکول‌های آب که اتم‌های هیدروژن هستند، نیروی جاذبه یون - دوقطبی برقرار می‌کنند.



تری کلوسان، ترکیب آروماتیکی است که در گذشته در شوینده‌ها استفاده می‌کردند، ولی به تازگی به دلیل عوارض جانبی برای انسان از شوینده‌ها حذف شده است. دلیل استفاده از این ماده در شوینده‌ها کدام مورد زیر بوده است؟



(۱) از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی

(۲) خاصیت گندزدایی و میکروب‌کشی

(۳) افزایش قدرت پاک‌کنندگی

(۴) خاصیت بازی مناسب

افزودنی‌های صابون‌ها:

ویژگی صابون	نوع افزودنی به صابون
از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی	ترکیب‌های گوگرددار
خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی بیشتر	مواد شیمیایی کلردار
جلوگیری از تشکیل رسوب و ایجاد لکه (به دلیل واکنش این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت)	نمک‌های فسفات
افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها (به دلیل خاصیت بازی جوش شیرین و در نتیجه واکنش آن با چربی و تولید صابون)	جوش شیرین (NaHCO_3)

طبق معرفی سؤال، ترکیب داده شده در شوینده‌ها استفاده می‌شده و به دلیل وجود اتم‌های کلر (Cl) در این ترکیب، به یقین این ترکیب خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی دارد.
 بپه‌ها هواستون باشه که نیاز نبود شما سافتار، این ترکیب رو فقط می‌کردین! با توجه به این که طراح مترم فرموره در شوینده‌ها استفاده می‌شده و در ساختارش هم اتم‌های کلر (Cl) را مشاهده می‌فرمایین، همین برای شما کافیست به‌دین این ماده شیمیایی کلردار است و خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به موادی مانند اتانول و شکر که انحلال آن‌ها در آب به شکل است، و به موادی مانند سدیم کلرید و هیدروژن کلرید که انحلال آن‌ها در آب به شکل است، می‌گویند.

- (۱) مولکولی - غیرالکترولیت - یونی - الکترولیت
- (۲) مولکولی - الکترولیت - یونی - غیرالکترولیت
- (۳) یونی - غیرالکترولیت - مولکولی - الکترولیت
- (۴) یونی - الکترولیت - مولکولی - غیرالکترولیت

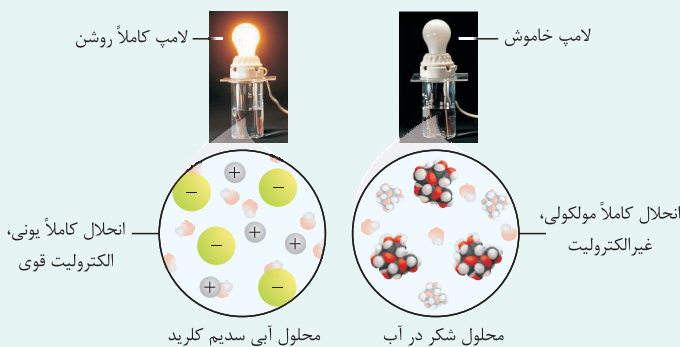
درس‌Box

انواع محلول‌ها با توجه به نحوه حل شدن مواد در آب:

مواد را با توجه به نوع انحلال آن‌ها و برحسب ایجاد یا عدم ایجاد یون در محلول حاصل، به دو دسته الکترولیت (شامل الکترولیت قوی و الکترولیت ضعیف) و غیرالکترولیت تقسیم می‌کنند.



مقایسه رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی سدیم کلرید (الکترولیت) و شکر (غیرالکترولیت):



هر الکترولیت قوی‌ای لزوماً رسانای خوب جریان برق نیست! مثلاً $AgCl$ با این‌که در آب نامحلول است، اما جزء الکترولیت‌های قوی محسوب می‌شود؛ زیرا همان مقدار فیلی فیلی کمی که در آب حل می‌شود، به طور کامل به یون تفکیک می‌شود؛ اما محلول آن رسانای جریان برق نمی‌باشد.

تذکر: شرط این‌که یک محلول رسانای خوب جریان برق باشد:

(۱) باید الکترولیت قوی باشد.

(۲) غلظت یون‌های موجود در محلول، مناسب و کافی باشد تا بتوانند حرکت آزادانه و نامنظم داشته باشند.

نکته

در دمای معین، درصد یونش اسید HA برابر ۴ بوده و درصد یونش اسید HB دو برابر آن است. اگر در دو ظرف جداگانه غلظت HA دو برابر غلظت HB باشد، تفاوت غلظت تعادلی اسیدهای یونش نیافته، چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA است؟

۴ (۱)	۸ (۲)
۱۲/۵ (۳)	۲۵ (۴)



می‌دانیم یونش اسیدهای ضعیف به صورت تعادلی است. برای یک اسید تک‌پروتونه می‌توانیم فرایند یونش را به شکل زیر بنویسیم:



غلظت اولیه: M	o	o
تغییر غلظت: -x	+x	+x
غلظت تعادلی: M-x	x	x

از طرفی با توجه به رابطه درجه یونش، داریم:

$$\alpha = \frac{x}{M} = \frac{[H^+]}{M} = \frac{[A^-]}{M}$$

بنابراین غلظت گونه‌های موجود در محلول برحسب α به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$[H^+] = \alpha M$$

$$[A^-] = \alpha M$$

$$[HA] = M - x = M - \alpha M = M - [H^+]$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بیاید برای حل این تست، از آخر به اول بریم. تفاوت غلظت تعادلی اسیدهای یونش نیافته، یعنی تفاوت غلظت تعادلی [HA] و [HB].

$$[HA] = M_A - [H^+]_A, \quad [HB] = M_B - [H^+]_B$$

$$\Rightarrow \text{تفاوت غلظت تعادلی اسیدهای یونش نیافته} = [HA] - [HB] = M_A - [H^+]_A - (M_B - [H^+]_B)$$

ارتباط بین غلظت M_A و M_B را که داریم. غلظت HA دو برابر غلظت HB است:

$$M_A = 2M_B$$

پس می‌ماند ارتباط بین $[H^+]_A$ و $[H^+]_B$. برای پی‌بردن به این ارتباط، از نسبت غلظت ($M_A = 2M_B$) و نسبت درجه یونش ($\alpha_B = 2\alpha_A$) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{[H^+]_A}{[H^+]_B} = \frac{\alpha_A M_A}{\alpha_B M_B} = \frac{\alpha_A \times (2M_B)}{(2\alpha_A) \times M_B} = 1$$

بنابراین در این شرایط معین، $[H^+]_A$ برابر با $[H^+]_B$ است.

حالا می‌توانیم تفاوت غلظت تعادلی اسیدهای یونش نیافته را حساب کنیم:

$$[HA] - [HB] = M_A - [H^+]_A - (M_B - [H^+]_B) = 2M_B - [H^+]_A - M_B + [H^+]_B = M_B$$

اما طرح مقرر، نسبت این مقدار را به $[H^+]_A$ خواسته است. می‌دانیم که $[H^+]_A = \alpha_A M_A$ ، بنابراین نسبت خواسته شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\text{تفاوت غلظت تعادلی اسیدهای یونش نیافته}}{\text{غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA}} &= \frac{M_B}{[H^+]_A} = \frac{M_B}{\alpha_A M_A} = \frac{M_B}{\alpha_A (2M_B)} \\ &= \frac{1}{2\alpha_A} = \frac{1}{2 \times 0/04} = \frac{1}{0/08} = \frac{100}{8} = 12/5 \end{aligned}$$

کدام مورد، نادرست است؟ ۸۲

(۱) در یک واکنش برگشت پذیر که هم‌زمان واکنش‌های رفت و برگشت به طور پیوسته انجام می‌شوند، سرانجام مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند.

(۲) در سامانه تعادلی، مقدار و غلظت همه ماده‌ها ثابت می‌شوند، ولی لزومی ندارد که با هم برابر شوند.

(۳) در سامانه تعادلی، سرعت مصرف و تولید همه ماده‌ها ثابت و برابر می‌شود.

