

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله سوم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

بودجه بندی دروس	حسابان (۱)	هندسه (۲)	آمار و احتمال
	فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۱ تا ۴۳	فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحه ۹ تا ۲۳	فصل ۱ صفحه ۱ تا ۳۴
	فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
	فصل ۱ صفحه ۱ تا ۴۴	فصل ۱ (تا ابتدای نفت، هدیه ای شگفت انگیز) صفحه ۱ تا ۲۹	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع		۸۰ سؤال		۱۲۰ دقیقه

استادید، مشاوران و دانش آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسانها با ما به اشتراک بگذارید.



حسابان یازدهم

۱- در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، $S_{n-4} - S_{n-5} = 3n - 1$ است. حاصل $a_4 - a_5$ کدام است؟ (S_n مجموع n جمله اول است.)

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) ۲

۲- دنباله‌های $a_n = 4^{n-m}$ و $b_n = 2^{n+m}$ مفروض اند. اگر مجموع ۵ جمله اول دنباله $c_n = 32a_n - 11b_n$ برابر با صفر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۲

۳- ماشین f به عنوان ورودی، اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد حقیقی یک واحد از چهار برابر مربع آن کم می‌کند و به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. به ازای کدام مقدار ورودی، خروجی تابع ۳۵ خواهد شد؟

- (۱) $\sqrt{17}$ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) $\frac{3}{2}$

۴- هم‌دامنه تابع $f(x) = x(|x| - 2)$ مجموعه $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ است. دامنه این تابع حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۵- منحنی $f(x) = |x^2 - a| |x|$ از کدام نواحی مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول و دوم (۲) سوم و چهارم (۳) دوم و چهارم (۴) اول، سوم و چهارم

۶- چه تعداد تابع از $A = \{1, 2, 3\}$ به $B = \{a, b, c, d\}$ می‌توان نوشت به طوری که $f(3) \neq b$ باشد؟

- (۱) ۱۹۲ (۲) ۶۴ (۳) ۴۸ (۴) ۸۱

۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 1+a & ; x \leq -a \\ a & ; x > -a \end{cases}$ باشد، تابع $g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$ با کدام تابع مساوی است؟

- (۱) $y = f(x+1) - 3$ (۲) $y = 3 - 2f(x+1)$ (۳) $y = f(x-1) - 3$ (۴) $y = 3 - 2f(x-1)$

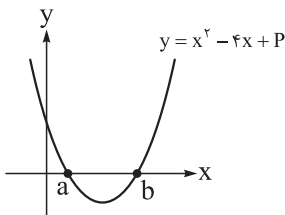
۸- برد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 4}$ با دامنه $[-m, m]$ شامل ۳ عدد صحیح است. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۴

۹- بیشترین مقدار تابع $f(x) = mx^2 + 6x + m$ برابر ۸- است. در این صورت $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۹ (۳) ۹ (۴) -۱۲

۱۰- با توجه به شکل زیر، اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6}$ باشد، حاصل $(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2$ کدام است؟



- (۱) ۵۶

- (۲) ۱۶

- (۳) ۲۶

- (۴) ۴۶

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۲۱- از نقطه A در خارج دایره‌ای، مماس AT به طول $6\sqrt{2}$ را بر آن دایره رسم نموده‌ایم (T روی دایره قرار دارد). همچنین خطی از A گذرانده‌ایم که دایره را در نقاط B و C قطع کرده است. اگر B بین A و C و $BC = 14$ باشد، طول AB کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۱۰

۲۲- اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, 3)$ و $C'(O', 8)$ برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) $4\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{42}$
(۴) $2\sqrt{6}$

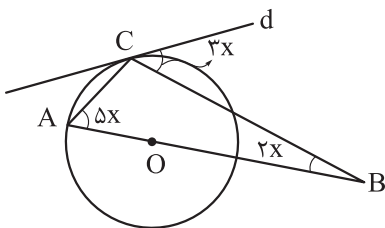
۲۳- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۲

۲۴- اگر دو دایره $C(O, 2)$ و $C'(O', 5)$ متقاطع باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $OO' > 7$ و OO' عمودمنصف وتر مشترک دو دایره است.
(۲) $3 < OO' < 7$ و وتر مشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.
(۳) $3 < OO' < 7$ و OO' عمودمنصف وتر مشترک دو دایره است.
(۴) $OO' < 3$ و وتر مشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.

۲۵- در شکل زیر اگر O مرکز دایره و خط d مماس بر دایره باشد، اندازه زاویه \hat{ACB} چند درجه است؟



- (۱) 105°
(۲) 110°
(۳) 115°
(۴) 120°

محل انجام محاسبات

۲۶- مماس‌های رسم‌شده بر دو دایره متقاطع، در یکی از نقاط تقاطع دو دایره بر هم عمودند. اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب ۳ و ۶ باشد، طول خط‌المركزین دو دایره کدام است؟

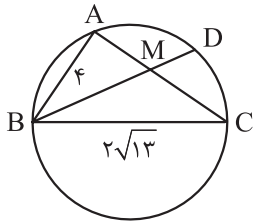
$3\sqrt{5}$ (۴)

۳ (۳)

$3\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

۲۷- در شکل زیر، BC قطر دایره و M وسط ضلع AC است. اندازه پاره خط MD کدام است؟



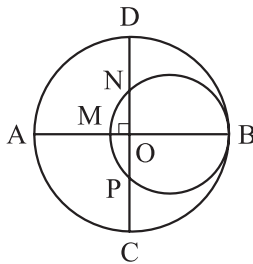
$1/6$ (۲)

$1/5$ (۱)

۲ (۴)

$1/8$ (۳)

۲۸- در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر شعاع دایره بزرگ‌تر برابر ۷ و $ND = 2$ باشد، شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟



بزرگ‌تر برابر ۷ و $ND = 2$ باشد، شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

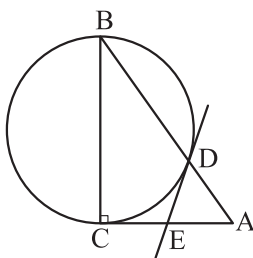
$\frac{36}{7}$ (۲)

۵ (۱)

$\frac{38}{7}$ (۴)

$\frac{37}{7}$ (۳)

۲۹- در شکل زیر، ضلع BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) قطر دایره است. خط مماس بر دایره در نقطه D، ضلع AC را در نقطه E قطع می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر ممکن است نادرست باشد؟



$AE = CE$ (۱)

(۲) DE نیمساز زاویه \hat{ADC} است.

$\hat{CED} = 2\hat{A}$ (۳)

$\hat{A} = \hat{BCD}$ (۴)

۳۰- از نقطه A خارج یک دایره، دو مماس AB و AC را بر آن دایره رسم می‌کنیم. سپس از نقطه C خطی موازی AB رسم می‌کنیم که دایره را در نقطه D قطع کند. اگر $BC = 12$ و $CD = 6$ باشد، طول این دو مماس کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۲۷ (۲)

۲۴ (۱)

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال

p	q	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	د
د	ن	A
ن	د	B
ن	ن	C

۳۱- در جدول ارزش گزاره‌های زیر، A، B و C به ترتیب کدام‌اند؟

- (۱) د - د - ن
 (۲) ن - ن - ن
 (۳) د - ن - ن
 (۴) ن - ن - د

۳۲- در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ کدام مورد صحیح است؟

- (۱) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r درست باشد.
 (۲) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r نادرست باشد.
 (۳) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش باشند.
 (۴) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش نباشند.

۳۳- ارزش گزاره سوری « $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} > (n+1)^3$ » بوده و نقیض این گزاره به صورت است.

- (۱) درست - $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} < (n+1)^3$
 (۲) نادرست - $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} < (n+1)^3$
 (۳) درست - $\exists n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} \leq (n+1)^3$
 (۴) نادرست - $\exists n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} \leq (n+1)^3$

۳۴- از میان گزاره‌های سوری زیر، کدام دو گزاره ارزش نادرست دارند؟

- (الف) $\exists x \in \mathbb{N}; 17x^2 - 5x - 12 = 0$
 (ب) $\forall x \in \mathbb{P}; 2^x - 1 \in \mathbb{P}$
 (پ) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$
 (ت) $\exists x \in (-\infty, 0]; |x^2 - 1| \leq 0$

- (۱) الف - ب
 (۲) الف - ت
 (۳) ب - پ
 (۴) پ - ت

۳۵- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq 2n, 2^m < \lambda n\}$ ، آن‌گاه مجموعه $A_3 - (A_1 \cup A_4)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳
 (۲) ۵
 (۳) ۷
 (۴) ۸

محل انجام محاسبات

۳۶- اگر $A - \{2, 3, 4, 5\} = \emptyset$ و $A \cap \{2, 5\} = \{2\}$ ، چند مجموعه برای A وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۷- اگر A, B, C سه مجموعه ناتهی باشند، به طوری که $A \cup B' = B \cup C'$ ، در این صورت کدام نتیجه گیری درست است؟

- (۱) $C \subseteq B \subseteq A$ (۲) $C \subseteq A \subseteq B$
 (۳) $B \subseteq C \subseteq A$ (۴) $A \cap B \cap C = \emptyset$

۳۸- اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$ ، $B = \{x + 1, 4, -2\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، حاصل xyz کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) -۶۴
 (۳) -۱۶ یا -۶۴ (۴) -۸ یا -۳۲

۳۹- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x < 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4\}$ ، در این صورت مساحت ناحیه $A \times B - B \times A$

چه قدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۰- نمودار $A \times B$ از سه پاره خط به طول ۲ واحد و نمودار $B \times C$ از چهار پاره خط به طول ۲ واحد تشکیل شده است.

اگر $n(A \cap C) = 1$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) نمودار $A \times C$ از ۱۲ نقطه تشکیل شده است.
 (۲) نمودار $A^2 - C^2$ از ۸ نقطه تشکیل شده است.
 (۳) نمودار $(A - C) \times B$ از دو پاره خط عمودی تشکیل شده است.
 (۴) نمودار $(B \times A) \cup (B \times C)$ از هفت پاره خط افقی تشکیل شده است.

فیزیک یازدهم

۴۱- دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5\mu\text{C}$ و $q_2 = -10\mu\text{C}$ در فاصله معینی از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $\vec{F} = (20\text{N})\vec{i}$ باشد، میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در محل بار q_1 برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟

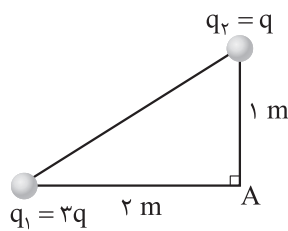
$$\vec{E} = (2 \times 10^6)\vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{E} = (4 \times 10^6)\vec{i} \quad (2)$$

$$\vec{E} = -(2 \times 10^6)\vec{i} \quad (3)$$

$$\vec{E} = -(4 \times 10^6)\vec{i} \quad (4)$$

۴۲- در شکل زیر، اگر اندازه میدان الکتریکی خالص حاصل از دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 ، در نقطه A برابر



$$9 \text{ N/C} \text{ باشد، اندازه بار } q \text{ برابر چند نانوکولن است؟ } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

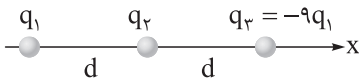
$$0.8 \quad (1)$$

$$8 \quad (2)$$

$$2/4 \quad (3)$$

$$24 \quad (4)$$

۴۳- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 ، q_2 و q_3 روی محور x قرار دارند. اگر بار q_2 به اندازه d در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود اندازه نیروی خالص وارد بر آن چند برابر می‌شود؟



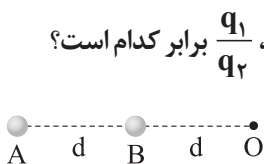
$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

۴۴- دو ذره باردار A و B که بار الکتریکی آن‌ها به ترتیب q_1 و q_2 است، در محل خود ثابت شده‌اند و میدان الکتریکی خالص در نقطه O برابر \vec{E} است. اگر بار الکتریکی ذره A، ۲ برابر شود، میدان الکتریکی خالص در نقطه O به $\frac{5}{4}\vec{E}$ می‌رسد، $\frac{q_1}{q_2}$ برابر کدام است؟



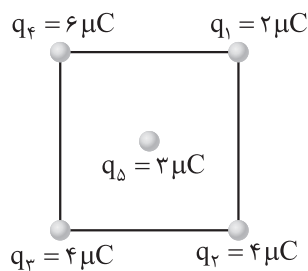
$$12 \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$-12 \quad (3)$$

$$-6 \quad (4)$$

۴۵- در شکل زیر، پنج بار الکتریکی در رأس‌ها و مرکز مربعی قرار گرفته‌اند. اگر فقط علامت بار q_1 تغییر کند، اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار واقع در مرکز مربع چند برابر می‌شود؟



$$1 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

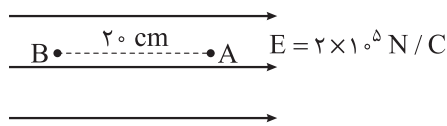
$$\sqrt{10} \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۴۶- یک قطره روغن خنثی، با گرفتن ۵ الکترون، در میدان الکتریکی یکنواخت و قائم \vec{E} ، به حالت معلق قرار می‌گیرد. اگر جرم این قطره $4 \times 10^{-15} \text{ kg}$ باشد، \vec{E} چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) 5×10^4 ، بالا
 (۲) 5×10^4 ، پایین
 (۳) 2×10^4 ، بالا
 (۴) 2×10^4 ، پایین

۴۷- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای q از نقطه A تا نقطه B ، موازی خطوط میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} جابه‌جا می‌شود. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی بار، 3 mJ کاهش یابد، q چند نانوکولن است؟



- (۱) ۷۵
 (۲) ۵۰
 (۳) -۷۵
 (۴) -۵۰

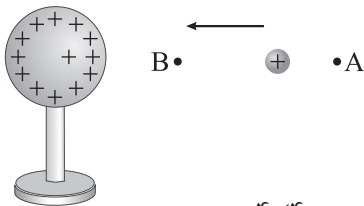
۴۸- ذره‌ای به بار الکتریکی -2 mC را از نقطه A با پتانسیل الکتریکی 10 V تا نقطه B جابه‌جا می‌کنیم. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی الکتریکی برابر 0.8 J باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B برابر چند ولت است؟

- (۱) ۳۰
 (۲) ۵۰
 (۳) -۳۰
 (۴) -۵۰

۴۹- ذره‌ای با بار الکتریکی q در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی یکنواختی با تندی اولیه v پرتاب شده و پس از طی مسافت d ، متوقف می‌شود. اگر این ذره، در جهت خطوط همین میدان الکتریکی با تندی v پرتاب شود، پس از طی مسافت $3d$ ، تندی آن به v می‌رسد. v چند برابر v است؟

- (۱) ۱
 (۲) $\sqrt{2}$
 (۳) $\sqrt{3}$
 (۴) ۲

۵۰- در شکل زیر ذره باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطه A به سمت کره باردار که روی پایه عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطه B قرار می‌دهیم. در این جابه‌جایی، چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟



(الف) کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، مثبت است.

(ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره کاهش می‌یابد.

(پ) اندازه نیروی الکتریکی وارد بر ذره کاهش می‌یابد.

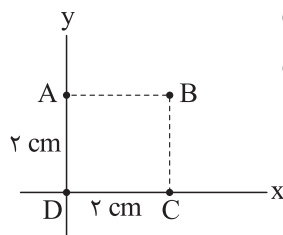
(ت) پتانسیل الکتریکی نقطه B ، بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطه A است.

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۵۱- در صفحه مختصات شکل مقابل، میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} وجود دارد. اگر پتانسیل

الکتریکی نقطه‌های A ، B ، C و D به ترتیب برابر 20 V ، 5 V ، -10 V و 5 V باشد، میدان

الکتریکی \vec{E} چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



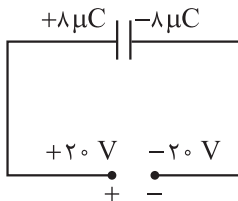
- (۱) $750\sqrt{2}$ ، ↘
 (۲) $750\sqrt{2}$ ، ↖
 (۳) $375\sqrt{2}$ ، ↘
 (۴) $375\sqrt{2}$ ، ↖

محل انجام محاسبات

۵۲- شعاع کره رسانای B، ۲ برابر شعاع کره رسانای A و چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، ۴ برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کره B است. چند درصد از بار کره A را به کره B منتقل کنیم، تا چگالی سطحی بار این دو کره برابر شود؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۴۰ (۴) ۶۰

۵۳- در شکل روبه‌رو، خازنی به دو سر مولدی متصل است که پتانسیل الکتریکی پایانه‌های مثبت و منفی آن به ترتیب $+20V$ و $-20V$ است. اگر بار الکتریکی دو صفحه خازن $+8\mu C$ و $-8\mu C$ باشد، ظرفیت خازن چند میکروفاراد است؟



- (۱) ۲/۰
(۲) ۴/۰
(۳) ۵/۲
(۴) ۵

۵۴- اختلاف پتانسیل بین دو صفحه یک خازن را ۲۵ درصد افزایش می‌دهیم؛ اگر با این کار $15\mu C$ بر بار ذخیره شده در خازن افزوده شود، بار اولیه ذخیره شده در این خازن چند میکروکولن است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵
(۳) ۶۰ (۴) ۷۵

۵۵- فاصله بین صفحه‌های یک خازن تخت $5mm$ و مساحت هر یک از صفحه‌های آن $10cm^2$ است. بین دو صفحه خازن از یک ماده دی‌الکتریک انعطاف‌پذیر با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 5$ پر شده است. اگر فاصله بین صفحه‌ها را ۴۰ درصد کاهش دهیم، ظرفیت خازن چند پیکوفاراد افزایش می‌یابد؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} F/m$)

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۵۶- مدار فلاش یک دوربین عکاسی، انرژی را تحت اختلاف پتانسیل $100V$ در یک خازن ذخیره می‌کند. انرژی ذخیره شده در این خازن در مدت $2ms$ به طور کامل تخلیه می‌شود. اگر توان متوسط خروجی فلاش $50W$ باشد، ظرفیت خازن این دوربین چند میکروفاراد است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

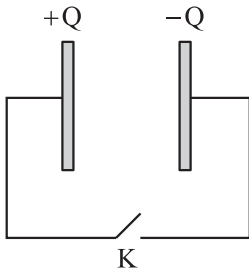
۵۷- یک خازن تخت بدون دی‌الکتریک به یک باتری بسته شده است تا باردار شود. پس از مدتی در حالی که باتری هم‌چنان به خازن متصل است، فاصله بین صفحات خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (الف) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها نصف می‌شود.
(ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، ۲ برابر می‌شود.
(پ) بار الکتریکی ذخیره شده در خازن، ۲ برابر می‌شود.
(ت) انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن، نصف می‌شود.

- (۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

۵۸- در شکل زیر، دو صفحه خازن تخت بارداری را با بستن کلید K، به هم وصل می‌کنیم؛ در نتیجه جرقه‌ای زده می‌شود. با انجام کدام یک از اقدامات زیر، با بسته شدن کلید K، الزاماً جرقه بزرگ‌تری حاصل می‌شود؟



الف) با ثابت ماندن بار صفحه‌ها، فاصله بین آن‌ها را افزایش دهیم.

ب) با ثابت ماندن بار صفحه‌ها، یک دی‌الکتریک بین آن‌ها قرار دهیم.

پ) بار اولیه روی صفحه‌ها را افزایش و فاصله بین آن‌ها را کاهش دهیم.

ت) بار اولیه روی صفحه‌ها را افزایش و مساحت آن‌ها را کاهش دهیم.

(۱) الف و پ

(۲) ب و پ

(۳) ب و ت

(۴) الف و ت

۵۹- ظرفیت خازنی $5\mu\text{F}$ و بار الکتریکی آن Q است. اگر $+10\text{mC}$ بار الکتریکی را از صفحه منفی خازن جدا کرده و به صفحه مثبت آن منتقل کنیم، انرژی ذخیره شده در خازن 30J افزایش می‌یابد. انرژی اولیه ذخیره شده در خازن چند ژول بوده است؟

(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

۶۰- خازنی به ظرفیت $60\mu\text{F}$ ، که بین صفحه‌های آن هوا است، به یک باتری با اختلاف پتانسیل 20V متصل است. اگر در این حالت، فاصله بین صفحه‌های آن را 50% افزایش داده و بین صفحات آن یک عایق با ثابت دی‌الکتریک ۶ قرار دهیم، انرژی ذخیره شده در خازن چند میلی‌ژول افزایش می‌یابد؟

(۱) ۱۲

(۲) ۲۴

(۳) ۳۶

(۴) ۴۸

شیمی یازدهم

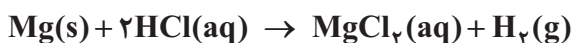
۶۱- کدام مطلب درست است؟

- (۱) بیش از 5° درصد عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی، رسانایی الکتریکی و گرمایی ندارند.
 (۲) گاز فلئوئور در دمای 10°C با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهد.
 (۳) اختلاف شعاع اتمی گوگرد و سیلیسیم، از اختلاف شعاع اتمی کلر و آلومینیم، کم‌تر است.
 (۴) عنصری که در دوره چهارم جدول تناوبی بوده و دارای هفت الکترون ظرفیتی است، به یقین چکش‌خوار نیست.
 ۶۲- در گروه هالوژن‌ها، گروه فلزهای قلیایی، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی عنصرها می‌یابد و در این گروه، گروه فلزهای قلیایی، واکنش‌پذیری عنصرها از بالا به پایین، می‌یابد.
 (۱) همانند - افزایش - کاهش
 (۲) برخلاف - افزایش - برخلاف - کاهش
 (۳) همانند - افزایش - برخلاف - کاهش
 (۴) برخلاف - کاهش - همانند - افزایش

۶۳- کدام گزینه درست است؟

- (۱) در جدول دوره‌ای فقط یک فلز با ۳ الکترون ظرفیتی وجود دارد.
 (۲) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز به دسته S تعلق دارد.
 (۳) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز با ۴ الکترون ظرفیتی وجود دارد.
 (۴) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز جامد وجود دارد.

۶۴- دانشجویی در آزمایشگاه یک نوار منیزیم را وارد محلول هیدروکلریک اسید می‌کند. با توجه به جدول زیر که پس از ناپدید شدن نوار منیزیم به دست آمده است، جرم نوار منیزیم اولیه بر حسب گرم و بازده درصدی واکنش کدام است؟
 ($\text{Mg} = 24 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



نماد شیمیایی ماده	حجم گاز در شرایط استاندارد (لیتر)
H_2 (فراورده‌ای که دانشجو به دست آورده است).	۲ / ۱
H_2 (فراورده‌ای که انتظار داشتیم به دست آید).	۲ / ۸

(۱) $75 - 2 / 25$ (۲) $75 - 3$ (۳) $80 - 2 / 25$ (۴) $80 - 3$

۶۵- هر یک از توصیف‌های زیر، مربوط به یک یا چند عنصر جدول دوره‌ای است. کدام عنصر داده‌شده در گزینه‌ها، با هیچ‌یک از این عبارتها تطابق ندارد؟

- عنصری فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در جهان دارد.
 - عنصری است که به شکل آزاد نیز در طبیعت وجود دارد.
 - دارای چند دگرشکل است که دگرشکل سفید آن را زیر آب نکه می‌دارند.
 - ترکیب‌های رنگی دارد و رنگ سرخ زیبای یاقوت را می‌توان به وجود یون سه بار مثبت آن نسبت داد.
- (۱) A (۱۶) (۲) X (۲۶) (۳) D (۱۳) (۴) M (۲۴)

محل انجام محاسبات

۶۶- عنصر A یکی از شبه فلزهای جدول تناوبی است. اگر در گروه شامل A، فقط یک عنصر نافلز X وجود داشته باشد، کدام مطلب درست است؟

- (۱) حالت فیزیکی عنصرهای A و X در دمای اتاق متفاوت است.
 (۲) A می تواند با پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی، هم دوره باشد.
 (۳) تفاوت عدد اتمی عنصر X با نخستین فلز گروه خود، برابر با عدد اتمی هفتمین عنصر واسطه دوره پنجم است.
 (۴) عدد اتمی A، به یقین از عدد اتمی هالوژن مایع جدول دوره‌ای، کوچک تر است.

۶۷- اگر محلولی حاوی ۶ گرم سدیم هیدروکسید، ۵/۰ مول کلریدی از آهن را رسوب دهد؛ رنگ رسوب تولید شده و شمار الکترون‌ها با $l = 2$ در کاتیون آهن موجود در محلول، کدام است؟ ($H = 1, O = 16, Na = 23 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) سبز - ۶ (۲) قرمز قهوه‌ای - ۵ (۳) سبز - ۵ (۴) قرمز قهوه‌ای - ۶

۶۸- مقایسه واکنش پذیری سه فلز اصلی A، B و C به صورت $C > B > A$ است. با توجه به آن، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

I) $ASO_4(aq) + B(s) \rightarrow$ الف) در شرایط یکسان کدام واکنش روبه‌رو انجام پذیر است؟

II) $B(s) + C(NO_3)_2(aq) \rightarrow$

ب) اگر A و C در یک دوره جدول دوره‌ای عنصرها باشند، عدد اتمی کدام یک بیشتر است؟

- (۱) A - I (۲) A - II (۳) C - I (۴) C - II

۶۹- یک کود شیمیایی دارای آمونیوم سولفات $((NH_4)_2SO_4)$ و مقداری ناخالصی است. اگر درصد خلوص یون سولفات در این کود برابر ۶۰٪ باشد، یک کیلوگرم از این کود، چند گرم نیتروژن برای گیاه تأمین می‌کند؟ (در ناخالصی‌ها یون سولفات و نیتروژن وجود ندارد؛ $H = 1, N = 14, O = 16, S = 32 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) ۸۷/۵ (۲) ۹۰ (۳) ۱۷۵ (۴) ۲۴۰

۷۰- درستی یا نادرستی مطالب زیر درباره نخستین فلز واسطه جدول دوره‌ای، به ترتیب چگونه است؟

- در اتم آن، ۷ زیرلایه از الکترون پر شده‌اند.
- تفاوت عدد اتمی آن با نخستین فلز قلیایی جدول، برابر عدد اتمی سومین گاز نجیب جدول است.
- شمار الکترون‌های ظرفیتی آن با شمار الکترون‌های ظرفیتی نخستین عنصر دسته p برابر است.
- کاتیون حاصل از آن به آرایش پایدار گاز نجیب نمی‌رسد.

(۱) درست - درست - نادرست - نادرست (۲) نادرست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - درست - درست (۴) درست - نادرست - درست - نادرست

۷۱- با توجه به معادله زیر، از تجزیه ۴/۵ گرم واکنش‌دهنده (آمنیوم دی کرومات) با خلوص ۶۰٪، چند لیتر گاز تولید می‌شود؟ (در شرایط انجام واکنش، حجم مولی گازها برابر ۲۵ L است، معادله واکنش موازنه شود.)

($Cr = 52, O = 16, N = 14, H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

$(NH_4)_2Cr_2O_7(s) \rightarrow N_2(g) + Cr_2O_3(s) + H_2O(g)$

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۶

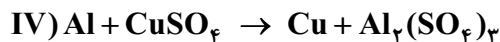
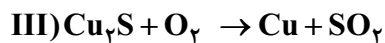
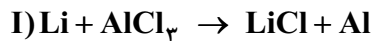
محل انجام محاسبات

۷۲- اگر شمار نوترون‌های اتم M^{22} ، ۲۵ درصد از شمار پروتون‌هایش بیشتر باشد، عنصر M یک است و عنصری که عدد اتمی آن با شمار نوترون‌های M برابر است، جزء عنصرهای جدول تناوبی به شمار می‌آید.

(۱) نافلز - واسطه (۲) شبه‌فلز - اصلی

(۳) نافلز - اصلی (۴) شبه‌فلز - واسطه

۷۳- با توجه به واکنش‌های (I) تا (IV)، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($\text{Cu} = 64, \text{Al} = 27 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



الف) مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش‌های (II) و (IV)، یکسان است.

ب) اگر در واکنش (I) به جای Li از Ti استفاده کنیم، واکنش با سرعت کم‌تری انجام می‌شود.

پ) آرایش الکترونی یون مس شرکت‌کننده در واکنش‌های (III) و (IV)، یکسان است.

ت) از واکنش ۹ گرم فلز آلومینیم با خلوص ۹۰ درصد با مقدار کافی محلول مس (II) سولفات، ۸ / ۲۸ گرم فلز مس آزاد می‌شود.

(۱) ب - پ (۲) الف - ب (۳) پ - ت (۴) الف - ت

۷۴- اگر $n + 1$ برای a الکترون بیرونی‌ترین زیرلایه اتم عنصر نافلزی X برابر ۳ و مجموع $n + 1$ برای همه الکترون‌های ظرفیتی آن برابر ۱۹ باشد؛ چند مورد از مطالب زیر به یقین در رابطه با عنصر X درست است؟

• در دوره سوم قرار دارد و $a = 5$ است.

