www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هشتم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

بودجه‌بندی دروس

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
ریاضی (۱) فصل ۲ صفحهٔ ۲۸ تا ۴۶ حسابان (۱) فصل ۴ (درس ۱ تا ۳) صفحهٔ ۹۱ تا ۱۰۹ حسابان (۲) فصل ۱ (درس ۲) و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۱۳ تا ۳۴	هندسه (۱) فصل ۳ صفحهٔ ۵۳ تا ۷۶ هندسه (۳) فصل ۱ (درس ۲) صفحهٔ ۲۲ تا ۳۱	ریاضیات گسسته فصل ۱ (درس ۲ و ۳ تا ابتدای معادلهٔ هم‌نهشتی) صفحهٔ ۹ تا ۲۴

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع مجدد دوازدهمی‌ها از مهر

Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

حسابان و ریاضیات پایه

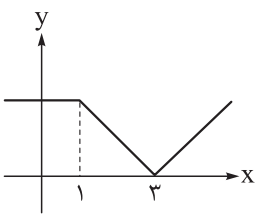
۱- چندجمله‌ای $f(x)=x^۳+۳x^۲+ax-۲$ مفروض است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x+۱)$ بر $x-۱$ برابر a و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x-۱)$ بر $x+۱$ برابر b باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $ax^۶-۳x^۴+x^۳-۲x^۲+x+a$ بر $x^۳+x$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) $۳x^۲+۲$ ۲) $۲x^۲+۳$ ۳) $۳x^۲-۲$ ۴) $۲x^۲-۳$

۳- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $y=f(a-۲|x|)$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی هم صعودی و هم نزولی باشد، حدود a کدام است؟



۱) $a\geq ۱$ ۲) $a\leq ۱$

۳) $a\geq \frac{۱}{۲}$ ۴) $a\leq \frac{۱}{۲}$

۴- نمودار تابع $f(x)=۳+a+\sqrt{۲x-a-۱}$ فقط از دو ربع دستگاه مختصات عبور می‌کند. مجموع مقادیر صحیح ممکن برای a کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۱۰ ۳) -۵ ۴) -۱۱

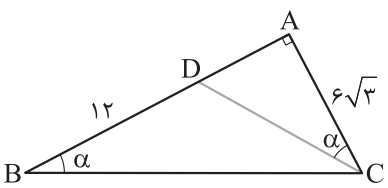
۵- تابع f با دامنهٔ $[-۲,۶]$ اکیداً نزولی است به طوری که $f(۱)=۶$ است. در این صورت، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x^۲+۲x-۲)\geq ۶$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶- تعداد اعداد صحیح عضو دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}-a\sqrt{۱۰-x}$ یکسان است. عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- در شکل زیر، $AC=۶\sqrt{۳}$ و $BD=۱۲$ است. حاصل $\sin ۳\alpha+\cos ۴\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

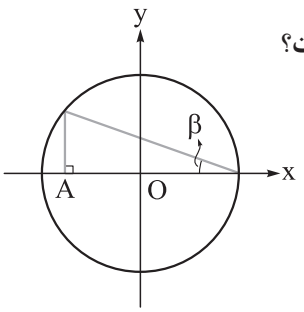
۳) ۱ ۴) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، $OA = \frac{۵}{\sqrt{۲۹}}$ است. حاصل $\tan ۲\beta + \cot ۲\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۲) $\frac{۳۴}{۱۵}$

۳) ۳/۶

۴) ۲/۹

۹- اگر $\sin^۴ x = \sin^۲ x \cos^۲ x + ۲\cos^۴ x$ باشد، مقدار $\frac{۱}{\cos^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۰- حاصل عبارت $\frac{\sin ۴۸^\circ \cos ۱۵۰^\circ - ۱}{۱ + \tan ۲۴۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷(۱-\sqrt{۳})}{۸}$　　۲) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$　　۳) $۱ - \frac{۵\sqrt{۳}}{۸}$　　۴) $۱ + \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$

۱۱- نقطهٔ $A(۲,۳)$ رادر حول نقطهٔ $O(-۱,۲)$، یک‌بار ۲۳۱۰° ساعتگرد دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ M برسیم و بار دیگر آن را ۱۴۱۰° پادساعتگرد دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ N برسیم. در این صورت حاصل $\sin(\frac{۵\hat{MON}}{۴}) - \cos(\frac{۵\hat{MON}}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۲) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) صفر

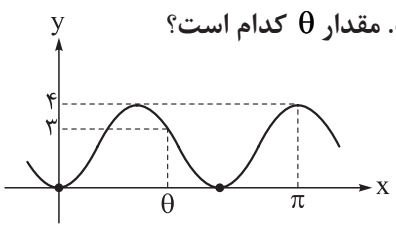
۱۲- تابع $f(x) = ۲\sin(a\pi x - \frac{\pi}{۴})$ با دورهٔ تناوب ۶، روی بازهٔ $(\frac{۵}{۲}, b)$ اکیداً یکنوا است. بیشترین مقدار b کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) $\frac{۲۳}{۴}$　　۲) $\frac{۲۱}{۴}$　　۳) $\frac{۱۱}{۲}$　　۴) ۵

۱۳- در تابع $f(x) = a - b\sin\frac{\pi}{b}x$ مقدار ماکزیمم از مقدار مینیمم ۶ واحد بیشتر و از مقدار عددی دوره تناوب، یک واحد کم‌تر است. دوره تناوب تابع $g(x) = \cos\frac{\pi x}{ab}$ کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۴　　۳) ۸　　۴) ۶

۱۴- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{b}{۲ + ۲\cot^۲ ax}$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار θ کدام است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۹}$

۲) $\frac{۵\pi}{۸}$

۳) $\frac{۴\pi}{۹}$

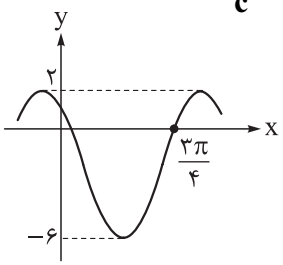
۴) $\frac{۳\pi}{۸}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

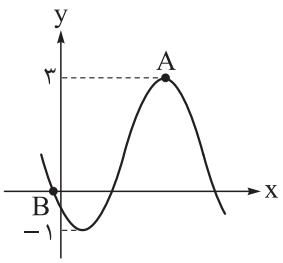
www.konkur.in

۱۵- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+\frac{\pi}{۶})+c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟



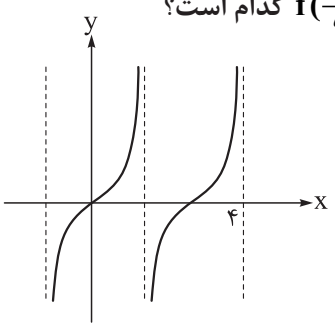
۱) -۲
۲) ۲
۳) -۳
۴) ۳

۱۶- قسمتی از نمودار تابع $y=a-b\sin(\frac{x}{b}+\frac{\pi}{۳})$ در شکل زیر رسم شده است. شیب خط گذرا از نقاط A و B کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴\pi}$
۲) $\frac{۹}{۸\pi}$
۳) $\frac{۴}{۳\pi}$
۴) $\frac{۸}{۹\pi}$