(۴) اگر در یک واکنش مقدار و غلظت حداقل یکی از واکنش‌دهنده‌ها به صفر برسد، سامانه به یقین تعادلی نخواهد بود.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در هنگام تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است، اما الزاماً سرعت مصرف واکنش‌دهنده(ها) و تولید فراورده(ها) با هم برابر نیست! سرعت واکنش‌های رفت یا برگشت از تقسیم سرعت تولید یا مصرف مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن‌ها به دست می‌آید؛ مثلاً در واکنش تعادلی $A(g) \rightleftharpoons 2B(g)$ ، ضرایب استوکیومتری مواد با هم برابر نیست؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{برگشت}(\bar{R}) = \text{رفت}(\bar{R}) \Rightarrow \text{تعادل}$$

$$\bar{R}(\text{رفت}) = \frac{\bar{R}(\text{مصرف } A)}{1} = \frac{\bar{R}(\text{تولید } B)}{2}$$

$$\bar{R}(\text{برگشت}) = \frac{\bar{R}(\text{مصرف } B)}{2} = \frac{\bar{R}(\text{تولید } A)}{1} \Rightarrow \text{در لحظه تعادل: } \frac{\bar{R}(\text{مصرف یا تولید } A)}{1} = \frac{\bar{R}(\text{مصرف یا تولید } B)}{2}$$

بنابراین، در هنگام تعادل، با وجود برابر بودن سرعت‌های رفت و برگشت، سرعت تولید یا مصرف B، دو برابر سرعت مصرف یا تولید A است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): اگر واکنش‌های برگشت پذیر در شرایط مناسبی انجام شوند، سرانجام لحظه‌ای فرا می‌رسد که سرعت واکنش رفت و برگشت برابر می‌شود و غلظت یا مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند. در این حالت می‌گوییم واکنش به تعادل رسیده است.

گزینه (۲): کاملاً درسته! در هنگام تعادل، مقدار یا غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها لزوماً با هم برابر نیست و می‌تونه برابر باشه یا حتی برابر نباشه، اما اون چیزی که مهمه اینه که غلظت مواد ثابت می‌ماند.

گزینه (۴): اگر مقدار واکنش‌دهنده‌ای به صفر برسد، یعنی عملاً واکنش‌دهنده‌ای باقی نمی‌ماند که تبدیل به فراورده شود و واکنش کامل و متوقف می‌شود. دقت کنید که در واکنش‌های تعادلی غلظت واکنش‌دهنده‌ها به هیچ عنوان صفر نمی‌شود!

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) ثابت تعادل اسیدها فقط به دما بستگی داشته و در دمای معین با تغییر غلظت اولیه اسید، تغییر نمی‌کند.
 (ب) هر چه ثابت یونش یک اسید بیشتر باشد، قوی‌تر بوده و در دمای معین غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر خواهد بود.
 (پ) هر چه اسید ضعیف‌تر باشد، آنیون حاصل از آن، تمایل بیشتری به جذب یون هیدرونیوم دارد.
 (ت) در غلظت یکسان، میزان اسیدی‌بودن محلول شامل فورمیک اسید، به یقین بیشتر از محلول شامل استیک اسید خواهد بود.

(۲) الف - پ

(۱) الف - ب

(۴) ب - ت

(۳) ب - پ



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) ثابت یونش اسیدها مانند هر ثابت تعادل دیگری فقط و فقط به دما بستگی دارد و با تغییر مقدار اولیه واکنش‌دهنده‌ها و ... تغییری نمی‌کند. به عبارت دیگر می‌توان گفت که ثابت تعادل در دمای ثابت برای هر تعادل، مقداری ثابت است.
 (ب) در دمای معین، هر چه ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تر باشد، آن اسید قوی‌تر است. به عبارت دیگر در دمای معین، هر چه ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تر باشد آن اسید بیشتر یونیده شده است؛ اما برای بررسی و مقایسه غلظت یون هیدرونیوم (میزان اسیدی‌بودن محلول) باید دما و غلظت اولیه یکسان باشد، ولی در این عبارت صحبتی از غلظت اولیه نشده است؛ یعنی ممکن است غلظت اولیه یک اسید ضعیف‌تر زیاد باشد و باعث شود که محلول آن اسیدی‌تر باشد (غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر باشد).
 (پ) آنیون حاصل از اسیدهای ضعیف‌تر به خوبی با یون هیدرونیوم (H^+) واکنش می‌دهد؛ زیرا یونش اسیدهای ضعیف‌تر (واکنش رفت) به سختی انجام می‌شود و تعداد کمی یونش می‌یابند، اما واکنش برگشت آن به راحتی انجام می‌شود و آنیون حاصل از اسید ضعیف‌تر تمایل بسیار زیادی برای جذب کاتیون موجود در محلول (یون هیدرونیوم) را دارد.
 (ت) ملاک خاصیت اسیدی، غلظت یون هیدرونیوم (H^+) و در نتیجه pH محلول است. می‌دانیم که طبق رابطه زیر، دو عامل غلظت مولار اسید (M) و قدرت اسید (که رابطه مستقیمی با درجه یونش (α) دارد) در تعیین خاصیت اسیدی نقش دارند:

$$M \times \alpha = [H^+] = 10^{-pH}$$

 در این عبارت، به غلظت‌های یکسان هر اسید اشاره شده، اما به دمای آن که تأثیر بسیار مهمی روی قدرت اسیدی دارد، اشاره نشده است، بنابراین نمی‌توانیم مقایسه کنیم! اما اگر به جای عبارت «غلظت‌های یکسان» از شرایط یکسان یا غلظت و دمای برابر استفاده می‌شد، می‌توانستیم این عبارت را درست در نظر بگیریم!

چند مورد از موارد زیر درست است؟

- اسیدها و بازها با ثابت یونش بزرگ، الکترولیت قوی به شمار می‌روند.
- اغلب اسیدها و بازهای شناخته‌شده، قوی هستند.
- در محلول ۰/۱ مولار هیدرویدیک اسید در دمای اتاق، $[I^-] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$ است.
- در محلول ۰/۰۱ مولار هیدروسیانیک اسید، $[HCN] > [H^+]$ است.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

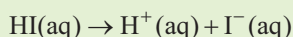


پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

- درست! اسیدها و بازهای قوی، ثابت یونش بزرگی دارند و جزء الکترولیت‌های قوی محسوب می‌شوند.
- اغلب اسیدها و بازهایی که در زندگی روزانه با آن‌ها سروکار داریم، ضعیف هستند، زیرا خوراکی‌ها و داروها و همچنین بسیاری از پاک‌کننده‌های مختلفی که ما مصرف می‌کنیم، حاوی این مواد هستند.
- هیدرویدیک اسید ($HI(aq)$) یک اسید قوی است که به طور کامل یونش می‌یابد و در محلول ۰/۱ مولار آن، غلظت یون هیدرونیوم (H^+) و یون یدید (I^-) نیز ۰/۱ مولار است:



$$[H^+] = [I^-] = M = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

- هیدروسیانیک اسید، یک اسید ضعیف است و مقدار ثابت یونش بسیار کوچکی دارد؛ بنابراین غلظت H^+ و CN^- در محلول آن، بسیار کم‌تر از غلظت اولیه اسید (۰/۰۱ مولار) است:

$$[H^+] = [CN^-] = M\alpha$$

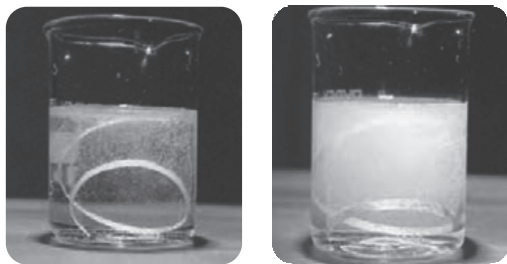
$$[HCN] = M - M\alpha = (1 - \alpha) \times M$$

از آن‌جا که در این اسید خیلی ضعیف، مقدار α بسیار کم است در محلول HCN، رابطه زیر را داریم:

$$[HCN] > [H^+] = [CN^-]$$

برای هر یک از موارد زیر دلیلی بیاورید. (تمرین دوره‌ای ۱ - صفحه ۳۳)

- الف) اسیدها و بازها با ثابت یونش کوچک، الکترولیت ضعیف به شمار می‌روند.
- ب) اغلب اسیدها و بازهای شناخته‌شده، ضعیف هستند.
- پ) در محلول ۰/۱ مولار نیتریک اسید در دمای اتاق، $[NO_3^-] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$ است.
- ت) در محلول ۰/۰۱ مولار فورمیک اسید، $[HCOOH] > [H^+]$ است.



(ب)

(الف)

شکل‌های مقابل، واکنش دو قطعه نوار منیزیم با ظاهری یکسان را با محلول دو اسید متفاوت در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند. اگر جرم نوار منیزیم ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) باشد، کدام مورد درباره آن‌ها درست است؟

(۱) سرعت واکنش در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

(۲) ثابت یونش اسید موجود در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

(۳) در پایان واکنش، حجم گاز آزاد شده در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

(۴) درجه یونش اسید موجود در ظرف (ب) در شرایط یکسان، بیشتر از ظرف (الف) است.



معادله کلی واکنش انجام شده در دو ظرف را می‌توان به صورت $Mg + 2HA \rightarrow MgA_2 + H_2$ نشان داد.