• در دمای اتاق به صورت مولکول‌های دواتمی پایدار است.

• در مقایسه با کلر، واکنش‌پذیری بیشتری دارد.

• شعاع اتمی آن در مقایسه با گوگرد کوچک‌تر است.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۷۵- کدام مورد، نادرست است؟

(۱) در استخراج آهن، نسبت جرم «سنگ معدن آهن» استفاده‌شده به جرم «منابع معدنی دیگر» مصرف‌شده به تقریب، برابر ۲ است.

(۲) از بازگردانی هفت قوطی فولادی می‌توان یک لامپ ۶۰ وات را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.

(۳) در استخراج فلز، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

(۴) ارزیابی چرخه عمر برای ارزیابی میزان تأثیر یک فراورده بر روی محیط زیست در فرایند تولید آن به کار می‌رود.

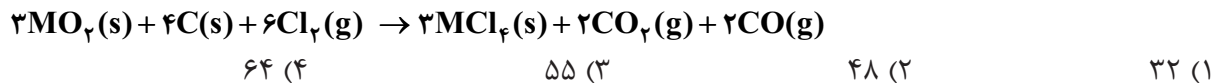
محل انجام محاسبات

- ۷۶- با توجه به جدول زیر، فلزهای X و Y در توضیحات داده شده، به ترتیب کدام فلزها هستند؟
- بازده فرایند استخراج فلز X از سنگ معدن ۲۰ درصد و از ۱/۵ تن سنگ معدن، ۱/۵ کیلوگرم فلز استخراج می‌شود.
 - درصد جرمی فلز Y در ۱۶۰ گرم خاکستری که از یک کیلوگرم گیاه برای پالایش آن به کار می‌رود، برابر ۲۵٪ است.

نماد شیمیایی فلز	قیمت هر کیلوگرم فلز (ریال)	بیشترین مقدار فلز در یک کیلوگرم از گیاه (گرم)	درصد جرمی فلز در سنگ معدن
Au	۱,۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۲
Ni	۸۲۰,۰۰۰	۳۸	۲
Cu	۴۲۵,۰۰۰	۱۴	۰/۵
Zn	۱۵۵,۰۰۰	۴۰	۵

(۱) مس - روی (۲) نیکل - طلا (۳) نیکل - مس (۴) مس - طلا

- ۷۷- اگر برای تهیه $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۲}$ مولکول کربن مونواکسید مطابق واکنش زیر، به ۱۶ گرم MO_2 نیاز باشد، جرم مولی فلز M چند گرم بر مول است؟ (بازده واکنش را ۷۵ درصد در نظر بگیرید؛ $O = ۱۶ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

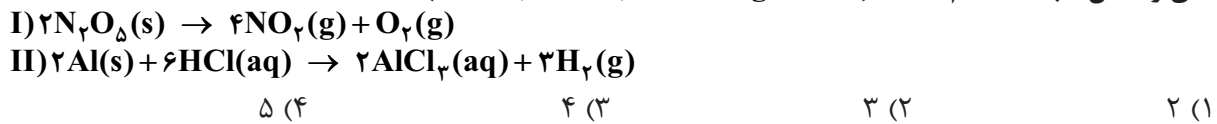


- ۷۸- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- آهنک مصرف و استخراج فلزها با آهنک برگشت آن‌ها به طبیعت به شکل سنگ معدن، به تقریب برابر است.
- فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند و بازیافت آن‌ها سبب کاهش سرعت گرمایش کره زمین می‌شود.
- کاهش رد پای کربن دی‌اکسید، کمک به توسعه پایدار کشور و از بین رفتن گونه‌های زیستی کم‌تر، برخی از مزایای بازیافت فلزها است.
- غلظت گونه‌های موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، کم‌تر است.

۳ (۴)
۱ (۳)
۲ (۲)
۴ (۱)

- ۷۹- در دما و فشار یکسان، جرم یکسانی از دی‌نیتروژن پنتااکسید و آلومینیم در واکنش‌های زیر به طور کامل مصرف می‌شوند. اگر حجم گاز تولیدشده در واکنش II، چهار برابر حجم گاز اکسیژن تولیدشده در واکنش I باشد، نسبت بازده درصدی واکنش I به II کدام است؟ ($N = ۱۴, O = ۱۶, Al = ۲۷ : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



- ۸۰- در مراحل چرخه عمر، موارد «پایداری تأمین ماده اولیه و خام»، «تأثیر حمل‌ونقل ماده خام روی محیط زیست» و «دفن کردن»، برای پاکت کاغذی و کیسه پلاستیکی، به ترتیب نسبت به هم چگونه است؟
- (۱) متفاوت - مشابه - متفاوت (۲) مشابه - متفاوت - متفاوت (۳) متفاوت - مشابه - مشابه (۴) مشابه - متفاوت - مشابه

محل انجام محاسبات

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آنها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

پاسخ نامہ آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله سوم

پایه یازدهم

تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهرا پورشیر - شمیم پهلوان شریف - فرشاد حسن زاده - خشایار خاکی - مجید رفعتی - علی شهبابی محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	یاسر عبداللہی - علی فرزاد تبار - محدثہ ملک پور

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	علیرضا کاظمی بقا	سجاد داوطلب عادل حسینی علی شهبابی	عادل حسینی - علی رضایی ماهان فنی فر
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	فرزانه خاکپاش	مهدی خوشنویس علی رضایی ماهان فنی فر - ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	ماهان فنی فر علیرضا کاظمی بقا ابوالفضل ناصری - مریم نظری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	محمد باغبان	علیرضا جباری	مهدی خوشنویس - ماهان فنی فر پارسا مرادی - ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللہی	محدثہ ملک پور	محدثہ ملک پور	احسان رحیمی	احسان رحیمی محمدرضا طاهری نژاد صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور



آزمون آزمائشی خلی سبز

سپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق دوست - راضیہ سادات خلی نسب زہرا صفری - محیا غنی فرد زہرا فرہادی مہر - مریم مسلمی زاده ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه آرائی	سحر ازلی تاش - فاطمہ بخششی مریم حسین زاده - سپیدہ سخایی مائدہ صبری - نیلوفر فرخجستہ مہدیہ گل پور - لیلا نعمت پور



حسابان یازدهم

اختلاف دو جمله متوالی که برابر $-d$ است.

در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، $a_n - 1 = S_{n-4} - S_{n-5}$ است. حاصل $a_4 - a_5$ کدام است؟ (S_n مجموع n جمله اول است.)

- (۱) -3 (۲) 3
 (۳) -2 (۴) 2

۱

مشاوره دنباله‌های حسابی و هندسی همیشه مورد توجه طراحان کنکور بوده است و معمولاً در هر کنکور از هر کدام از آنها یک سؤال طرح می‌شود.

Hint

ابتدا محاسبه کنید که $S_{n-4} - S_{n-5}$ برابر کدام جمله می‌شود، سپس با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی آن جمله را بر حسب n و d بنویسید و آن را برابر $3n - 1$ قرار دهید، d به دست می‌آید.

درس‌Box

جمله عمومی دنباله حسابی: جمله n ام یک دنباله حسابی به صورت زیر نوشته می‌شود که همان جمله عمومی دنباله حسابی است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

به عنوان مثال:

$$a_4 = a_1 + 3d \text{ یا } a_5 = a_1 + 4d$$

مجموع n جمله اول دنباله حسابی: در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول دنباله را با S_n نمایش می‌دهیم و از طریق رابطه‌های زیر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

توجه: دنباله عددی همان دنباله حسابی است.

گام اول: می‌دانیم که S_{n-4} ، مجموع $n-4$ جمله اول و S_{n-5} مجموع $n-5$ جمله اول است، پس حاصل $S_{n-4} - S_{n-5}$ برابر می‌شود با جمله $n-4$ ام:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-5} + a_{n-4} + \dots + a_n}_{S_{n-4}} - \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-5}}_{S_{n-5}}$$

$$S_{n-4} - S_{n-5} = a_{n-4} \xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال } S_{n-4} - S_{n-5} = 3n-1} 3n-1 = a_{n-4} (*)$$

گام دوم: با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی، جمله $n-4$ ام به صورت $a_{n-4} = a_1 + (n-4-1)d$ نوشته می‌شود؛ پس طبق رابطه (*) خواهیم داشت:

$$3n-1 = a_{n-4} \Rightarrow 3n-1 = a_1 + \overbrace{(n-4-1)d}^{n-5} \Rightarrow 3n-1 = a_1 + nd - 5d \xrightarrow{\text{ضرب } n \text{ در دو طرف یکسان}} d = 3$$

گام سوم: حال به سراغ خواسته سؤال که $a_4 - a_5$ است می‌رویم:

$$a_4 - a_5 = (a_1 + 3d) - (a_1 + 4d) = a_1 + 3d - a_1 - 4d = -d \xrightarrow{d=3} a_4 - a_5 = -3$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

دنباله‌های $a_n = 4^{n-m}$ و $b_n = 2^{n+m}$ مفروض اند. اگر مجموع ۵ جمله اول دنباله $c_n = 32a_n - 11b_n$ برابر با صفر باشد، مقدار m کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲)

۱ (۱)



مجموع ۵ جمله اول دنباله $32 \times a_n$ و مجموع ۵ جمله اول دنباله $11 \times b_n$ رو برابر قرار بده.



درس‌Box

دنباله $t_n = t_1 r^{n-1}$ دنباله هندسی است که در آن نسبت دو جمله متوالی، مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت، قدرنسبت دنباله است (همان r یا q).

مجموع n جمله اول این دنباله از رابطه $S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}$ به دست می‌آید.

مثلاً $t_n = 3 \times 2^{n-1}$ یک دنباله هندسی با قدرنسبت است ۴ که مجموع n جمله اول آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t_1 = 3 \times 2^{2-1} = 6$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{6 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = 2 \times (4^n - 1) = 2^{2n+1} - 2$$

گام اول: ابتدا برویم سراغ دنباله c_n و ببینیم برای محاسبه ۵ جمله اول آن به چه چیزهایی نیاز داریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$c_n = 32a_n - 11b_n$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 + \dots + c_5 = 32a_1 - 11b_1 + 32a_2 - 11b_2 + \dots + 32a_5 - 11b_5$$

$$= 32(a_1 + a_2 + \dots + a_5) - 11(b_1 + b_2 + \dots + b_5)$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{\Delta, c} = 32S_{\Delta, a} - 11S_{\Delta, b}$$

که $S_{\Delta, a}$, $S_{\Delta, b}$, $S_{\Delta, c}$ نمادگذاری خودمان برای تفکیک مجموع ۵ جمله اول دنباله‌های a , b و c است.

گام دوم: $S_{\Delta, c}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$32S_{\Delta, a} - 11S_{\Delta, b} = 0 \Rightarrow 32S_{\Delta, a} = 11S_{\Delta, b} \quad (*)$$

گام سوم: پس باید مجموع ۵ جمله اول دنباله‌های a و b را حساب کنیم:

$$a_n = 4^{1-m} \times 4^{n-1} \Rightarrow S_{\Delta, a} = 4^{1-m} \times \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 4^{1-m} \times \frac{1024 - 1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta, a} = 4^{1-m} \times 341$$

$$b_n = 2^{1+m} \times 2^{n-1} \Rightarrow S_{\Delta, b} = 2^{1+m} \times \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 2^{1+m} \times 31$$

گام چهارم: در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$32 \times 4^{1-m} \times \underbrace{341}_{11 \times 31} = 11 \times 2^{1+m} \times 31 \Rightarrow 32 \times 2^{2-2m} = 2^{1+m}$$

$$\Rightarrow 2^{1+m+2m-2} = 32 \Rightarrow 2^{3m-1} = 2^5 \Rightarrow 3m-1=5 \Rightarrow m=2$$

ریاضیات

ماشین f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد حقیقی یک واحد از چهار برابر مربع آن کم می‌کند و به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. به ازای کدام مقدار ورودی، خروجی تابع ۳۵ خواهد شد؟

۳

$$\frac{3}{2} \quad 4$$

$$-1 \quad 3$$

$$-3 \quad 2$$

$$\sqrt{17} \quad 1$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا ضابطه تابع را می‌نویسیم:

$$x \text{ عدد حقیقی} \xrightarrow{\text{مربع عدد}} x^2 \xrightarrow{\text{۴ برابر عدد}} 4x^2 \xrightarrow{\text{یک واحد کم می‌کند}} 4x^2 - 1$$

پس $f(x) = 4x^2 - 1$ است.

گام دوم: ضابطه را برابر ۳۵ قرار می‌دهیم:

$$4x^2 - 1 = 35 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

هم دامنه تابع $f(x) = x(|x| - 2)$ مجموعه $\{0, \frac{1}{4}, 1\}$ است. دامنه این تابع حداکثر چند عضو دارد؟

۴

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

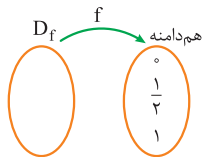


Hint را با اعضای مجموعه داده شده برابر قرار بده و ۳ معادله حل کن.

در تعریف تابع f به صورت $\begin{cases} A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ مجموعه A دامنه و مجموعه B هم دامنه است و به این معناست که خروجی تابع (برد) چه مقادیری را می تواند بپذیرد؛ در واقع برد تابع زیرمجموعه هم دامنه است.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: نمایش پیکانی این تابع به صورت مقابل است:

پس برای به دست آوردن دامنه تابع f کافی است محاسبه کنیم به ازای چه مقدار یا مقادیری، خروجی تابع برابر مقادیر $0, \frac{1}{4}$ یا 1 می شود.

گام دوم: پس باید معادله های زیر را حل کنیم:

$$\text{الف) } (|x| - 2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{ب) } (|x| - 2)x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x > 0: x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \\ x < 0: -x^2 - 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\text{پ) } (|x| - 2)x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 0: x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 1 + \sqrt{2} \\ x < 0: -x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

گام سوم: پس در مجموع به ازای ۸ عضو مجموعه $\left\{ \pm 2, -1, 0, -1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}, 1 + \sqrt{\frac{3}{4}}, 1 + \sqrt{2} \right\}$ برد تابع f زیرمجموعه $\left\{ 0, \frac{1}{4}, 1 \right\}$ است، یعنی دامنه تابع f حداکثر ۸ عضو دارد.

ریاضیات

منحنی $f(x) = |x^2 - a|x|$ ($a > 0$) از کدام نواحی مختصات نمی‌گذرد؟



- (۲) سوم و چهارم
(۴) اول، سوم و چهارم

- (۱) اول و دوم
(۳) دوم و چهارم



مشاوره برای حل این سؤال کافی است که به رسم سهمی مسلط باشید.

Hint تابع $y = |x^2 - a|x|$ را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید و با توجه به مثبت بودن a ، آن را رسم کنید، سپس تابع f که در سؤال داده شده است را از روی آن رسم کنید تا به خواسته سؤال برسید.



نکته برای رسم یک سهمی لازم است که عرض از مبدأ، ریشه‌ها و مختصات رأس را داشته باشیم.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا تابع $y = |x^2 - a|x|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$x^2 - a|x| = \begin{cases} x^2 - ax & x > 0 \\ x^2 + ax & x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: عرض از مبدأ ضابطه‌های به دست آمده برابر صفر است، حال ریشه‌ها و رأس هر یک را به دست می‌آوریم تا بتوانیم سهمی $y = |x^2 - a|x|$ را رسم کنیم:

$$x > 0: y = x^2 - ax$$

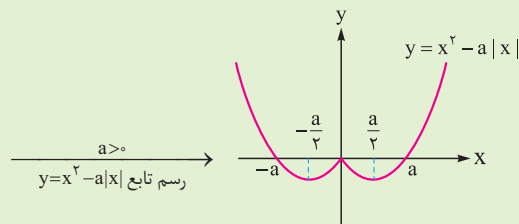
$$\text{رأس: } x_s = \frac{-(-a)}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{ریشه‌ها: } x^2 - ax = 0 \Rightarrow x(x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$x < 0: y = x^2 + ax$$

$$\text{رأس: } x_s = -\frac{a}{2}$$

$$\text{ریشه‌ها: } x^2 + ax = 0 \Rightarrow x(x+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -a \end{cases}$$



گام سوم: با توجه به نمودار تابع $y = |x^2 - a|x|$ ، نمودار تابع $y = ||x^2 - a|x||$ را رسم می‌کنیم، به این صورت که هر قسمت از نمودار $y = |x^2 - a|x|$ که زیر محور x قرار دارد را نسبت به همان محور قرینه و سپس آن را حذف می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید تابع رسم‌شده از نواحی سوم و چهارم نمی‌گذرد.

نیازی به رسم نیست. می‌دانیم چون قدرمطلق همواره مثبت است، قطعاً از ربع‌های سوم و چهارم نمی‌گذرد؛ پس به راحتی گزینه (۲) را می‌زنیم.



ریاضیات

چه تعداد تابع از $A = \{1, 2, 3\}$ به $B = \{a, b, c, d\}$ می‌توان نوشت به طوری که $f(3) \neq b$ باشد؟

۶۴ (۲)

۱۹۲ (۱)

۸۱ (۴)

۴۸ (۳)

مشاوره با سؤال آسانی مواجه هستید و کافی است بتوانید از اصل ضرب به درستی استفاده کنید.

Hint

درتس Box

ببینید که برای هر عضو از A چند انتخاب وجود دارد، با توجه به شرط سؤال و اصل ضرب، جواب را به دست آورید.

تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B

تعداد توابع ممکن که می‌توان از مجموعه A به مجموعه B نوشت برابر است با:

$$(n(B))^{n(A)}$$

چراکه هر عضو از مجموعه A به تعداد اعضای مجموعه B ، یعنی $n(B)$ انتخاب خواهد داشت، پس طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\underbrace{n(B) \times n(B) \times \dots \times n(B)}_{n(A)}$$

توجه: اگر در مسئله شرطی وجود داشته باشد، با توجه به شرط، تعداد انتخاب‌های اعضای مجموعه A کم می‌شود.

گام اول: برای این‌که از A به B یک تابع داشته باشیم، عضو ۱ از مجموعه A چهار عضو از مجموعه B را می‌تواند انتخاب کند، هم‌چنین عضو ۲ نیز چهار عضو را می‌تواند انتخاب کند، اما طبق صورت سؤال $f(3) \neq b$ ، پس عضو ۳، نمی‌تواند b را انتخاب کند؛ پس ۳ انتخاب برایش باقی می‌ماند.

گام دوم: با توجه به اصل ضرب و توضیحات داده‌شده در گام اول، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \times & 4 & \times & 3 & = & 48 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{تعداد عضوهای} & & \text{تعداد عضوهای} & & \text{تعداد عضوهای} & & \\ \text{که ۱ انتخاب می‌کند} & & \text{که ۲ انتخاب می‌کند} & & \text{که ۳ انتخاب می‌کند} & & \end{array}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

اگر $f(x) = \begin{cases} 1+a & ; x \leq -a \\ a & ; x > a-2 \end{cases}$ باشد، تابع $g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$ با کدام تابع مساوی است؟ Y

$$y = 3 - 2f(x+1) \quad (2)$$

$$y = f(x+1) - 3 \quad (1)$$

$$y = 3 - 2f(x-1) \quad (4)$$

$$y = f(x-1) - 3 \quad (3)$$



Hint اول a رو به دست بیار، حالا چه جوری به دست میاری؟ ... از روی دامنه، ضابطه f به دست میاد. کار خاصی نداری، نهایتاً گزینه‌های مختلف رو امتحان می‌کنی.

درس‌Box

دو تابع با هم مساوی هستند، اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

(1) دامنه دو تابع برابر باشد.

(2) ضابطه‌های دو تابع به ازای همه اعضای دامنه برابر باشند.

در مسائل تساوی توابع، در ابتدا دامنه‌ها را چک می‌کنیم، اگر برابر نباشند، تکلیف مشخص است، اما اگر برابر باشند، می‌رویم سراغ ضابطه‌ها و غالباً ضابطه‌ها به گونه‌ای هستند که قابلیت تبدیل شدن به یکدیگر را دارند، مثل $\sqrt{x^2}$ ، $|\sqrt{x}|$.

انتقال

تأثیر روی $f(x)$	نماد ریاضی ($a, b > 0$)	نوع تبدیل
a واحد به راست	$f(x-a)$	انتقال افقی
a واحد به چپ	$f(x+a)$	
b واحد به بالا	$f(x)+b$	انتقال عمودی
b واحد به پایین	$f(x)-b$	
قرینه نسبت به محور x ها	$-f(x)$	قرینه یابی
قسمت زیر محور x را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$ f(x) $	تبدیل قدرمطلق

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا باید پارامتر a را حساب کنیم. دقت کنید که دامنه تابع g برابر \mathbb{R} است و با انتقال این تابع نیز هم‌چنان دامنه \mathbb{R} خواهد بود، این یعنی دامنه تابع f باید \mathbb{R} باشد و این زمانی امکان‌پذیر است که $-a$ و $a-2$ با هم برابر باشند.

$$\Rightarrow a-2 = -a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

گام دوم: پس ضابطه تابع f پیدا شد:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq -1 \\ 1 & ; x > -1 \end{cases}$$

و برای این که انتقال یافته نمودار تابع f را با نمودار تابع g یکسان بگیریم، لازم است نمودار تابع f را یک واحد به راست انتقال دهیم:

$$f(x-1) = \begin{cases} 2 & ; x-1 \leq -1 \\ 1 & ; x-1 > -1 \end{cases} = \begin{cases} 2 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

گام سوم: پس یکی از گزینه‌های (3) یا (4) درست است. حال هر دوی این ضابطه‌ها را چک می‌کنیم تا ببینیم کدام یک با تابع g مساوی می‌شود:

$$f(x-1) - 3 = \begin{cases} 2-3 & ; x \leq 0 \\ 1-3 & ; x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & ; x \leq 0 \\ -2 & ; x > 0 \end{cases} \quad \text{گزینه (3):}$$

$$3 - 2f(x-1) = \begin{cases} 3-2(2) & ; x \leq 0 \\ 3-2(1) & ; x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \quad \text{گزینه (4):} \quad \checkmark$$

ریاضیات

برد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 4}$ با دامنه $[-m, m]$ شامل ۳ عدد صحیح است. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۴ (۴)

۹ (۳)

مشاوره بر روی رسم توابع باید تبحر خاصی داشته باشید، چراکه در حل سؤالات به صورت مستقیم و غیرمستقیم به کمک شما می‌آید.

Hint

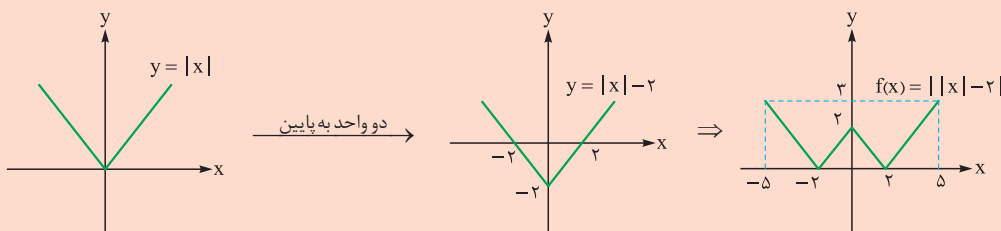
تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 4}$ را به صورت $f(x) = \sqrt{|x|^2 - 4|x| + 4}$ بنویسید و سپس به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای ضابطه را ساده‌تر کنید، حالا نوبت رسم تابع است تا به خواسته سؤال برسید.

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: چون $x^2 = |x|^2$ ابتدا تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 4}$ را به صورت $f(x) = \sqrt{|x|^2 - 4|x| + 4}$ می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| + 4} \xrightarrow{x^2 = |x|^2} f(x) = \sqrt{|x|^2 - 4|x| + 4} \Rightarrow f(x) = \sqrt{(|x| - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = ||x| - 2|$$

گام دوم: نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را به ترتیب از روی نمودار $y = |x|$ به کمک قوانین انتقال رسم می‌کنیم:



گام سوم: طبق فرض سؤال برد تابع f در بازه $[-m, m]$ شامل سه عدد صحیح است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که آن سه عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ هستند و طبق نمودار، m می‌تواند در بازه $(2, 5]$ متغیر باشد. گام چهارم: پس مقادیر صحیح m می‌تواند ۲، ۳ و ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۹ است.

بیشترین مقدار تابع $f(x) = mx^2 + 6x + m$ برابر -8 است. در این صورت $f(1)$ کدام است؟

۹

عرض رأس سهمی = -8	-9 (۲)	12 (۱)
	-12 (۴)	9 (۳)

Hint

به کمک رابطه مربوط به عرض رأس سهمی، m رو به دست بیار. حالا می‌تونی $f(1)$ رو به دست بیاری.

درس‌Box

سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

رأس یک سهمی، بالاترین یا پایین‌ترین نقطه آن سهمی است.

• اگر $a > 0$ باشد (دهانه سهمی رو به بالا باشد)، رأس سهمی نقطه مینیمم سهمی است و برد آن $[y_s, +\infty)$ است.



• اگر $a < 0$ باشد (دهانه سهمی رو به پایین باشد)، رأس سهمی نقطه ماکزیمم سهمی است و برد آن $(-\infty, y_s]$ است.



به دست آوردن مختصات رأس سهمی:

$$x_s = -\frac{b}{2a} \text{ طول رأس سهمی}$$

می‌توانیم مقدار سهمی را به ازای x_s را به دست آوریم. $f(x_s)$ عرض رأس سهمی یا

$$\text{می‌توانیم از رابطه } y_s = -\frac{\Delta}{4a} \text{ استفاده کنیم. } (\Delta = b^2 - 4ac)$$

پس مختصات رأس سهمی برابر است با:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\downarrow$$

$$= f(x_s)$$

محور تقارن یک سهمی برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن m):

با توجه به فرض سؤال عرض رأس سهمی (مقدار ماکزیمم) برابر -8 است، پس:

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -8 \Rightarrow \frac{\Delta}{4a} = 8 \xrightarrow{\Delta = 6^2 - 4m(m)} \frac{36 - 4m^2}{4m} = 8$$

$$36 - 4m^2 = 32m \Rightarrow 4m^2 + 32m - 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 + 8m - 9 = 0 \Rightarrow (m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -9 \\ m = 1 \end{cases}$$

با توجه به این که سهمی ماکزیمم دارد، دهانه سهمی رو به پایین است ($m < 0$)؛ بنابراین $m = -9$ قابل قبول است و $m = 1$ غیر قابل قبول.

گام دوم (محاسبه $f(1)$):

با جای گذاری $m = -9$ در ضابطه سهمی داریم:

$$f(x) = -9x^2 + 6x - 9$$

بنابراین:

$$f(1) = -9(1)^2 + 6(1) - 9 = -9 + 6 - 9 = -12$$

با توجه به شکل زیر، اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6}$ باشد، حاصل $(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2$ کدام است؟

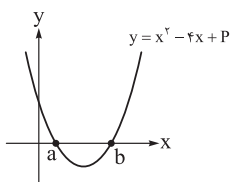
۱۰

۵۶ (۱)

۱۶ (۲)

۲۶ (۳)

۴۶ (۴)



Hint با توجه به مجموع ریشه‌ها در رابطه داده شده می‌تونی حاصل ضرب ریشه‌ها رو به دست بیاری و ...