۱۷- بخشی از نمودار تابع $f(x)=k\tan k\pi x$ در شکل زیر رسم‌شده است. مقدار $f(\frac{۲۸}{۹})$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۸- برد تابع $f(x)=۲-\tan(\frac{۲\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-(a,b)$ مجموعهٔ $[\frac{۷}{۸},\frac{۱۳}{۸}]$ است. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

هندسه

۱۹- چه تعداد از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

الف) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۷ & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۷ & y \end{vmatrix} \Rightarrow x = y$

ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times B \Rightarrow A = B$

پ) $A = A^{-۱} \Rightarrow A = I$ یا $A = -I$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۵}A$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) -۲　　۳) $-۰/۰۸$　　۴) $۰/۰۸$

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & |A| \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) $۱/۷۵$　　۲) $-۲/۲۵$　　۳) $۱/۲۵$　　۴) $-۲/۷۵$

۲۲- اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد، به طوری که $|A^۲| = \sqrt{۲}$، آن‌گاه حاصل $\frac{|۲A^{-۱}|}{|A|}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $۲\sqrt{۲}$　　۳) ۲　　۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۳- اگر $A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $۲I - AB^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۵　　۴) صفر

۲۴- از دو دستگاه $\begin{cases} x + ۲y = a \\ ۳x + ۴y = b \end{cases}$ و $\begin{cases} X + Y = x \\ X - Y = y \end{cases}$ نتیجه می‌شود $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$؛ دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $-\frac{۱}{۲}$　　۴) $-\frac{۱}{۴}$

۲۵- تعداد قطرها در یک چندضلعی محدّب، چهار برابر تعداد اضلاع است. مجموع زاویه‌های داخلی این چندضلعی چند درجه است؟

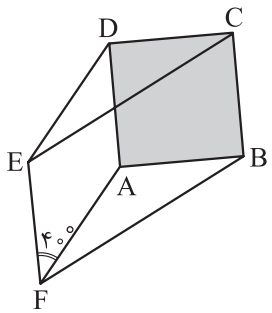
۱) ۱۴۴۰　　۲) ۱۹۸۰　　۳) ۱۶۲۰　　۴) ۱۸۰۰

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۶- مطابق شکل، ABCD مربع و ADEF لوزی است. بزرگ‌ترین زاویهٔ چهارضلعی BCEF چند درجه است؟



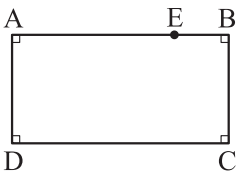
۱) ۱۲۰

۲) ۱۱۵

۳) ۱۱۰

۴) ۱۰۵

۲۷- با توجه به شکل اگر $4BE = 2AD = CD$، آن‌گاه خطی که از نقطهٔ E گذشته و مساحت مستطیل ABCD را نصف می‌کند، چه زاویه‌ای با AB می‌سازد؟



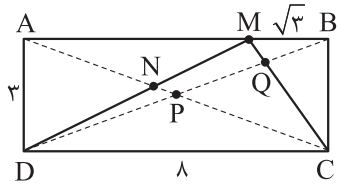
۱) 30°

۲) 45°

۳) 60°

۴) 75°

۲۸- مطابق شکل در مستطیل ABCD قطرها رسم و از M به C و D وصل شده است. مجموع مساحت‌های دو مثلث AND و BQC چه‌قدر از مساحت چهارضلعی MNPQ بیشتر است؟



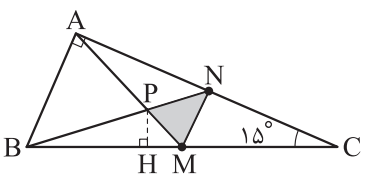
۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۹

۲۹- مطابق شکل، M و N وسط‌های دو ضلع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC هستند و AM و BN در P متقاطع‌اند. مساحت مثلث MNP، چند برابر PH^2 است؟



۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{3}$

۳۰- مجموع تعداد نقاط مرزی و نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای ۱۰ است. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای مساحت این چندضلعی کدام است؟

۱) ۱/۵

۲) ۳/۵

۳) ۴/۵

۴) ۳

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۳۱- اگر a و b مضرب ۳ باشند، عدد $ab(a+b)$ همواره بر کدام گزینه بخش‌پذیر است؟ ($a, b \neq 0$)

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۴ ۴) ۶۵

۳۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱) حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

۲) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۳) اگر $a \mid b$ و $c \mid d$، آن‌گاه $a+c \mid b+d$

۴) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $d \mid m$، آن‌گاه $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۳۳- اعداد $5a-1$ و $6a+3$ در یک دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۹ قرار دارند. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۴- اگر a و b نسبت به هم اول باشند، ب.م.م دو عدد $2b+7a$ و $b+3a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- سه عدد صحیح به صورت $a=7k+2$، $b=7k+4$ و $c=7k+6$ داریم. مربع حداکثر چندتا از آن‌ها را می‌توان به صورت $8q+1$ نوشت؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم $10!+7^{200}+3^{200}$ بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۳۷- به ازای چند عدد طبیعی $m>2$، رابطهٔ $(m,m+2)=(m-2,m^2-4)$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ مقدار

۳۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم $11^{117}+7^{160}$ بر ۷۷ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۴۴ ۳) ۲۲ ۴) ۱

۳۹- اگر $a \overset{19}{\equiv} 0+7\times 11^{193}$ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی طبیعی a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

۴۰- اگر در یک سال، اول مهر یکشنبه باشد، کدام گزینه در مورد روزهای دیگر همین سال، درست است؟

۱) ۱۸ اردیبهشت، دوشنبه است.

۲) ۲۵ مرداد، جمعه است.

۳) ۱ دی، یکشنبه است.

۴) ۲۴ بهمن، چهارشنبه است.