مواستون باشه که اگر حجم و غلظت محلول اسیدها و جرم نوارهای منیزیم مشابه باشد، در نهایت (پایان واکنش) حجم گاز آزاد شده در هر دو ظرف برابر خواهد بود، زیرا معادله کلی واکنش انجام شده در هر دو ظرف، کاملاً مشابه $(Mg + 2HA \rightarrow MgA_2 + H_2)$ است و مثلاً می‌توان گفت به ازای مصرف ۱ مول منیزیم یا دو مول اسید ۱ مول H_2 تولید می‌شود.

از آن‌جا که جرم نوار منیزیم در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) بوده و حجم و غلظت اسیدها در دو ظرف با هم برابر است؛ در نتیجه در پایان واکنش، جرم و حجم گاز تولید شده در ظرف (الف)، دو برابر ظرف (ب) می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): سرعت واکنش فلزها با محلول اسیدها به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد. با غلظت برابر، هر چه اسید قوی‌تر باشد، سرعت واکنش آن با فلز بیشتر خواهد بود. در این‌جا سرعت تولید گاز در محلول (الف) بیشتر است؛ بنابراین اسید موجود در محلول (الف) نسبت به محلول (ب) قدرت اسیدی و K_a بیشتری دارد و غلظت یون H^+ در محلول آن بیشتر است. اما مواستون باشه که لزوماً نمی‌توان گفت که K_a اسید موجود در ظرف (الف)، دو برابر ظرف (ب) است. به عنوان مثال اگر اسید موجود در ظرف (الف)، هیدروکلریک اسید (HCl) و اسید موجود در ظرف (ب)، هیدروفلئوریک (HF) باشد، K_a اسید موجود در ظرف (الف)، چندین و چند ده برابر اسید موجود در ظرف (ب) می‌باشد!

گزینه (۴): سرعت تولید گاز H_2 در ظرف (الف) بیشتر است؛ در نتیجه اسید موجود در این ظرف، قدرت اسیدی بیشتری داشته و غلظت یون H^+ در محلول آن بیشتر است. از آن‌جا که غلظت اسید در محلول موجود در دو ظرف (الف) و (ب) یکسان است، با توجه به رابطه $[H^+] = M\alpha$ می‌توان گفت که درجه یونش اسید موجود در ظرف (الف) در شرایط یکسان، بیشتر از اسید موجود در ظرف (ب) است.



در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت برای دو یا چند محلول اسیدی بالاتر

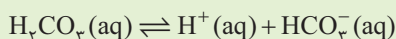
- محلول با خاصیت رسانایی الکتریکی بالایی دارد.
- حاوی اسید قوی‌تر است.
- K_a اسید بیشتر باشد.
- α اسید بیشتر باشد.
- غلظت H^+ بیشتری دارد.
- غلظت OH^- در آن کم‌تر است.
- pH کم‌تری دارد.



۸۷ اگر غلظت تعادلی یون هیدرونیوم در محلول کربنیک اسید در دمای معین برابر با $3 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ بوده و غلظت تعادلی کربنیک اسید در این محلول برابر 2×10^{-2} مولار باشد، غلظت تعادلی یون هیدروژن کربنات (HCO_3^-) و ثابت تعادل یونش اسید در این دما، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) $1/8 \times 10^{-8} - 3 \times 10^{-4}$ (۲) $4/5 \times 10^{-7} - 3 \times 10^{-4}$
- (۳) $1/8 \times 10^{-8} - 6 \times 10^{-5}$ (۴) $4/5 \times 10^{-7} - 6 \times 10^{-5}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ معادله یونش کربنیک اسید به صورت زیر است:



با توجه به این که در محلول این اسید، غلظت تعادلی یون های H^+ و HCO_3^- با هم برابر است، در نتیجه می توان گفت:

$$[\text{HCO}_3^-] = [\text{H}^+] = 3 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

بدین ترتیب می توانیم با استفاده از غلظت های تعادلی یون های H^+ و HCO_3^- و همچنین غلظت تعادلی H_2CO_3 در محلول ثابت یونش کربنیک اسید را در دمای مورد نظر محاسبه کنیم:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = \frac{[3 \times 10^{-4}]^2}{2 \times 10^{-2}} = \frac{9 \times 10^{-8}}{2 \times 10^{-2}} = 4/5 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$$

اگر غلظت تعادلی یون هیدرونیوم در محلول استیک اسید در دمای معین برابر با $6 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ باشد: (بهم بیندیشیم ۲ - صفحه ۲۳)

الف) غلظت تعادلی یون استات (CH_3COO^-) را تعیین کنید.

ب) اگر غلظت تعادلی استیک اسید در این محلول برابر با 2×10^{-2} مولار باشد، ثابت تعادل را در این دما حساب کنید.

کدام مورد، نادرست است؟



(۱) دستگاه گردش خون انسان، یک سامانه بازی محسوب می شود.

(۲) تغییر رنگ کاغذ pH، معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌ها است.

(۳) در یک سامانه خنثی، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید با یکدیگر یکسان بوده و برابر با 10^{-7} مول بر لیتر است.

(۴) هر اندازه که غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

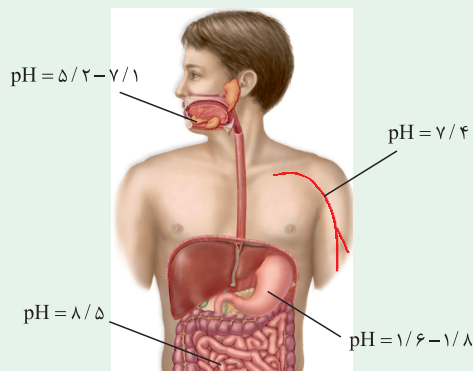
در هر دمایی، غلظت این دو یون در آب خالص برابر است ولی فقط در دمای اتاق (25°C)، غلظت هر یک از این دو یون برابر $10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ است.

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] = \sqrt{10^{-14}} = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): pH خون انسان حدود $7/4$ است که یک محدوده بازی می‌باشد.

با توجه به شکل زیر از کتاب درسی، می‌توان به اسیدی یا بازی بودن برخی محیط‌های بدن پی برد:



بزاغ ← $5/2 < \text{pH} < 7/1$ ← بیشتر مواقع اسیدی

اسید معده ← $1/6 < \text{pH} < 1/8$ ← محیط اسیدی

خون ← $\text{pH} = 7/4$ ← محیط بازی

روده کوچک ← $\text{pH} = 8/5$ ← محیط بازی

گزینه (۲):

تغییر رنگ کاغذ pH معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌هاست.

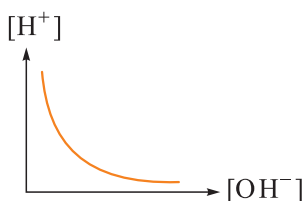
به کمک رنگی که کاغذ pH در یک محلول به خود می‌گیرد، می‌توان pH تقریبی (نه دقیق!) آن محلول را تعیین کرد.

رنگ کاغذ pH در محلول‌های اسیدی به رنگ قرمز، در محلول‌های خنثی به رنگ زرد و در محلول‌های بازی

به رنگ آبی تیره (بنفش) است.

گزینه (۴):

با توجه به این که حاصل ضرب $[\text{H}^+]$ و $[\text{OH}^-]$ در محلول‌های آبی در دمای اتاق همواره برابر 1×10^{-14} است، می‌توان نتیجه گرفت هر اندازه غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلول بیشتر شود به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد تا حاصل ضرب غلظت این یون‌ها در دمای اتاق برابر 1×10^{-14} شود.



$$(25^\circ\text{C}) \Rightarrow [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 1 \times 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{1 \times 10^{-14}}{[\text{OH}^-]} \Rightarrow \begin{cases} \downarrow [\text{H}^+] \Rightarrow \uparrow [\text{OH}^-] \\ \uparrow [\text{H}^+] \Rightarrow \downarrow [\text{OH}^-] \end{cases}$$

اگر مخلوط **a** میلی لیتر از هیدروبرمیک اسید با $\text{pH} = 1/4$ و **b** میلی لیتر از محلول همان اسید با $\text{pH} = 1/7$ ، دارای $0/06$ مول یون برمید باشد، **a + b** می تواند برابر با چند میلی لیتر باشد؟

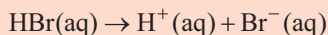
$$800 \quad (2) \qquad 200 \quad (1)$$

$$1700 \quad (4) \qquad 1200 \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: هیدروبرمیک اسید (HBr)، یک اسید قوی تک پروتون دار است که ابتدا باید معادله یونش آن در آب را بنویسیم:



غلظت یون های H^+ و Br^- در محلول این اسید یکسان و برابر با غلظت اولیه اسید است.