نکته در این Box

در یک معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $\Delta > 0$ باشد؛ مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و تفاضل ریشه‌ها طبق جدول زیر به دست می‌آیند (α و β را ریشه‌های معادله در نظر می‌گیریم):

مجموع ریشه‌ها S	حاصل ضرب ریشه‌ها P	تفاضل ریشه‌ها D
$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$	$ \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } = \sqrt{S^2 - 4P}$

با توجه به S و P برای روابط بین ریشه‌ها داریم:

مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$	اثبات: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$	اثبات: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
مجموع معکوس ریشه‌ها: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$	اثبات: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$

نکته اگر ریشه‌ها قرینه باشند، یعنی به صورت α و $\beta = -\alpha$ باشند، جمع ریشه‌ها برابر صفر است.

$$S = \alpha + \beta = \alpha + (-\alpha) = 0$$

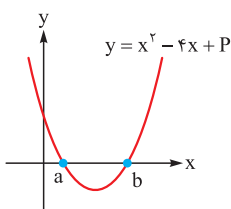
اگر ریشه‌ها معکوس هم باشند، یعنی به صورت α و $\beta = \frac{1}{\alpha}$ باشند، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر یک است.

$$P = \alpha\beta = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن حاصل ضرب ریشه‌ها):

با توجه به سهمی داده شده، a و b صفرهای (ریشه‌های) سهمی $y = x^2 - 4x + P$ هستند؛ بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S = a + b = -\frac{-4}{1} = 4 \quad (*)$$



از طرفی، طبق فرض سؤال تساوی $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6}$ برقرار است؛ پس داریم:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 6$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 6 \Rightarrow S + 2\sqrt{P} = 6$$

که با جای‌گذاری (*) در آن داریم:

$$S + 2\sqrt{P} = 6 \xrightarrow{S=4} 4 + 2\sqrt{P} = 6 \Rightarrow 2\sqrt{P} = 2 \Rightarrow \sqrt{P} = 1 \Rightarrow P = 1$$

گام دوم (به دست آوردن حاصل $(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2$):

از آن‌جا که از گام قبل $P = 1$ به دست آمد، پس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر یک است، بنابراین یکی از ریشه‌ها معکوس دیگری است.

$$P = ab = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{a} \\ a = \frac{1}{b} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2 \xrightarrow{b = \frac{1}{a}, a = \frac{1}{b}} (a + a)^2 + (b + b)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

$$= 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2) \xrightarrow{a^2 + b^2 = S^2 - 2P} 4(S^2 - 2P) = 4(4^2 - 2(1)) = 4(16 - 2) = 4 \times 14 = 56$$

ریاضیات

مجموع جواب‌های معادله $(2x-1)^3 - (2x-1)^2 = 8(x-1)$ کدام است؟ ۱۱

۱ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{1}{3}$ (۲)

۴ (۱)



Hint به تغییر متغیر $t = 2x - 1$ فکر کن.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در سمت چپ تساوی واضح است که می‌توان $2x - 1$ را یک متغیر جدید در نظر گرفت، اما سمت راست تساوی ناواضح است؛ پس سعی می‌کنیم در سمت راست هم عبارت $2x - 1$ را بسازیم:

$$8(x-1) = 4(2x-2) = 4((2x-1)-1)$$

پس اگر $2x - 1$ را t در نظر بگیریم، معادله ما به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$t^3 - t^2 = 4(t-1) \Rightarrow t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$$

گام دوم: با تجزیه سعی می‌کنیم این معادله درجه سوم را ساده‌تر حل کنیم:

$$t^2(t-1) - 4(t-1) = 0 \Rightarrow (t^2 - 4)(t-1) = 0 \Rightarrow (t-2)(t+2)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2, -2, 1$$

گام سوم: $2x - 1$ را مساوی مقادیر به دست آمده قرار می‌دهیم تا جواب‌های x به دست بیاید:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1 = -2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \\ 2x_2 - 1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ 2x_3 - 1 = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ است.

معادله $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-a}{x^2-2a} = 1$ با شرط $a \neq 0$ چند جواب دارد؟ ۱۲

(۲)

(۱) صفر

(۴) بی شمار

(۳) ۱ یا بی شمار ۱۲
درتس Box

به معادلاتی که در آن عبارت گویا (چندجمله‌ای) باشد، معادله گویا می‌گوییم. روش حل این معادلات به این صورت است که دو طرف تساوی را با مخرج مشترک‌گیری به یک کسر واحد تبدیل می‌کنیم و پس از آن با طرفین وسطین معادله را از حالت کسری خارج و حل می‌کنیم. فقط حواسمان به ریشه‌های مخرج باشد.

مثال: $\frac{2x-1}{3x+1} + 1 = \frac{x+3}{x-2}$

$$\frac{2x-1+3x+1}{3x+1} = \frac{x+3}{x-2} \Rightarrow \frac{5x}{3x+1} = \frac{x+3}{x-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5x(x-2) = (3x+1)(x+3)$$

مخرج مشترک‌گیری

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x = 3x^2 + 10x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 20x - 3 = 0$$

$$\Delta = 400 + 24 = 424 = 4 \times 106 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{4 \times 106}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{106}}{2}$$

گام اول: سمت چپ تساوی را با مخرج مشترک‌گیری به یک کسر واحد تبدیل می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{(x+1)(x^2-2a) + (x-a)(x+2)}{(x+2)(x^2-2a)} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + x^2 - 2ax - 2a + x^2 + (2-a)x - 2a}{x^2 + 2x^2 - 2ax - 4a} = 1$$

گام دوم: حالا طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^2 + 2x^2 + (2-3a)x - 4a = x^2 + 2x^2 - 2ax - 4a$$

$$\Rightarrow (2-3a)x = -2ax$$

گام سوم: در معادله بالا اگر $2-3a$ و $-2a$ با هم برابر باشند، معادله بی‌شمار جواب دارد:

$$2-3a = -2a \Rightarrow a = 2$$

و اگر $a \neq 2$ باشد، تنها جواب معادله $x = 0$ خواهد بود.

معادله $\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}} + \sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}} = 10-x$ چند جواب حقیقی دارد؟ **۱۳**

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳



مشاوره اگر سر جلسه آزمون به این سؤال پاسخ ندادید، نگران نباشید. این سؤال از سؤالات دشوار آزمون بوده است. پاسخ را ببینید و ایده را به ذهن بسپارید.



Hint

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای عبارت‌های زیر رادیکال‌ها را تجزیه کنید، سپس توان‌های ۲ با فرجه رادیکال‌ها ساده می‌شوند و می‌توانید جواب(های) معادله را به دست آورید.



درسی Box

معادلات گنگ

برای حل معادلات گنگ باید عبارت رادیکالی را در یک طرف تنها کرده و سپس طرفین را به توان ۲ رساند.

توجه:

(۱) بعد از حل معادله گنگ حتماً باید جواب‌های به دست آمده را در معادله اولیه قرار دهید؛ اگر در آن صدق کند، جواب قابل قبول و اگر در آن صدق نکند، جواب غیر قابل قبول است.

(۲) برخی معادلات گنگ دارای ظاهر پیچیده‌ای هستند و بیش از یک رادیکال در آن‌ها وجود دارد که به توان ۲ رساندن کار را پیچیده می‌کند. در این قبیل معادلات باید با استفاده از مواردی از قبیل تغییر متغیر، تجزیه و ... معادله را ساده کرد.

رادیکال‌های مرکب

معمولاً رادیکال‌هایی که به صورت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ نوشته می‌شود، رادیکال مرکب نامیده می‌شود. در این جا برای این که این رادیکال‌های را ساده کنیم، از اتحاد مربع دوجمله‌ای کمک می‌گیریم؛ به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+6\sqrt{2}+2} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = |3+\sqrt{2}| = 3+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا به کمک اتحادهای مربع دوجمله‌ای و رادیکال‌های مرکب، رادیکال‌های سمت چپ را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3+4\sqrt{x+3}+4} = \sqrt{(2+\sqrt{x+3})^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}} = |2+\sqrt{x+3}|$$

توان ۲ با فرجه رادیکال ساده می‌شود.

$$\xrightarrow{2+\sqrt{x+3}>0} \sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}} = 2+\sqrt{x+3}$$

داخل قدرمطلق مثبت است.

$$\sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}} = \sqrt{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4})^2}$$

$$\sqrt{\frac{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}}{\sqrt{(x+3)(x+4)}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4})^2}{\sqrt{(x+3)(x+4)}}}$$

$$\rightarrow \sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}} = |\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}|$$

توان ۲ با فرجه رادیکال ساده می‌شود.

$$\xrightarrow{\sqrt{x+4}>\sqrt{x+3}, x \geq -3} \sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}} = -\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}$$

به ازای هر $x \geq -3$ ، پس داخل قدرمطلق منفی است.

گام دوم: با توجه به عبارت‌های به دست آمده، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}} + \sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}} = 10-x \Rightarrow 2 + \sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = 10-x$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt{x+4} = 10-x \Rightarrow \sqrt{x+4} = 8-x (*)$$

گام سوم: دو طرف معادله (*) را به توان ۲ می‌رسانیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$\sqrt{x+4} = 8-x \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x+4 = 64-16x+x^2 \Rightarrow x^2-17x+60=0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=12 \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

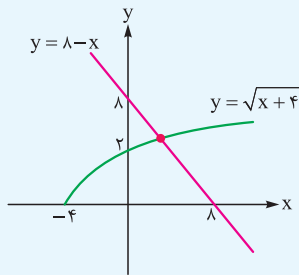
$$x=12 \Rightarrow \sqrt{12+4} = 8-12 \Rightarrow 4 = -4 \quad \times$$

$$x=5 \Rightarrow \sqrt{5+4} = 8-5 \Rightarrow 3 = 3 \quad \checkmark$$

پس تنها جواب معادله $x=5$ است و معادله داده شده فقط یک جواب دارد.

در گام دوم، به روش هندسی نیز می‌توانیم خواسته سؤال را به دست آوریم، چرا که سؤال فقط تعداد جواب‌های معادله را می‌خواهد. نگاه کنید:

بهبور دیگره



می‌بینیم که نمودارها در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ پس معادله داده شده فقط یک جواب دارد.

اختلاف مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{4x-x^2-1}{x} = \frac{8-\sqrt{16x^2+16}}{2+\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$ کدام است؟

|S-P|

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مشاوره در معادلات عجیب و غریب و پیچیده مثل معادله این سؤال، اولین چیزی که باید به ذهنتان بیاید، تغییر متغیر است.

Hint

ابتدا در سمت چپ به کمک تفکیک کسرها و در سمت راست به کمک فاکتورگیری عبارت را ساده کنید و سپس از تغییر متغیر

$$t = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$$

استفاده کنید تا به خواسته سؤال برسید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا سمت چپ را به کمک تفکیک کسرها ساده می‌کنیم:

$$\frac{4x-x^2-1}{x} = \frac{4x}{x} - \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = 4 - x - \frac{1}{x} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

گام دوم: حال به سراغ ساده‌سازی سمت راست می‌رویم:

$$\frac{8-\sqrt{16x^2+16}}{2+\sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \frac{8-\sqrt{16(x^2+1)}}{2+\sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \frac{8-4\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}{2+\sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \frac{8-4\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{2+\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$$

گام سوم: در معادله به دست آمده از تغییر متغیر $t = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ استفاده می‌کنیم:

$$4 - \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{8-4\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{2+\sqrt{x+\frac{1}{x}}} \xrightarrow{t=\sqrt{x+\frac{1}{x}}} 4-t^2 = \frac{8-4t}{2+t} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 8-4t = (4-t^2)(2+t)$$

$$\Rightarrow 4(2-t) = (2-t)(2+t)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2-t=0 \Rightarrow t=2 \\ \text{یا} \\ 4 = (2+t)^2 = 4+4t+t^2 \Rightarrow t(t+4)=0 \Rightarrow t=0 \text{ یا } -4 \end{cases}$$

هر دو غیر قابل قبول -۴ یا ۰ است.

نکته برای هر $x \in \mathbb{R}$ همواره خواهیم داشت:

$$x > 0: x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$x < 0: x + \frac{1}{x} \leq -2$$

به عبارت دیگر مجموع هر عدد حقیقی مثبت با معکوسش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوسش همواره کوچک‌تر یا مساوی -۲ است.

گام چهارم: با توجه به مقدار به دست آمده برای t به سراغ حل نهایی معادله می‌رویم:

$$t = \sqrt{x + \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

مجموع جواب‌های این معادله برابر $S = 4$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر $P = 1$ است؛ در نتیجه داریم:

$$|S-P| = 3$$

۱۵ قرینه نقطه $A(2, -2)$ نسبت به نقطه $B(3, 4)$ کدام نقطه است؟

(۲) $(\frac{5}{2}, 1)$

(۱) $(10, 4)$

(۴) $(4, 10)$

(۳) $(1, \frac{5}{2})$



Hint از مفاهیم مختصات نقطه وسط یک پاره خط استفاده کن و سؤال رو حل کن.

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

درس Box

اگر M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

این نقطه وسط در خیلی از سؤال‌ها می‌تونه کاربرد داشته باشد، مثل چی؟



مسئله قرینه نقطه نسبت به نقطه: اگر بخواهیم قرینه نقطه‌ای مانند A را نسبت به M پیدا کنیم از نقطه A به M وصل می‌کنیم و سپس به اندازه AM از سمت دیگر M امتداد می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. مشخص است که نقطه M وسط A و A' است.

پس:

$$\frac{A + A'}{2} = M \Rightarrow A' = 2M - A \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A \\ y_{A'} = 2y_M - y_A \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اگر قرینه نقطه $A(2, -2)$ نسبت به نقطه $B(3, 4)$ را $A'(x_{A'}, y_{A'})$ در نظر بگیریم، با توجه به درس باکس داریم:

$$x_{A'} = 2x_B - x_A = 2(3) - 2 = 4$$

$$y_{A'} = 2y_B - y_A = 2(4) - (-2) = 8 + 2 = 10$$

بنابراین مختصات A' به صورت $A'(4, 10)$ است.

ریاضیات

۱۶

خط $mx + 3y + 3 = 0$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{13}$ و مرکز $O(-1, 4)$ مماس است. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

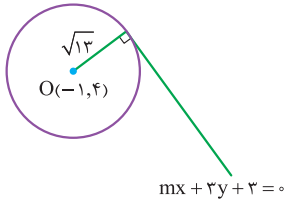
۲ (۱)



مشاوره این سؤال از سؤالات آسان این آزمون است و فقط کمی محاسباتش طولانی است.

 **Hint**

با توجه به نکته گفته شده فاصله نقطه O از خط را برابر $\sqrt{13}$ قرار دهید و با توجه به فرمول فاصله نقطه از خط، پاسخ را به دست آورید.

 **نکته**
 **پاسخ خیلی تشریحی**


خط مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.
گام اول: می‌دانیم که خط مماس بر دایره در نقطه تماس، بر شعاع عمود است، چون شعاع دایره $\sqrt{13}$ است و مرکز آن $O(-1, 4)$ است، پس فاصله نقطه $O(-1, 4)$ از خط $mx + 3y + 3 = 0$ برابر $\sqrt{13}$ است. با توجه به فرمول فاصله نقطه از خط خواهیم داشت:

$$\text{فاصله نقطه } O(-1, 4) \text{ از } mx + 3y + 3 = 0: \frac{|m(-1) + 3(4) + 3|}{\sqrt{m^2 + 3^2}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \frac{|-m + 15|}{\sqrt{m^2 + 9}} = \sqrt{13} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} \frac{m^2 - 30m + 225}{m^2 + 9} = 13$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m^2 - 30m + 225 = 13m^2 + 117 \Rightarrow 12m^2 + 30m - 108 = 0$$

گام دوم: معادله به دست آمده در گام اول را حل می‌کنیم:

$$12m^2 + 30m - 108 = 0 \xrightarrow{\div 3} 4m^2 + 10m - 36 = 0 \Rightarrow (2m+9)(2m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2m+9=0 \Rightarrow m = -\frac{9}{2} \\ 2m-4=0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$m = 2$ در گزینه‌ها موجود است؛ پس پاسخ گزینه (۱) است.

بهبود دیگر در انتهای همان گام اول با جای‌گذاری گزینه‌ها در معادله به دست آمده، می‌توانستیم به پاسخ برسیم.

در مربع ABCD، قطر BD منطبق بر خط $3x + 4y + 15 = 0$ است. اگر یکی از رئوس آن نقطه $A(5, 3)$ باشد، طول ضلع مربع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

$$۸/۴ (۲)$$

$$۱۰/۵ (۱)$$

$$۱۲/۵ (۴)$$

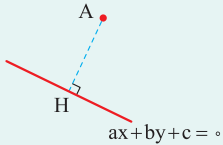
$$۶/۵ (۳)$$

Hint به کمک فاصله نقطه از خط، اندازه قطر رو به دست بیار. حالا می‌تونی اندازه ضلع هم به دست بیاری.

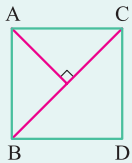
فاصله نقطه از خط

درس‌Box

اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

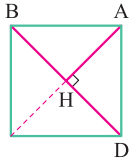


از کاربردهای فاصله نقطه از خط، محاسبه اندازه قطر مربع است.

قطر مربع: فاصله رأس A تا قطر BC برابر نصف قطر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه اندازه نصف قطر):

رأس $A(5, 3)$ در معادله خط شامل قطر BD یعنی $3x + 4y + 15 = 0$ صدق نمی‌کند، بنابراین این رأس روی این قطر قرار ندارد و روبه‌روی آن است:



$$A(5, 3) \left. \begin{array}{l} \\ 3x + 4y + 15 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فاصله نقطه از خط}} AH = \frac{|3(5) + 4(3) + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{42}{\sqrt{25}} = \frac{42}{5}$$

گام دوم (محاسبه اندازه قطر):

آنچه در گام اول به دست آوردیم برابر نصف قطر است، پس اندازه قطر ۲ برابر آن است.

$$\text{قطر } (d) = 2 \left(\frac{42}{5} \right) = \frac{84}{5}$$

گام سوم (محاسبه طول ضلع):

$$\text{طول ضلع} = \frac{\text{قطر}}{\sqrt{2}} = \frac{84}{5\sqrt{2}} = \frac{84\sqrt{2}}{10} = 8/4\sqrt{2}$$

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط $y = x + 1$ و $2x - 2y = 3$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

$$\frac{9}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{25}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{25}{8} \quad (۳)$$

مشاوره برای حل این سؤال باید درک خوبی از وضعیت دو خط نسبت به هم داشته باشید.



Hint

ابتدا وضعیت دو خط را مشخص کنید و سپس به کمک نکات گفته شده، طول ضلع مربع را محاسبه کنید.

درس‌Box

فاصله دو خط موازی

برای پیدا کردن فاصله دو خط موازی، از دو روش زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

(۱) یک نقطه به دلخواه از یکی از خطوط انتخاب کنیم و فاصله آن نقطه از خط دیگر را به دست آوریم.

(۲) دو خط را به فرم‌های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ دریاوریم (یعنی ضرایب x و y یکسان شود) و سپس از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اگر معادله یک خط را به فرم کلی $ax + by + c = 0$ بنویسیم، شیب آن برابر می‌شود با:

$$m = \frac{-a}{b}$$

اگر شیب دو خط برابر باشد، آن دو خط با هم موازی‌اند و بالعکس.

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow l \parallel l'$$

گام اول: با توجه به نکته گفته شده، شیب خطوط داده شده برابر هستند با:

$$y = x + 1 \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم } ax+by+c=0} x - y + 1 = 0 \Rightarrow \text{شیب} = -\left(\frac{-1}{1}\right) = 1$$

$$2x - 2y = 3 \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم } ax+by+c=0} 2x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-2}{-2} = 1$$

شیب این دو خط برابر است؛ پس با هم موازی‌اند.

گام دوم: طول ضلع مربع برابر است با فاصله این دو خط موازی. با دو روشی که در درس باکس گفتیم، آن را به دست می‌آوریم: در معادله خط $x - y + 1 = 0$ ، به دلخواه $x = 0$ را جای گذاری می‌کنیم تا مختصات یک نقطه بر روی آن پیدا شود و سپس فاصله آن نقطه از خط $2x - 2y - 3 = 0$ را که برابر با طول ضلع مربع است را به دست می‌آوریم:

$$x - y + 1 = 0 \xrightarrow{x=0} 0 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

پس نقطه $(0, 1)$ روی خط $x - y + 1 = 0$ قرار دارد. فاصله این نقطه از خط $2x - 2y - 3 = 0$ برابر می‌شود با:

$$2x - 2y - 3 = 0 \text{ از } (0, 1) \text{ فاصله: } \frac{\overbrace{|2(0) - 2(1) - 3|}^{-5}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

پس مساحت مربع برابر می‌شود با:

$$S_{\text{مربع}} = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

به‌جور دیگر ضرایب معادله خط $x - y + 1 = 0$ را در ۲ ضرب می‌کنیم تا به معادله $2x - 2y + 2 = 0$ تبدیل شود و از فرمول فاصله دو خط موازی استفاده می‌کنیم تا ضلع مربع به دست آید:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 3 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فاصله دو خط موازی}} \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

پس مساحت مربع برابر می‌شود با:

$$S_{\text{مربع}} = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

فاصله نقاط A و B روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم از نقطه C(۱, -۸) برابر با ۵ است. عمودمنصف پاره‌خط AB محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$y = -x \quad \leftarrow \text{خط } y = -x$$

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



ابتدا به کمک فاصله دو نقطه، مختصات نقاط A و B رو به دست بیار. بعد معادله عمودمنصف AB رو به دست بیار و ...

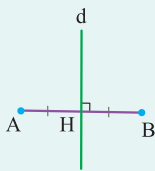
Hint

فاصله دو نقطه: اگر بخواهیم فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را به دست آوریم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

درسی Box

$$AB = \sqrt{\underbrace{(x_2 - x_1)^2}_{\text{مجدور تفاضل طولها}} + \underbrace{(y_2 - y_1)^2}_{\text{مجدور تفاضل عرضها}}}$$

عمودمنصف پاره‌خط AB:



عمودمنصف پاره‌خط AB، خطی است که پاره‌خط AB را در نقطه‌ای مانند H نصف می‌کند و بر آن عمود است؛ پس اگر بخواهیم معادله عمودمنصف پاره‌خط AB (معادله خط d) را بنویسیم به صورت زیر عمل می‌کنیم.

به دست آوردن مختصات H: وسط پاره‌خط AB است، پس داریم:

$$(x_H, y_H) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

به دست آوردن شیب خط d (عمودمنصف):

می‌دانیم d بر AB عمود است، پس شیب خط d قرینه و معکوس شیب خط شامل پاره‌خط AB است.

$$m_d = -\frac{1}{m_{AB}}$$

نوشتن معادله خط d:

حال با داشتن شیب (m_d) و یک نقطه از عمودمنصف (H) معادله آن برابر است با:

$$y - y_H = m_d(x - x_H)$$

گام اول (به دست آوردن مختصات نقاط A و B): پاسخ خیلی تشریحی

از آنجا که نقاط A و B روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم $(y = -x)$ قرار دارند، پس مختصات آنها به صورت $(\alpha, -\alpha)$ است، که فاصله آنها تا نقطه C(۱, -۸) برابر ۵ است؛ پس داریم:

$$\left. \begin{matrix} (\alpha, -\alpha) \\ (1, -8) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{فاصله دو نقطه} = 5} \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (-\alpha - (-8))^2} = 5$$

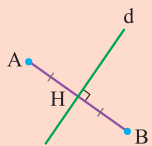
برای این که رادیکال از بین برود، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\alpha - 1)^2 + (-\alpha + 8)^2 = 25 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 - 16\alpha + 64 = 25$$

$$2\alpha^2 - 18\alpha + 65 = 25 \xrightarrow{\div 2} \alpha^2 - 9\alpha + 20 = 0$$

$$(\alpha - 4)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4, -\alpha_1 = -4 \Rightarrow A(4, -4) \\ \alpha_2 = 5, -\alpha_2 = -5 \Rightarrow B(5, -5) \end{cases}$$

گام دوم (به دست آوردن نقطه H):



عمودمنصف پاره‌خط AB آن را در نقطه‌ای مانند H نصف می‌کند، یعنی نقطه H وسط پاره‌خط AB قرار دارد؛ بنابراین:

$$(x_H, y_H) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{4 + 5}{2}, \frac{-4 - 5}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2} \right)$$

گام سوم (به دست آوردن شیب عمودمنصف خط d):
از آنجا که عمودمنصف (خط d) بر پاره خط AB عمود است؛ پس:

$$m_d = -\frac{1}{m_{AB}}$$

بنابراین لازم است ابتدا شیب پاره خط AB را به دست آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{A(4, -4)}{B(5, -5)} \rightarrow \frac{-5 - (-4)}{5 - 4} = \frac{-1}{1} = -1$$

بنابراین شیب خط d برابر است با:

$$m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{-1} = 1$$

گام چهارم (به دست آوردن معادله خط d (عمودمنصف)):

حال با داشتن شیب (گام سوم) یک نقطه از خط (گام دوم) می‌توانیم معادله خط d را بنویسیم:

$$y - y_H = m_d(x - x_H) \xrightarrow{(x_H, y_H) = (\frac{9}{2}, -\frac{9}{2})} y - (-\frac{9}{2}) = 1(x - \frac{9}{2})$$

$$y + \frac{9}{2} = x - \frac{9}{2} \Rightarrow y = x - \frac{18}{2} = x - 9$$

بنابراین معادله خط d به صورت $y = x - 9$ است.

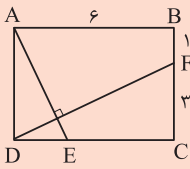
گام پنجم (به دست آوردن محل برخورد با محور x):

برای به دست آوردن محل برخورد با محور x باید معادله $y = x - 9 = 0$ را حل کنیم.

$$x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

ریاضیات

۲۰ در مستطیل شکل زیر، اندازه AE کدام است؟



(۱) $4\sqrt{5}$

(۲) $3\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt{5}$

(۴) $2\sqrt{5}$

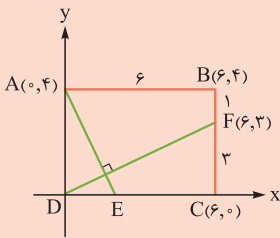
مشاوره در سؤالات این چینی که فاصله نقاط مطرح است، می‌توان رئوس را به دستگاه مختصات انتقال داد تا بتوان از فرمول‌های هندسه تحلیلی استفاده کرد.



Hint

مستطیل را بر روی دستگاه مختصات قرار دهید به گونه‌ای که D روی مبدأ قرار بگیرد، سپس معادله خط گذرنده از AE را بنویسید و با توجه به این که A روی محور طول‌ها قرار دارد مختصات E را پیدا کنید تا بتوانید فاصله A از E را به دست آورید.

گام اول: مستطیل داده شده را اگر به گونه‌ای وارد دستگاه مختصات کنیم که رأس D روی مبدأ مختصات و دو ضلع مستطیل روی محورهای قرار بگیرد، با توجه به اندازه اضلاع مختصات رئوس دیگر به صورت مقابل خواهند شد.



گام دوم: برای به دست آوردن طول AE کافی است مختصات E را پیدا کنیم و سپس فاصله آن از A را محاسبه کنیم. برای این کار ابتدا باید معادله خط گذرنده از AE را پیدا کنیم، AE عمود بر DF است و شیب خط‌های گذرنده از آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است؛ پس:

$$m_{DF} = \frac{y_F - y_D}{x_F - x_D} = \frac{3 - 0}{6 - 0} = \frac{1}{2} \xrightarrow{m_{DF} \text{ و } AE \text{ عمود بر هم و } m_{AE} \text{ قرینه و معکوس } m_{DF}} m_{AE} = -2$$

گام سوم: با توجه به این که مختصات A و شیب خط گذرنده از AE را داریم، معادله آن را می‌نویسیم:

$$AE \text{ خط: } y - y_A = m_{AE}(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = -2(x - 0) \Rightarrow y - 4 = -2x$$

گام چهارم: نقطه E روی محور طول‌ها قرار دارد، پس عرض آن صفر است، هم‌چنین E روی خط $y - 4 = -2x$ نیز قرار دارد، پس در این معادله، y را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول E پیدا شود:

$$y - 4 = -2x \xrightarrow{y=0} 0 - 4 = -2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow E(2, 0)$$

گام پنجم: حال که هم مختصات A و هم مختصات E را داریم، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{matrix} A(0, 4) \\ E(2, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AE = \sqrt{(0-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

از نقطه A در خارج دایره‌ای، مماس AT به طول $6\sqrt{2}$ را بر آن دایره رسم نموده‌ایم (T روی دایره قرار دارد). هم‌چنین خطی از A گذرانده‌ایم که دایره را در نقاط B و C قطع کرده است. اگر B بین A و C و $BC = 14$ باشد، طول AB کدام است؟

۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

مشاوره این سؤال دقیقاً مشابه

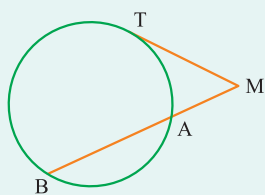
تمرین ۲ صفحه ۲۳ کتاب درسی طراحی شده است. این سؤال به همین شکل و با تغییراتی مانند مشخص بودن مقدار AB و خواستن مقدار BC می‌تواند از سوالات امتحان نهایی باشد.

Hint

رابطه طولی مماس و قاطع را برای حل این سؤال بنویسید.

دربش‌Box

اگر از نقطه M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم شود، آن‌گاه طول مماس واسطه هندسی بین اندازه‌های دو قطعه قاطع است.

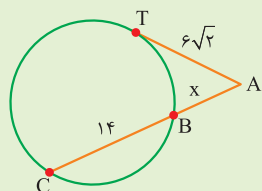


$$MT^2 = MA \times MB$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فرض کنید $AB = x$ باشد. در این صورت طبق روابط طولی بین مماس و قاطع نسبت به دایره داریم:

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = x(x + 14)$$

گام دوم: با حل معادله درجه دوم، مقدار X را پیدا می‌کنیم.



$$x(x + 14) = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + 14x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 18)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -18 & \text{قق} \\ x = 4 & \text{قق} \end{cases}$$

ریاضیات

۲۲ اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, 3)$ و $C'(O', 8)$ برابر ۱۲ باشد، آن گاه طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

$$4\sqrt{3} \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

$$2\sqrt{6} \quad (4)$$

$$\sqrt{42} \quad (3)$$



مشاوره فرمول‌های طول مماس مشترک داخلی و خارجی دایره از مهم‌ترین فرمول‌های فصل دایره هستند و احتمال طرح مسئله عددی از آن‌ها در امتحان نهایی زیاد است.

Hint طول خط‌المركزين دایره را به کمک طول مماس مشترک خارجی محاسبه کنید.