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله هشتم

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

دفترچه شماره دو

بودجه‌بندی دروس

فیزیک	شیمی
فیزیک (۱) فصل ۵ صفحهٔ ۱۲۷ تا ۱۴۹ فیزیک (۳) فصل ۱ (از ابتدای سقوط آزاد) و فصل ۲ (تا ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتون) صفحهٔ ۲۱ تا ۴۶	شیمی (۱) فصل ۳ (تا ابتدای آیا نمک‌ها به یک اندازه در آب حل می‌شوند؟) صفحهٔ ۸۵ تا ۱۰۰ شیمی (۳) فصل ۱ (از ابتدای رسانایی الکتریکی محلول‌ها و قدرت اسیدی) و فصل ۲ (تا ابتدای واکنش‌های شیمیایی و سفر هدایت‌شدهٔ الکترون‌ها) صفحهٔ ۱۶ تا ۴۴

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع مجدد دوازدهمی‌ها از مهر

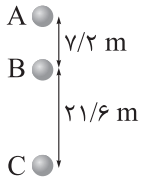
Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

فیزیک دوازدهم

۴۱- در شکل زیر، گلوله‌ای از نقطهٔ A رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در طی جابه‌جایی آن از نقطهٔ B تا نقطهٔ C برابر چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$)



سطح زمین

۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۴۲- در شرایط خلأ و در مبدأ زمان، گلوله‌ای از یک بلندی رها می‌شود. اندازهٔ جابه‌جایی گلوله در T ثانیهٔ دوم حرکتش، چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن در $\frac{T}{۳}$ ثانیهٔ پنجم حرکتش است؟

۱) ۳

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۳- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها شده و در ثانیهٔ آخر حرکت خود ۲۶ m را می‌پیماید. ارتفاع h چند متر است؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$)

۱) ۳۶/۴۵

۲) ۳۸/۰۵

۳) ۴۸/۰۵

۴) ۴۸/۵

۴۴- در شرایط خلأ و از یک بلندی، گلولهٔ A رها می‌شود. ۱/۲ s پس از رهاشدن گلولهٔ A و ۷/۲ m پایین‌تر از مکان رهاشدن آن، گلولهٔ B رها می‌شود. چند ثانیه پس از رهاشدن گلولهٔ B فاصلهٔ دو گلوله به ۳۰ m می‌رسد؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$)

۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

۴۵- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) اگر تندی متحرکی ثابت باشد، نیروی خالص وارد بر آن الزاماً برابر صفر است.

ب) نیروی خالص وارد بر یک متحرک، الزاماً در جهت حرکت آن است.

پ) نیروهای کنش و واکنش، همواره به دو جسم وارد شده و منجر به اثرات یکسانی روی آن‌ها می‌شوند.

ت) اگر نیروهای وارد بر متحرکی متوازن باشند، متحرک روی خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

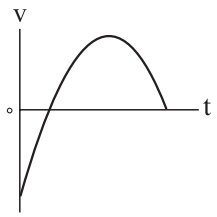
۴) ۴

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۶- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی با جرم ثابت m که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ نیروی خالص وارد بر این متحرک درست است؟



الف) ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور x است.

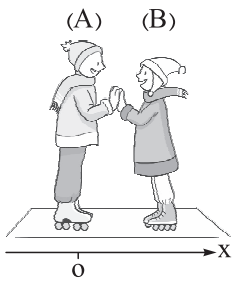
ب) ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور x است.

پ) اندازهٔ آن ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

ت) اندازهٔ آن ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) ب و ت

۴۷- در شکل زیر، دو شخص A و B که جرم آن‌ها به ترتیب ۸۰ kg و ۵۰ kg است، با کفش‌های چرخدار در یک سطح افقی، روبه‌روی هم ایستاده‌اند. اگر شخص A، با نیروی ۱۰۰نیوتونی، شخص B را به طرف راست هل دهد، شتابی که شخص A می‌گیرد، بر حسب متر بر مربع ثانیه، کدام است؟ (اتلاف انرژی در چرخ‌ها ناچیز است.)



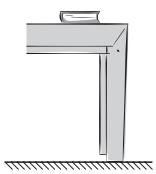
۱) $۲\vec{i}$

۲) $-۲\vec{i}$

۳) $۱/۲۵\vec{i}$

۴) $-۱/۲۵\vec{i}$

۴۸- در شکل زیر، میزی روی سطح افقی و کتابی روی میز قرار دارد. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟



۱) واکنش نیروی وزن وارد بر کتاب، به میز وارد می‌شود.

۲) دو نیروی عمودی سطح و وزن وارد بر کتاب، کنش و واکنش‌اند.

۳) واکنش نیروهای وارد بر میز، فقط به کتاب و سطح افقی وارد می‌شود.

۴) واکنش نیروی عمودی سطح وارد بر کتاب، رو به پایین به میز وارد می‌شود.

۴۹- چتربازی به جرم ۷۰ kg مدتی پس از یک پرش آزاد، چتر خود را باز می‌کند. ناگهان نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد و حرکت چترباز کند می‌شود. اگر شتاب حرکت چترباز در یک لحظه پس از بازشدن چتر $۸\,m/s^۲$ رو به بالا باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در این لحظه چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$

۱) ۱۴۰　　۲) ۵۶۰　　۳) ۸۴۰　　۴) ۱۲۶۰

۵۰- دو گوی هم‌اندازهٔ A و B را از سطح زمین، با تندی یکسان، در راستای قائم و به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جرم گوی B بیشتر از جرم گوی A و اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی، ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، جهت حرکت کدام گوی زودتر تغییر می‌کند و بیشینهٔ ارتفاع کدام گوی، بیشتر است؟

۱) A ، A　　۲) B، B　　۳) B ، A　　۴) A ، B

محل انجام محاسبات

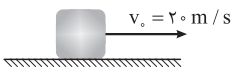
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۱- شخصی به جرم ۶۰kg درون آسانسور روی ترازوی فنری ایستاده است. آسانسور ابتدا با شتاب ثابت به بزرگی a رو به بالا شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی حرکت خود را با شتاب ثابتی به بزرگی $\frac{a}{۲}$ کند می‌کند. اگر در طی این حرکت، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، ۲۵ درصد تغییر کند، a چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$

۱) ۲/۵　　۲) ۲　　۳) ۱/۲۵　　۴) ۱

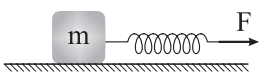
۵۲- در شکل زیر، مکعب چوبی را با تندی ۲۰ m/s روی سطح افقی پرتاب می‌کنیم. اگر مکعب چوبی پس از طی مسافت ۴۰ m متوقف شود، ضریب اصطکاک جنبشی سطح با جسم کدام است؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$



۱) ۰/۲　　۲) ۰/۲۵

۳) ۰/۵　　۴) ۰/۷۵

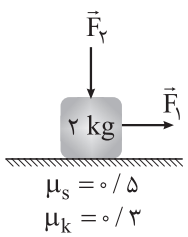
۵۳- در شکل زیر، جسمی به جرم ۲/۴ kg توسط فنری افقی با ثابت ۵۰۰ N/m و جرم ناچیز، با سرعت ثابت روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر اندازهٔ نیروی سطح وارد بر جسم ۲۶N باشد، افزایش طول فنر نسبت به حالت عادی در آن، چند سانتی‌متر است؟ $(g = ۱۰ N/Kg)$



۱) ۴/۸　　۲) ۲

۳) ۲/۴　　۴) ۱

۵۴- در شکل زیر، به جسمی به جرم ۲ kg که روی سطح افقی قرار دارد، نیروهای افقی $\vec{F}_۱$ و قائم $\vec{F}_۲$ وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت است. اگر جهت نیروی $\vec{F}_۲$ قرینه شود، جسم با شتاب ۴ $m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند. بزرگی $\vec{F}_۱$ چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$