گام دوم: با توجه به pH هر یک از محلول ها، غلظت یون H^+ و در نتیجه غلظت یون Br^- را در آن ها محاسبه می کنیم:

$$\text{pH} = 1/4 \rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/4} = 10^{0/6} \times 10^{-2} = (10^{0/3})^2 \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\rightarrow [\text{Br}^-] = 4 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = 1/7 \rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/7} = 10^{0/3} \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\rightarrow [\text{Br}^-] = 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: غلظت یون Br^- در محلول نهایی با حجم $(a + b)$ میلی لیتر، باید بین $0/02$ و $0/04$ باشد، بر این اساس می توانیم بازه قابل قبول برای حجم محلول نهایی را بیابیم:

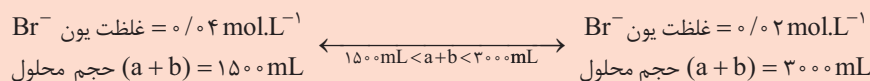
$$\text{غلظت یون } \text{Br}^- \text{ در محلول نهایی} = 0/02 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow 0/02 = \frac{\text{مول } \text{Br}^-}{\text{حجم محلول}} = \frac{0/06}{a + b}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{0/06}{0/02} = 3 \text{ L} \times \frac{10^3 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 3000 \text{ mL}$$

$$\text{غلظت یون } \text{Br}^- \text{ در محلول نهایی} = 0/04 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow 0/04 = \frac{\text{مول } \text{Br}^-}{\text{حجم محلول}} = \frac{0/06}{a + b}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{0/06}{0/04} = 1/5 \text{ L} \times \frac{10^3 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 1500 \text{ mL}$$

بنابراین حجم محلول نهایی می تواند بین $1500 < a + b < 3000$ میلی لیتر باشد که از میان گزینه ها، فقط گزینه (۴) در این بازه قرار دارد.

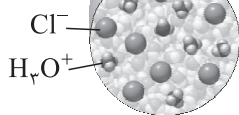
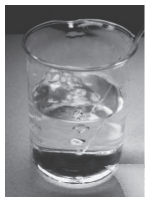


مخلوط **a** میلی لیتر از محلول اسید قوی HA ($\text{pH} = 1/4$) و **b** میلی لیتر از محلول همان اسید ($\text{pH} = 1/7$) با 200 میلی لیتر محلول

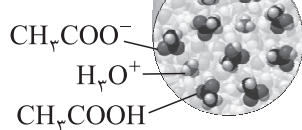
$0/3$ مولار سدیم هیدروکسید خنثی می شود. **a + b**، برابر چند میلی لیتر است؟ (ریاضی - داغی - ۱۴۰۳ - نوبت اول)

$$1000 \quad (2) \qquad 500 \quad (1)$$

$$2000 \quad (4) \qquad 250 \quad (3)$$



(۱)



(۲)

شکل‌های مقابل محلول‌هایی از هیدروکلریک اسید و استیک اسید را نشان می‌دهد. اگر حجم هر یک از محلول‌ها برابر با ۳۱۵ میلی‌لیتر باشد. تفاوت pH این محلول‌ها در دمای ۲۵°C، کدام است؟ (هر ذره را معادل ۰/۱۵ مول در نظر بگیرید.)

۰/۴۸ (۱)

۰/۵۵ (۲)

۰/۸۷ (۳)

۱/۰۲ (۴)

Hint

ابتدا با توجه به شکل، غلظت اولیه اسید را محاسبه کرده و با توجه به غلظت اولیه اسید و درجه یونش آن، غلظت یون H^+ را در هر کدام از محلول‌ها به دست می‌آوریم. در نهایت می‌توانیم pH هر یک از محلول‌ها و تفاوت آن‌ها را محاسبه کنیم.

گام اول: در محلول استیک اسید (محلول ۲)، ۷ ذره یونیده‌نشده (مولکول CH_3COOH) وجود دارد و ۲ ذره نیز یونیده شده است **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

(به یون‌های H^+ و CH_3COO^-)، در نتیجه غلظت اولیه (M) و درجه یونش (α) این محلول به همراه غلظت یون H^+ در آن

را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$M = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{9 \times 0/15}{315 \times 10^{-3}} = \frac{135}{315} = \frac{3}{7} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow [H^+] = M\alpha = \frac{3}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{2}{21}$$

در محلول هیدروکلریک اسید (محلول ۱)، هر ۷ ذره یونیده شده‌اند (به یون‌های H^+ و Cl^-)، در نتیجه درجه یونش این اسید

قوی برابر $\alpha = 1$ است و غلظت اولیه (M) این محلول به همراه غلظت یون H^+ را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$M = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{7 \times 0/15}{315 \times 10^{-3}} = \frac{1}{3} \text{ mol.L}^{-1}, \alpha = 1$$

$$\Rightarrow [H^+] = M\alpha = \frac{1}{3} \text{ mol.L}^{-1}$$

برای حل این تست، نیاز به پی‌داریم؟! آفرین! برای محاسبه pH هر دو محلول، فقط کافی است غلظت یون H^+ در دو محلول را

به دست آوریم. در محلول (۱)، ۷ ذره H^+ و در محلول (۲)، دو ذره H^+ وجود دارد و حجم دو محلول، یکسان و برابر با

۳۱۵ میلی‌لیتر است. غلظت یون H^+ در این دو محلول برابر است با:

$$\text{محلول (۱): } [H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{حجم}} = \frac{7 \times 0/15}{315 \times 10^{-3}} = \frac{1}{3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{محلول (۲): } [H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{حجم}} = \frac{2 \times 15 \times 10^{-3}}{315 \times 10^{-3}} = \frac{2}{21} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: pH هر یک از این محلول‌ها و تفاوت pH آن‌ها را مساب‌کتاب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{محلول استیک اسید: } pH = -\log \frac{2}{21} = \log 21 - \log 2 = \underbrace{\log 3}_{0/5} + \underbrace{\log 7}_{0/85} - \underbrace{\log 2}_{0/3} = 1/05$$

$$\Rightarrow \text{محلول هیدروکلریک اسید: } pH = -\log \frac{1}{3} = \log 3 = 0/5$$

$$\Delta pH = 1/05 - 0/5 = 0/55$$

تفاوت pH در محلول برابر است با:

از همون اول، بدون توجه به مقدار مول هر ذره (۰/۱۵) و بدون توجه به حجم ظرف (۳۱۵ میلی‌لیتر) می‌توانستیم تفاوت pH دو

محلول را به صورت زیر نیز خیلی تند و سریع حساب کنیم. کافی بود در نظر می‌گرفتیم که در ظرف (۲)، ۲ ذره H^+ و در ظرف (۱)،

۷ ذره H^+ داریم: $\Delta pH = pH_2 - pH_1 = -\log 2 - (-\log 7) = \log 7 - \log 2 = 0/85 - 0/3 = 0/55$

تیزبازی

تیزبازی

اگر pH محلول اسید قوی HX با pH محلول اسید ضعیف HY برابر باشد، چند مورد از موارد زیر به یقین درست است؟

$$(HX = 50, HY = 60 : g.mol^{-1})$$

- شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- اگر غلظت محلول HX برابر با ۱/۰ مولار بوده و حجم محلول یک لیتر باشد، تفاوت جرم دو اسید حل شده برابر با یک گرم خواهد بود.
- در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با این دو محلول برابر است.
- اگر حجم دو محلول برابر نباشد، رسانایی دو محلول متفاوت خواهد بود.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴) صفر

۳ (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فقط عبارت سوم به یقین درست است.

بررسی عبارت‌ها:

• HX، یک اسید قوی و HY، یک اسید ضعیف است؛ در نتیجه برای این که pH دو محلول با هم برابر باشد، باید غلظت مولی محلول HX کم‌تر از محلول HY باشد. حال برای مقایسه شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، باید به حجم محلول نیز توجه داشته باشیم! ممکن است شمار مول‌های آغازی دو اسید HY و HX با هم برابر، اما حجم محلول HY کم‌تر باشد و در نتیجه غلظت مولی محلول HY بیشتر می‌شود.

• اگر غلظت محلول اسید HX برابر 1 mol.L^{-1} باشد، چون این اسید قوی و تک‌پروتون‌دار است؛ در نتیجه غلظت یون H^+ نیز در این محلول برابر 1 mol.L^{-1} است و به دلیل pH یکسان دو اسید، غلظت یون H^+ در محلول اسید ضعیف HY نیز برابر 1 mol.L^{-1} خواهد بود. در محلول اسید ضعیف HY داریم:

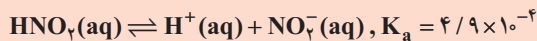
$$[H^+] = M\alpha$$

بنابراین غلظت اسید HY در محلول آن، به درجه یونش آن در این شرایط بستگی دارد و لزوماً عدد مشخصی را نمی‌توان بدون دانستن درجه یونش (α)، برای آن در نظر گرفت.

• سرعت واکنش فلزها با محلول اسیدها به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد و از آن جا که pH دو محلول و در نتیجه، غلظت یون H^+ در آن‌ها برابر است، می‌توان گفت که در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با محلول دو اسید HX و HY برابر می‌باشد.