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر بگیرید. اگر طول خط‌المركزين دو دایره برابر $OO' = d$ باشد، آن گاه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

گام اول: ابتدا به کمک رابطه طول مماس مشترک خارجی، طول خط‌المركزين دو دایره را پیدا می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 12 = \sqrt{d^2 - (3 - 8)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 144 = d^2 - 25 \Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13$$

گام دوم: با داشتن طول خط‌المركزين و شعاع‌های دو دایره، طول مماس مشترک داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{13^2 - (3 + 8)^2} = \sqrt{169 - 121} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درسی Box

ریاضیات

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ برابر شعاع دایره بزرگتر است. شعاع دایره بزرگتر، چند برابر شعاع دایره کوچکتر است؟

۲۳

کوچکتر است؟

۶ (۲)

۳ (۱)

۱۲ (۴)

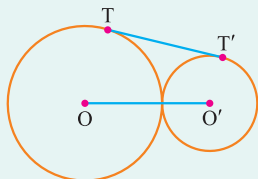
۹ (۳)



مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۱ طراحی شده است و حل آن به کمک حالت خاص فرمول طول مماس مشترک خارجی برای دو دایره مماس خارج بسیار ساده است.

در دو دایره مماس خارج، طول خطالمركزین برابر مجموع طولهای شعاع دو دایره است.

اگر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس خارج باشند، آن گاه رابطه $d = OO' = R + R'$ برقرار است. با جای گذاری مقدار d بر حسب دو شعاع در فرمول طول مماس مشترک خارجی داریم:



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$$

فرض کنید شعاع دایره بزرگتر برابر R و شعاع دایره کوچکتر برابر R' باشد. طبق صورت سؤال دو دایره مماس خارج هستند، پس با استفاده از فرمول طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج و فرض مسئله داریم:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}R = 2\sqrt{RR'} \xrightarrow{\text{به توان } 2} \frac{1}{3}R^2 = 4RR' \Rightarrow R = 12R'$$

Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۴ اگر دو دایره $C(O, 2)$ و $C'(O, 5)$ متقاطع باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $OO' > 7$ و OO' عمودمنصف وتر مشترک دو دایره است.
 (۲) $3 < OO' < 7$ و OO' عمودمنصف وتر مشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.
 (۳) $3 < OO' < 7$ و OO' عمودمنصف وتر مشترک دو دایره است.
 (۴) $OO' < 3$ و OO' عمودمنصف وتر مشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.

مشاوره بررسی حالت‌های دو دایره نسبت به هم با توجه به طول خط‌المرکزین و شعاع‌های دو دایره می‌تواند از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

شرط متقاطع بودن دو دایره را بر حسب اندازه شعاع‌ها و طول خط‌المرکزین بنویسید.

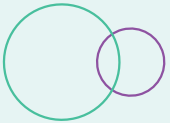
دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المرکزین $OO' = d$ یکی از حالت‌های زیر را نسبت به هم دارا هستند:



(۱) متخارج: $d > R + R'$



(۲) مماس برون: $d = R + R'$



(۳) متقاطع: $|R - R'| < d < R + R'$



(۴) مماس درون: $d = |R - R'|$



(۵) متداخل: $d < |R - R'|$

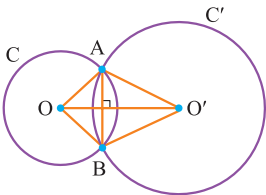


(۶) هم‌مرکز: $d = 0$

گام اول: دو دایره C و C' متقاطع‌اند، پس داریم:

$$|R - R'| < d < R + R' \Rightarrow |2 - 5| < OO' < 2 + 5 \Rightarrow 3 < OO' < 7$$

گام دوم: می‌دانیم پاره خط AB که نقاط تقاطع دو دایره را به هم وصل می‌کند، وتر مشترک نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دایره داریم:

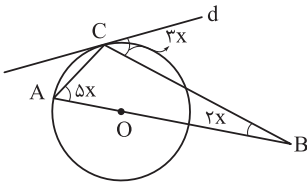


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف } AB \text{ است.} \\ O'A = O'B = R' \Rightarrow O' \text{ روی عمودمنصف } AB \text{ است.} \end{array} \right\} \Rightarrow OO' \text{ عمودمنصف } AB \text{ است.}$$

بنابراین OO' (خط‌المرکزین دو دایره)، عمودمنصف AB (وتر مشترک دو دایره) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۵ در شکل زیر اگر O مرکز دایره و خط d مماس بر دایره باشد، اندازه زاویه \hat{ACB} چند درجه خواهد بود؟



۱) 105°

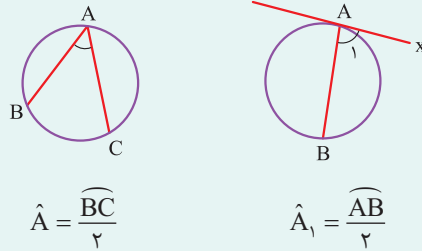
۲) 110°

۳) 115°

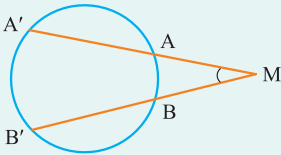
۴) 120°

Hint مقادیر تمام کمان‌های نیم‌دایره بالایی را بر حسب x بنویسید.

۱) اندازه زوایای محاطی و ظلی در دایره نصف اندازه کمان مقابل آن‌ها است. یعنی:

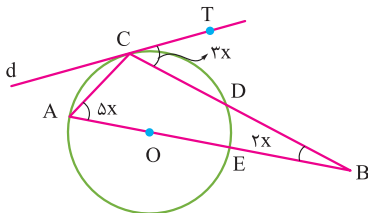


۲) اگر امتداد وترهای AA' و BB' یکدیگر را در نقطه M واقع در بیرون دایره قطع کنند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{A'B'} - \widehat{AB}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** زوایای \hat{A} و \hat{BCT} به ترتیب زوایای محاطی و ظلی هستند، پس داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BCT} = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \frac{\widehat{CD}}{2} = 3x \Rightarrow \widehat{CD} = 6x \text{ (ظلی)} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{CE}}{2} \Rightarrow \frac{\widehat{CE}}{2} = 5x \Rightarrow \widehat{CE} = 10x \text{ (محاطی)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DE} = 10x - 6x = 4x$$

گام دوم: زاویه B ، زاویه بین امتداد دو وتر AE و CD است؛ بنابراین داریم:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\widehat{AC} - 4x}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 8x$$

گام سوم: قطر دایره است، پس داریم:

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} = 180^\circ \Rightarrow 8x + 6x + 4x = 180^\circ \Rightarrow 18x = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$$

$$\triangle ABC: \hat{ACB} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (5x + 2x) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع، در یکی از نقاط تقاطع دو دایره بر هم عمودند. اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب ۳ و ۶ باشد، طول خط‌المركزین

خط مماس بر هر دایره در نقطه تقاطع از مرکز دایره دیگر می‌گذرد.

دو دایره کدام است؟

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل تیر ۱۴۰۳ طراحی شده است.

$3\sqrt{5} \quad (۴)$

$3 \quad (۳)$

$3\sqrt{3} \quad (۲)$

$2\sqrt{6} \quad (۱)$

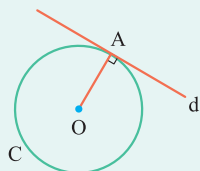


به ارتباط شعاع‌ها و خط مماس بر هر دایره در نقطه تقاطع دو دایره دقت کنید.

Hint

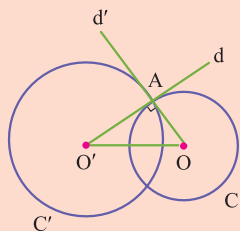
(۱) اگر خط d در نقطه A بر دایره C مماس باشد، آن‌گاه خط d بر شعاع OA عمود است.

درس‌Box



(۲) اگر خط d در نقطه A بر دایره C مماس باشد، خط عمود بر d در نقطه A ، از مرکز دایره C عبور می‌کند.

گام اول: مطابق شکل فرض کنید خطوط d و d' در نقطه A به ترتیب بر دایره‌های C و C' مماس باشند. این دو خط بر یکدیگر عمودند، پس خط d از O' (مرکز دایره C') و خط d' از O (مرکز دایره C) عبور می‌کند.



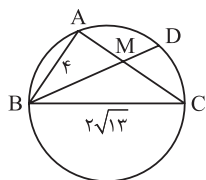
گام دوم: با توجه به توضیحات گام اول، شعاع‌های OA و $O'A$ در نقطه A بر هم عمودند، در نتیجه مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس در این مثلث داریم:

$$OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \Rightarrow OO' = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، BC قطر دایره و M وسط ضلع AC است. اندازه پاره خط MD کدام است؟

۲۷



۲ (۴)

۱/۸ (۳)

۱/۶ (۲)

۱/۵ (۱)

مثلث ABC قائم‌الزاویه است

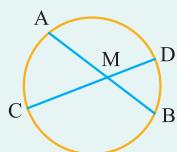


به یاد داشته باشید که اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره برابر 90° است.

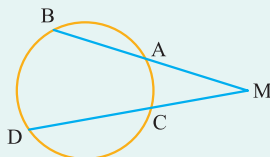
Hint

روابط طولی برای وترهای متقاطع درون یا بیرون دایره به صورت زیر نوشته می‌شوند:

درس‌Box



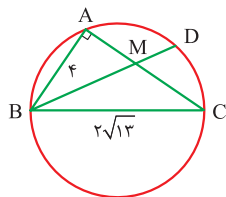
$$MA \times MB = MC \times MD$$



$$MA \times MB = MC \times MD$$

گام اول: چون زاویه A محاطی و روبه‌رو به قطر BC است، پس قائمه می‌باشد ($\hat{A} = 90^\circ$). به کمک قضیه فیثاغورس، طول ضلع AC را در مثلث ABC پیدا می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (2\sqrt{13})^2 - 4^2 = 52 - 16 = 36 \Rightarrow AC = 6$$

گام دوم: طول میانه BM در مثلث ABC را به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ABM به دست می‌آوریم.

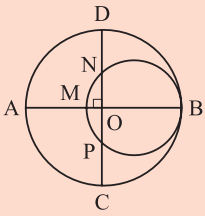
$$AM = \frac{AC}{2} = 3$$

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BM = 5$$

گام سوم: به کمک روابط طولی وترهای متقاطع درون دایره داریم:

$$AM \times MC = BM \times MD \Rightarrow 3 \times 3 = 5MD \Rightarrow MD = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمود هستند. اگر شعاع دایره بزرگتر برابر ۷ و $ND = ۲$ باشد، شعاع دایره کوچکتر کدام است؟



مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۳ کتاب درسی طراحی شده است و مشابه آن در کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰ نیز دیده می‌شود.

$$\frac{۳۸}{\sqrt{۷}} \quad (۴)$$

$$\frac{۳۷}{\sqrt{۷}} \quad (۳)$$

$$\frac{۳۶}{\sqrt{۷}} \quad (۲)$$

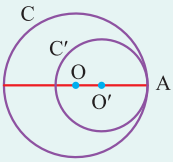
$$۵ \quad (۱)$$



روابط طولی وترهای متقاطع را برای دایره کوچکتر بنویسید.



اگر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس داخل باشند، آن‌گاه رابطه $OO' = |R - R'|$ برقرار است. همچنین نقطه تماس دو دایره روی امتداد خط‌المركزین آن‌ها واقع است، یعنی در شکل زیر، نقاط A, O', O در یک امتداد قرار دارند.



گام اول: می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند، پس مطابق شکل داریم:

$$OP = ON = OD - ND = ۷ - ۲ = ۵$$

گام دوم: فرض کنید $AM = x$ باشد، در این صورت طبق روابط طولی در دایره کوچکتر داریم:

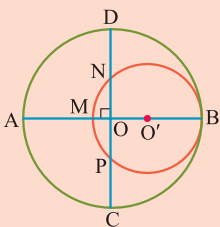
$$OB \times OM = ON \times OP \Rightarrow ۷(۷ - x) = ۵ \times ۵ \Rightarrow ۴۹ - ۷x = ۲۵$$

$$\Rightarrow ۷x = ۲۴ \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۷}$$

گام سوم: دو دایره مماس داخل‌اند، پس O' (مرکز دایره کوچکتر) روی قطر AB قرار

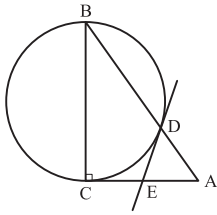
دارد و در نتیجه داریم:

$$BM = AB - AM \Rightarrow ۲R' = ۲ \times ۷ - \frac{۲۴}{۷} \Rightarrow R' = ۷ - \frac{۱۲}{۷} = \frac{۳۷}{۷}$$



در شکل زیر، ضلع BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) قطر دایره است. خط مماس بر دایره در نقطه D ، ضلع AC را در نقطه E قطع می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر ممکن است نادرست باشد؟

AC مماس بر دایره است



$$AE = CE \quad (۱)$$

(۲) DE نیمساز زاویه \hat{ADC} است.

$$\hat{CED} = 2\hat{A} \quad (۳)$$

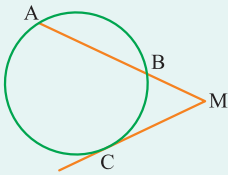
$$\hat{A} = \hat{BCD} \quad (۴)$$

از C به D وصل کنید و سعی کنید اندازه زاویه‌های موجود در گزینه‌ها را بر حسب طول کمان‌ها به دست آورید.

Hint

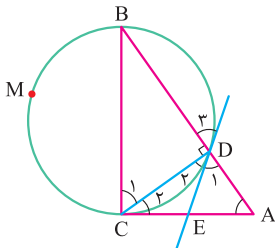
اگر امتداد یک وتر و یک مماس از دایره یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، آن‌گاه داریم:

درسی Box



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: زاویه A ، زاویه بین مماس و امتداد یک وتر از دایره و زاویه \hat{BCD} یک زاویه محاطی است. پس داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BMC} - \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BDC} - \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{BCD} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \quad (\text{محاطی}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{BCD} \quad ((۴) \text{گزینه})$$

گام دوم: می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی نصف اندازه کمان مقابل آن زاویه است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_r &= \frac{\widehat{CD}}{2} \quad (\text{ظلی}) \\ \hat{C}_r &= \frac{\widehat{CD}}{2} \quad (\text{ظلی}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}_r = \hat{C}_r \xrightarrow{\triangle CDE} CE = DE \quad (*)$$

طبق گام اول $\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2}$ ، از طرفی \hat{D}_1 و \hat{D}_r زوایای متقابل به رأس هستند و با هم برابرند؛ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{D}_1 &= \hat{D}_r = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}_1 \Rightarrow AE = DE \quad (**)$$

(*) ، (**) $\Rightarrow AE = CE$ (گزینه (۱))

گام سوم: زاویه \hat{CED} زاویه خارجی برای مثلث ADE است؛ بنابراین داریم:

$$\hat{CED} = \hat{D}_1 + \hat{A} \xrightarrow{\hat{A} = \hat{D}_1} \hat{CED} = 2\hat{A} \quad ((۳) \text{گزینه})$$

۳۰ از نقطه A خارج یک دایره، دو مماس AB و AC را بر آن دایره رسم می‌کنیم. سپس از نقطه C خطی موازی AB رسم می‌کنیم که دایره را در نقطه D قطع کند. اگر $BC = 12$ و $CD = 6$ باشد، طول این دو مماس کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۲۷ (۲)

۲۴ (۱)

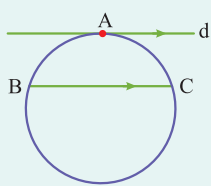
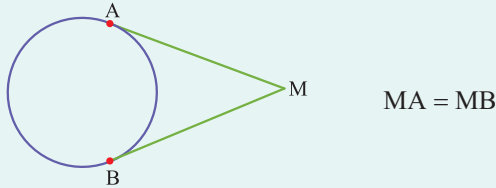
مشاوره روش رسم مماس بر دایره یکی از مهم‌ترین سوالات رسم به کمک خط‌کش و پرگار در فصل دایره و یکی از سوالات مورد توجه امتحان نهایی خواهد بود.

نشان دهید مثلث‌های ABC و BCD متشابه‌اند.

Hint

دستی Box

(۱) طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، یعنی در شکل زیر داریم:



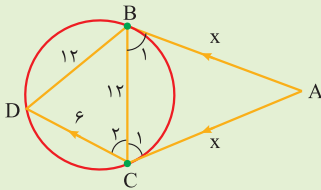
(۲) اگر خط d با وتر BC موازی و در نقطه A بر دایره مماس باشد، آن‌گاه داریم:

$$\widehat{AB} = \widehat{AC}$$

گام اول: شکل مناسبی برای سؤال رسم می‌کنیم. خط AB بر دایره مماس بوده و با وتر CD موازی است؛ بنابراین $\widehat{BC} = \widehat{BD}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

و در نتیجه وترهای BC و BD نیز برابر یکدیگرند.



$$\widehat{BC} = \widehat{BD} \Rightarrow BC = BD = 12$$

گام دوم: با توجه به نتیجه گام اول، هر دو مثلث ABC و BCD متساوی‌الساقین هستند. از طرفی زوایای C₁ و D به ترتیب زوایای ظلی و محاطی روبه‌رو به کمان \widehat{BC} هستند، پس با هم برابرند، پس زوایای نظیر ساق‌ها در دو مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند و در نتیجه دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند.

گام سوم: نسبت اضلاع متناظر را برای دو مثلث متشابه ABC و BCD می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{12}{6} \Rightarrow x = 24$$

آمار و احتمال

۳۱

در جدول ارزش گزاره‌های زیر، A، B و C به ترتیب کدام‌اند؟

p	q	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	د
د	ن	A
ن	د	B
ن	ن	C

(۱) د - د - ن

(۲) ن - ن - ن

(۳) د - ن - ن

(۴) ن - ن - د



جبر گزاره‌ها

درس Box

(۱) **نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

• اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

• ارزش نقیض نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است:

(۲) **ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره:** اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p یا q » و می‌نویسیم « $p \vee q$ ».اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p و q » و می‌نویسیم « $p \wedge q$ ».

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزاره p یا q درست باشد و ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(۳) **ترکیب شرطی دو گزاره:** به گزاره $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q » می‌خوانیم. ارزش یک گزاره شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:• در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، به p «مقدم» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.• گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را به دو صورت مقابل نیز می‌خوانیم:

q شرط لازم است برای p

p شرط کافی است برای q

• اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد:به $q \Rightarrow p$ عکس گزاره شرطی می‌گوییم؛به $\sim p \Rightarrow \sim q$ عکس نقیض گزاره شرطی می‌گوییم که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است، یعنی: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ ؛و به $(q \Rightarrow p) \sim$ نقیض عکس گزاره شرطی می‌گوییم.• انتهای مقدم: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، گزاره به انتهای مقدم درست است:

$$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

• درست بودن تالی: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

۴) ترکیب دوشروطی: اگر دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی « \wedge » به هم مرتبط کنیم، ترکیب دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت «اگر و تنها اگر q » یا « p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند:



p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

ترکیب دوشروطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دوشروطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$$p \Leftrightarrow p \equiv T$$

$$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$$

هم‌ارزی‌های منطقی:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

(۱) جابه‌جایی

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

(۲) شرکت‌پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

(۳) توزیع‌پذیری

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

(۴) دمورگان

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

(۵) جذب

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

گام اول: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	د	ن

گام دوم: پس A، B و C به ترتیب د - ن - ن هستند.

۳۲ در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ کدام مورد صحیح است؟

- (۱) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r درست باشد.
- (۲) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r نادرست باشد.
- (۳) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش باشند.
- (۴) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش نباشند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee r$	$p \Leftrightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

گام دوم: با توجه به جدول رسم‌شده واضح است که دو گزاره $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ و $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارزش‌اند.
گام سوم: می‌دانیم ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p و q ارزش یکسانی نداشته باشند؛ پس ارزش گزاره $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ هم، زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش نباشند.

گام اول: با استفاده از هم‌ارزی‌های منطقی، گزاره را ساده می‌کنیم:

$$((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \equiv (((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)) \wedge (q \Rightarrow p)$$

گام دوم: با استفاده از قانون جذب، $\overbrace{((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)}^s$ هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است؛ پس:

$$(s \vee r) \wedge s \equiv s \equiv p \Rightarrow q$$

$$(((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

مابقی راه حل مانند راه قبل است.

به‌چیز دیگری

ریاضیات

ارزش گزاره سوری « $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} > (n+1)^3$ » بوده و نقیض این گزاره به صورت است.

۳۳

(۱) درست - $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} < (n+1)^3$

(۲) نادرست - $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} < (n+1)^3$

(۳) درست - $\exists n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} \leq (n+1)^3$

(۴) نادرست - $\exists n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} \leq (n+1)^3$



سورها

درس Box

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

ارزش گزاره‌های سوری با سور عمومی (یا همان \forall)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای تمام اعضای دامنه متغیر درست باشد.

ارزش گزاره‌های سوری با سور وجودی (یا همان \exists)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای حداقل یکی از اعضای دامنه متغیر درست باشد.

برای نقیض کردن یک گزاره سوری، باید:

(۱) سور را برعکس کنیم! یعنی اگر سوری وجودی داشتیم، به جای آن سور عمومی قرار دهیم و اگر سور عمومی داشتیم به جای آن سور وجودی قرار دهیم.

(۲) گزاره‌نما را نقیض کنیم.

به عبارت دیگر:

$$\sim (\forall x \in A; P(x)) \equiv \exists x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x \in A; P(x)) \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ارزش این گزاره نادرست است، چون به ازای $n = 2$ داریم:

$$3^{n+1} = 3^3 = 27$$

$$(n+1)^3 = 3^3 = 27$$

پس نامساوی $3^{n+1} > (n+1)^3$ برقرار نیست!

گام دوم: نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} > (n+1)^3) \equiv \exists n \in \mathbb{N}; 3^{n+1} \leq (n+1)^3$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

از میان گزاره‌های سوری زیر، کدام دو گزاره ارزش نادرست دارند؟

(الف) $\exists x \in \mathbb{N}; 17x^2 - 5x - 12 = 0$

(ب) $\forall x \in \mathbb{P}; 2^x - 1 \in \mathbb{P}$

(پ) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$

(ت) $\exists x \in (-\infty, 0]; |x^2 - 1| \leq 0$

(۲) الف - ت

(۱) الف - ب

(۴) پ - ت

(۳) ب - پ



برای پیدا کردن ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو حالت خاص داریم:

(الف) اگر $a + b + c = 0$ ، ریشه‌ها $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ اند.

(ب) اگر $a + c = b$ ، ریشه‌ها $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$ اند.

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$17x^2 - 5x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{12}{17} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

این معادله ریشه طبیعی $x = 1$ دارد؛ پس ارزش گزاره $\exists x \in \mathbb{N}; 17x^2 - 5x - 12 = 0$ درست است.

(ب)

$x = 11$ عددی اول است، اما $2^{11} - 1 = 2^{10} - 1 = 2 \cdot 48 - 1 = 2 \cdot 47 = 23 \times 89$ ؛ پس $2^{11} - 1$ اول نیست و بنابراین ارزش

گزاره $\forall x \in \mathbb{P}; 2^x - 1 \in \mathbb{P}$ نادرست است.

(پ) حواستون باشه کسر $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده هست؛ پس ارزش گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ نادرسته!

گول نخوری ✗

(ت) اول از همه دقت کنید که نامساوی $|x^2 - 1| \leq 0$ ، فقط زمانی برقرار می‌شود که $|x^2 - 1| = 0$ یا همان $x^2 - 1 = 0$ باشد. این اتفاق

به ازای $x = -1$ و $x = +1$ رخ می‌دهد که $-1 \in (-\infty, 0]$ ؛ پس ارزش گزاره $\exists x \in (-\infty, 0]; |x^2 - 1| \leq 0$ هم درست است.





ریاضیات

۳۵ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq 2n, 2^m < 2n\}$ ، آن گاه مجموعه $(A_1 \cup A_4) - A_2$ چند عضو دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با جای گذاری $n=1$ ، $n=2$ ، $n=4$ در $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq 2n, 2^m < 2n\}$ داریم:

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{|m| \leq 2}_{-2 \leq m \leq 2}, \underbrace{2^m < 2}_{m < 2}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{|m| \leq 4}_{-4 \leq m \leq 4}, \underbrace{2^m < 4}_{m < 4}\} = \{-4, -3, -2, \dots, 3\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{|m| \leq 8}_{-8 \leq m \leq 8}, \underbrace{2^m < 8}_{m < 5}\} = \{-8, -7, -6, \dots, 4\}$$

گام دوم: پس:

$$A_1 \cup A_4 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{-8, -7, -6, \dots, 4\} = \{-8, -7, -6, \dots, 4\}$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_4) - A_2 = \{-8, -7, -6, \dots, 4\} - \{-4, -3, -2, \dots, 3\} = \{-8, -7, -6, -5, 4\}$$

بنابراین مجموعه حاصل ۵ عضو است.



ریاضیات

۳۶ اگر $A - \{2, 3, 4, 5\} = \emptyset$ و $\{2, 5\} \cap A = \{2\}$ ، چند مجموعه برای A وجود دارد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

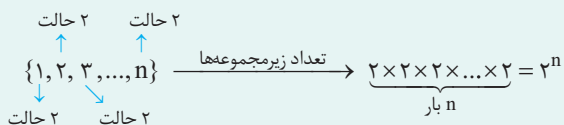
۵ (۲)

۴ (۱)



درس‌Box

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، 2^n تا است، زیرا هر کدام از اعضا دو حالت دارند، در زیرمجموعه باشند یا نباشند:



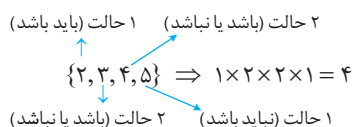
اگر $A - B = \emptyset$ ، در این صورت $A \subseteq B$.



گام اول: $\{2, 5\} \cap A = \{2\}$ یعنی مجموعه A عضو ۲ را دارد، ولی عضو ۵ را ندارد.

گام دوم: طبق گفته سؤال $A - \{2, 3, 4, 5\} = \emptyset$ ؛ پس $A \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$.

گام سوم: بنابراین A زیرمجموعه‌ای از $\{2, 3, 4, 5\}$ است که عضو ۲ را دارد، ولی عضو ۵ را ندارد. حالا واضح است هر کدام از دو عضو ۳ و ۴ دو حالت دارند، در A باشند یا نباشند؛ پس مجموعه A ، $2 \times 2 = 4$ حالت دارد:



$\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$

بد نیست این ۴ مجموعه را ببینید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۷ اگر A, B, C سه مجموعهٔ ناتهی باشند، به طوری که $A \cup B' = B \cup C'$ ، در این صورت کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$$C \subseteq B \subseteq A \quad (۱)$$

$$C \subseteq A \subseteq B \quad (۲)$$

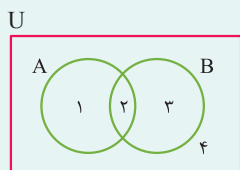
$$B \subseteq C \subseteq A \quad (۳)$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset \quad (۴)$$

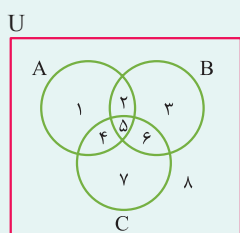
مشاوره سوالات جبر مجموعه‌ها، پای ثابت کنکورهای سراسری هستند که بهترین روش برای حل آن‌ها، روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها است.

درسی‌Box

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سوالات جبر مجموعه‌ها



روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سوالات جبر مجموعه‌ها به این صورت است: اگر دو مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد؛ نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



و اگر سه مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد؛ نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

حالا هر قسمت را با مجموعه‌ای از اعداد درون آن نمایش می‌دهیم؛ برای مثال اگر دو مجموعه داشته باشیم:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, A \cap B = \{2\}$$

مثلاً برای این که بفهمیم حاصل $A \cup (A' \cap B)$ چیست، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

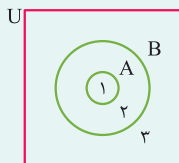
$$A \cup (A' \cap B) = \{1, 2\} \cup (\{3, 4\} \cap \{2, 3\}) = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} = A \cup B$$

و یا به عنوان مثال اگر $(A - B) \cup (B - A) = A$ باشد، داریم:

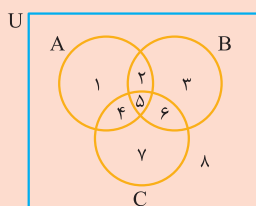
$$(A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow \{1\} \cup \{3\} = \{1, 2\} \Rightarrow \{1, 3\} = \{1, 2\}$$

دقت کنید که در این روش هیچ دو ناحیه‌ای نمی‌توانند با هم مساوی باشند (منظور از ناحیه، اعداد است، برای مثال هیچ وقت $\{4\} = \{1\}$ نمی‌شود)، چون نواحی کاملاً جدا از هم هستند؛ پس برای این که $\{1, 3\} = \{1, 2\}$ شود، باید $\{3\} = \{2\} = \emptyset$ باشد که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1, 2\} = \{1\} \\ B = \{2, 3\} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq A$$



مواظون باشه اگر در سؤالی، شرطی برای مجموعه‌ها داشته باشیم، باید نمودار ون را طوری رسم کنیم که آن شرط رعایت شود؛ برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و گفته باشد $A \subseteq B$ ، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



گام اول: سه مجموعه A, B, C داریم، پس نمودار ون را به صورت مقابل فرض می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

گام دوم: از تساوی $A \cup B' = B \cup C'$ داریم:

$$A \cup B' = B \cup C' \Rightarrow \{1, 2, 4, 5\} \cup \{1, 4, 7, 8\} = \{2, 3, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 8\}$$

$$\Rightarrow \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$$



ریاضیات

گام سوم: ناحیه‌های ۱، ۲، ۵ و ۸ در هر دو مجموعه بالا مشترک‌اند؛ پس برای این که تساوی بالا برقرار شود، باید مابقی ناحیه‌ها (ناحیه‌هایی که فقط در یکی از این دو مجموعه هستند)، یعنی ۳، ۴، ۶ و ۷ تهی باشند.