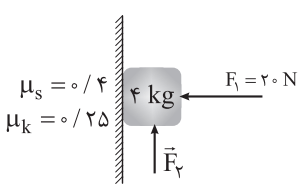
۱) ۵

۲) ۱۴

۳) ۱۲/۵

۴) ۲۰

۵۵- مطابق شکل، به جسمی به جرم ۴kg نیروهای افقی $\vec{F}_۱$ و قائم $\vec{F}_۲$ وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد. اگر بزرگی هر یک از نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$، ۲ برابر شود، بزرگی شتاب جسم چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$



۱) صفر

۲) ۲

۳) ۳/۵

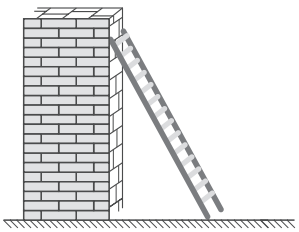
۴) ۴/۷۵

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۶- در شکل زیر، نردبانی به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده و ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و نردبان برابر ۰/۷۵ است. اگر نردبان در آستانهٔ سرخوردن باشد، اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند، چند برابر اندازهٔ نیرویی است که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند؟



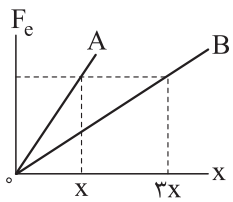
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۳}$

۵۷- نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی در فنرهای A و B برحسب تغییر طول آن‌ها نسبت به حالت عادی به شکل زیر است. فنرها را به طور جداگانه از نقطه‌ای آویزان کرده و به انتهای دیگر آن‌ها، به ترتیب وزنه‌هایی به جرم m و ۲m وصل می‌کنیم. در حالت تعادل، تغییر طول فنر A نسبت به حالت عادی، چند برابر تغییر طول فنر B نسبت به حالت عادی است؟ $(g = ۹/۸ N/kg)$



۱) ۶

۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۸- وزنه‌ای به جرم ۲ kg را به انتهای فنری به ثابت ۱۰۰ N/m که از سقف آسانسور آویزان است، می‌بندیم. وقتی آسانسور با شتاب رو به پایینِ $۲ m/s^۲$ حرکت می‌کند، طول فنر به $L_۱$ می‌رسد و هنگامی که آسانسور با شتاب رو به بالایِ $۱ m/s^۲$ حرکت می‌کند، طول فنر به $L_۲$ می‌رسد. $L_۲ - L_۱$ چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲　　۲) −۲　　۳) ۶　　۴) −۶

۵۹- شکل زیر، یک سطل به جرم ۵kg را نشان می‌دهد که توسط یک طناب با نیروی کشش ۶۰N در راستای قائم به طرف بالا کشیده می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوای وارد بر سطل ۲/۵N باشد، شتاب آن بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ $(g = ۱۰ N/kg)$

۱) $۱/۵ \vec{j}$

۲) $-۱/۵ \vec{j}$

۳) $۲/۵ \vec{j}$

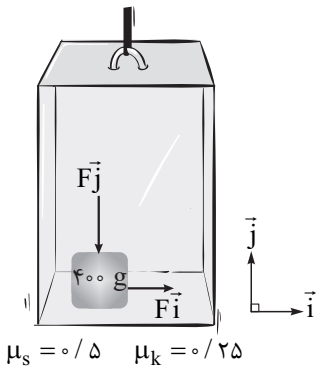
۴) $-۲/۵ \vec{j}$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۰- مطابق شکل، به جسمی ۴۰۰گرمی که بر روی کف یک آسانسور قرار دارد، دو نیرو، هر یک با اندازهٔ F در جهت‌های نشان داده شده، وارد می شود. اگر آسانسور با شتاب $2/5\,m/s^2$ به سمت پایین شروع به حرکت کند، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. در حالتی‌که آسانسور ساکن است، نیرویی که جسم به کف آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) $\sqrt{58}$

۲) ۹

۳) ۷

۴) $\sqrt{106}$

فیزیک دهم

۶۱- ظرفی شامل $3kg$ آب است. با هم‌زدن آب داخل ظرف، $40kJ$ کار روی آن انجام می‌دهیم و در این مدت $30kJ$ گرما از داخل ظرف به بیرون منتقل می‌شود. انرژی درونی آب چند کیلوژول و چگونه تغییر می‌کند؟

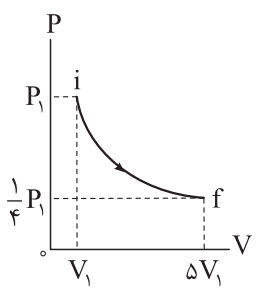
۱) ۷۰، افزایش می‌یابد.　　۲) ۷۰، کاهش می‌یابد.

۳) ۱۰، افزایش می‌یابد.　　۴) ۱۰، کاهش می‌یابد.

۶۲- دمای $90g$ گاز اکسیژن را در فشار ثابت، $200^\circ F$ افزایش می‌دهیم. در این فرایند، کار انجام‌شده روی گاز چند کیلوژول است؟ $\left(R = 8\,\frac{J}{mol.K}\right.$ و جرم مولی گاز اکسیژن $32\,g/mol$ است.$)$

۱) ۴/۵　　۲) ۲/۵　　۳) −۴/۵　　۴) −۲/۵

۶۳- در نمودار زیر، مقداری گاز آرمانی طی فرایندی ایستاوار از حالت i به حالت f می‌رسد. اگر ΔU تغییر انرژی درونی گاز، W کار انجام‌شده روی گاز و Q گرمای داده‌شده به گاز باشد، کدام رابطه درست است؟



۱) $\Delta U < 0$

۲) $W > 0$

۳) $Q < 0$

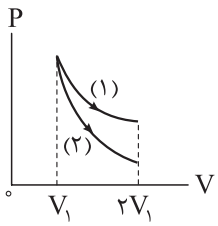
۴) $|Q| > |W|$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۴- در شکل زیر، حجم مقدار معینی از گاز آرمانی با دو فرایند ایستاوار (۱) و (۲)، دو برابر شده است. یکی از فرایندها هم‌دما و دیگری بی‌دررو است. اگر در این فرایندها، گرمای داده‌شده به گاز به ترتیب Q_1 و Q_2 باشد، کدام رابطه درست است؟



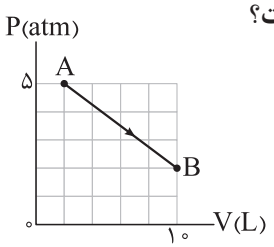
۱) $Q_1 > 0, Q_2 > 0$

۲) $Q_1 > 0, Q_2 = 0$

۳) $Q_1 < 0, Q_2 > 0$

۴) $Q_1 < 0, Q_2 = 0$

۶۵- نمودار فشار گازی آرمانی برحسب حجم آن در طی فرایند ایستاوار AB مطابق شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در حالت A برابر ۴۰۰J باشد، گاز در فرایند AB چند ژول گرما و چگونه مبادله کرده است؟



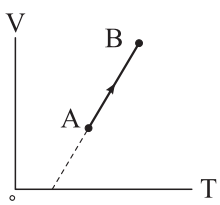
۱) ۲۴۰۰، دریافت کرده است.