• رسانایی الکتریکی محلول، به غلظت یون‌های موجود در آن بستگی دارد، به طوری که هر چه مجموع غلظت یون‌های موجود در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است. از آن جا که pH محلول‌های دو اسید با هم برابر است، می‌توان گفت که غلظت یون H^+ و در نتیجه غلظت آنیون‌ها (Y^-, X^-) نیز در دو محلول یکسان است؛ بنابراین حتی اگر حجم دو محلول متفاوت باشد، رسانایی الکتریکی آن‌ها یکسان خواهد بود.

اگر در دمای معین و در دو ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HNO_3 در محلول، دو برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول و pH محلول نیترو اسید، برابر $2/15$ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است، $(\text{O} = 16, \text{N} = 14, \text{C} = 12, \text{H} = 1 : \text{g.mol}^{-1})$)



$$0/131 \quad (2)$$

$$0/113 \quad (1)$$

$$0/187 \quad (4)$$

$$0/178 \quad (3)$$



ابتدا با استفاده از pH در محلول نیترو اسید، غلظت یون H^+ رو حساب کن که برابر با غلظت یون NO_3^- است و سپس با استفاده از غلظت یون H^+ در این محلول و K_a نیترو اسید، غلظت تعادلی HNO_3 را در محلول به دست بیار. در نهایت با توجه به این که غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول آن، نصف غلظت تعادلی HNO_3 است، با استفاده از غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول و هم‌چنین K_a آن، غلظت یون HCOO^- را محاسبه کن. در نهایت با توجه به حجم محلول‌ها، تفاوت جرم آنیون‌ها را در محلولشان به دست بیار.



Hint

(۱) براساس این که در زمان برقراری تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت برابر است، برای تعادل فرضی: $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ که حروف کوچک همان ضرایب استوکیومتری و حروف بزرگ، فرمول شیمیایی مواد شرکت‌کننده در تعادل است، میان غلظت‌های تعادلی رابطه زیر برقرار است:

$$K = \frac{[C]^c \times [D]^d}{[A]^a \times [B]^b}$$

(۲) این کسر به عبارت ثابت تعادل و K به ثابت تعادل معروف است و یکای آن برابر است با:

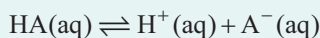
$$\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right)^{c+d-(a+b)}$$

توجه: اگر مجموع ضرایب استوکیومتری دو سمت معادله برابر باشد و به عبارتی $a + b = c + d$ باشد، آن‌گاه K بدون یکا خواهد بود. (۳) در واقع می‌توان گفت که ثابت تعادل (K) نشان‌دهنده نسبت حاصل ضرب غلظت فرآورده‌ها به حاصل ضرب غلظت واکنش‌دهنده‌ها، به توان ضریب استوکیومتری‌شان است.

توجه: غلظت مواد خالص جامد (s) و مایع (l) ثابت است و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. از این رو در رابطه K نوشته نمی‌شوند. (۴) هر چه مقدار عددی K بزرگ‌تر باشد، حاصل ضرب غلظت فرآورده‌ها از حاصل ضرب غلظت واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است که این موضوع نشان می‌دهد واکنش‌دهنده‌ها تمایل بیشتری برای تبدیل شدن به فرآورده‌ها دارند و واکنش بیشتر در جهت رفت انجام می‌شود؛ اما هر چه K کوچک‌تر باشد، یعنی غلظت واکنش‌دهنده‌ها در مخلوط تعادلی بیشتر و تمایل آن‌ها برای تبدیل شدن به فرآورده‌ها کم‌تر است.

توجه: ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد و با افزایش دما ممکن است کاهش و یا افزایش یابد.

(۵) نمونه‌ای از سامانه‌های تعادلی، محلول اسیدهای ضعیف در آب است. در این محلول‌ها، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده اسید، تعادل برقرار می‌شود:



ثابت تعادل برای فرایند یونش اسیدهای ضعیف به ثابت یونش اسیدی معروف است و با K_a نشان داده می‌شود که a حرف اول واژه acid است. بر این اساس K_a برای تعادل بیان شده چنین است:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

توجه: در رابطه ثابت یونش اسیدی، $[\text{HA}]$ مربوط به غلظت اسید باقی‌مانده در لحظه برقراری تعادل است.

گام اول: با توجه به pH محلول نیترو اسید، غلظت یون H^+ را در این محلول حساب می‌کنیم که برابر با غلظت یون NO_3^- است: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/15} = 10^{-0.133} \approx 0.74 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = [\text{NO}_3^-] = 7.4 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه ثابت یونش نیترو اسید، غلظت تعادلی HNO_3 را در این محلول به دست می‌آوریم:

$$K_a = \frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]} \xrightarrow{[H^+]=[NO_2^-]} 4/9 \times 10^{-4} = \frac{[7 \times 10^{-3}]^2}{[HNO_2]} = \frac{49 \times 10^{-6}}{[HNO_2]}$$

$$\Rightarrow [HNO_2] = 0/1 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول آن، نصف غلظت تعادلی نیتر و اسید است؛ در نتیجه می‌توانیم با استفاده از غلظت تعادلی فورمیک اسید و ثابت یونش این اسید در محلول آن، غلظت تعادلی آنیون $HCOO^-$ را در آن حساب کنیم:

$$[HCOOH] = \frac{[HNO_2]}{2} = \frac{0/1}{2} = 0/05 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K_a = \frac{[H^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} \xrightarrow{[H^+]=[HCOO^-]} 1/8 \times 10^{-4} = \frac{[HCOO^-]^2}{0/05}$$

$$\Rightarrow [HCOO^-]^2 = 9 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow [HCOO^-] = 3 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام چهارم: جرم آنیون‌های NO_2^- و $HCOO^-$ را در محلول‌هایشان و همچنین تفاوت جرم آن‌ها را به دست می‌آوریم:

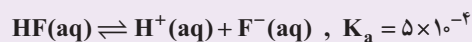
$$? \text{ g } NO_2^- = 7 \times 10^{-3} \frac{\text{mol } NO_2^-}{1 \text{ L محلول}} \times 1 \text{ L} \times \frac{46 \text{ g } NO_2^-}{1 \text{ mol } NO_2^-} = 0/322 \text{ g } NO_2^-$$

$$? \text{ g } HCOO^- = 3 \times 10^{-3} \frac{\text{mol } HCOO^-}{1 \text{ L محلول}} \times 1 \text{ L} \times \frac{45 \text{ g } HCOO^-}{1 \text{ mol } HCOO^-} = 0/135 \text{ g } HCOO^-$$

در نهایت تفاوت جرم آنیون‌ها در دو محلول برابر است با:

$$0/322 - 0/135 = 0/187 \text{ g}$$

اگر در دمای معین و در ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HF در محلول، دو برابر غلظت تعادلی استیک اسید در محلول و pH محلول هیدروفلوئوریک اسید، برابر $1/3$ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است، $(C = 12, O = 16, F = 19; \text{g.mol}^{-1})$ (تجربی داخل ۱۴۰۳ - نوبت اول)



$$0/862 \text{ (2)}$$

$$0/832 \text{ (1)}$$

$$0/780 \text{ (4)}$$

$$0/880 \text{ (3)}$$

غلظت یون هیدروکسید در محلول ۰/۰۵ مولار هیدروکلریک اسید، چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۰۲ مولار هیپوکلرو اسید با $K_a = 4/5 \times 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$ است؟

$$6/67 \times 10^{-9} \quad (2)$$

$$5/83 \times 10^{-9} \quad (1)$$

$$1/5 \times 10^8 \quad (4)$$

$$1/25 \times 10^8 \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی ($\alpha = 1$) تک پروتون دار است؛ در نتیجه در محلول این اسید، غلظت یون H^+ برابر با غلظت اولیه اسید است. بدین ترتیب می توانیم غلظت یون OH^- را در این محلول محاسبه کنیم:

$$[HCl] = [H^+] = 0/05 \text{ mol.L}^{-1} \quad \xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{0/05} = 2 \times 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: هیپوکلرو اسید، با توجه به $K_a < 10^{-5}$ یک اسید ضعیف است؛ در نتیجه در محلول این اسید می توانیم غلظت یون H^+ را با استفاده از غلظت اولیه اسید و ثابت یونش به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \cdot M} = \sqrt{4/5 \times 10^{-8} \times 0/02} = \sqrt{9 \times 10^{-10}} = 3 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$\frac{\text{غلظت یون } OH^- \text{ در محلول هیدروکلریک اسید}}{\text{غلظت یون } H^+ \text{ در محلول هیپوکلرو اسید}} = \frac{2 \times 10^{-13}}{3 \times 10^{-5}} = 6/67 \times 10^{-9}$$

از کدام یک از موارد زیر برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیکی در پزشکی و انجماد مواد غذایی در صنعت سرماسازی استفاده می‌شود؟

(۲) نیتروژن

(۱) هلیوم

(۴) آرگون

(۳) اکسیژن



پاسخ خیلی تشریحی ✓

کاربردهای گاز نیتروژن:

(۱) پرکردن تایر خودروها

(۲) در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی

(۳) نگهداری نمونه‌های بیولوژیکی

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): هلیوم افزون بر پرکردن بالن‌های هواشناسی، تفریحی و تبلیغاتی، در جوشکاری، کپسول غواصی و مهم‌تر از همه برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI استفاده می‌شود.