گام چهارم: حالا داریم:

$$A = \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 6\} = \{2, 5\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\} = \{5\}$$

پس $C \subseteq B \subseteq A$.



ریاضیات

۳۸ اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$ ، $B = \{x + 1, 4, -2\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، حاصل xyz کدام است؟

- (۱) -۱۶
(۲) -۶۴
(۳) -۱۶ یا -۶۴
(۴) -۸ یا -۳۲

Hint

باید $A = B$ باشد.

دکترین Box

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی بین این دو مجموعه را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

برای مثال اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، داریم:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

تعداد اعضای ضرب دکارتی دو مجموعه، برابر حاصل ضرب تعداد اعضای آن دو مجموعه است، به عبارت دیگر:

$$n(A \times B) = n(A)n(B)$$

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset \text{ یا } A = B$$

دو مجموعه A و B با هم برابرند (یعنی $A = B$)، اگر هر عضو مجموعه A در مجموعه B باشد و برعکس.

گام اول: $A \times B = B \times A$ است، پس با توجه به نکته گفته شده در درس باکس، $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ یا $A = B$. واضح است که دو مجموعه A و B ناتهی‌اند؛ پس باید $A = B$ باشد.

گام دوم: مجموعه A عضو ۵ را دارد، پس ۵ باید عضوی از مجموعه B هم باشد. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که $x + 1 = 5$ یعنی $x = 4$ باشد.

گام سوم: مجموعه B دو عضو ۴ و -۲ را دارد؛ پس این دو عضو باید در مجموعه A هم باشند. حالا برای این که این اتفاق بیفتد، دو حالت داریم:

■ حالت اول:

$$\begin{cases} y + 2 = 4 \Rightarrow y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

که در این حالت:

$$xyz = 4 \times 2 \times (-2) = -16$$

■ حالت دوم:

$$\begin{cases} y + 2 = -2 \Rightarrow y = -4 \\ z = 4 \end{cases}$$

که در این حالت:

$$xyz = 4 \times (-4) \times 4 = -64$$

گام چهارم: بنابراین -۶۴ یا $xyz = -16$ است.



۳۹ اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x < 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4\}$ ، در این صورت مساحت ناحیه $A \times B - B \times A$ چه قدر است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



درس‌Box

نکاتی درباره ضرب دکارتی دو مجموعه

$$۱) A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$۲) A^2 = A \times A$$

$$۳) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

حواستون باشه که چنین رابطهای برای اجتماع درست نیست! یعنی تساوی $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ الزاماً درست نیست.

$$۴) A \times B - C \times D = A \times B - ((A \times B) \cap (C \times D)) = A \times B - ((A \cap C) \times (B \cap D))$$

$$۵) A^2 \cap B^2 = (A \cap B)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا اعضای دو مجموعه را پیدا می‌کنیم:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \underbrace{x^2 - 2x < 3}_{\text{بین ریشهها}}\}$$

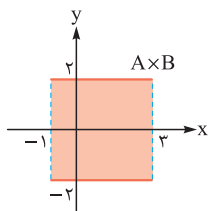
$$x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشهها}} -1 < x < 3$$

$$\Rightarrow A = (-1, 3)$$

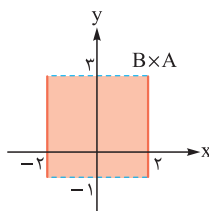
$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \underbrace{x^2 \leq 4}_{\text{بین ریشهها}}\}$$

$$x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشهها}} -2 \leq x \leq 2$$

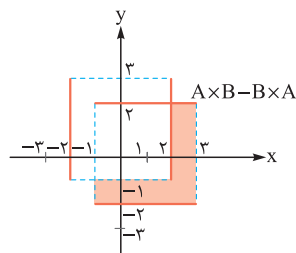
$$\Rightarrow B = [-2, 2]$$



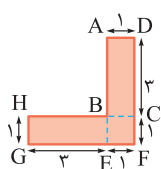
گام دوم: نمودار $A \times B$ را رسم می‌کنیم:



گام سوم: نمودار $B \times A$ را رسم می‌کنیم:



گام چهارم: بنابراین نمودار $A \times B - B \times A$ به صورت مقابل است:



گام پنجم: ناحیه حاصل به شکل مقابل است که مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = \underbrace{S_{ABCD}}_{1 \times 2} + \underbrace{S_{BCFE}}_{1 \times 1} + \underbrace{S_{BEGH}}_{3 \times 1} = 2 + 1 + 3 = 7$$



ریاضیات

نکته اگر A بازه‌ای به طول m و B بازه‌ای به طول n باشد، مساحت ناحیه محدود به $A \times B$ برابر mn می‌شود.

په‌چور دیگه **گام اول:** مساحت ناحیه محدود به $A \times B - B \times A$ را می‌خواهیم. ابتدا به کمک درس‌باکس داریم:

$$A \times B - B \times A = A \times B - ((A \times B) \cap (B \times A)) = A \times B - ((A \cap B) \times (B \cap A)) = A \times B - (A \cap B)^2$$

گام دوم: در گام اول روش قبل دیدیم: $A = (-1, 3)$ و $B = [-2, 2]$ است؛ پس $A \cap B = (-1, 2]$ می‌شود. حالا برای به دست آوردن مساحت ناحیه $A \times B - (A \cap B)^2$ ، کافی است مساحت ناحیه $(A \cap B)^2$ را از مساحت $A \times B$ کم کنیم:

$$\begin{cases} \text{مساحت } A \times B = \text{طول بازه } A \times \text{طول بازه } B = 4 \times 4 = 16 \\ \text{مساحت } (A \cap B)^2 = (\text{طول بازه } A \cap B)^2 = 3^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت } A \times B - (A \cap B)^2 = 16 - 9 = 7$$



۴۰. نمودار $A \times B$ از سه پاره‌خط به طول ۲ واحد و نمودار $B \times C$ از چهار پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده است. اگر $n(A \cap C) = 1$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

(۱) نمودار $A \times C$ از ۱۲ نقطه تشکیل شده است.

(۲) نمودار $A^2 - C^2$ از ۸ نقطه تشکیل شده است.

(۳) نمودار $(A - C) \times B$ از دو پاره‌خط عمودی تشکیل شده است.

(۴) نمودار $(B \times A) \cup (B \times C)$ از هفت پاره‌خط افقی تشکیل شده است.

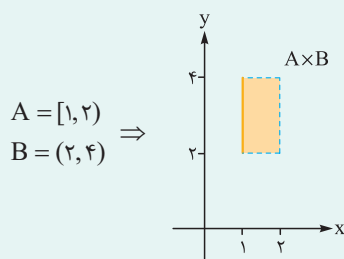


نمودار ضرب دکارتی زیر ذره‌بین

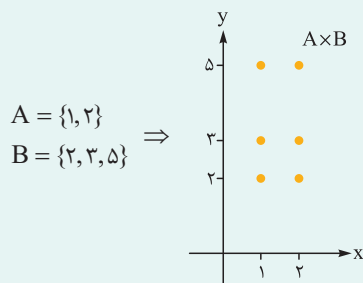
درس‌Box

اگر A و B دو مجموعه باشند، نمودار $A \times B$ ، ۳ حالت دارد:

حالت اول: اگر A و B هر دو بازه باشند، نمودار $A \times B$ به صورت مساحت یک ناحیه می‌شود، برای مثال:



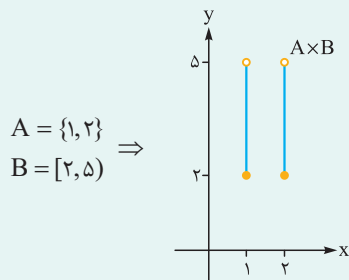
حالت دوم: اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند (هیچ کدام بازه نباشند)، نمودار $A \times B$ از تعدادی نقطه تشکیل می‌شود:



$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$



حالت سوم: اگر یکی از دو مجموعه A و B متناهی و دیگری بازه باشد، نمودار $A \times B$ از تعدادی خط یا پاره‌خط تشکیل می‌شود:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نمودار $A \times B$ از سه پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده؛ پس یکی از مجموعه‌های A یا B باید سه‌عضوی باشد و دیگری باید بازه‌ای به طول ۲ واحد باشد.

گام دوم: نمودار $B \times C$ از چهار پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده؛ پس یکی از مجموعه‌های B یا C باید چهارعضوی باشد و دیگری باید بازه‌ای به طول ۲ واحد باشد.

گام سوم: زمانی هر دو اتفاق بالا رخ می‌دهد که A مجموعه‌ای سه‌عضوی، B بازه‌ای به طول ۲ واحد و C مجموعه‌ای چهارعضوی باشد.



گام چهارم: حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): A مجموعه‌ای سه‌عضوی و C مجموعه‌ای چهارعضوی است؛ پس $A \times C$ از $3 \times 4 = 12$ نقطه تشکیل می‌شود.

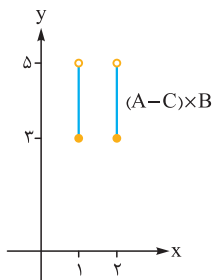
گزینه (۲): با توجه به درس باکس سؤال قبل داریم:

$$n(A^c - C^c) = n(A^c) - n(\underbrace{A^c \cap C^c}_{(A \cap C)^c}) = n(A^c) - n(A \cap C)^c = 3^2 - 1^2 = 8$$

پس نمودار $A^c - C^c$ از ۸ نقطه تشکیل شده است.

گزینه (۳): ابتدا دقت کنید که:

$$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 3 - 1 = 2$$



هم‌چنین B بازه‌ای به طول ۲ واحد است؛ پس $(A - C) \times B$ از دو پاره‌خط تشکیل می‌شود. حالا

دقت کنید در نمودار $(A - C) \times B$ ، $A - C$ مربوط به محور x و B مربوط به محور y است؛ پس

به موازات محور y بازه‌ای به طول ۲ واحد داریم که با توجه به آن، دو پاره‌خط مورد نظر عمودی

می‌شوند. برای درک بهتر، اگر فرض کنیم $A - C = \{1, 2\}$ و $B = [3, 5)$ داریم:

$$(B \times A) \cup (B \times C) = B \times (A \cup C)$$

گزینه (۴): ابتدا دقت کنید که:

$$n(A \cup C) = \underbrace{n(A)}_3 + \underbrace{n(C)}_4 - \underbrace{n(A \cap C)}_1 = 6$$

از طرفی:

پس نمودار $(B \times A) \cup (B \times C)$ از شش پاره‌خط افقی تشکیل می‌شود.

فیزیک

فیزیک یازدهم

۴۱

دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5\mu\text{C}$ و $q_2 = -10\mu\text{C}$ در فاصله معینی از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $\vec{F} = (20\text{N})\vec{i}$ باشد، میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در محل بار q_1 برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟

$$\vec{E} = (2 \times 10^6)\vec{i} \quad (1) \quad \vec{E} = (4 \times 10^6)\vec{i}$$

$$\vec{E} = -(2 \times 10^6)\vec{i} \quad (2) \quad \vec{E} = -(4 \times 10^6)\vec{i} \quad (3)$$

مشاوره ظاهر سؤال ساده است اما مفهوم و مشخص کردن جهت‌ها در نیروهای الکتریکی و میدان الکتریکی به شدت مهم است.

Hint

ابتدا نیرویی که بار q_2 به بار q_1 وارد می‌کند را مشخص کنید، سپس از رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ برای محاسبه میدان الکتریکی استفاده کنید.

درس‌Box

میدان الکتریکی، خاصیتی از فضای اطراف یک بار الکتریکی است که به واسطه آن به بارهای دیگر در این فضا، نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

برای مشخص کردن میدان الکتریکی در یک نقطه، بار آزمون مثبتی ($+q_0$) را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم و نیروی وارد بر آن را به دست می‌آوریم. در این صورت میدان الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

نیروی وارد بر بار آزمون q_0

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

← میدان الکتریکی (N/C)

بار آزمون

میدان الکتریکی کمیتی برداری است و برای تعیین جهت آن کافی است، جهت نیروی وارد بر بار آزمون $+q_0$ را تشخیص دهیم.

گام اول: نیروهای الکتریکی بین دو ذره باردار، هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت هم هستند، نیروی وارد بر بار q_1 از طرف بار q_2 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{12} = (20\text{N})\vec{i} \Rightarrow \vec{F}_{21} = (-20\text{N})\vec{i}$$

گام دوم: با توجه به این که $\vec{F}_{21} = (-20\text{N})\vec{i}$ است، به کمک رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ ، میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 را در محل بار q_1 به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}_{21} = \frac{\vec{F}_{21}}{q_1} \Rightarrow \vec{E}_{21} = \frac{-20\vec{i}}{5 \times 10^{-6}} = (-4 \times 10^6 \text{ N/C})\vec{i}$$

میدان الکتریکی
حاصل از بار q_2 در محل بار q_1

به‌جور دیگر

گام اول: با توجه به این که نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند (\vec{F}_{12}) در جهت $+\vec{i}$ است، وضعیت بار q_1 و q_2 را مشخص می‌کنیم:

$$q_1 > 0 \quad \vec{F}_{12} \quad \vec{F}_{12} \quad q_2 < 0 \quad q_2 < 0 \quad \vec{F}_{12} \quad \vec{F}_{12} \quad q_1 > 0$$

گام دوم: جهت میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 را در محل بار q_1 مشخص می‌کنیم:

$$\vec{E}_{12} \quad q_2 < 0 \quad \vec{F}_{12} \quad \vec{F}_{12} \quad q_1 > 0$$

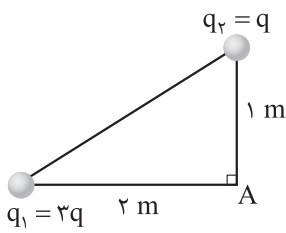
$$E = \frac{F}{q_1} = \frac{20}{5 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^6 \text{ N/C}$$

گام سوم: اندازه میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم:

از آن جا که (\vec{E}) در خلاف جهت محور x است، پس $\vec{E} = (-4 \times 10^6 \text{ N/C})\vec{i}$.

۴۲ در شکل زیر، اگر اندازه میدان الکتریکی خالص حاصل از دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 ، در نقطه A برابر 9 N/C باشد، اندازه

بار q برابر چند نانوکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



۸ (۲)

۰ / ۸ (۱)

۲۴ (۴)

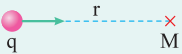
۲ / ۴ (۳)

اندازه میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه A را از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ به دست آورید. سپس میدان خالص را محاسبه کرده و برابر با 9 N/C قرار دهید و در نهایت q را به دست آورید.

Hint

برای محاسبه اندازه میدان الکتریکی در فاصله r از بار q از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

درسی Box

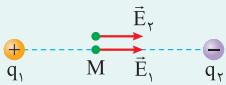


$$E_M = \frac{k|q|}{r^2}$$

در محاسبه میدان خالص در یک نقطه با سه حالت زیر روبه‌رو می‌شویم:

$$E_{tM} = E_1 + E_2$$

هم‌راستا و هم‌جهت



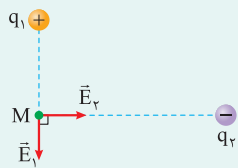
$$E_{tM} = |E_1 - E_2|$$

هم‌راستا و خلاف جهت



$$E_{tM} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

عمود بر هم



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با استفاده از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ ، اندازه میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k(3q)}{(2)^2} = \frac{3}{4}kq$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k(q)}{(1)^2} = kq$$

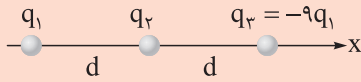
گام دوم: میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه A عمود بر هم هستند؛ بنابراین اندازه میدان خالص (برایند) را از رابطه فیثاغورس به دست می‌آوریم:

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}kq\right)^2 + (kq)^2} = \frac{5}{4}kq$$

گام سوم: میدان خالص (برایند) در نقطه A ، 9 N/C است؛ بنابراین q به دست می‌آید:

$$\frac{5}{4}kq = 9 \Rightarrow \frac{5}{4} \times 9 \times 10^9 \times q = 9 \Rightarrow q = 0.8 \times 10^{-9} \text{ C} = 0.8 \text{ nC}$$

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 ، q_2 و q_3 روی محور x قرار دارند. اگر بار q_2 به اندازه $\frac{d}{3}$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود اندازه نیروی خالص وارد بر آن چند برابر می‌شود؟



$$\frac{2}{3} (2)$$

$$\frac{3}{2} (1)$$

$$\frac{4}{5} (4)$$

$$\frac{3}{4} (3)$$

مشاوره این سبک سؤال تازگی مد شده است، آن را جدی بگیرید. منتظر این نوع سؤالات در کنکورهای آینده باشید.

Hint

ابتدا برابند نیروهای وارد بر بار q_2 را در حالت اول برحسب $\frac{kq_1q_2}{d^2}$ به دست آورید، سپس در حالت دوم به کمک مقایسه نیروها، اندازه برابند نیروها را با در نظر گرفتن تغییرات فاصله برحسب $\frac{kq_1q_2}{d^2}$ به دست آورید و در نهایت نسبت برابند نیروها را محاسبه کنید.

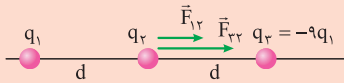
درس‌Box

طبق قانون کولن، اندازه نیروی الکتریکی بین دو ذره باردار با حاصل ضرب اندازه بارها نسبت مستقیم و با مربع فاصله بین آنها نسبت وارون دارد و اندازه این نیرو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

همان‌طور که دیدیم، اندازه نیروی الکتریکی بین دو ذره باردار با مربع فاصله بین دو ذره، نسبت وارون دارد. مثلاً اگر فاصله بین دو بار ۲ برابر شود، اندازه نیروی بین دو بار $(\frac{1}{4})$ برابر می‌شود. از این تکنیک در حل این سؤال استفاده شده است.

گام اول: جهت نیروهای وارد بر بار q_2 از طرف بارهای q_1 و q_3 را مشخص می‌کنیم (فرض می‌کنیم $q_1 > 0$ و $q_3 > 0$ است):

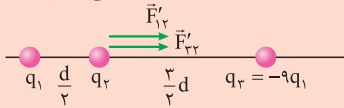


گام دوم: اندازه نیروهایی که از طرف بارهای q_1 و q_3 به بار q_2 وارد می‌شود را محاسبه کرده و در نهایت برابند نیروها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{12} = \frac{k |q_1| |q_2|}{r_{12}^2} = \frac{kq_1q_2}{d^2} \\ F_{32} = \frac{k |q_3| |q_2|}{r_{32}^2} = \frac{k |-9q_1| |q_2|}{d^2} = \frac{9kq_1q_2}{d^2} \end{cases} \Rightarrow F_{tq_2} = F_{12} + F_{32} = \frac{10kq_1q_2}{d^2}$$

دو نیروی F_{12} و F_{32} هم‌جهت و هم‌راستا هستند و برای محاسبه اندازه برابند آنها کافی است جمع جبری نیروها را به دست آوریم.

گام سوم: جهت نیروهای وارد بر بار q_2 را با جابه‌جایی به اندازه $\frac{d}{3}$ به سمت چپ (خلاف جهت محور x) مشخص می‌کنیم:



گام چهارم: اندازه نیروهای وارد بر بار q_2 از طرف بارهای q_1 و q_3 را در حالت جدید به دست می‌آوریم (F'_{12}, F'_{32}) و سپس برابند نیروهای خالص وارد بر q_2 را محاسبه می‌کنیم. فاصله بین بار q_1 و q_2 در حالت اول d بوده و در حالت جدید به $\frac{d}{3}$ می‌رسد؛ بنابراین اندازه نیرو ۴ برابر می‌شود.

$$F'_{12} = 4F_{12} = 4\left(\frac{kq_1q_2}{d^2}\right)$$

فاصله بین بار q_3 و q_2 در حالت اول d بوده و در حالت جدید به $\frac{2d}{3}$ می‌رسد، فاصله، $\frac{3}{4}$ برابر شده و اندازه نیرو $\frac{4}{9}$ برابر می‌شود:

$$F'_{32} = \frac{4}{9}F_{32} = \frac{4}{9}\left(\frac{9kq_1q_2}{d^2}\right) = \frac{4kq_1q_2}{d^2}$$

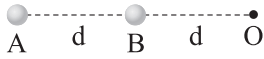
اندازهٔ برآیند نیروی خالص وارد بر بار q_2 در حالت جدید برابر است با:

$$F'_{tq_2} = F'_{12} + F'_{r2} = \frac{4kq_1q_2}{d^2} + \frac{4kq_1q_2}{d^2} = \frac{8kq_1q_2}{d^2}$$

گام پنجم: نسبت نیروی خالص وارد بر بار q_2 را در حالت دوم به حالت اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{F'_{tq_2}}{F_{tq_2}} = \frac{\frac{8kq_1q_2}{d^2}}{\frac{4kq_1q_2}{d^2}} = \frac{8}{4} = 2$$

دو ذره باردار **A** و **B** که بار الکتریکی آنها به ترتیب q_1 و q_2 است، در محل خود ثابت شده‌اند و میدان الکتریکی خالص در نقطه **O** برابر \vec{E} است. اگر بار الکتریکی ذره **A**، ۲ برابر شود، میدان الکتریکی خالص در نقطه **O** به $\frac{5}{4}\vec{E}$ می‌رسد. $\frac{q_1}{q_2}$ برابر کدام است؟



$$۱۲ (۲)$$

$$۶ (۱)$$

$$-۱۲ (۴)$$

$$-۶ (۳)$$



Hint

میدان الکتریکی در نقطه (O) ناشی از بارهای q_1 و q_2 در حالت اول برابر \vec{E} است ($\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$)، در حالت دوم بار q_1 تغییر می‌کند؛ در این حالت میدان ناشی از بار q_1 تغییر کرده و لازم است که معادله‌ای جدید به سبک حالت اول بنویسید تا به کمک دستگاه بین این دو حالت، رابطه‌ای بین E_1 و E_2 پیدا کنید. سپس با به کار بردن رابطه مقایسه‌ای، نسبت بارهای خواسته شده را به دست آورید:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{|q_2|}{|q_1|} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

برای محاسبه اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار q در نقطه‌ای که در فاصله r از آن قرار دارد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

همان‌طور که از رابطه بالا مشخص است، میدان الکتریکی با مربع فاصله از بار الکتریکی نسبت وارون دارد، مثلاً با نصف شدن فاصله ($\frac{1}{4}$ برابر شدن)، اندازه میدان الکتریکی ۴ برابر می‌شود.

در صورتی که علامت بار تغییر کند، جهت میدان الکتریکی تغییر می‌کند. فرض کنید اندازه بار الکتریکی ۵ برابر شود و علامت آن هم تغییر کند، در این صورت اندازه میدان الکتریکی ۵ برابر شده و جهت آن نیز تغییر می‌کند.

گام اول: در حالت اول، اندازه میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه (O) برابر \vec{E} است؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$$

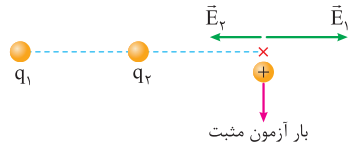
گام دوم: با دو برابر کردن اندازه بار الکتریکی q_1 ، اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 نسبت به حالت قبل دو برابر می‌شود ($E \propto |q|$).

$$۲\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{5}{4}\vec{E}$$

گام سوم: به کمک دستگاه، رابطه بین E_1 و E_2 را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \\ ۲\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{5}{4}\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_1 = ۱/\delta\vec{E}, \vec{E}_2 = -۰/\delta\vec{E}$$

گام چهارم: با فرض این که جهت مثبت به طرف راست است، علامت بارهای q_1 و q_2 را تشخیص می‌دهیم.



$$\Rightarrow q_1 > 0, q_2 < 0$$

گام پنجم: نسبت اندازه بار q_1 به q_2 را به کمک رابطه مقایسه‌ای میدان‌های الکتریکی به دست می‌آوریم:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{۱/\delta E}{۰/\delta E} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \left(\frac{d}{۲d}\right)^2 \Rightarrow ۳ = \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \left(\frac{1}{4}\right)$$

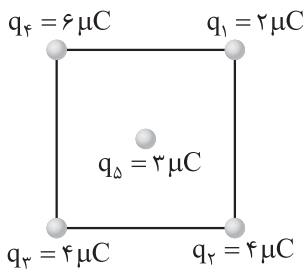
$$\Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = ۱۲ \xrightarrow{\text{ناهمنام هستند}} \frac{q_1}{q_2} = -۱۲$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

۴۵

در شکل زیر، پنج بار الکتریکی در رأس‌ها و مرکز مربعی قرار گرفته‌اند. اگر فقط علامت بار q_1 تغییر کند، اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار واقع در مرکز مربع چند برابر می‌شود؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



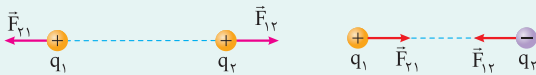
مشاوره در حل سؤالات الکتریسیته ساکن، گاهی نیاز به محاسبات طاقت‌فروسا نیست و با به‌کاربردن رابطه مقایسه‌ای به راحتی می‌توانید روند حل را ساده‌تر کنید (به حل سؤال توجه کن تا متوجه منظورم بشی!)

Hint

ابتدا نیروی وارد بر بار q_5 از طرف سایر بارها را به دست آورید. (برای راحت‌تر شدن کار، فاصله بین مرکز مربع تا رأس‌های مربع را d فرض کنید) و سپس برآیند نیروهای وارد بر بار q_5 را به دست آورید؛ حال در مرحله دوم کار ساده‌تر است چون فقط علامت یک بار تغییر می‌کند. در حالت جدید برآیند نیروهای وارد بر بار q_5 را محاسبه کنید و در نهایت هم نسبت نیروی خالص در دو حالت را به راحتی به دست آورید.

دربین Box

اگر دو بار هم‌نام باشند، یکدیگر را دفع می‌کنند و اگر ناهم‌نام باشند، یکدیگر را جذب می‌کنند.



طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که دو ذره باردار به هم وارد می‌کنند هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت هستند.

اگر علامت یکی از بارها تغییر کند، جهت نیرویی که دو ذره به هم وارد می‌کنند تغییر می‌کند.

نکته

اگر فاصله بین بارهای q_1, q_2, q_3, q_4 تا بار q_5 را d فرض کنیم، اندازه نیروی الکتریکی وارد بر بار q_5 از طرف سایر بارها برابر است با:

$$F_{15} = \frac{k |q_1| |q_5|}{r_{15}^2} = \frac{k \times 2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{d^2} = 6 \times \frac{k \times 10^{-12}}{d^2}$$

$$F_{25} = \frac{k |q_2| |q_5|}{r_{25}^2} = \frac{k \times 4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{d^2} = 12 \times \frac{k \times 10^{-12}}{d^2}$$

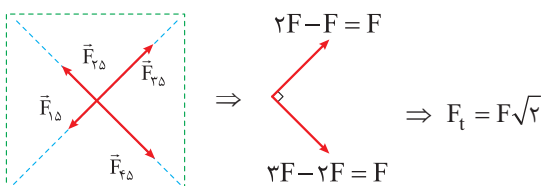
$$F_{35} = \frac{k |q_3| |q_5|}{r_{35}^2} = \frac{k \times 4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{d^2} = 12 \times \frac{k \times 10^{-12}}{d^2}$$

$$F_{45} = \frac{k |q_4| |q_5|}{r_{45}^2} = \frac{k \times 6 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{d^2} = 18 \times \frac{k \times 10^{-12}}{d^2}$$

گام دوم: اگر اندازه نیرویی که بار q_1 به بار q_5 وارد می‌کند را F در نظر بگیریم، در این صورت داریم:

$$F_{15} = F, \quad F_{25} = F_{35} = 2F, \quad F_{45} = 3F$$

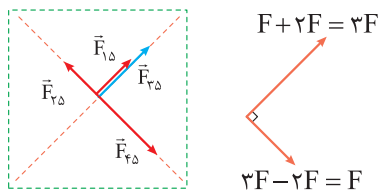
گام سوم: شکل زیر نیروهای وارد بر بار q_5 را از طرف سایر بارها نشان می‌دهد، برآیند نیروهای وارد بر بار q_5 را برحسب F به دست می‌آوریم.