۲) ۲۴۰۰، از دست داده است.

۳) ۳۲۰۰، دریافت کرده است.

۴) ۳۲۰۰، از دست داده است.

۶۶- نمودار حجم برحسب دمای یک گاز آرمانی در طی فرایند ایستاوار AB به شکل زیر است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این فرایند، درست است؟



الف) در طی این فرایند، فشار گاز ثابت است.

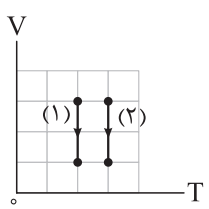
ب) در طی این فرایند، فشار گاز کاهش می‌یابد.

پ) در این فرایند، گاز گرما دریافت کرده است.

ت) در این فرایند، گاز گرما از دست داده است.

۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) ب و ت

۶۷- نمودار حجم برحسب دما برای دو فرایند ایستاوار گازهای کامل (۱) و (۲) به شکل زیر است. اگر گرمایی که گاز در این دو فرایند به محیط داده است، به ترتیب Q_1 و Q_2 باشد، کدام درست است؟



۱) $Q_2 > Q_1 > 0$

۲) $Q_1 > Q_2 > 0$

۳) $Q_2 < Q_1 < 0$

۴) $Q_1 < Q_2 < 0$

محل انجام محاسبات

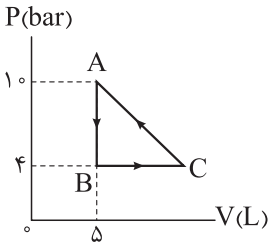
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۸- دمای یک مکعب آلومینیمی توپر به ضلع $20\ cm$ از $30^\circ C$ به $80^\circ C$ می‌رسد. اگر فشار هوای محیط $10^5\ Pa$ باشد، کار انجام‌شده توسط مکعب در این فرایند چند ژول است؟ (ضریب انبساط طولی آلومینیم برابر $2/5\times10^{-5}\ \frac{1}{K}$ است.)

۱) ۳　　۲) ۳۰　　۳) -3　　۴) -30

۶۹- نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز آرمانی در طی یک چرخه به شکل زیر است. اگر تغییر انرژی درونی گاز در فرایند CA برابر صفر باشد، کار انجام‌شده توسط گاز در هر چرخه برابر چند کیلوژول است؟



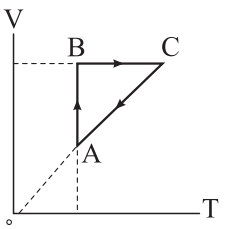
۱) ۴/۵

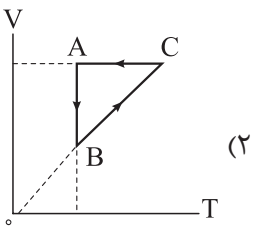
۲) $-4/5$

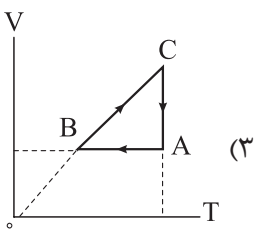
۳) ۲/۲۵

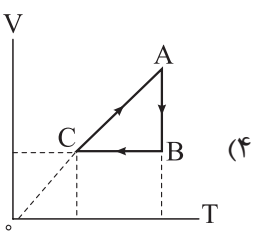
۴) $-2/25$

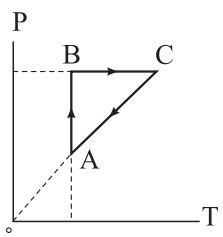
۷۰- نمودار $P-T$ مقدار معینی گاز آرمانی در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. نمودار $V-T$ این گاز در طی این چرخه، به صورت کدام شکل می‌تواند باشد؟

۱)


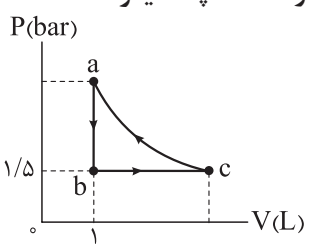
۲)


۳)


۴)




۷۱- نمودار فشار برحسب حجم مقدار معینی گاز آرمانی در طی یک چرخه به شکل زیر است. اگر فرایند ca هم‌دما و اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در فرایند ab و bc به‌ترتیب برابر $750\ J$ و $1050\ J$ باشد، حجم گاز در حالت c چند لیتر است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۲- یک ماشین گرمایی در هر چرخه $500\ J$ گرما از منبع دماباﻻ می‌گیرد و $300\ J$ گرما به منبع دماپایین می‌دهد. اگر هر چرخه $0/5\ s$ طول بکشد، به ترتیب بازده ماشین چند درصد و توان خروجی آن چند کیلووات است؟

۱) ۰/۱،۶۰ ۲) ۰/۴،۶۰ ۳) ۰/۱،۴۰ ۴) ۰/۴،۴۰

۷۳- بازده یک ماشین گرمایی که از سوزاندن گازوئیل، گرما دریافت می‌کند، ۲۵ درصد و توان آن $84\ kW$ است. این ماشین در هر ثانیه ۴۰ چرخه را می‌پیماید. اگر گرمای حاصل از سوختن گازوئیل $4/2\times10^4\ J/g$ باشد، گازوئیل مصرف‌شده توسط ماشین در هر چرخه چند گرم است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۲

۷۴- در چرخهٔ یک ماشین بنزینی، کدام فرایندها بی‌دررو در نظر گرفته می‌شود؟

۱) ضربهٔ مکش، ضربهٔ خروج گاز
۲) ضربهٔ مکش، ضربهٔ تراکم
۳) ضربهٔ قدرت، ضربهٔ خروج گاز
۴) ضربهٔ قدرت، ضربهٔ تراکم

۷۵- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) ممکن نیست ماشین گرمایی چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دماباﻻ جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.

ب) اگر در چرخهٔ یک ماشین گرمایی، تمام گرمای گرفته‌شده از منبع دماباﻻ به کار تبدیل شود، قانون اول ترمودینامیک نقض می‌شود.