گزینه (۳): اکسیژن یکی از مهم‌ترین گازهای تشکیل‌دهنده هواکره است که زندگی روی زمین به وجود آن گره خورده است؛ این عنصر در آب‌کره، در ساختار مولکول‌های آب و در سنگ‌کره به صورت ترکیب با دیگر عناصر وجود دارد؛ همچنین اکسیژن در ساختار همه مولکول‌های زیستی مانند کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها نیز یافت می‌شود.

گزینه (۴): آرگون گازی بی‌رنگ، بی‌بو و غیرسمی است. این گاز به دلیل واکنش‌پذیری ناچیزی که دارد، به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری، برش فلزها و همچنین در ساخت لامپ‌های رشته‌ای به کار می‌رود.

کدام مورد، نادرست است؟ **۹۵**

- (۱) جانداران ذره‌بینی، گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.
- (۲) در ساختار لوویس مواد، هرگاه اتم عنصرهای گروه ۱۷، اتم کناری باشند، تنها یک پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند.
- (۳) افزون بر فلزهایی مانند طلا و پلاتین که به حالت آزاد در طبیعت یافت می‌شوند، فلزهایی وجود دارند که با بیش از یک نوع اکسید در طبیعت شناخته شده‌اند.
- (۴) در آرایش الکترون - نقطه‌ای مواد مولکولی، الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌ها طوری کنار آن‌ها چیده می‌شوند که همه اتم‌های سازنده ترکیب، از قاعده هشت‌تایی پیروی کنند.

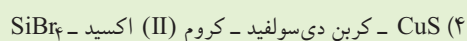
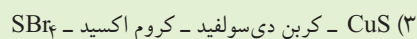
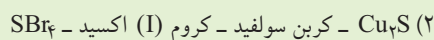
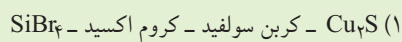


پاسخ خیلی تشریحی ✓

در آرایش الکترون - نقطه‌ای، همه اتم‌های سازنده ترکیب از قاعده هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند. طبق متن کتاب درسی، اتم هیدروژن همواره یک پیوند تشکیل می‌دهد؛ از این رو به آرایش دو تایی می‌رسد.
 (البته مواردی هم داریم که از قاعده هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند؛ مثلاً اتم مرکزی در مولکول BeF_2 کم‌تر از هشت‌تایی است یا اتم مرکزی در مولکول SF_6 بیشتر از هشت‌تایی می‌شود).
 بررسی سایر گزینه‌ها:
 گزینه (۱): زندگی جانداران گوناگون در زیست‌کره با گازهای هواکره گره خورده است. جانداران ذره‌بینی گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.
 گزینه (۲): هرگاه اتم عنصرهای گروه ۱۷، اتم کناری باشند، فقط یک پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند.
 گزینه (۳): طلا و پلاتین از فلزاتی هستند که به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شوند، ولی فلزاتی دیگر مانند آهن داریم که در واکنش با اکسیژن دو نوع اکسید تولید می‌کنند (Fe_2O_3 و FeO).

مطابق جدول زیر، کدام گزینه موارد a، b، c و d را به ترتیب از راست به چپ، به درستی نشان می‌دهد؟

نام ترکیب	مس (II) سولفید	b	c	سیلیسیم تترایمرید
فرمول شیمیایی	a	CS ₄	CrO	d

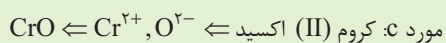


پاسخ خیلی تشریحی ✓

نام و فرمول شیمیایی موارد a تا d به صورت زیر است:



مورد b: کربن دی‌سولفید



مورد d: SiBr₄

در کدام ردیف‌های جدول زیر، داده‌های مربوط به ترکیب، درست است؟ (منظور از p.e، جفت الکترون‌های پیوندی و n.e، جفت الکترون‌های

۹۷

ناپیوندی روی اتم‌ها است.)

$\frac{p.e}{n.e}$	شمار p.e	فرمول شیمیایی	نام ترکیب	ردیف
$\frac{1}{3}$	۳	PCl_3	فسفر تری کلرید	۱
$\frac{3}{2}$	۳	CO	کربن مونوکسید	۲
$\frac{1}{2}$	۳	SO_3	گوگرد تری اکسید	۳
۱	۴	N_2O	دی نیتروژن مونوکسید	۴

۲ و ۱ (۲)

۳ و ۱ (۱)

۴ و ۲ (۴)

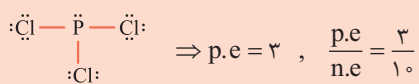
۳ و ۲ (۳)



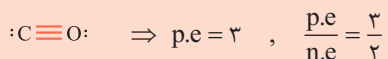
ردیف‌های ۲ و ۴ کاملاً درست‌اند. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

بررسی همه ردیف‌ها:

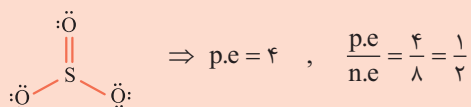
(۱) فسفر تری کلرید: PCl_3



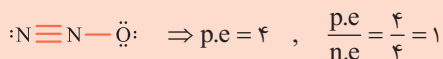
(۲) کربن مونوکسید: CO



(۳) گوگرد تری اکسید: SO_3



(۴) دی نیتروژن مونوکسید: N_2O



در کدام ردیف‌های جدول زیر، داده‌های مربوط به ترکیب، درست است؟ (منظور از p.e، جفت الکترون‌های پیوندی و n.e،

جفت الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌ها است.) (تیرپی دافل ۹۹)

$\frac{p.e}{n.e}$	شمار p.e	فرمول شیمیایی	نام ترکیب	ردیف
۴	۴	HCN	هیدروژن سیانید	۱
$\frac{1}{12}$	۴	SiF_4	سیلیسیم تترافلوئورید	۲
$\frac{2}{3}$	۳	N_2O	نیتروژن دی اکسید	۳
$\frac{3}{10}$	۳	$AsBr_3$	آرسنیک تری برمید	۴

۲ و ۲ (۲)

۳ و ۱ (۱)

۴ و ۱ (۴)

۳ و ۲ (۳)

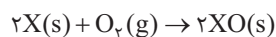
نمونه‌ای به جرم $3/175$ گرم از فلز X با $0/600$ لیتر گاز اکسیژن با چگالی $1/34$ گرم بر لیتر، اکسیدی با فرمول XO تشکیل می‌دهد. جرم مولی عنصر X چند گرم بر مول بوده و در این واکنش، چند گرم فراورده تولید می‌شود؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

- ۱) $1/98$ و $63/5$ ۲) $3/99$ و $63/5$
 ۳) $1/98$ و 127 ۴) $3/99$ و 127



Hint ابتدا به کمک حجم گاز اکسیژن و چگالی آن، جرم مولی X را به دست بیار و برای قسمت دوم هم می‌تونی دوباره به کمک حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده، جرم فراورده تولیدشده را به دست بیاری.

ابتدا معادله موازنه‌شده واکنش را می‌نویسیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



استفاده از کسر تبدیل:

قسمت اول: به کمک حجم گاز اکسیژن، جرم مولی X را به دست می‌آوریم:

$$? \text{ mol } X = 0/6 \text{ L } O_2 \times \frac{1/34 \text{ g } O_2}{1 \text{ L } O_2} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} \times \frac{2 \text{ mol } X}{1 \text{ mol } O_2} = 0/05 \text{ mol } X$$

$$\text{جرم مولی} = \frac{\text{جرم}}{\text{مول}} \Rightarrow 0/05 = \frac{3/175}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{جرم مولی} \approx 63/5 \text{ g.mol}^{-1}$$

قسمت دوم: از طریق حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده، جرم فراورده تولیدشده را می‌سازیم:

$$? \text{ g } XO = 0/6 \text{ L } O_2 \times \frac{1/34 \text{ g } O_2}{1 \text{ L } O_2} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} \times \frac{2 \text{ mol } XO}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{79/5 \text{ g } XO}{1 \text{ mol } XO} = 3/99 \text{ g } XO$$

استفاده از کسر تناسب:

➔ به‌جور دیگر

$$\frac{\text{حجم } \times \text{ چگالی}}{\text{جرم مولی } \times \text{ ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی } \times \text{ ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی } \times \text{ ضریب}} \Rightarrow \frac{0/6 \times 1/34}{1 \times 32} = \frac{3/175}{2 \times M} = \frac{x}{2 \times 79/5}$$

$$\Rightarrow M = 63/5 \text{ g.mol}^{-1}, x = 3/99 \text{ g}$$

در واکنش زیر و پس از موازنه آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد جامد، به مجموع ضرایب استوکیومتری مواد گازی شکل، کدام



$$1/47 \text{ (۲)}$$

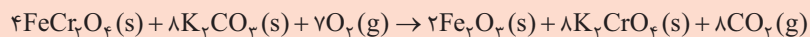
$$1/56 \text{ (۱)}$$



$$2/8 \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



$$\frac{\text{مجموع ضرایب مواد جامد}}{\text{مجموع ضرایب مواد گازی}} = \frac{4 + 8 + 2 + 8}{7 + 8} = \frac{22}{15} \approx 1/47$$

در واکنش برعکافت زیر و پس از موازنه معادله آن، نسبت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد محلول در آب، به مجموع ضرایب

استوکیومتری مواد گازی شکل، کدام است؟ (تیرپی دافل - تیر ۱۴۰۳)



$$3 \text{ (۲)}$$

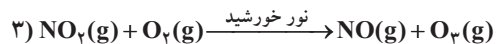
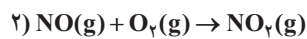
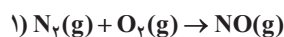
$$4 \text{ (۱)}$$

$$1 \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

۱۰۰ اوزون تروپوسفری طی واکنش‌های موازنه‌نشده زیر تولید می‌شود. اگر تمام نیتروژن دی‌اکسید تولیدشده، در مرحله آخر مصرف شده و منجر به تولید $۸ / ۴۲۸ \times ۱۰^{۲۴}$ مولکول اوزون شود، چند لیتر گاز نیتروژن با چگالی $۰ / ۷$ گرم بر لیتر مصرف شده است؟

$$(O = ۱۶, N = ۱۴ : g.mol^{-1})$$



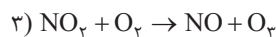
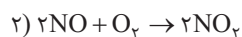
$$۲۸۰ (۲)$$

$$۱۵۶ / ۸ (۱)$$

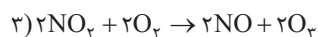
$$۵۶۰ (۴)$$

$$۳۱۳ / ۶ (۳)$$

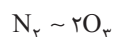
پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا هر سه واکنش را موازنه می‌کنیم:



چون $NO_۲$ تولیدشده در واکنش دوم، به طور کامل در واکنش سوم مصرف شده است، بنابراین ضرایب مواد در واکنش سوم را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم تا $NO_۲$ در هر دو واکنش هم‌ضریب شود.



حال می‌توان به طور مستقیم از روی تعداد مولکول‌های $O_۳$ ، حجم $N_۲$ مصرفی را محاسبه کرد.



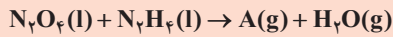
استفاده از کسر تبدیل:

$$?LN_۲ = ۸ / ۴۲۸ \times ۱۰^{۲۴} O_۳ \text{ مولکول} \times \frac{۱ \text{ mol } O_۳}{۶ / ۰۲ \times ۱۰^{۲۳} O_۳ \text{ مولکول}} \times \frac{۱ \text{ mol } N_۲}{۲ \text{ mol } O_۳ \text{ مولکول}} \times \frac{۲۸ \text{ g } N_۲}{۱ \text{ mol } N_۲} \times \frac{۱ LN_۲}{۰ / ۷ \text{ g } N_۲} = ۲۸۰ LN_۲$$

استفاده از کسر تناسب: به‌چور دیگه

$$\frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد}}{\text{ضریب} \times ۶ / ۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} \Rightarrow \frac{۰ / ۷ \times V}{۱ \times ۲۸} = \frac{۸ / ۴۲۸ \times ۱۰^{۲۴}}{۲ \times ۶ / ۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} \Rightarrow V = ۲۸۰ LN_۲$$

طبق واکنش موازنه نشده زیر، کدام موارد نادرست است؟ ($O = ۱۶, N = ۱۴, H = ۱: g \cdot mol^{-1}$)



الف) اگر به جای A، N_2 قرار بگیرد، برای تولید ۰/۹ مول از آن، ۱۹/۲ گرم N_2H_4 نیاز است.

ب) اگر به جای A، NO قرار بگیرد، با مصرف ۹/۲۰ گرم N_2O_4 ، ۸/۹۶ لیتر گاز، در شرایط STP تولید می‌شود.

پ) اگر به جای A، N_2 قرار بگیرد، با مصرف ۰/۲ مول از واکنش دهنده‌ها، ۵/۶ گرم از فرآورده تولید می‌شود که در ساختار لوویس خود پیوند اشتراکی بیشتری دارد.

ت) اگر به جای A، NO قرار بگیرد، برای مصرف ۱۴۷/۲ گرم از N_2O_4 ، به تقریب ۱۸/۵ لیتر گاز N_2H_4 در دمای $۱۸۲^\circ C$ و فشار ۲atm، مورد نیاز است.

الف - ب (۲)

ب - ت (۱)

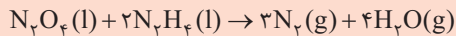
پ - ت (۴)

الف - ت (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای «ب» و «ت» نادرست‌اند.

بررسی عبارتهای:

الف) به جای A، N_2 قرار داده و معادله را موازنه می‌کنیم:



حالا از روی مول N_2 ، جرم N_2H_4 لازم را حساب می‌کنیم:

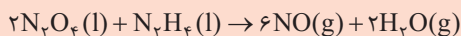
استفاده از کسر تبدیل:

$$? g N_2H_4 = 0.9 \text{ mol } N_2 \times \frac{2 \text{ mol } N_2H_4}{3 \text{ mol } N_2} \times \frac{32 \text{ g } N_2H_4}{1 \text{ mol } N_2H_4} = 19.2 \text{ g } N_2H_4$$

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{2 \times 32} = \frac{0.9}{3} \Rightarrow x = 19.2 \text{ g } N_2H_4$$

ب) به جای A، NO قرار داده و معادله را موازنه می‌کنیم:



حالا از روی جرم N_2O_4 ، حجم گاز تولیدشده (NO) در شرایط STP، را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که H_2O در شرایط STP به حالت گاز نیست!

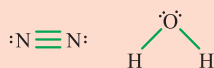
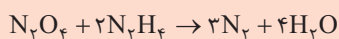
استفاده از کسر تبدیل:

$$? L NO = 9.2 \text{ g } N_2O_4 \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_4}{92 \text{ g } N_2O_4} \times \frac{6 \text{ mol } NO}{2 \text{ mol } N_2O_4} \times \frac{22.4 \text{ L } NO}{1 \text{ mol } NO} = 6.72 \text{ L } NO$$

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{9.2}{92} = \frac{x}{6 \times 22.4 / 2} \Rightarrow x = 6.72 \text{ L } NO$$

پ) در واکنش زیر، N_2 نسبت به H_2O پیوند اشتراکی بیشتری در ساختار خود دارد.

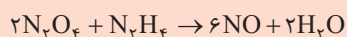


$$? g N_2 = 0.2 \text{ mol واکنش دهنده} \times \frac{3 \text{ mol } N_2}{(1+2) \text{ mol واکنش دهنده}} \times \frac{28 \text{ g } N_2}{1 \text{ mol } N_2} = 5.6 \text{ g } N_2$$

په جور دیگه

په جور دیگه

ت) ابتدا حجم گاز N_2H_4 را در شرایط STP حساب می‌کنیم:



استفاده از کسر تبدیل:

$$?L N_2H_4 = 147/2 g N_2O_4 \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_4}{92 g N_2O_4} \times \frac{1 \text{ mol } N_2H_4}{2 \text{ mol } N_2O_4} \times \frac{22.4 L N_2H_4}{1 \text{ mol } N_2H_4} = 17/92 L N_2H_4$$

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{147/2}{2 \times 92} = \frac{x}{1 \times 22.4/4} \Rightarrow x = 17/92 L N_2H_4$$

حالا حجم N_2H_4 را در شرایط داده شده به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \Rightarrow \frac{1 \times 17/92}{273} = \frac{2 \times V}{(273 + 182)} \Rightarrow V = \frac{5}{6} \times 17/92 \approx 14/93 L$$

STP شرایط جدید ۳ ۵

دیگه لازم نیست به عدد $14/93 L$ برسیم. همین که بدونیم حاصل $\frac{5}{6} \times 17/92$ کم‌تر از $17/92$ می‌شه، می‌تونیم بفهمیم این عبارت نادرسته.