گام چهارم: در حالت دوم فقط علامت بار q_1 تغییر می‌کند؛ بنابراین فقط جهت نیروی وارد بر بار q_5 از طرف q_1 تغییر می‌کند،

حال نیروهای وارد بر بار q_5 را به کمک شکلی که در گام سوم کشیدیم، در شکل زیر نشان می‌دهیم و نیروی خالص وارد بر بار q_5

را بر حسب F به دست می‌آوریم:



$$F + 2F = 3F$$

$$3F - 2F = F$$

$$\Rightarrow F'_t = \sqrt{F^2 + (3F)^2} = F\sqrt{10}$$

گام پنجم: در نهایت نسبت نیروی خالص را در حالت دوم به حالت اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{F'_t}{F_t} = \frac{F\sqrt{10}}{F\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

یک قطره روغن خنثی، با گرفتن ۵ الکترون، در میدان الکتریکی یکنواخت و قائم \vec{E} ، به حالت معلق قرار می‌گیرد. اگر جرم این قطره $4 \times 10^{-15} \text{ kg}$ باشد، \vec{E} چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ، $g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) 5×10^4 ، بالا
(۲) 5×10^4 ، پایین
(۳) 2×10^4 ، بالا
(۴) 2×10^4 ، پایین

مشاوره این سؤال برگرفته از تمرین کتاب درسی است، تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

Hint

ابتدا بار الکتریکی قطره روغن را از رابطه $q = \pm ne$ به دست آورید، سپس با استفاده از شرایط قطره روغن، با برابر قرار دادن mg با F_E ، به خواسته سؤال یعنی میدان الکتریکی برسید.

برای تعیین جهت میدان الکتریکی هم بدانید که در صورت مثبت بودن بار الکتریکی، F_E و E هم‌جهت هستند، اما در حالتی که بار الکتریکی منفی باشد، F_E و E خلاف جهت هم هستند.

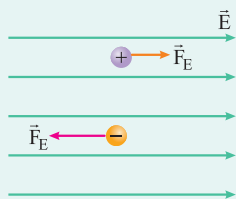
درس‌Box

مقدار بار الکتریکی از رابطه $q = \pm ne$ به دست می‌آید. n بیانگر اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها است و e هم مقدار بار الکتریکی الکترون که معادل $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ است.

اگر تعداد الکترون‌ها بیشتر از پروتون‌ها باشد، در رابطه بالا، علامت منفی را به کار می‌بریم و اگر تعداد پروتون‌ها بیشتر از الکترون‌ها باشد از علامت مثبت استفاده می‌کنیم.

اگر ذره‌ای با بار q در فضایی تحت تأثیر میدان الکتریکی E قرار گیرد، نیروی هم‌راستا با میدان الکتریکی به بزرگی $F_E = E |q|$ از طرف میدان الکتریکی به ذره وارد می‌شود.

اگر ذره دارای بار مثبت باشد، جهت نیروی وارد بر ذره هم‌جهت با میدان الکتریکی است و اگر دارای بار منفی باشد، جهت نیروی وارد بر ذره در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

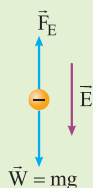


پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** بار الکتریکی روغن را به کمک رابطه $q = \pm ne$ به دست می‌آوریم.

$$q = -ne = -5 \times 1.6 \times 10^{-19} = -8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

↓
جسم خنثی الکترون گرفته

گام دوم: شکل زیر وضعیت تعادل قطره روغن را نشان می‌دهد، نیروی وزن رو به پایین است؛ بنابراین نیرویی که از طرف میدان الکتریکی به قطره روغن وارد می‌شود باید رو به بالا باشد. چون بار قطره روغن منفی است، طبق رابطه $\vec{F}_E = \vec{E}q$ ، جهت میدان الکتریکی باید رو به پایین باشد:

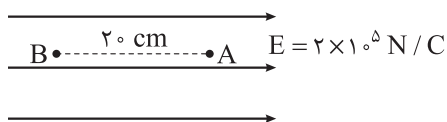


گام سوم: شرط تعادل این است که اندازه نیروهای F_E و W برابر باشد:

$$F_E = mg \Rightarrow E |q| = mg \Rightarrow E \times 8 \times 10^{-19} = 4 \times 10^{-15} \times 10$$

$$E = \frac{4 \times 10^{-14}}{8 \times 10^{-19}} = \frac{4 \times 10^5}{8} = 5 \times 10^4 \text{ N/C}$$

در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای q از نقطه A تا نقطه B ، موازی خطوط میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} جابه‌جا می‌شود. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی بار، 3 mJ کاهش یابد، q چند نانوکولن است؟



(۱) ۷۵

(۲) ۵۰

(۳) -۷۵

(۴) -۵۰

۴۷

مشاوره مبحث پتانسیل الکتریکی و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، جزء مباحث خوش‌فلق الکتریسیته ساکن است که می‌توان به راحتی به جواب رسید؛ بنابراین در حل تست‌ها، این مبحث را در اولویت قرار دهید.



Hint

به کمک تحلیل و استنباط نوع بار q را تشخیص دهید (مثلاً می‌توانید از رابطه $\Delta U = q\Delta V$ استفاده کنید)، سپس به کمک رابطه $\Delta U = -E |q| d \cos \alpha$ ، اندازه بار الکتریکی را محاسبه کنید.

دروس Box

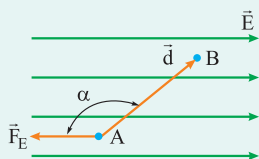
هرگاه ذره‌ای باردار در جهت میدان الکتریکی حرکت کند، پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد، به عبارتی جهت میدان الکتریکی از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است و هیچ ربطی هم به نوع و اندازه بار الکتریکی ندارد.

اگر پتانسیل الکتریکی ذره باردار q در یک جابه‌جایی به اندازه ΔV تغییر کند، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطه $\Delta U = q\Delta V$ به دست می‌آید:

$$\Delta U = q\Delta V$$

در این رابطه q را با علامت قرار می‌دهیم.

برای محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطه $\Delta U_E = -E |q| d \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم، در این رابطه α زاویه بین \vec{d} و \vec{F}_E است.



$$\Delta U_E = -E |q| d \cos \alpha$$

گام اول: به کمک رابطه $\Delta U = q\Delta V$ نوع بار (مثبت یا منفی بودن) را تشخیص می‌دهیم. در جابه‌جایی از A تا B ، ذره در خلاف جهت میدان جابه‌جا شده است، پس پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد ($\Delta V > 0$).

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow q < 0$$

طبق صورت سؤال، انرژی پتانسیل الکتریکی کاهش یافته است

$$\Delta U < 0$$

گام دوم: از رابطه $|\Delta U| = E |q| d$ برای محاسبه اندازه بار الکتریکی استفاده می‌کنیم:

$$|\Delta U| = E |q| d \Rightarrow 3 \times 10^{-3} = 2 \times 10^5 |q| \times 2 \times 10^{-1} \Rightarrow |q| = 7.5 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$|q| = 7.5 \times 10^{-9} \text{ C} \Rightarrow q = -7.5 \text{ nC}$$

فیزیک

۴۸

ذره‌ای به بار الکتریکی -2mC را از نقطه A با پتانسیل الکتریکی 10V تا نقطه B جابه‌جا می‌کنیم. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی الکتریکی برابر 0.08J باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B برابر چند ولت است؟

۵۰ (۲)

۳۰ (۱)

-۵۰ (۴)

-۳۰ (۳)



به کمک رابطه $\Delta U_E = -W_E$ ، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را به دست آورید. سپس از رابطه $\Delta U = q\Delta V$ برای محاسبه پتانسیل الکتریکی در نقطه B استفاده کنید.

Hint

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، قرینه کار نیروی الکتریکی است:

$$\Delta U_E = -W_E$$

اگر تغییرات پتانسیل الکتریکی در جابه‌جایی بار q از A تا B برابر ΔV باشد، انرژی پتانسیل الکتریکی به اندازه ΔU_E تغییر می‌کند و رابطه زیر برقرار است:

$$\Delta U_E = q \Delta V$$

$$U_B - U_A = q (V_B - V_A)$$

توجه کنید در این رابطه q با علامت گذاشته شود.

گام اول: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (ΔU_E) قرینه کار نیروی الکتریکی (W_E) است: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta U_E = -W_E = -(-0.08) = +0.08 \text{ J}$$

گام دوم: از رابطه $\Delta U = q\Delta V$ برای محاسبه پتانسیل الکتریکی نقطه B استفاده می‌کنیم:

$$\Delta U = q \Delta V \Rightarrow U_B - U_A = q (V_B - V_A)$$

$$+0.08 = \underbrace{-2 \times 10^{-2}}_{\downarrow} (V_B - 10) \Rightarrow \frac{8 \times 10^{-2}}{-2 \times 10^{-2}} = V_B - 10 \Rightarrow -40 = V_B - 10 \Rightarrow V_B = -30 \text{ V}$$

بار الکتریکی بر حسب کولن و با علامت

ذره‌ای با بار الکتریکی q در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی یکنواختی با تندی اولیه v_0 پرتاب شده و پس از طی مسافت d متوقف می‌شود. اگر این ذره، در جهت خطوط همین میدان الکتریکی با تندی v_0 پرتاب شود، پس از طی مسافت $3d$ ، تندی آن به v می‌رسد. v چند برابر v_0 است؟

۲ (۴)

 $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)



Hint

در حالت اول، رابطه $\Delta U_E + \Delta K = 0$ را به کار ببرید تا رابطه‌ای بین Eqd و $\frac{1}{2}mv_0^2$ که همان انرژی جنبشی اولیه است بیابید. رابطه $\Delta U_E + \Delta K = 0$ را در شرایط جدید به کار ببرید و از رابطه‌ای که در مرحله اول به دست آورده‌اید در حالت دوم استفاده کنید تا تندی v را برحسب v_0 بیابید.

دروس Box

طبق اصل پایستگی انرژی در صورتی که اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، اگر در طی جابه‌جایی بار q انرژی پتانسیل الکتریکی به اندازه ΔU_E و انرژی پتانسیل گرانشی به اندازه ΔU_g تغییر کند، رابطه زیر برقرار است:

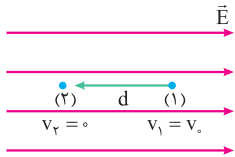
تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی

$$\Delta U_E + \Delta U_g + \Delta K = 0$$

تغییرات انرژی جنبشی
تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی

معمولاً در جابه‌جایی‌های کم، از تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی صرف نظر می‌کنیم.

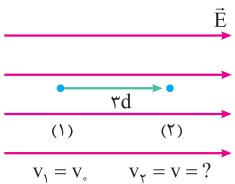
گام اول: شکل زیر، وضعیتی را نشان می‌دهد که بار q در خلاف جهت میدان الکتریکی یکنواخت با تندی اولیه v_0 پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت d متوقف می‌شود. با توجه به توقف ذره باردار q در نقطه (۲)، نیروی الکتریکی به سمت راست است؛ بنابراین علامت بار q مثبت است:



گام دوم: طبق اصل پایستگی انرژی ($\Delta U_E + \Delta K = 0$) در حالت اول داریم:

$$\Delta U_E + \Delta K = 0 \Rightarrow Eqd + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_0^2) = 0 \Rightarrow Eqd = \frac{1}{2}mv_0^2$$

گام سوم: در حالت دوم، مطابق شکل زیر، همان ذره با تندی v_0 در جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است و خواسته سؤال، تندی ذره پس از طی مسافت $3d$ است:



گام چهارم: اصل پایستگی انرژی را برای حالت دوم به کار می‌بریم:

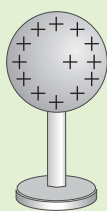
$$\Delta U_E + \Delta K = 0 \Rightarrow -Eq(3d) + \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = 0$$

$$3Eqd = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) \xrightarrow[\text{در گام دوم متوجه شدیم}]{Eqd = \frac{1}{2}mv_0^2} 3\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$3v_0^2 = v^2 - v_0^2 \Rightarrow v^2 = 4v_0^2 \Rightarrow v = 2v_0 \rightarrow \frac{v}{v_0} = 2$$

۵۰

در شکل زیر ذره باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطه A به سمت کره باردار که روی پایه عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم



۴ (۴)



۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

و در نقطه B قرار می‌دهیم. در این جابه‌جایی، چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، مثبت است.

(ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره کاهش می‌یابد.

(پ) اندازه نیروی الکتریکی وارد بر ذره کاهش می‌یابد.

(ت) پتانسیل الکتریکی نقطه B، بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطه A است.

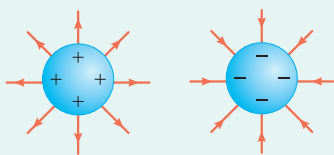


Hint

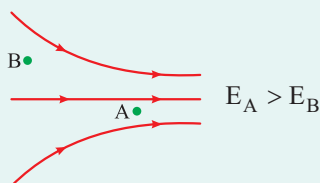
ابتدا خطوط میدان الکتریکی را در اطراف کره باردار رسم کنید و جهت نیروی الکتریکی را مشخص کنید. سپس علامت کار میدان الکتریکی را از رابطه $W_E = F_E d \cos \theta$ مشخص کنید و پس از آن از رابطه $\Delta U_E = -W_E$ برای تعیین علامت تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی استفاده کنید.

درس‌Box

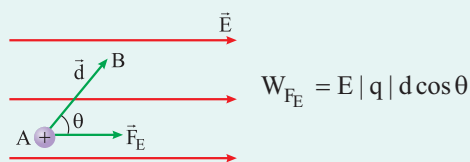
جهت خطوط میدان الکتریکی در اطراف بارهای مثبت به سمت بیرون و در اطراف بارهای منفی به سمت داخل است:



هرگاه در جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، به عبارت دیگر جهت خطوط میدان الکتریکی از پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کم‌تر است. تراکم خطوط میدان الکتریکی، بیانگر اندازه و شدت میدان الکتریکی است، در شکل مقابل میدان الکتریکی در نقطه A بزرگ‌تر از نقطه B است.

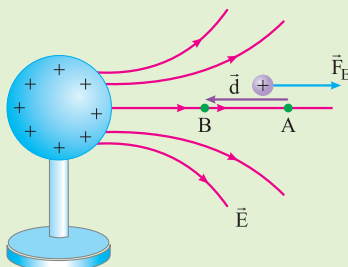


برای محاسبه کار نیروی الکتریکی از رابطه $W_{FE} = E |q| d \cos \theta$ استفاده می‌کنیم که θ در این رابطه زاویه بین \vec{F}_E و \vec{d} است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط مورد «ت» درست است.

گام اول: ابتدا مطابق شکل زیر جهت میدان الکتریکی و نیروی الکتریکی را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: جهت نیروی الکتریکی (\vec{F}_E) به سمت راست و جهت جابه‌جایی بار (\vec{d}) به سمت چپ است؛ بنابراین کار نیروی الکتریکی

منفی است:

$$W_{FE} = F_E d \cos \theta \xrightarrow{\theta=180^\circ, \cos \theta=-1} W_{FE} < 0$$

گام سوم: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، فرینۀ کار نیروی الکتریکی است؛ بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد:

$$\Delta U_E = -W_E \Rightarrow \Delta U_E > 0$$

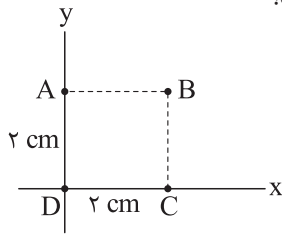
گام چهارم: نیروی الکتریکی وارد بر ذره از رابطه $F_E = Eq$ به دست می‌آید و در اثر جابه‌جایی از A تا B تراکم خطوط میدان

الکتریکی بیشتر شده و میدان الکتریکی قوی‌تر می‌شود، بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر ذره افزایش می‌یابد.

گام پنجم: بدون توجه به اندازه و نوع بار، هرگاه در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد ($V_B > V_A$)؛

بنابراین، فقط مورد آخر درست است.

در صفحه مختصات شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} وجود دارد. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه‌های A ، B ، C و D به ترتیب برابر $۲۰V$ ، $۵V$ ، $-۱۰V$ و $۵V$ باشد، میدان الکتریکی \vec{E} چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



$$(۱) \searrow, ۷۵۰\sqrt{۲}$$

$$(۲) \swarrow, ۷۵۰\sqrt{۲}$$

$$(۳) \searrow, ۳۷۵\sqrt{۲}$$

$$(۴) \swarrow, ۳۷۵\sqrt{۲}$$

Hint

دو نقطه هم‌پتانسیل را به هم وصل کنید (نقاط B و D). سپس خطی عمود بر این خط هم‌پتانسیل، از سمت پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کم‌تر رسم کنید تا جهت میدان الکتریکی مشخص شود. در نهایت به کمک دو نقطه غیر هم‌پتانسیل و نوشتن رابطه $E = \frac{|\Delta V|}{d}$ اندازه میدان الکتریکی را به دست آورید (فقط توجه کنید d جابه‌جایی در راستای میدان الکتریکی است).

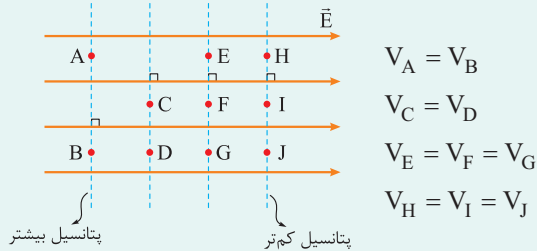
درتس Box

میدان الکتریکی یکنواخت، میدانی است که اندازه و جهت آن در فضای مورد نظر ثابت است و تغییر نمی‌کند.

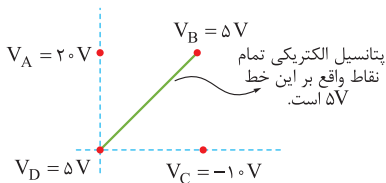
خطوط میدان الکتریکی یکنواخت، موازی، مستقیم، هم‌فاصله و در یک جهت هستند مانند آن چیزی که در شکل زیر مشخص شده است.



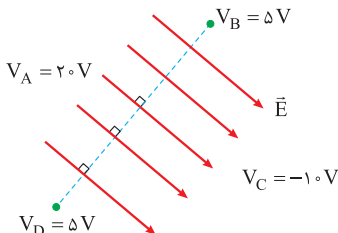
اگر نقاطی که پتانسیل یکسان دارند را به هم وصل کنیم، خطوط هم‌پتانسیل ایجاد می‌شود و از آن‌جا که در میدان الکتریکی یکنواخت و خطوط موازی و مستقیم هستند؛ خطوط هم‌پتانسیل، به صورت یک خط راست هستند:



گام اول: پتانسیل نقاط A ، B ، C و D را بر روی شکل مشخص می‌کنیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: با توجه به یکنواخت بودن میدان الکتریکی، خطوط آن عمود بر خطوط هم‌پتانسیل و از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کم‌تر هستند.



گام سوم: از رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ بین دو نقطه A و C برای محاسبه میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{V_A - V_C}{d_{AC}} = \frac{۲۰ - (-۱۰)}{۲\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۲}} = \frac{۳۰}{۲\sqrt{۲} \times ۱۰^{-۲}} = \frac{۱۵۰۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۵۰۰\sqrt{۲}}{۲} = ۷۵۰\sqrt{۲} \text{ N/C}$$

قطر مربع $۲\sqrt{۲}\text{cm}$

شعاع کره رسانای B، ۲ برابر شعاع کره رسانای A و چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، ۴ برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کره B است. چند درصد از بار کره A را به کره B منتقل کنیم، تا چگالی سطحی بار این دو کره برابر شود؟

۸۰ (۲)

۲۰ (۱)

۶۰ (۴)

۴۰ (۳)



ابتدا به کمک رابطه $\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2$ ، نسبت بار کره A به B را مشخص کنید. سپس حالتی را بررسی کنید که باید چگالی سطحی دو کره برابر باشد و در این حالت، اندازه بارها را مشخص کنید و در نهایت در مقایسه با حالت اول تعیین کنید چه مقدار بار از کدام کره به کره دیگر منتقل شده است.

 Hint

اگر بار الکتریکی یک رسانا با سطح خارجی A، برابر با Q باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{|Q|}{A}$$

سطح خارجی کره به شعاع r از رابطه $A = 4\pi r^2$ به دست می‌آید. رابطه چگالی سطحی به صورت مقایسه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times \frac{A_B}{A_A} \xrightarrow{\text{اگر دو رسانا کروی باشند}} \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2$$

گام اول: با به‌کاربردن رابطه چگالی سطحی به صورت مقایسه‌ای، نسبت اندازه بار دو کره را به دست می‌آوریم:

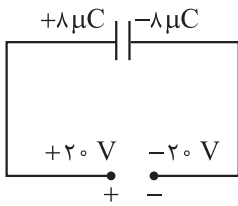
$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \Rightarrow 4 = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times (2)^2 \Rightarrow |Q_A| = |Q_B|$$

گام دوم: در این مرحله باید تشخیص دهیم، دو کره دارای بار همنام هستند یا ناهمنام! باید با یک دید کاملاً مفهومی به این مسئله نگاه کنیم. اگر بار کره‌ها ناهمنام باشند، چون مجموع بارهای دو کره برابر صفر است و طبق اصل پایستگی بار در اثر انتقال بار از یک کره به کره دیگر هم‌چنان مجموع بارها صفر خواهد بود و نسبت اندازه بارها تغییر نخواهد کرد؛ بنابراین بار دو کره باید همنام باشد. **گام سوم:** اگر باری که از کره A به کره B انتقال داده می‌شود تا چگالی سطحی بار دو کره برابر شود را x در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$\sigma'_A = \sigma'_B \Rightarrow \frac{|Q_A - x|}{r_A^2} = \frac{|Q_B + x|}{r_B^2} \xrightarrow{r_B = 2r_A} \frac{|Q_B + x|}{|Q_A - x|} = 4$$

$$\begin{cases} Q_B + x = 4Q_A - 4x \xrightarrow{Q_A = Q_B} 3Q_A = 5x \Rightarrow x = \frac{3}{5}Q_A \rightarrow \text{درصد } x = \frac{3}{5}Q_A \times 100 = 60\%Q_A \\ Q_B + x = -4Q_A + 4x \xrightarrow{Q_A = Q_B} 5Q_A = 3x \Rightarrow x = \frac{5}{3}Q_A \text{ غ.ق.ق.} \end{cases}$$

در شکل زیر، خازنی به دو سر مولدی متصل است که پتانسیل الکتریکی پایه‌های مثبت و منفی آن به ترتیب $+۲۰\text{V}$ و -۲۰V است. اگر بار الکتریکی دو صفحه خازن $+۸\mu\text{C}$ و $-۸\mu\text{C}$ باشد، ظرفیت خازن چند میکروفاراد است؟



$$۰/۲ (۱)$$

$$۰/۴ (۲)$$

$$۲/۵ (۳)$$

$$۵ (۴)$$

مشاوره در چنین سؤالاتی، ترتیب براساس عبارت‌ها مشخص می‌شود، نه جدول؛ بنابراین ابتدا باید هر عبارت را بخوانید و سپس تشخیص دهید که هر مورد، در کدام قسمت از جدول قرار می‌گیرد! حال در این سؤال، باید به این امر مهم دقت کنید که ترتیب جاهای خالی در جدول هم به هم ریخته است و الزاماً از «الف» شروع نمی‌شود! سخت شد، نه؟

Hint

به کمک رابطه $V_{\text{باتری}} = V_+ - V_-$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری که همان اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V) است را به دست آورید. سپس از رابطه $C = \frac{Q}{V}$ برای محاسبه ظرفیت خازن استفاده کنید.

درس‌Box

هر باتری شامل دو پایه مثبت و منفی است و بنا به قرارداد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با پتانسیل پایه مثبت منهای پتانسیل پایه منفی آن است:

پتانسیل الکتریکی پایه مثبت

$$\Delta V = V_+ - V_-$$

پتانسیل الکتریکی اختلاف پتانسیل

پایانه منفی دو سر باتری

اگر یک خازن با ظرفیت C را به دو سر یک باتری با اختلاف پتانسیل V_1 وصل کنیم، بار ذخیره شده روی خازن برابر با Q_1 می‌شود و اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن را به V_2 برسانیم، بار ذخیره شده روی آن Q_2 خواهد شد؛ در این صورت روابط زیر برقرار است:

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

توجه کنید در رابطه بالا چون ساختمان خازن تغییر نکرده است، ظرفیت خازن ثابت است.

گام اول: اختلاف پتانسیل باتری برابر با اختلاف پتانسیل پایه مثبت و منفی آن است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل باتری که همان

اختلاف پتانسیل دو سر خازن شارژ شده است را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{خازن}} = V_{\text{باتری}} = V_+ - V_- = (۲۰) - (-۲۰) = +۴۰\text{V}$$

گام دوم: ظرفیت خازن را به کمک رابطه $C = \frac{Q}{V}$ به دست می‌آوریم.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{۸\mu\text{C}}{۴۰\text{V}} = ۰/۲\mu\text{F}$$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری را ۲۰V در نظر نگیرید، اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی پایه مثبت و پایه منفی آن است. **گول نخوری**

اختلاف پتانسیل بین دو صفحه یک خازن را ۲۵ درصد افزایش می‌دهیم؛ اگر با این کار $15 \mu\text{C}$ بر بار ذخیره‌شده در خازن افزوده شود، بار اولیه ذخیره‌شده در این خازن چند میکروکولن است؟

۴۵ (۲)

۳۰ (۱)

۷۵ (۴)

۶۰ (۳)



به کمک رابطه $C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ و رابطه $\Delta V = 0.25V_1$ به راحتی می‌توانید بار اولیه ذخیره‌شده در خازن را به دست آورید.

 Hint

ظرفیت خازن فقط به ساختمان خازن (مساحت سطح متقابل صفحات، فاصله بین صفحات و جنس عایق بین صفحات) آن وابسته است و با تغییر اختلاف پتانسیل دو سر خازن، بار ذخیره‌شده روی صفحات آن به گونه‌ای تغییر می‌کند که نسبت $\frac{Q}{V}$ که بیانگر ظرفیت خازن است، ثابت بماند و رابطه زیر برقرار است:

 **درس‌Box**

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

گام اول: ظرفیت خازن از رابطه $C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ به دست می‌آید. تغییرات بار الکتریکی $15 \mu\text{C}$ است و اختلاف پتانسیل ۲۵

 پاسخ خیلی تشریحی ✓

درصد افزایش یافته است، بنابراین داریم:

$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \xrightarrow[\Delta Q = 15 \mu\text{C}]{V_2 = 0.25V_1} \frac{Q_1}{V_1} = \frac{15}{0.25V_1 - V_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{V_1} = \frac{15}{-0.75V_1} \Rightarrow Q_1 = 60 \mu\text{C}$$

۵۵ فاصله بین صفحه‌های یک خازن تخت 5mm و مساحت هر یک از صفحه‌های آن 10cm^2 است. بین دو صفحه خازن از یک ماده دی‌الکتریک انعطاف‌پذیر با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 5$ پر شده است. اگر فاصله بین صفحه‌ها را 40% درصد کاهش دهیم، ظرفیت خازن چند پیکوفاراد افزایش می‌یابد؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

- ۶ (۱) ۹ (۲)
۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

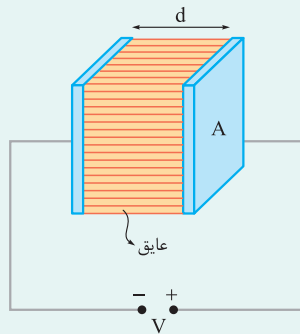
Hint

ظرفیت خازن در این سؤال فقط به دلیل تغییر فاصله بین صفحات، دچار تغییرات شده است و می‌توانیم تغییرات ظرفیتی خازن را از رابطه مقابل به دست آوریم:

$$\Delta C = \kappa \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)$$

ظرفیت خازن (C)، فقط به ساختمان خازن وابسته است و در صورتی که اختلاف پتانسیل دو سر خازن تغییر کند بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن به صورتی تغییر می‌کند تا نسبت $\frac{Q}{V}$ ثابت بماند.