پ) ممکن نیست گرما به‌طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

ت) یخچال با انجام کار، گرما را از منبعی دماپایین می‌گیرد و به منبعی دماباﻻ می‌دهد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

شیمی دوازدهم

۷۶- کربوکسیلیک اسیدها از جمله اسیدهای ..... هستند که تنها هیدروژن گروه ..... آن‌ها می‌تواند به صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

۱) قوی ـ کربوکسیل
۲) قوی ـ هیدروکسیل
۳) ضعیف ـ کربوکسیل
۴) ضعیف ـ هیدروکسیل

۷۷- اگر pH محلول اسید HA یک واحد کم‌تر از pH محلول اسید HB بوده و غلظت اولیهٔ HA، ۱۰۰ برابر غلظت اولیهٔ HB باشد، کدام مطلب در مورد آن‌ها درست است؟

۱) غلظت یون هیدرونیوم و ثابت یونش اسید HA، ۱۰ برابر HB است.
۲) درجهٔ یونش اسید HB در این شرایط، ۱۰ برابر HA است.
۳) اسید HA ضعیف بوده و به یقین اسید HB، یک اسید قوی است.
۴) میزان اسیدی‌بودن محلول HB و قدرت اسید HB بیشتر از HA است.

۷۸- با توجه به جدول زیر که ثابت یونش بازی چند ماده را در دمای $25^\circ C$ نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(N=14, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

نام باز	فرمول شیمیایی	K_b
آمونیاک	NH_3	$1/8\times10^{-5}$
متیل آمین	CH_3NH_2	$4/6\times10^{-4}$
دی‌متیل آمین	$(CH_3)_2NH$	$5/4\times10^{-4}$

- **در دمایی یکسان و غلظت‌های برابر، pH محلول دی‌متیل آمین از دو محلول دیگر بیشتر است.**
- **رسانایی الکتریکی محلول آمونیاک در آب از رسانایی الکتریکی محلول سدیم هیدروکسید در آب کم‌تر است.**
- **در محلول‌های ۰/۱ مولار از هر یک از ترکیب‌های بالا، بیشترین غلظت کاتیون در محلول آمونیاک است.**
- **اگر pH دو محلول دی‌متیل آمین و متیل آمین برابر باشد، به یقین خاصیت بازی هر یک از دو محلول از محلول آمونیاک بیشتر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۹- اگر در دمای اتاق، pH باز BOH با درصد یونش ۰/۰۶، برابر a و pH باز B′OH با درصد یونش ۰/۱۵، برابر a+۱ باشد، غلظت مولی آغازی باز B′OH، چند برابر غلظت مولی آغازی باز BOH است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۰- کدام موارد، نادرست هستند؟

الف) با استفاده از شوینده‌های خورندهٔ مناسب، اسیدهای چرب تبدیل به مولکول‌های محلول در آب می‌شوند.

ب) در واکنش جوش شیرین با هیدروکلریک اسید، ۳ فراوردهٔ متفاوت تولید می‌شوند.

پ) شیشه پاک‌کن، محلول حاوی سدیم هیدروکسید و لوله‌بازکن محلول حاوی آمونیاک است.

ت) شویندهٔ مناسب برای لوله‌ای که با $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ مسدود شده است، محلول غلیظ سدیم هیدروکسید است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت

۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ت

۸۱- ۵۰ میلی‌لیتر از یک شربت ضداسید دارای ۱/۱۶ میلی‌گرم منیزیم هیدروکسید و جرم معینی از آلومینیم هیدروکسید است. اگر این ضداسید ۹/۵ میلی‌لیتر شیرهٔ معده با pH = ۱/۷ را خنثی کند، اختلاف جرم آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید موجود در این شربت چند میلی‌گرم است؟ (معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود و $Al = ۲۷, Mg = ۲۴, O = ۱۶, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

I) $Mg(OH)_۲(s) + HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + H_۲O(l)$

II) $Al(OH)_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + H_۲O(l)$

۱) ۲/۷۴ ۲) ۴/۶۹

۳) ۶/۶۴ ۴) ۱۰/۵۴

۸۲- کدام مورد درست است؟

۱) اگر غلظت یون هیدرونیوم در شیرهٔ معده برابر ۰/۰۳ مولار باشد، pH آن برابر ۲/۷ خواهد بود.

۲) اگر pH معده در زمان استراحت برابر ۳/۷ باشد، غلظت یون هیدرونیوم در این حالت برابر ۳×۱۰^{-۴} مولار خواهد بود.

۳) با توجه به ویژگی و کاربرد سدیم هیدروژن کربنات، محلول جوش شیرین در آب خاصیت بازی دارد.

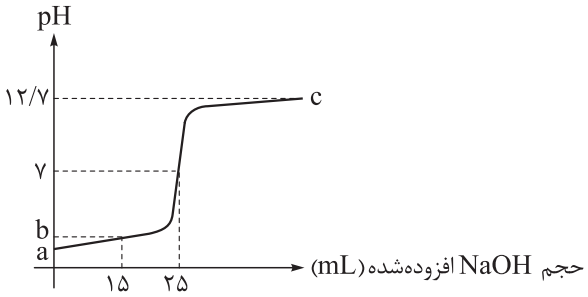
۴) برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها شیر منیزی می‌افزایند.

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۳- با توجه به نمودار زیر که تغییرات pH ۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار HCl را بر اثر افزودن تدریجی محلول NaOH نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟ ($\log ۱۳ = ۱/۱۱$; $Na = ۲۳, O = ۱۶, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)



۱) اختلاف عددی بین a و b برابر ۰/۵۱ است.

۲) در نقطهٔ c، حجم NaOH اضافه‌شده برابر ۵۰ میلی‌لیتر است.

۳) اگر ۵۰ میلی‌لیتر از محلول NaOH این آزمایش با ۴۰ میلی‌لیتر $H_۲SO_۴$ واکنش دهد، پس از خنثی‌شدن کامل، غلظت NaOH باقی‌مانده کم‌تر از ppm ۰/۰۰۱ است.

۴) در لحظه‌ای که حجم محلول ۸۰ میلی‌لیتر می‌باشد، pH محلول تقریباً ۱۳ است.

۸۴- کدام مورد، نادرست است؟

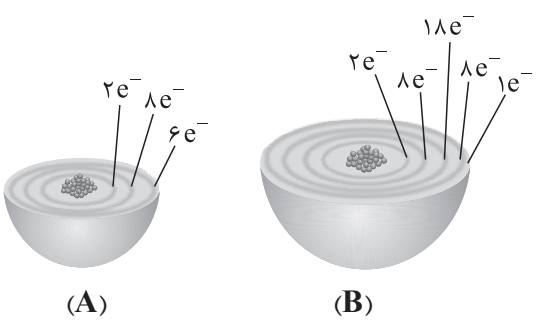
۱) از دستاوردهای الکتروشیمی می‌توان به پیاده‌کردن اصول شیمی سبز و تولید انرژی گرمایی پاک اشاره کرد.

۲) از قلمروهای اصلی علم الکتروشیمی می‌توان به کسب اطمینان از کیفیت تولید فراورده‌های غذایی اشاره کرد.

۳) در پدیده‌های طبیعی همچون تندر و آذرخش بخشی از انرژی به شکل انرژی الکتریکی میان سامانه و محیط پیرامون جاری می‌شود.

۴) دو رکن اساسی تحقق فناوری‌هایی که باعث آسایش و رفاه می‌شوند، دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی است.