په چور دیگه

تیزبازی

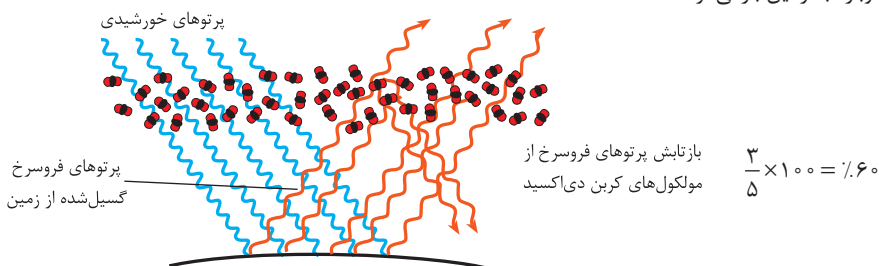
کدام مطلب، نادرست است؟ ($S = 32, O = 16, N = 14 : g.mol^{-1}$) **۱۰۲**

- (۱) اوزون و گوگرد دی‌اکسید از لحاظ ساختار لوویس مشابه هستند به همین دلیل رفتار شیمیایی آن‌ها نیز مشابه خواهد بود.
 (۲) در بررسی رفتار زمین در برابر پرتوی خورشیدی، حدود ۶۰ درصد پرتوی فرسرخ گسیل‌شده از زمین وارد فضا می‌شوند و بخش کوچکی از پرتوهای ارسالی خورشید به زمین توسط هواکره جذب می‌شود.
 (۳) اگر در دما و فشار یکسان، حجم ۱۲/۸ گرم SO_2 برابر حجم ۱۵/۲ گرم N_2O_x باشد، x برابر ۳ می‌باشد.
 (۴) اوزون و اکسیژن هر دو در حالت مایع به رنگ آبی هستند و در ساختار لوویس اوزون ۱۲ الکترون ناپیوندی مشاهده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): ساختار لوویس O_3 (اوزون) و SO_2 (گوگرد دی‌اکسید) مشابه هم است، ولی رفتار شیمیایی متفاوتی دارند:
 $\ddot{O}=\ddot{O}-\ddot{O}:$ $:\ddot{O}=\ddot{S}-\ddot{O}:$

گزینه (۲): با توجه به شکل کتاب درسی، از ۵ پرتوی تابشی به سطح زمین، سه پرتو از زمین وارد فضا می‌شود، ولی دو پرتو توسط گازهای گلخانه‌ای دوباره به زمین بازمی‌گردد.



گزینه (۳): در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها با هم برابر است، پس اگر حجم SO_2 و N_2O_x برابر باشد، مول آن دو نیز برابر خواهد بود.

$$? \text{ mol } SO_2 = 12/8 \text{ g } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol } SO_2}{64 \text{ g } SO_2} = 0/2 \text{ mol}$$

$$0/2 \text{ mol } N_2O_x = 15/2 \text{ g } N_2O_x \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_x}{(28 + 16x) \text{ g } N_2O_x} \Rightarrow 28 + 16x = 76 \Rightarrow x = 3$$

گزینه (۴): O_3 و O_2 هر دو در حالت مایع آبی‌رنگ هستند و در ساختار لوویس اوزون ($:\ddot{O}=\ddot{O}-\ddot{O}:$) ۱۲ الکترون ناپیوندی یا ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

کدام مورد درست است؟ ($Cl = ۳۵/۵, P = ۳۱: g.mol^{-1}$)

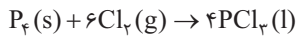
- (۱) براساس شواهد، فصل بهار در نیمکره شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته حدود یک ماه زودتر آغاز می‌شود.
- (۲) به منظور تولید ۴۱۲/۵ گرم فسفر تری کلرید، باید ۱۸۶ گرم فسفر ($P_۴$) با گاز کلر واکنش دهد.
- (۳) با افزایش ارتفاع در لایه تروپوسفر، فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد، اما درصد حجمی آن ثابت است.
- (۴) جاذبه زمین، عامل توزیع گازها در سرتاسر هواکره است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با افزایش ارتفاع، هم فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد و هم فشار بقیه گازها؛ بنابراین درصد حجمی گاز اکسیژن ثابت باقی می‌ماند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): فصل بهار در نیمکره شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته، حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود.



گزینه (۲): ابتدا واکنش را نوشته و موازنه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$? g P_۴ = ۴۱۲/۵ g PCl_۳ \times \frac{۱ mol PCl_۳}{۱۳۷/۵ g PCl_۳} \times \frac{۱ mol P_۴}{۴ mol PCl_۳} \times \frac{۱۲۴ g P_۴}{۱ mol P_۴} = ۹۳ g P_۴$$

استفاده از کسر تناسب:

به جور دیگه

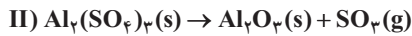
$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{۱ \times ۱۲۴} = \frac{۴۱۲/۵}{۲ \times ۱۳۷/۵} \Rightarrow x = ۹۳ g P_۴$$

گزینه (۴): جاذبه زمین باعث می‌شود که تراکم گازها در ارتفاعات پایین‌تر بیشتر از تراکم آن‌ها در ارتفاعات بالاتر باشد. عامل توزیع گازها در سرتاسر هواکره، جنبش پیوسته مولکول‌هاست که ناشی از انرژی گرمایی آن‌ها می‌باشد.



پتاسیم پرمنگنات (KMnO_4) و آلومینیم سولفات ($\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$) طبق واکنش‌های موازنه‌نشده زیر، در ظرف دریاز تجزیه می‌شوند. اگر جرم ماده جامد به کاررفته در واکنش (I)، ۲ برابر واکنش (II) باشد، کاهش جرم واکنش (I) چند برابر واکنش (II) است و اگر تفاوت جرم فراورده‌های جامد در واکنش (I)، ۵۵ گرم باشد، جرم واکنش‌دهنده (II) چند گرم بوده است؟

$$(\text{Mn} = 55, \text{K} = 39, \text{S} = 32, \text{Al} = 27, \text{O} = 16 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$$

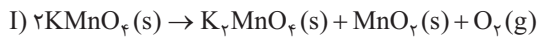


$$79.0 / 142 (2)$$

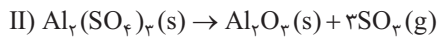
$$158.0 / 288 (1)$$

$$79.0 / 288 (4)$$

$$158.0 / 142 (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا هر دو واکنش را موازنه می‌کنیم:



قسمت اول: جرم KMnO_4 را برابر $2m$ و جرم $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ را برابر m فرض می‌کنیم. از طرف دیگر بایستی دقت کنیم که کاهش جرم یعنی همان جرم گاز خارج‌شده از ظرف واکنش. استفاده از کسر تبدیل:

$$? \text{g O}_2 = 2m \text{ g KMnO}_4 \times \frac{1 \text{ mol KMnO}_4}{158 \text{ g KMnO}_4} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol KMnO}_4} \times \frac{32 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = \frac{32m}{158} \text{ g O}_2$$

$$? \text{g SO}_2 = m \text{ g Al}_2(\text{SO}_4)_3 \times \frac{1 \text{ mol Al}_2(\text{SO}_4)_3}{342 \text{ g Al}_2(\text{SO}_4)_3} \times \frac{3 \text{ mol SO}_2}{1 \text{ mol Al}_2(\text{SO}_4)_3} \times \frac{64 \text{ g SO}_2}{1 \text{ mol SO}_2} = \frac{240m}{342} \text{ g SO}_2$$

$$\frac{32m}{158} = \frac{240m}{342}$$

استفاده از کسر تناسب:

به‌جور دیگر

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{2m}{2 \times 158} = \frac{x}{1 \times 32} \Rightarrow x = \frac{32m}{158}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{m}{1 \times 342} = \frac{x}{3 \times 64} \Rightarrow x = \frac{240m}{342}$$

$$\frac{32m}{158} = \frac{240m}{342}$$

قسمت دوم: تفاوت جرم MnO_2 و K_2MnO_4 برابر ۵۵ گرم داده شده است؛ پس داریم:



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{(\text{جرم مولی} \times \text{ضریب A}) - (\text{جرم مولی} \times \text{ضریب B})}$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{2 \times 158} = \frac{55}{(1 \times 197) - (1 \times 87)} \Rightarrow 2m = 158 \text{ g}$$

چون در ابتدا گفته شده بود که جرم KMnO_4 دو برابر جرم $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ است، بنابراین جرم $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ برابر است با:

$$m = \frac{158}{2} = 79 \text{ g}$$

۱۰۵ اگر در فرایند هابر، مخلوط واکنش به دمای 233K برسد، کدام گزینه ماده (مواد) با حالت فیزیکی مایع را نشان می‌دهد؟



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به نقطه جوش گازهای N_2 ، H_2 و NH_3 که به ترتیب برابر 196°C ، 253°C و 34°C است، دمای 233K را به درجه سلسیوس تبدیل می‌کنیم ($233 - 273 = -40^\circ\text{C}$). با توجه به این که دمای 4°C ، پایین‌تر از نقطه جوش NH_3 است، پس فقط این ماده به حالت مایع خواهد شد.