ظرفیت خازن به جنس عایق بین دو صفحه (دی‌الکتریک)، فاصله بین دو صفحه خازن (d) و مساحت مشترک بین صفحات خازن (A) وابسته است و از رابطه زیر به دست می‌آید:



مساحت مشترک بین دو صفحه (m^2) ثابت دی‌الکتریک

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$$

← ظرفیت خازن (F) فاصله بین دو صفحه (m)

ثابت دی‌الکتریک عددی بدون یکا است و برای خلأ و هوا برابر با یک است. ϵ_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ است. ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ظرفیت خازن از رابطه $C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$ به دست می‌آید و در این سؤال فقط فاصله بین صفحات تغییر کرده است؛ بنابراین برای محاسبه تغییرات ظرفیت خازن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta C = \kappa \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)$$

گام دوم: تغییرات ظرفیت خازن را محاسبه می‌کنیم ($d_2 = 0.6d_1 = 0.6 \times 5 = 3\text{mm}$).

$$\Delta C = \kappa \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = 5 \times 9 \times 10^{-12} \times (10 \times 10^{-4}) \left(\frac{1}{3 \times 10^{-3}} - \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta C = 45 \times 10^{-12} \times 10^{-3} \left(\frac{1000}{3} - \frac{1000}{5} \right) = 45 \times 10^{-12} \times 10^{-3} \left(\frac{2000}{15} \right) = 6 \times 10^{-12} \text{ F} = 6 \text{ pF}$$

فیزیک

۵۶

مدار فلاش یک دوربین عکاسی، انرژی را تحت اختلاف پتانسیل 100V در یک خازن ذخیره می‌کند. انرژی ذخیره شده در این خازن در مدت 2ms به طور کامل تخلیه می‌شود. اگر توان متوسط خروجی فلاش 50W باشد. ظرفیت خازن این دوربین چند میکروفاراد است؟

$$200 \quad (2)$$

$$100 \quad (1)$$

$$20 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$



ابتدا به کمک رابطه $P_{av} = \frac{U}{t}$ ، انرژی ذخیره شده در خازن را به دست آورید، سپس از رابطه $U = \frac{1}{2}CV^2$ ظرفیت خازن به راحتی قابل محاسبه است.

 Hint

اگر خازنی با ظرفیت C به اختلاف پتانسیل V وصل شده و بار ذخیره شده روی صفحه‌های آن Q باشد، به واسطه وجود میدان الکتریکی بین صفحات آن، انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده است و از روابط زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U = \frac{1}{2}QV$$

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

اگر بار ذخیره شده در خازن در مدت زمان t تخلیه شود، آهنگ متوسط تخلیه انرژی (توان متوسط) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{av} = \frac{U}{t} \rightarrow (J) \text{ انرژی ذخیره شده در خازن}$$

$$\downarrow \rightarrow (S) \text{ مدت زمان تخلیه بار الکتریکی خازن}$$

توان متوسط تخلیه

(W) انرژی خازن

گام اول: توان متوسط خروجی فلاش 50W است، طبق رابطه $P_{av} = \frac{U}{t}$ ، انرژی تخلیه شده خازن را به دست می‌آوریم:

$$50 = \frac{U}{2 \times 10^{-3}} \Rightarrow U = 0.1\text{J}$$

گام دوم: از رابطه $U = \frac{1}{2}CV^2$ برای محاسبه ظرفیت خازن استفاده می‌کنیم:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 0.1 = \frac{1}{2}C(100)^2 \Rightarrow C = 0.2 \times 10^{-4} = 20 \times 10^{-6}\text{F} = 20\text{ }\mu\text{F}$$

 درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک خازن تخت بدون دی الکتریک به یک باتری بسته شده است تا باردار شود. پس از مدتی در حالی که باتری هم چنان به خازن متصل است، فاصله بین صفحات خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام یک از موارد زیر درست است؟

(الف) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها نصف می‌شود.
 (ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، ۲ برابر می‌شود.
 (پ) بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن، ۲ برابر می‌شود.
 (ت) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن، نصف می‌شود.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) الف و ت

(۱) الف و پ

مشاوره این سؤال برگرفته از تمرین‌های آخر فصل کتاب درسی است، سؤالی که در کنکور سال ۱۳۹۹ آمده و باز هم احتمال دارد مطرح شود.



Hint

ابتدا با توجه به متصل بودن خازن به باتری، تشخیص دهید کدام یک از متغیرهای بار ذخیره‌شده در خازن یا اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت است. سپس در مرحله دوم به کمک رابطه $\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$ ، مشخص کنید ظرفیت خازن چگونه تغییر می‌کند. در مرحله سوم از رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ برای بررسی تغییرات میدان الکتریکی استفاده کنید. و در نهایت از یکی از روابط $U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$ برای بررسی تغییرات انرژی خازن بهره بگیرید.

درس‌Box

تا زمانی که خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت است و تغییر نمی‌کند. اگر خازن را از باتری جدا کنیم (رابطه‌ای با باتری ندارد و تبادل بار الکتریکی نمی‌کند)، بار ذخیره‌شده در خازن ثابت است و تغییر نمی‌کند. ظرفیت خازن، فقط به ساختمان خازن وابسته است و با تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی و بار ذخیره‌شده در خازن، ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند. خازنی را در نظر بگیرید که اختلاف پتانسیل دو سر آن V و بار ذخیره‌شده در آن Q است، میدان الکتریکی بین صفحات این خازن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

d فاصله بین صفحات خازن، κ ثابت دی الکتریک و A مساحت مشترک بین صفحات خازن است.

انرژی ذخیره‌شده در خازن از سه رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$W = \text{اختلاف پتانسیل (V)}$$

$$Q = \text{بار الکتریکی (C)}$$

$$C = \text{ظرفیت (F)}$$

$$U = \text{انرژی (J)}$$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** تا زمانی که خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت است و تغییر نمی‌کند (عبارت «ب» نادرست است).

گام دوم: تغییرات ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم، فقط فاصله بین صفحات خازن دو برابر شده است:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ثابت ثابت

ظرفیت خازن نصف شده است.

گام سوم: به کمک رابطه $Q = CV$ ، تغییرات بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن را بررسی می‌کنیم:

$$Q = CV \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{2}$$

ثابت نصف شده

بنابراین عبارت «پ» نادرست است.

گام چهارم: برای بررسی تغییرات میدان الکتریکی، از رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \text{درستی «الف»} \Rightarrow \text{میدان الکتریکی بین صفحات نصف می‌شود.}$$

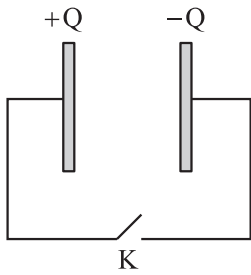
↑ ثابت
↓ دوبرابر

گام پنجم: برای بررسی تغییرات انرژی ذخیره شده در خازن از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ کمک می‌گیریم:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \text{انرژی ذخیره شده در خازن نصف می‌شود.} \Rightarrow \text{درستی «ت»}$$

↑ ثابت
↓ نصف شده

در شکل زیر، دو صفحه خازن تخت بارداری را با بستن کلید K ، به هم وصل می‌کنیم؛ در نتیجه جرقه‌ای زده می‌شود. با انجام کدام یک از



(۲) ب و پ

(۴) الف و ت

اقدامات زیر، با بستن کلید K ، الزاماً جرقه بزرگ‌تری حاصل می‌شود؟

(الف) با ثابت ماندن بار صفحه‌ها، فاصله بین آن‌ها را افزایش دهیم.

(ب) با ثابت ماندن بار صفحه‌ها، یک دی‌الکتریک بین آن‌ها قرار دهیم.

(پ) بار اولیه روی صفحه‌ها را افزایش و فاصله بین آن‌ها را کاهش دهیم.

(ت) بار اولیه روی صفحه‌ها را افزایش و مساحت آن‌ها را کاهش دهیم.

(۱) الف و پ

(۳) ب و ت



در حالتی که انرژی ذخیره‌شده در خازن بیشتر باشد، جرقه ایجادشده در خازن بزرگ‌تر خواهد شد. حال به کمک رابطه $C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$ و $U = \frac{Q^2}{2C}$ ، تک‌تک گزاره‌ها را بررسی کنید که مقدار بار ذخیره‌شده و ظرفیت خازن چگونه تغییر می‌کند تا در نهایت تغییرات انرژی ذخیره‌شده خازن را تحلیل کنید.



Hint

در این سؤال باید بررسی کنیم در کدام حالت انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد.

گام اول: بررسی عبارت «الف»: با ثابت ماندن بار صفحه‌ها (Q)، فاصله بین آن‌ها را افزایش دهیم. با افزایش فاصله بین صفحه‌ها، ظرفیت خازن طبق رابطه $C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$ کاهش می‌یابد.

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \text{انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد} \checkmark$$

↑ ثابت
↓ کاهش

گام دوم: بررسی عبارت «ب»: با ثابت ماندن بار صفحه‌ها (Q) و افزودن دی‌الکتریک، ظرفیت خازن افزایش می‌یابد:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \text{انرژی ذخیره‌شده در خازن کاهش می‌یابد} \times$$

↑ ثابت
↓ افزایش

گام سوم: بررسی عبارت «پ»: با افزایش بار اولیه صفحه‌ها (Q) و کاهش فاصله بین صفحات خازن، تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را بررسی می‌کنیم. کاهش فاصله بین صفحات خازن طبق رابطه $(C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d})$ باعث افزایش ظرفیت خازن می‌شود.

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \text{نمی‌توانیم تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را تشخیص دهیم} \times$$

↑ افزایش
↓ افزایش

گام چهارم: بررسی عبارت «ت»: با کاهش مساحت صفحات خازن، ظرفیت خازن کاهش می‌یابد:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \text{انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد} \checkmark$$

↑ افزایش
↓ کاهش



ظرفیت خازنی $5\mu\text{F}$ و بار الکتریکی آن Q است. اگر 10mC بار الکتریکی را از صفحه منفی خازن جدا کرده و به صفحه مثبت آن منتقل کنیم، انرژی ذخیره شده در خازن 30J افزایش می‌یابد. انرژی اولیه ذخیره شده در خازن چند ژول بوده است؟

۱۰ (۲)

۵ (۱)

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

مشاوره این سؤال که تقریباً سخت به حساب می‌آید برگرفته از مسائل آخر فصل کتاب درسی است. سؤالی که در کنکور ۱۳۹۷ خارج از کشور، ۱۳۹۹ خارج از کشور و ۱۴۰۰ داخل مطرح شده است. (فلاصه بلم که مومه!)

Hint

ابتدا با توجه به انتقال بار، تغییرات بار الکتریکی را به دست آورید؛ به عبارتی Q_2 را بر حسب Q_1 بنویسید. سپس از رابطه $\Delta U = \frac{Q_2^2 - Q_1^2}{2C}$ برای محاسبه بار Q_1 استفاده کنید و در نهایت انرژی ذخیره شده در خازن در حالت اول ($U_1 = \frac{Q_1^2}{2C}$) را به دست آورید.

درس‌Box

خازنی با ظرفیت C را در نظر بگیرید که بار ذخیره شده روی آن Q باشد. اگر بار $+q$ را از صفحه مثبت به صفحه منفی خازن انتقال دهیم یا بار $-q$ را از صفحه منفی به صفحه مثبت انتقال دهیم، اندازه بار ذخیره شده در خازن کاهش یافته و برابر با $(Q - q)$ خواهد شد و در نتیجه انرژی ذخیره شده در خازن کاهش می‌یابد.

$$(Q - q) = Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q - q$$

$$U = \frac{Q_2^2}{2C}$$

↑
ثابت

اگر بار $-q$ را از صفحه مثبت به صفحه منفی خازن انتقال دهیم یا بار $+q$ را از صفحه منفی به صفحه مثبت انتقال دهیم، اندازه بار ذخیره شده در خازن افزایش می‌یابد و به $(Q + q)$ می‌رسد و در نتیجه انرژی ذخیره شده در خازن افزایش می‌یابد.

$$(Q + q) = Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q + q$$

$$U = \frac{Q_2^2}{2C}$$

↑
ثابت

گام اول: اگر بار ذخیره شده در خازن Q باشد، با جدا کردن 10mC بار الکتریکی از صفحه منفی و انتقال به صفحه مثبت، بار ذخیره شده در خازن $(Q + 10)\text{mC}$ خواهد شد (توجه کنید بار Q را بر حسب میلی‌کولن در نظر گرفتیم).

گام دوم: تغییرات انرژی ذخیره شده در خازن را به کمک رابطه $\Delta U = \frac{Q_2^2 - Q_1^2}{2C}$ مشخص می‌کنیم تا Q را به دست آوریم:

$$\Delta U = \frac{Q_2^2 - Q_1^2}{2C} = \frac{(Q_2 - Q_1)(Q_2 + Q_1)}{2C} = \frac{(10)(2Q_1 + 10)}{2(5)} = 30$$

$$2Q_1 + 10 = 30 \Rightarrow 2Q_1 = 20 \Rightarrow Q_1 = 10\text{mC}$$

گام سوم: انرژی ذخیره شده اولیه را به دست می‌آوریم:

$$U_1 = \frac{Q_1^2}{2C} = \frac{(10 \times 10^{-3})^2}{2 \times 5 \times 10^{-6}} = \frac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10\text{J}$$

فیزیک

۶۰

خازنی به ظرفیت $60 \mu\text{F}$ ، که بین صفحه‌های آن هوا است، به یک باتری با اختلاف پتانسیل 20V متصل است. اگر در این حالت، فاصله بین صفحه‌های آن را 50% افزایش داده و بین صفحات آن یک عایق با ثابت دی‌الکتریک 6 قرار دهیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میلی‌ژول افزایش می‌یابد؟

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

۴۸ (۴)

۳۶ (۳)



Hint

ابتدا انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت اول به کمک رابطه $U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$ به دست آورید، سپس به کمک رابطه ظرفیت خازن را در حالت دوم به دست آورید. در نهایت انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت دوم به کمک رابطه $U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2$ محاسبه کنید تا به خواسته سؤال، یعنی تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن برسید.

تا زمانی که خازن به باتری وصل است، اختلاف پتانسیل دو سر آن تغییر نمی‌کند. ظرفیت خازن، فقط به ساختمان خازن وابسته است که به صورت نسبی (مقایسه‌ای) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت اول به دست می‌آوریم:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} (60)(20)^2 = 12000 \mu\text{J} = 12\text{mJ}$$

گام دوم: در حالت دوم، خازن به باتری وصل است (اختلاف پتانسیل دو سر خازن تغییر نکرده) ولی فاصله بین صفحات 50% درصد افزایش یافته و بین صفحات آن یک عایق با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 6$ قرار داده می‌شود؛ بنابراین ظرفیت خازن تغییر می‌کند:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{1} \times 1 \times \frac{1}{1/5} = 4$$

$$C_2 = 4C_1 = 4(60) = 240 \mu\text{F}$$

گام سوم: انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 (V_1)^2 = \frac{1}{2} (240)(20)^2 = 48000 \mu\text{J} = 48\text{mJ}$$

گام چهارم: تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 48 - 12 = 36 \text{ mJ}$$

۶۱ کدام مطلب درست است؟

- (۱) بیش از ۵۰ درصد عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی، رسانایی الکتریکی و گرمایی ندارند.
 (۲) گاز فلئور در دمای 100°C با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهد.
 (۳) اختلاف شعاع اتمی گوگرد و سیلیسیم، از اختلاف شعاع اتمی کلر و آلومینیم، کم‌تر است.
 (۴) عنصری که در دوره چهارم جدول تناوبی بوده و دارای هفت الکترون ظرفیتی است، به یقین چکش‌خوار نیست.

${}_{25}\text{Mn}$ (گروه ۷) و ${}_{35}\text{Br}$ (گروه ۱۷)

بررسی گزینه‌ها: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): از هشت عنصر دوره سوم، چهار عنصر (${}_{11}\text{Na}$, ${}_{12}\text{Mg}$, ${}_{13}\text{Al}$ و ${}_{14}\text{Si}$)، رسانایی الکتریکی و گرمایی دارند و چهار عنصر (${}_{15}\text{P}$, ${}_{16}\text{S}$, ${}_{17}\text{Cl}$ و ${}_{18}\text{Ar}$)، رسانایی الکتریکی و گرمایی ندارند، یعنی $50 - 50$ مساوی!
 گزینه (۲): گاز فلئور حتی در دمای 200°C با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد؛ بنابراین در دمای 100°C که دمای بالاتری است نیز قطعاً واکنش انجام می‌شود.

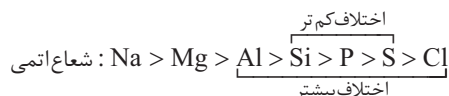
شرایط واکنش هالوژن‌ها با گاز هیدروژن در جدول زیر آمده است:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلئور	حتی در دمای 200°C به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای 200°C واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.

افزایش دمای لازم برای انجام واکنش

کاهش واکنش‌پذیری

گزینه (۳): هر چهار عنصر متعلق به دوره سوم هستند. در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد. با توجه به این‌که در دوره سوم، فاصله گوگرد و سیلیسیم کم‌تر از فاصله کلر و آلومینیم است؛ اختلاف شعاع اتمی گوگرد و سیلیسیم کم‌تر می‌باشد:



گزینه (۴):

برای عنصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲، شمار الکترون‌های ظرفیتی با شماره گروه برابر است اما برای عنصرهای گروه ۱۳ تا ۱۸ (به جز هلیوم) شمار الکترون‌های ظرفیت برابر با عدد یکان شماره گروه است.

در دوره چهارم، عنصر گروه ۷ (${}_{25}\text{Mn}$) و عنصر گروه ۱۷ (${}_{35}\text{Br}$)، دارای ۷ الکترون ظرفیتی هستند؛ بنابراین اگر عنصر مورد نظر، فلز منگنز باشد، چکش‌خوار است.

در گروه هالوژن‌ها، گروه فلزهای قلیایی، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی عنصرها می‌یابد و در این گروه،
گروه فلزهای قلیایی، واکنش پذیری عنصرها از بالا به پایین، می‌یابد.

- (۱) همانند - افزایش - همانند - کاهش
- (۲) برخلاف - افزایش - برخلاف - کاهش
- (۳) همانند - افزایش - برخلاف - کاهش
- (۴) برخلاف - کاهش - همانند - افزایش

مشاوره شما برای کنکور، باید به روندهای تناوبی جدول کاملاً مسلط باشید. یکی از این روندها که ممکنه بعضی‌ها رو گول بزنه، چگونگی تغییر واکنش پذیری عنصرهاست.



دکتر Box

روندهای تناوبی در دسته‌های s و p جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست	در یک گروه از بالا به پایین
● شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد.	● شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.
● خصلت فلزی عنصرها کاهش می‌یابد.	● خصلت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد.
● خصلت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد.	● خصلت نافلزی عنصرها کاهش می‌یابد.
● واکنش پذیری فلزها کاهش می‌یابد.	● واکنش پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
● واکنش پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.	● واکنش پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در همهٔ گروه‌های جدول تناوبی مانند هالوژن‌ها، فلزهای قلیایی و...، با افزایش عدد اتمی عنصرها از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد، اما روند تغییر واکنش پذیری عنصرها در گروه‌های فلزی و نافلزی با هم متفاوت است. برای فلزها هر چه شعاع اتمی بیشتر باشد، جاذبهٔ هسته روی الکترون‌های ظرفیتی کم‌تر شده و فلز راحت‌تر الکترون از دست داده، یعنی خصلت فلزی و واکنش پذیری هم بیشتر می‌شود. *برای نافلزها قضیه برعکسه!* یعنی واکنش پذیری و خصلت نافلزی در گروه، با شعاع اتمی رابطهٔ عکس دارد:

واکنش پذیری فلزهای قلیایی: $Li < Na < K < Rb < Cs$

واکنش پذیری هالوژن‌ها: $F_p > Cl_p > Br_p > I_p$

شیمی

۶۳ کدام گزینه درست است؟

- (۱) در جدول دوره‌ای فقط یک فلز با ۳ الکترون ظرفیتی وجود دارد.
 (۲) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز به دسته S تعلق دارد.
 (۳) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز با ۴ الکترون ظرفیتی وجود دارد.
 (۴) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز جامد وجود دارد.

نکته

برای عنصرهای گروه ۱ تا ۱۲، شمار الکترون‌های ظرفیتی با شماره گروه برابر است، اما برای عنصرهای گروه ۱۳ تا ۱۸ (به جز هلیوم) شمار الکترون‌های ظرفیت برابر با یکان شماره گروه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): عنصرهای گروه ۳ و ۱۳ جدول تناوبی، دارای ۳ الکترون ظرفیتی هستند. در این دو گروه، چندین فلز وجود دارد و نه فقط ۱ فلز! مثلاً Sc_{21} از گروه ۳ و Al_{13} و Ga_{31} از گروه ۱۳، فلز هستند.
 گزینه (۲): دو نافلز هیدروژن و هلیوم به دسته S تعلق دارند و بقیه نافلزها متعلق به دسته p هستند.
 گزینه (۳): عنصرهای گروه ۴ و ۱۴ جدول تناوبی، دارای ۴ الکترون ظرفیتی هستند. عنصرهای گروه ۴ همگی فلز هستند، اما در گروه ۱۴، هم فلز، هم نافلز و هم شبه‌فلز وجود دارد که در بین آنها، فقط کربن، نافلز است.

تنها نافلز دارای ۴ الکترون ظرفیتی ← C از گروه ۱۴

گزینه (۴): حداقل دو تا نافلز جامد رو که همه می‌شناسن: کربن و گوگرد.

دانشجویی در آزمایشگاه یک نوار منیزیم را وارد محلول هیدروکلریک اسید می‌کند. با توجه به جدول زیر که پس از ناپدید شدن نوار

منیزیم به دست آمده است، جرم نوار منیزیم اولیه برحسب گرم و بازده درصدی واکنش کدام است؟ ($Mg = 24 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



حجم گاز در شرایط استاندارد (لیتر)	نماد شیمیایی ماده
۲/۱	H_2 (فراورده‌ای که دانشجو به دست آورده است.)
۲/۸	H_2 (فراورده‌ای که انتظار داشتیم به دست آید.)

$$75 - 3 (2)$$

$$75 - 2/25 (1)$$

$$80 - 3 (4)$$

$$80 - 2/25 (3)$$

به بیشترین مقدار فراورده‌های قابل انتظار از محاسبه‌های استوکیومتری (با فرض مصرف کامل یک یا تمام واکنش‌دهنده‌ها)، مقدار نظری می‌گویند؛ در حالی که به مقدار فراورده‌هایی که در عمل به دست آیند، مقدار عملی می‌گویند.

به علت پاره‌ای از مشکلات! مقدار عملی فراورده‌ها کم‌تر از مقدار نظری آن‌ها است، بازده درصدی که نشان‌دهنده نسبت این دو مقدار است و کارایی یک واکنش را نشان می‌دهد طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$100 \times \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} = \text{بازده درصدی واکنش}$$

مقدار عملی و نظری فراورده مشخص است؛ بنابراین خیلی راحت می‌توانیم بازده درصدی واکنش را حساب کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{2/1}{2/8} \times 100 = \frac{3 \times 1}{4 \times 1} \times 100 = 75\%$$

برای محاسبه جرم اولیه منیزیم می‌توانیم از مقدار نظری فراورده استفاده کنیم:

$$2/8 \text{ L H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{22/4 \text{ L H}_2} \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{1 \text{ mol H}_2} \times \frac{24 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} = \frac{28 \times 24}{224} = 3 \text{ g Mg}$$

مواستون باشه که اگر بخواهیم از مقدار عملی فراورده به مقدار واکنش‌دهنده برسیم، حتماً باید بازده درصدی را در محاسبات وارد کنیم: **گول نخوری ✗**

$$2/1 \text{ L H}_2 \text{ عملی} \times \frac{100 \text{ L H}_2 \text{ نظری}}{75 \text{ L H}_2 \text{ عملی}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{22/4 \text{ L H}_2} \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{1 \text{ mol H}_2} \times \frac{24 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} = 3 \text{ g Mg}$$

مفهوم بازده درصدی

۶۵ هر یک از توصیف‌های زیر، مربوط به یک یا چند عنصر جدول دوره‌ای است. کدام عنصر داده‌شده در گزینه‌ها، با هیچ‌یک از این عبارات‌ها تطابق ندارد؟

- عنصری فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در جهان دارد.
- عنصری است که به شکل آزاد نیز در طبیعت وجود دارد.
- دارای چند دگرشکل است که دگرشکل سفید آن را زیر آب ننگه می‌دارند.
- ترکیب‌های رنگی دارد و رنگ سرخ زیبای یاقوت را می‌توان به وجود یون سه بار مثبت آن نسبت داد.

۲۴M (۴)

۱۳D (۳)

۲۶X (۲)

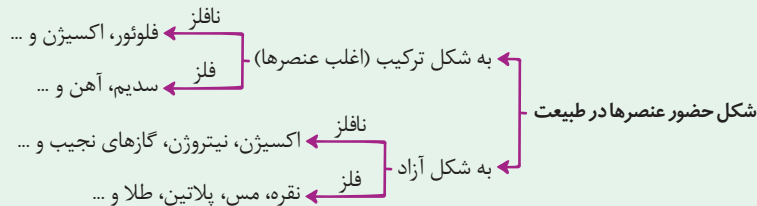
۱۶A (۱)



✓ پاسخ خیلی تشریحی عنصر ۱۳D با هیچ‌یک از عناصر توصیف‌شده در عبارات‌های داده‌شده تطابق ندارد.

بررسی عبارت‌ها:

- آهن با نماد شیمیایی Fe، فلزی است که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد. (رد گزینه (۲))
- اغلب عناصرها در طبیعت به شکل ترکیب یافت می‌شوند، ولی برخی نافلزها مانند اکسیژن با نماد شیمیایی O، گوگرد با نماد شیمیایی S و ... به شکل آزاد در طبیعت وجود دارد و وجود نمونه‌هایی از فلزهای نقره، مس و پلاتین نیز در طبیعت گزارش شده است. (رد گزینه (۱))



- فسفر P دارای چند دگرشکل است که نوع سفید آن را زیر آب ننگه می‌دارند. (در گزینه‌ها به این عنصر اشاره نشده است.)
- فلزهای واسطه ترکیب‌های رنگی دارند؛ در نتیجه این عبارت می‌تواند مربوط به عنصر M (فلز واسطه کروم) باشد. دقت کنید که عنصر D (آلومینیم) یک فلز اصلی است و ترکیب رنگی ندارد.

عنصر A یکی از شبه فلزهای جدول تناوبی است. اگر در گروه شامل A، فقط یک عنصر نافلزی X وجود داشته باشد، کدام مطلب درست است؟

مشاوره این سؤال، یک سؤال مفهومی به سبک کنکورهای ۱۴۰۳ است.



- (۱) حالت فیزیکی عنصرهای A و X در دمای اتاق متفاوت است.
- (۲) A می تواند با پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی، هم دوره باشد.
- (۳) تفاوت عدد اتمی عنصر X با نخستین فلز گروه خود، برابر با عدد اتمی هفتمین عنصر واسطه دوره پنجم است.
- (۴) عدد اتمی A، به یقین از عدد اتمی هالوژن مایع جدول دوره ای، کوچک تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

همه شبه فلزها در گروه های ۱۴ تا ۱۷ جدول تناوبی قرار دارند. در میان این گروه ها، فقط گروه چهاردهم است که فقط دارای یک نافلز می باشد؛ بنابراین عنصر A یکی از شبه فلزات سیلیسیم ($_{14}\text{Si}$) یا ژرمانیم ($_{32}\text{Ge}$) و عنصر X همان نافلز کربن ($_{6}\text{C}$) است. بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): حالت فیزیکی همه عناصر موجود در گروه چهاردهم جدول تناوبی در دمای اتاق، جامد است و مشابه یکدیگر می باشد.
گزینه (۲): شبه فلز سیلیسیم ($_{14}\text{Si}$) در دوره سوم جدول تناوبی و شبه فلز ژرمانیم ($_{32}\text{Ge}$) در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارد؛ بنابراین عنصر A نمی تواند با پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی یا همان گاز نجیب موجود در دوره پنجم جدول، هم دوره باشد.
گزینه (۳): نخستین فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی، قلع ($_{80}\text{Sn}$) است که تفاوت عدد اتمی این عنصر با عدد اتمی عنصر کربن ($_{6}\text{C}$) برابر $44 = 80 - 6$ می باشد. عدد اتمی عنصرهای واسطه دوره پنجم، از ۳۹ تا ۴۸ است؛ بنابراین عدد اتمی هفتمین عنصر واسطه دوره پنجم برابر با ۴۵ است.

با توجه به قرار داشتن فلزهای واسطه در گروه های ۳ تا ۱۲ و عدد اتمی گازهای نجیب، می توان محدوده عدد اتمی فلزهای واسطه هر دوره را به دست آورد:

شماره دوره	عدد اتمی عنصرهای دسته d (فلزهای واسطه)
۴	۲۱ - ۳۰
۵	۳۹ - ۴۸
۶	۷۱ - ۸۰
۷	۱۰۳ - ۱۱۲

گزینه (۴): هالوژن مایع جدول تناوبی، برم ($_{35}\text{Br}$) است که عدد اتمی آن از عدد اتمی هر دو شبه فلز سیلیسیم ($_{14}\text{Si}$) و ژرمانیم ($_{32}\text{Ge}$)، بزرگ تر است.