۸۵- با توجه به شکل زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



(A) (B)

- **اتم A با گرفتن دو الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسد.**
- **اتم B یک عنصر اکسندهٔ قوی است و واکنش‌پذیری بالایی دارد.**
- **تبدیل اتم A به یون پایدار آن به صورت: $A + ۲e^- \rightarrow A^{۲-}$، انجام می‌شود.**
- **در واکنش A با B، به ازای انتقال دو مول الکترون، یک مول فراورده تشکیل می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۶- کدام مورد، نادرست است؟

۱) در یک واکنش اکسایش ـ کاهش، ماده‌ای که الکترون گرفته، کاهش و ماده‌ای که الکترون از دست داده، اکسایش می‌یابد.

۲) اغلب فلزها در واکنش با نافلزها، تمایل دارند که با دادن الکترون، سبب کاهش نافلز شوند، از این‌رو اغلب نقش کاهنده دارند.

۳) در واکنش تیغهٔ روی، با محلول مس (II) سولفات، انتقال الکترون تنها در سطح فلز روی رخ می‌دهد.

۴) همهٔ فلزها در واکنش با محلول اسیدها، گاز هیدروژن و نمک تولید می‌کنند.

۸۷- کدام مورد درست است؟ $(Cl = ۳۵/۵, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) در واکنش فلز سدیم با گاز کلر اگر ۱۴۲ گرم گونهٔ کاهنده مصرف شود، ۳۱۴ گرم فراورده تولید می‌شود.

۲) پس از موازنهٔ واکنش $Cr(s)+Fe^{۳+}(aq)\rightarrow Cr^{۳+}(aq)+Fe^{۲+}(aq)$، مجموع ضریب گونهٔ اکسنده و گونهٔ اکسایش‌یافته برابر ۶ می‌باشد.

۳) در واکنش آلومینیم با محلول هیدروکلریک اسید، نسبت ضریب گونهٔ اکسنده به ضریب گاز تولیدشده برابر ضریب گونهٔ کاهنده است.

۴) اغلب نافلزها اکسنده هستند و همیشه در یک واکنش اکسایش ـ کاهش موازنه‌شده، تعداد یون‌های با بار همنام در دو سمت معادله برابر است.

۸۸- با بررسی نیم‌واکنش زیر پس از موازنه، کدام مورد درست است؟ $(Mn = ۵۵, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

$$Mn^{۲+}(aq)+H_۲O(l)\rightarrow MnO_۲(s)+H^+(aq)+e^-$$

۱) اگر در آغاز واکنش غلظت $Mn^{۲+}$، ۰/۸ مول بر لیتر باشد، با آزادشدن ۰/۴ مول الکترون غلظت نهایی آن به ۰/۴ مول بر لیتر می‌رسد.

۲) در صورتی که با انجام این نیم‌واکنش، pH ۱/۳ واحد کاهش یابد، ۰/۰۱ مول الکترون تولید می‌شود.

۳) ضریب H^+ در نیم‌واکنش مطرح‌شده با ضریب $H_۲O$ در نیم‌واکنش زیر برابر است.

$$NO_۳^-(aq)+H^+(aq)+e^-\rightarrow NO(g)+H_۲O(l)$$

۴) به ازای تولید ۱۷/۴ گرم $MnO_۲$، $۲۴/۰۸\times۱۰^{۲۲}$ الکترون تولید می‌شود.

۸۹- با توجه به واکنش‌های زیر که در شرایط یکسان، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شوند، کدام مطالب نادرست است؟ $(Zn = ۶۵ g.mol^{-۱})$

الف) $Al(s)+Cu^{۲+}(aq)\rightarrow$

ب) $Cu^{۲+}(aq)+Mn(s)\rightarrow Cu(s)+Mn^{۲+}(aq)$

پ) $Zn(s)+V^{۳+}(aq)\rightarrow Zn^{۲+}(aq)+V^{۲+}(aq)$

۱) واکنش‌پذیری فلزهای آلومینیم و منگنز بیشتر از مس است.

۲) مجموع ضرایب واکنش موازنه‌شدهٔ (الف)، ۱/۶۷ برابر مجموع ضرایب واکنش موازنه‌شدهٔ (پ) است.

۳) محصولات واکنش (الف) می‌تواند فلز مس و $Al^{۳+}(s)$ باشند.

۴) در واکنش (پ) با مبادلهٔ $۲/۴۰۸\times۱۰^{۲۳}$ الکترون، ۱۳ گرم فلز روی مصرف می‌شود.

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۰- با توجه به جدول زیر که داده‌هایی را از قراردادن برخی تیغه‌های فلزی در محلول مس (II) سولفات در دمای $۲۰^\circ C$ نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟ $(Zn = ۶۵, Cu = ۶۴, Fe = ۵۶, Al = ۲۷ : g.mol^{-1})$

شمارهٔ آزمایش	نماد شیمیایی فلز	دمای مخلوط واکنش پس از مدتی ($^\circ C$)	جرم نهایی تیغه (g)
۱	Zn	۲۶	b
۲	Al	a	c
۳	Fe	۲۳	d

۱) اگر فلز M بتواند مس را از مس (II) سولفات آزاد کند، اما بر محلول حاوی کاتیون آهن بی‌اثر باشد، به یقین دمای مخلوط واکنش فلز M با محلول مس (II) سولفات از دمای a کم‌تر است.

۲) اگر جرم یکسانی از هر تیغه را به صورت جداگانه در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم، مقایسهٔ $c > d > b$ را برای جرم نهایی هر تیغه داریم.

۳) در صورتی که تیغه‌ای از جنس آلومینیم را در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم و تغییرات جرم تیغه ۶/۹ گرم باشد، تغییر غلظت گونهٔ اکسایش‌یافته ۱/۵ مولار می‌باشد.

۴) اگر در آزمایش ۱، تغییر جرم تیغه ۱۰ گرم باشد و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آزمایش ۳ برابر آزمایش ۱ باشد، در آزمایش ۳ پس از مبادلهٔ این تعداد الکترون ۸۰ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود.

۹۱- اگر واکنش‌های a و d انجام‌پذیر و واکنش‌های b و c انجام‌ناپذیر باشند، کدام مطلب نادرست است؟ (معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

a) $Fe^{۳+}(aq) + Sn^{۲+}(aq) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + Sn^{۴+}(aq)$

b) $Cr^{۳+}(aq) + Fe^{۲+}(aq) \rightarrow Cr(s) + Fe^{۳+}(aq)$

c) $NiSO_۴(aq) + Pb(s) \rightarrow Ni(s) + PbSO_۴(s)$

d) $Cl_۲(g) + NaBr(aq) \rightarrow NaCl(aq) + Br_۲(l)$

۱) قدرت اکسندگی $Sn^{۴+} < Fe^{۳+}$ است.

۲) قدرت کاهندگی $Pb < Ni$ است و با قراردادن تیغهٔ طلا در محلول حاوی یون $Ni^{۲+}$ واکنشی انجام نمی‌شود.