نکته

۶۷ اگر محلولی حاوی ۶ گرم سدیم هیدروکسید، ۰/۵٪ مول کلریدی از آهن را رسوب دهد؛ رنگ رسوب تولید شده و شمار الکترون‌ها با $l = 2$

در کاتیون آهن موجود در محلول، کدام است؟ ($H = 1, O = 16, Na = 23 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) سبز - ۶
(۲) قرمز قهوه‌ای - ۵
(۳) سبز - ۵
(۴) قرمز قهوه‌ای - ۶

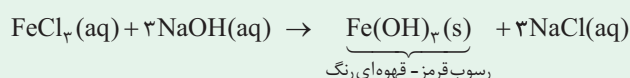
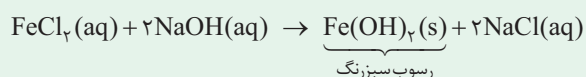


Hint

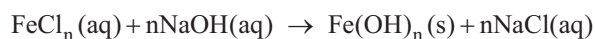
با توجه به نامعلوم بودن بار کاتیون آهن شرکت‌کننده در واکنش، فرمول شیمیایی کلرید آهن مورد نظر را به صورت $FeCl_n$ در نظر بگیر و معادله موازنه‌شده واکنش آن با سدیم هیدروکسید را بنویس؛ سپس با توجه به مقادیر مصرفی $FeCl_n$ و $NaOH$ در واکنش، n را به دست بیار. در نهایت با توجه به مقدار n به دست آمده، رنگ رسوب و با توجه به آرایش الکترونی کاتیون، شمار الکترون‌های زیرلایه d آن را مشخص کن.



آهن (Fe) دارای دو نوع کاتیون پایدار Fe^{2+} و Fe^{3+} می‌باشد؛ در نتیجه دو نوع کلرید با فرمول‌های $FeCl_2$ و $FeCl_3$ تشکیل می‌دهد. محلول آبی این ترکیب‌ها، مطابق معادله‌های زیر می‌تواند با محلول سدیم هیدروکسید واکنش داده و رسوبی سبزرنگ یا قرمز - قهوه‌ای رنگ تشکیل دهد:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا با توجه به این که بار کاتیون فلز آهن مشخص نمی‌باشد؛ فرمول شیمیایی کلرید آهن را به صورت $FeCl_n$ در نظر می‌گیریم و معادله موازنه‌شده واکنش انجام شده را می‌نویسیم:

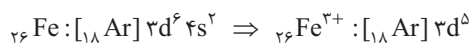


گام دوم: با توجه به مقدار سدیم هیدروکسید ($NaOH$) و کلرید آهن ($FeCl_n$) مصرف شده در واکنش، بار نامعلوم کاتیون آهن را به دست می‌آوریم و سپس رنگ رسوب هیدروکسید تولید شده از آن را تشخیص می‌دهیم:

$$6 \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} \times \frac{1 \text{ mol FeCl}_n}{n \text{ mol NaOH}} = 0/05 \text{ mol FeCl}_n$$

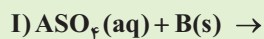
$$\Rightarrow \frac{6}{40 \times n} = 0/05 \Rightarrow n = \frac{3}{20 \times 0/05} = 3 \Rightarrow \text{رسوب قرمز - قهوه‌ای رنگ} : Fe(OH)_3 : \text{رسوب تولید شده}$$

گام سوم: عدد کوانتومی $l = 2$ مربوط به زیرلایه d است. در آرایش الکترونی کاتیون Fe^{3+} ، ۵ الکترون در زیرلایه d وجود دارد:





مقایسه واکنش پذیری سه فلز اصلی A، B و C به صورت $C > B > A$ است. با توجه به آن، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟



الف) در شرایط یکسان کدام واکنش روبه‌رو انجام پذیر است؟



ب) اگر A و C در یک دوره جدول دوره‌ای عناصر باشند، عدد اتمی کدام یک بیشتر است؟

A - II (۲)

A - I (۱)

C - II (۴)

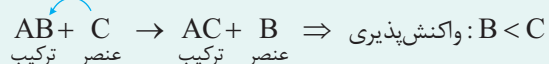
C - I (۳)

مشاوره این سؤال عیناً از امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ برای شما انتخاب شده است.

درس‌Box

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است.

پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد و بگنند به طور طبیعی انجام می‌شود، ما خیلی سریع می‌توانیم واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم.



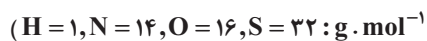
در معادله کلی بالا، واکنش‌پذیری C بیشتر بوده است به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ از این رو واکنش با B عوض کرده!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) عنصری با واکنش‌پذیری بیشتر می‌تواند جای عنصری با واکنش‌پذیری کم‌تر را در ترکیب بگیرد؛ بنابراین در شرایط یکسان، واکنش (I) انجام‌پذیر است، زیرا واکنش‌پذیری فلز B از واکنش‌پذیری فلز A بیشتر است؛ در صورتی که واکنش (II)، انجام‌ناپذیر است؛ زیرا واکنش‌پذیری فلز B از واکنش‌پذیری فلز C کم‌تر می‌باشد.

ب) در یک دوره جدول تناوبی از چپ به راست با افزایش عدد اتمی فلزها، واکنش‌پذیری و خصلت فلزی آنها کاهش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به این‌که واکنش‌پذیری فلز A از واکنش‌پذیری فلز C کم‌تر است؛ پس عدد اتمی فلز A، بیشتر از عدد اتمی فلز C می‌باشد (یا هر چه واکنش‌پذیری فلزی بیشتر باشد، شعاع آن در دوره، بزرگ‌تر است و عدد اتمی آن کوچک‌تر می‌باشد).

یک کود شیمیایی دارای آمونیوم سولفات $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ و مقداری ناخالصی است. اگر درصد خلوص یون سولفات در این کود برابر ۶۰٪ باشد، یک کیلوگرم از این کود، چند گرم نیتروژن برای گیاه تأمین می‌کند؟ (در ناخالصی‌ها یون سولفات و نیتروژن وجود ندارد؛



۲۴۰ (۴)

۱۷۵ (۳)

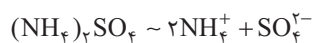
۹۰ (۲)

۸۷/۵ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا از جرم کود به جرم یون سولفات می‌رسیم و سپس با توجه به فرمول آمونیوم سولفات و مقدار سولفات، جرم نیتروژن موجود

در کود را حساب می‌کنیم:



$$1 \text{ kg کود} \times \frac{1000 \text{ g کود}}{1 \text{ kg کود}} \times \frac{60 \text{ g SO}_4^{2-}}{100 \text{ g کود}} \times \frac{1 \text{ mol SO}_4^{2-}}{96 \text{ g SO}_4^{2-}} \times \frac{2 \text{ mol NH}_4^+}{1 \text{ mol SO}_4^{2-}} \times \frac{1 \text{ mol N}}{1 \text{ mol NH}_4^+} \times \frac{14 \text{ g N}}{1 \text{ mol N}}$$

$$= \frac{1 \times 14 \times 100}{96} = \frac{1400}{8} = \frac{700}{4} = \frac{350}{2} = 175 \text{ g N}$$

۷۰

درستی یا نادرستی مطالب زیر دربارهٔ نخستین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای، به ترتیب چگونه است؟

● در اتم آن، ۷ زیرلایه از الکترون پر شده‌اند.

● تفاوت عدد اتمی آن با نخستین فلز قلیایی جدول، برابر عدد اتمی سومین گاز نجیب جدول است.

● شمار الکترون‌های ظرفیتی آن با شمار الکترون‌های ظرفیتی نخستین عنصر دسته p برابر است.

● کاتیون حاصل از آن به آرایش پایدار گاز نجیب نمی‌رسد.

۲۱Sc ← ۳Li ← ۱۸Ar ← ۵B

(۲) نادرست - درست - درست - نادرست

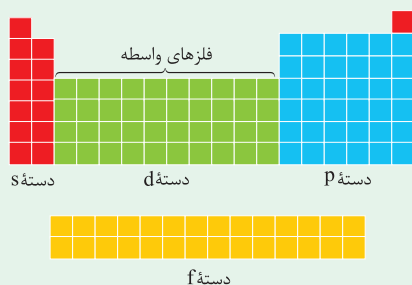
(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۴) درست - نادرست - درست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - درست - درست



فلزهای دسته d به فلزهای واسطه معروفاند و در جدول دوره‌ای بین عنصرهای دسته s و p قرار دارند.



در دوره‌های اول تا سوم، عنصر دسته d وجود ندارد و هر یک از دوره‌های چهارم تا هفتم، شامل ۱۰ عنصر دسته d (عنصرهای گروه‌های ۳ تا ۱۲) می‌باشند.



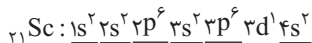
پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های اول و چهارم، نادرست و عبارت‌های دوم و سوم، درست‌اند.

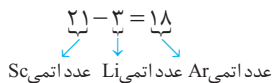
فلزات واسطهٔ جدول دوره‌ای در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و دوره‌های چهارم تا هفتم جدول قرار دارند که نخستین فلز واسطهٔ جدول تناوبی در گروه ۳ و دورهٔ چهارم جدول جای گرفته است. از طرفی با توجه به گاز نجیب دورهٔ قبل این عنصر که آرگون (${}_{18}\text{Ar}$) می‌باشد؛ می‌توان گفت که عدد اتمی فلز مورد نظر، $21 = 18 + 3$ است که همان اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$) می‌باشد.

بررسی عبارت‌ها:

● در اتم فلز اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$)، ۷ زیرلایهٔ اشغال‌شده از الکترون وجود دارد که فقط ۶ زیرلایه از الکترون پر شده است.



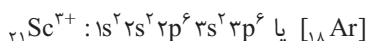
● نخستین فلز قلیایی، ${}_{3}\text{Li}$ و سومین گاز نجیب جدول، ${}_{18}\text{Ar}$ است:



● نخستین عنصر دسته p (عنصر دورهٔ دوم و گروه ۱۳)، همان ${}_{5}\text{B}$ است که دارای ۳ الکترون ظرفیتی می‌باشد. از طرفی، شمار الکترون‌های ظرفیتی فلز اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$) نیز برابر ۳ می‌باشد.

شمار الکترون‌های ظرفیتی عناصر گروه‌های ۱ تا ۱۲ جدول تناوبی با شمارهٔ گروه آن‌ها و شمار الکترون‌های ظرفیتی عناصر گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ جدول تناوبی (به‌جز هلیم) با رقم یکان شمارهٔ گروه آن‌ها برابر است.

● فلز اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$) با از دست دادن ۳ الکترون ظرفیتی خود به آرایش پایدار گاز نجیب دورهٔ قبل خود یا همان گاز آرگون (${}_{18}\text{Ar}$) می‌رسد.



با توجه به معادله زیر، از تجزیه $۵۰/۴$ گرم واکنش دهنده (آمونیم دی کرومات) با خلوص ۶۰% ، چند لیتر گاز تولید می‌شود؟ (در شرایط انجام واکنش، حجم مولی گازها برابر ۲۵ L است، معادله واکنش موازنه شود. $(\text{Cr} = ۵۲, \text{O} = ۱۶, \text{N} = ۱۴, \text{H} = ۱: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$)



۶ (۴)

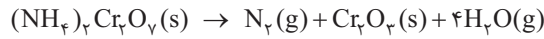
۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: واکنش داده شده را موازنه می‌کنیم:




گام دوم: حجم گازهای تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

استفاده از کسر تبدیل:

به ازای مصرف ۱ مول واکنش دهنده، در مجموع ۵ مول گاز (۱ مول N_2 و ۴ مول H_2O) تولید می‌شود.

$$\begin{aligned} & ۵۰/۴ \text{ g } (\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7 \times \frac{۶۰ \text{ g } (\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7}{۱۰۰ \text{ g } (\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7} \times \frac{۱ \text{ mol } (\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7}{۲۵۲ \text{ g } (\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7} \times \frac{۵ \text{ mol gas}}{۱ \text{ mol } (\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7} \times \frac{۲۵ \text{ L gas}}{۱ \text{ mol gas}} \\ & = ۱۵ \text{ L gas} \end{aligned}$$

استفاده از کسر تناسب:  به چور دیگه

$$\begin{aligned} \frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{۱۰۰} &= \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۵۰/۴ \times \frac{۶۰}{۱۰۰}}{۱ \times ۲۵۲} = \frac{x}{(1 \times ۲۵) + (4 \times ۲۵)} \\ \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{(\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7} &= \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{N}_2 + \text{H}_2\text{O}} \\ \Rightarrow x &= \frac{۵۰/۴ \times ۰/۶ \times ۵ \times ۲۵}{۲۵۲} = ۰/۶ \times ۲۵ = ۱۵ \text{ L گاز} \end{aligned}$$

شیمی

۷۲ اگر شمار نوترون‌های اتم M ۷۲، ۲۵ درصد از شمار پروتون‌هایش بیشتر باشد، عنصر M یک است و عنصری که عدد اتمی آن با شمار نوترون‌های M برابر است، جزء عنصرهای جدول تناوبی به شمار می‌آید.

$$N = 1/25P$$

(۲) شبه‌فلز - اصلی

(۱) نافلز - واسطه

(۴) شبه‌فلز - واسطه

(۳) نافلز - اصلی



نکته به عنصرهای دسته S و P ، عنصرهای اصلی و به عنصرهای دسته d ، عنصرهای واسطه می‌گویند. عنصرهای اصلی در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸ قرار دارند، در حالی که عنصرهای واسطه متعلق به گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول دوره‌ای هستند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا با توجه به اطلاعات داده‌شده، عدد اتمی عنصر M را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

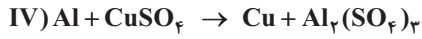
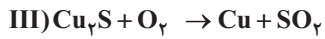
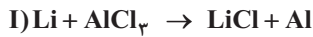
$$\left. \begin{array}{l} N = 1/25P \\ N + P = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow 1/25P + P = 72 \Rightarrow 2/25P = 72 \Rightarrow P = \frac{72}{2/25} = 32 \text{ و } N = 40$$

عدد اتمی عنصر M ، ۳۲ است که با نزدیک‌ترین گاز نجیب به آن که همان گاز کریپتون (${}_{36}\text{Kr}$) می‌باشد، ۴ عنصر فاصله دارد و از آن عقب‌تر است؛ پس این عنصر در دوره چهارم و گروه $14 = 18 - 4$ جدول تناوبی قرار دارد که همان عنصر ژرمانیم (${}_{32}\text{Ge}$) می‌باشد و شبه‌فلز است.

عنصری که عدد اتمی آن برابر ۴۰ است، با نزدیک‌ترین گاز نجیب به خود که همان کریپتون (${}_{36}\text{Kr}$) می‌باشد، ۴ عنصر فاصله دارد ولی از آن جلوتر است؛ پس این عنصر در دوره پنجم و گروه ۴ جدول تناوبی قرار دارد. از آن جایی که فلزات واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و دوره‌های چهارم تا هفتم جدول دوره‌ای جای دارند؛ بنابراین عنصر مورد نظر، یک عنصر واسطه محسوب می‌شود.



با توجه به واکنش‌های (I) تا (IV)، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($\text{Cu} = 64, \text{Al} = 27 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) ۳۳



الف) مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش‌های (II) و (IV)، یکسان است.

ب) اگر در واکنش (I) به جای Li از Ti استفاده کنیم، واکنش با سرعت کم‌تری انجام می‌شود.

پ) آرایش الکترونی یون مس شرکت‌کننده در واکنش‌های (III) و (IV)، یکسان است.

ت) از واکنش ۹ گرم فلز آلومینیم با خلوص ۹۰ درصد با مقدار کافی محلول مس (II) سولفات، ۲۸/۸ گرم فلز مس آزاد می‌شود.

الف - ب (۲)

پ - ب (۱)

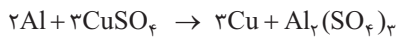
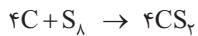
الف - ت (۴)

پ - ت (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارتهای:

الف) معادله موازنه واکنش‌های (II) و (IV)، به صورت زیر است:



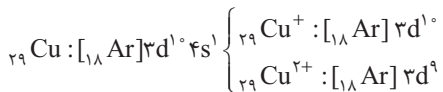
مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در هر دو واکنش، برابر ۵ است.

ب) اگر در واکنش (I) به جای Li از Ti استفاده کنیم، واکنش انجام نمی‌شود! زیرا واکنش‌پذیری Ti از Al کم‌تر است!

مقایسه کلی واکنش‌پذیری برخی عنصرهای مهم به صورت زیر است:

$\text{Au} > \text{Ag} > \text{Cu} > \text{Fe} > \text{Ti} > \text{Zn} > \text{C} > \text{Al} > \text{فلزهای قلیایی خاکی} > \text{فلزهای قلیایی}$: واکنش‌پذیری

پ) در واکنش (III)، یون Cu^+ و در واکنش (IV)، یون Cu^{2+} وجود دارد. *واژه‌که* آرایش الکترونی این دو یون با هم یکسان نیست.



(ت)

$$9 \text{ g Al} \times \frac{100 \text{ g Al}}{100 \text{ g Al}} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol Cu}}{2 \text{ mol Al}} \times \frac{64 \text{ g Cu}}{1 \text{ mol Cu}} = 28/8 \text{ g Cu}$$

تیزبازی ۳۴ عبارتهای «ب» و «پ» در این سؤال، عبارتهای ساده‌تری هستند و فقط با بررسی آنها می‌توان به جواب رسید و اصلاً نیازی به

بررسی عبارتهای «الف» و «ت» نبود!

اگر $n+1$ ، برای a الکترون بیرونی ترین زیرلایه اتم عنصر نافلز X برابر ۳ و مجموع $n+1$ برای همه الکترون های ظرفیتی آن برابر ۱۹ باشد؛ چند مورد از مطالب زیر به یقین در رابطه با عنصر X درست است؟

- در دوره سوم قرار دارد و $a = 5$ است.
- در دمای اتاق به صورت مولکول های دواتمی پایدار است.
- در مقایسه با کلر، واکنش پذیری بیشتری دارد.
- شعاع اتمی آن در مقایسه با گوگرد کوچک تر است.

چهار (۴)

سه (۳)

دو (۲)

یک (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت های دوم، سوم و چهارم درست اند.

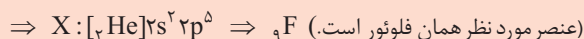
دو زیرلایه با $n+1 = 3$ وجود دارد: $2p$ ($2+1=3$) و $3s$ ($3+0=3$)! اگر آخرین زیرلایه عنصر $3s$ باشد، آن عنصر فلز است، زیرا در گروه های اول و دوم قرار دارد:



بنابراین آخرین زیرلایه عنصر مورد نظر، $2p$ و الکترون های ظرفیتی آن در زیرلایه های $2s2p$ قرار دارد:

$$2s^2 2p^x \Rightarrow (n+1) = \underbrace{2(2+0)}_{2s^2} + \underbrace{x(2+1)}_{2p^x} = 19$$

$$\Rightarrow 4 + 3x = 19 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$



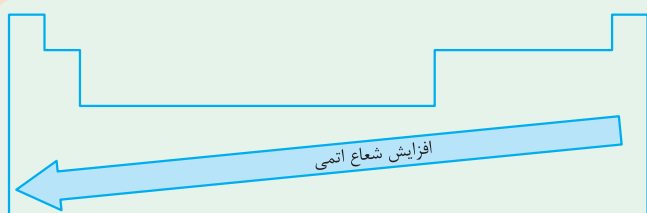
بررسی عبارت ها:

الف) دیدیم که a (شمار الکترون ها در بیرونی ترین زیرلایه) برابر ۵ است اما عنصر F در دوره دوم ($3 \leq Z \leq 10$) قرار دارد.

ب) هالوژن ها در دما و فشار اتاق به شکل مولکول های دواتمی (F_2, Cl_2, Br_2, I_2) وجود دارند.

پ) فلوئور نسبت به همه نافلزها، واکنش پذیری بیشتری دارد.

ت) F نسبت به S ، در قسمت سمت راست تر و بالاتر جدول تناوبی قرار دارد؛ بنابراین شعاع اتمی آن کوچک تر است.



نکته با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در یک گروه و دوره (در یک دوره از چپ به راست، کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، افزایش)، هر چه عنصری در جدول دوره ای، سمت چپ تر و پایین تر باشد، شعاع آن بیشتر است و بالعکس! هر چه عنصری، سمت راست تر و بالاتر باشد، شعاع آن کمتر است.

کدام مورد، نادرست است؟ ۷۵

- (۱) در استخراج آهن، نسبت جرم «سنگ معدن آهن» استفاده شده به جرم «منابع معدنی دیگر» مصرف شده به تقریب، برابر ۲ است.
- (۲) از بازگردانی هفت قوطی فولادی می توان یک لامپ ۶۰واتی را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.
- (۳) در استخراج فلز، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می شود.
- (۴) ارزیابی چرخه عمر برای ارزیابی میزان تأثیر یک فراورده بر روی محیط زیست در فرایند تولید آن به کار می رود.

مشاوره گزینه های این سؤال، عبارت های کاملاً حفظی از متن کتاب درسی است؛ اما گزینه (۱) این سؤال، عیناً از کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ رشته ریاضی انتخاب شده است؛ به همین دلیل بهتره همه نکات حفظی کتاب درسی را هم خوب بخونید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه ها:

گزینه (۱):

$$\frac{\text{جرم سنگ معدن آهن}}{\text{جرم منابع معدنی دیگر}} = \frac{2000}{1000} = 2 \Leftarrow$$

در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن، تقریباً از ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن و ۱۰۰۰ کیلوگرم منابع معدنی دیگر استفاده می شود.

گزینه های (۲) و (۳) متن کتاب درسی است.

گزینه (۴): ارزیابی چرخه عمر برای ارزیابی میزان تأثیر یک فراورده بر روی محیط زیست در مدت طول عمر آن (شامل تولید، مصرف و دفع) به کار می رود و نه فقط در فرایند تولید!

با توجه به جدول زیر، فلزهای X و Y در توضیحات داده شده، به ترتیب کدام فلزها هستند؟

- بازده فرایند استخراج فلز X از سنگ معدن ۲۰ درصد و از ۱/۵ تن سنگ معدن، ۱/۵ کیلوگرم فلز استخراج می شود.
- درصد جرمی فلز Y در ۱۶۰ گرم خاکستری که از یک کیلوگرم گیاه برای پالایش آن به کار می رود، برابر ۲۵٪ است.

نماد شیمیایی فلز	قیمت هر کیلوگرم فلز (ریال)	بیشترین مقدار فلز در یک کیلوگرم از گیاه (گرم)	درصد جرمی فلز در سنگ معدن
Au	۱,۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۲
Ni	۸۲۰,۰۰۰	۳۸	۲
Cu	۴۲۵,۰۰۰	۱۴	۰/۵
Zn	۱۵۵,۰۰۰	۴۰	۵

(۲) نیکل - طلا

(۱) مس - روی

(۴) مس - طلا

(۳) نیکل - مس

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بیاید موارد داده شده را به ترتیب بررسی کنیم:

• با توجه به این که صحبت از استخراج فلز از سنگ معدن است، باید با توجه به اطلاعات داده شده، درصد جرمی فلز در سنگ معدن را حساب کرده و با توجه به ستون آخر جدول، فلز X را مشخص کنیم. فرض می کنیم درصد فلز در سنگ معدن a٪ است:

$$\text{فلز } 1/5 \text{ kg} = \frac{20}{100} \times \frac{\text{فلز } 1 \text{ kg}}{\text{سنگ معدن } 1000 \text{ g}} \times \frac{\text{فلز } a \text{ g}}{\text{سنگ معدن } 100 \text{ g}} \times 100$$

بازده استخراج

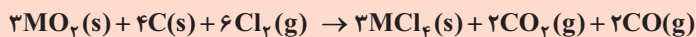
درصد مس (Cu) در سنگ معدن برابر ۰/۵ است. $\Rightarrow a = 0/5 \Rightarrow 3a = 1/5$

• برای این مورد، باید از ستون سوم جدول استفاده کنیم؛ یعنی ببینیم در یک کیلوگرم گیاه، حداکثر چند گرم فلز Y وجود دارد.

$$1\% \times \text{جرم } Y \text{ در یک کیلوگرم گیاه} = \frac{160}{100} \Rightarrow 25 = \frac{\text{جرم } Y \text{ در یک کیلوگرم گیاه}}{160} \times 100$$

\Rightarrow همان فلز روی (Zn) است. $\Rightarrow \frac{160}{4} = 40 = \text{جرم } Y \text{ در یک کیلوگرم گیاه}$

۷۷ اگر برای تهیه $6/02 \times 10^{22}$ مولکول کربن مونواکسید مطابق واکنش زیر، به ۱۶ گرم MO_2 نیاز باشد، جرم مولی فلز M چند گرم بر مول است؟ (بازده واکنش را ۷۵ درصد در نظر بگیرید؛ $O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۶۴ (۴)

۵۵ (۳)

۴۸ (۲)

۳۲ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به اطلاعات داده شده در سؤال، جرم مولی فلز مورد نظر را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{شمار مولکول ها}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{16 \times \frac{75}{100}}{3 \times (x + 32)} = \frac{6/02 \times 10^{22}}{2 \times \frac{6/02 \times 10^{23}}{10}} \Rightarrow \frac{4}{x + 32} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow x + 32 = 80 \Rightarrow x = 48 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

۷۸

- آهنگ مصرف و استخراج فلزها با آهنگ برگشت آنها به طبیعت به شکل سنگ معدن، به تقریب برابر است.
- فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند و بازیافت آنها سبب کاهش سرعت گرمایش کره زمین می شود.
- کاهش ردپای کربن دی اکسید، کمک به توسعه پایدار کشور و از بین رفتن گونه های زیستی کم تر، برخی از مزایای بازیافت فلزها است.
- غلظت گونه های موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، کم تر است.

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)



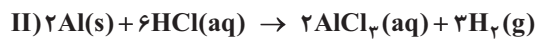
پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت های اول و چهارم، نادرست اند.

عبارت اول: آهنگ مصرف و استخراج فلزها بیشتر از آهنگ برگشت آنها به طبیعت است. به همین دلیل که فلزها تجدیدناپذیر به حساب می آیند.

عبارت چهارم: غلظت گونه های فلزی موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، بیشتر است.

در دما و فشار یکسان، جرم یکسانی از دی‌نیتروژن پنتاکسید و آلومینیم در واکنش‌های زیر به طور کامل مصرف می‌شوند. اگر حجم گاز تولیدشده در واکنش II، چهار برابر حجم گاز اکسیژن تولیدشده در واکنش I باشد، نسبت بازده درصدی واکنش I به II کدام است؟
(N = ۱۴, O = ۱۶, Al = ۲۷ : g · mol⁻¹)



۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها با هم برابر است؛ بنابراین وقتی حجم H_۲ تولیدشده، چهار برابر حجم O_۲ تولیدشده است، مول H_۲ تولیدی هم چهار برابر مول O_۲ تولیدی است. برای راحتی، جرم N_۲O_۵ و آلومینیم مصرف شده را ۱ گرم و بازده درصدی واکنش‌های I و II را به ترتیب برابر X و Y در نظر می‌گیریم.

$$\text{مول O}_2 \text{ تولیدی} = 1 \text{ g N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{108 \text{ g N}_2\text{O}_5} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol N}_2\text{O}_5} \times \frac{x}{100} = \frac{x}{108 \times 2 \times 100} \text{ mol O}_2$$

بازده واکنش

$$\text{مول H}_2 \text{ تولیدی} = 1 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol Al}} \times \frac{y}{100} = \frac{y}{9 \times 2 \times 100} \text{ mol H}_2$$

بازده واکنش

با توجه به فرض سؤال، مول H_۲ را چهار برابر مول O_۲ قرار می‌دهیم و نسبت بازده درصدی دو واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\text{مول H}_2 = 4(\text{مول O}_2) = \frac{y}{9 \times 2 \times 100} = \frac{1}{4} \times \frac{x}{108 \times 2 \times 100} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{27}{9} = 3$$

در مراحل چرخه عمر، موارد «پایداری تأمین ماده اولیه و خام»، «تأثیر حمل و نقل ماده خام روی محیط زیست» و «دفن کردن»، برای پاکت کاغذی و کیسه پلاستیکی، به ترتیب نسبت به هم چگونه است؟

(۱) متفاوت - مشابه - متفاوت

(۲) مشابه - متفاوت - متفاوت

(۳) متفاوت - مشابه - مشابه

(۴) مشابه - متفاوت - مشابه

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در مراحل چرخه عمر پاکت کاغذی و کیسه پلاستیکی خواهیم داشت:

پایداری تأمین ماده اولیه و خام
 ← پاکت کاغذی: نسبتاً پایدار
 ← کیسه پلاستیکی: ناپایدار

تأثیر حمل و نقل ماده خام روی محیط زیست
 ← پاکت کاغذی: موجب آلودگی هوا می شود.
 ← کیسه پلاستیکی: موجب آلودگی هوا، خاک و آب می شود.

دفن کردن
 ← پاکت کاغذی: تجزیه می شود.
 ← کیسه پلاستیکی: تجزیه نمی شود.