۳) قدرت کاهندگی $Br^-(aq) > Cl^-(aq)$ می‌باشد.

۴) با مصرف کامل ۰/۲ مول تیغهٔ کرومی که در محلول $Fe^{۳+}(aq)$ قرار دارد، ۰/۲ مول از کاتیون‌ها تولید می‌شود.

محل انجام محاسبات

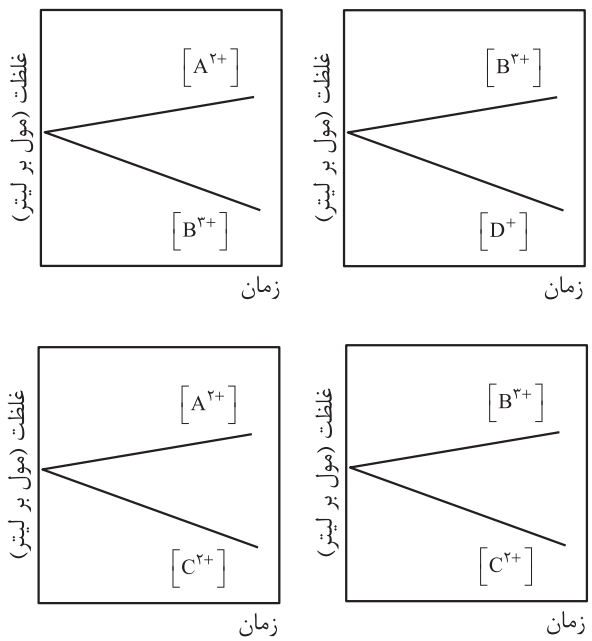
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۲- تیغه‌ای از یک فلز مجهول را در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول مس (II) سولفات با غلظت ۰/۳ مول بر لیتر قرار می‌دهیم. اگر بعد از بی‌رنگ‌شدن محلول، ۱/۳۵ گرم به جرم تیغه افزوده شود، فلز مجهول، کدام‌یک از فلزهای زیر می‌تواند باشد؟ $(Sn = 119, Cu = 64, Fe = 56, Mn = 55, Al = 27 : g.mol^{-1})$

۱) Al ۲) Mn ۳) Fe ۴) Sn

۹۳- تیغه‌هایی از فلزهای A، B، C و D در ۴ آزمایش جداگانه در محلول‌هایی که فقط حاوی یک نوع کاتیون فلزهای ذکرشده در شرایط یکسان می‌باشد را قرار می‌دهیم. با بررسی نمودار تقریبی غلظت برحسب زمان چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



- واکنش $A + B^{3+} \rightarrow$ انجام‌پذیر است و پس از تکمیل معادلهٔ واکنش و موازنهٔ آن، اختلاف ضریب کاهنده با ضریب رسوب ایجادشده برابر ۲ می‌باشد.
- اگر تیغهٔ D در محلول حاوی کاتیون A^{2+} قرار بگیرد، به مرور زمان ظرف واکنش گرم‌تر می‌شود.
- با قراردادن تیغهٔ B در هر یک از محلول‌های حاوی کاتیون‌های D^{+} و C^{2+}، جرم تیغه تغییر می‌کند.
- واکنش $B^{3+} + C \rightarrow$ انجام‌ناپذیر است، زیرا قدرت کاهندگی B از C بیشتر است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

شیمی دهم

۹۴- کدام مورد درست است؟

۱) جرم کل آب‌های روی کرهٔ زمین در حدود $۱/۵ \times ۱۰^{۱۸}$ تن برآورد می‌شود که نزدیک به ۷۵ درصد جرم کرهٔ زمین را تشکیل داده است.

۲) زیست‌کره شامل جانداران روی کرهٔ زمین است که در واکنش‌های آن‌ها ریزمولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.

۳) کوه‌های یخ بیش از $\frac{۲}{۳}$ منابع غیراقیانوسی را تشکیل می‌دهند.

۴) جانداران آبزی سالانه میلیاردها تن کربن دی‌اکسید را وارد هواکره و مقدار بسیار زیادی از گاز اکسیژن محلول در آب را تولید می‌کنند.

۹۵- کدام مورد عبارت زیر را به صورت صحیح تکمیل نمی‌کند؟

«ترکیب ..... به عنوان ..... کاربرد دارد و در صورت انحلال هر واحد آن در آب ..... یون تولید می‌شود.»

۱) آمونیوم نیترات ـ کود شیمیایی جهت نیتراته‌کردن خاک ـ ۲

۲) کلسیم کربنات ـ گچ شکسته‌بندی ـ ۲

۳) منیزیم هیدروکسید ـ مادهٔ مؤثر موجود در شیر منیزی ـ ۳

۴) آمونیوم سولفات ـ کود شیمیایی تأمین‌کنندهٔ نیتروژن و گوگرد برای گیاه ـ ۳

۹۶- ۲۰/۲ گرم پتاسیم نیترات را در ۲۹/۸ گرم آب حل می‌کنیم. اگر غلظت مولی کل یون‌ها در محلول حاصل برابر ۸/۱۶ مولار باشد، چگالی محلول چند گرم بر میلی‌لیتر است؟ ($K = ۳۹ , O = ۱۶ , N = ۱۴ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱/۰۲ ۲) ۲/۰۴

۳) ۱/۲ ۴) ۲/۴

۹۷- مقداری سدیم فسفات را با ۱۱/۸ گرم آب مخلوط می‌کنیم تا یک محلول ۴۱ درصد جرمی از سدیم فسفات ایجاد شود. یون فسفات موجود در این محلول، از چند کیلوگرم محلول ۵ ppm کلسیم فسفات قابل استخراج است؟ ($Ca = ۴۰ , P = ۳۱ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۵۵۰ ۲) ۱۷۵۰

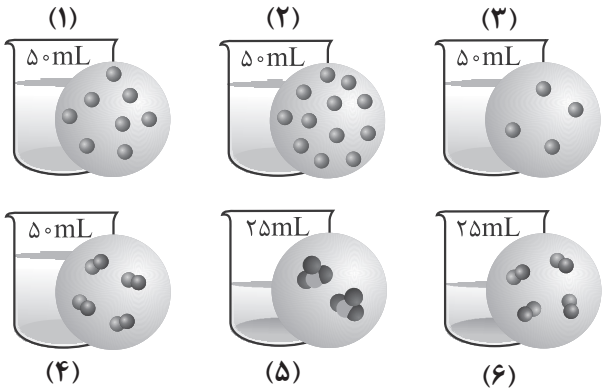
۳) ۳۱۰۰ ۴) ۳۵۰۰

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۸- اگر در شکل زیر هر ذرهٔ حل‌شونده معادل ۰/۰۱ مول باشد، کدام مورد از موارد زیر درست است؟ (در صورت افزودن محلول‌ها به یکدیگر، ذرات حل‌شونده واکنش نمی‌دهند.)



الف) مقایسهٔ غلظت مولار محلول‌های بالا به صورت ۵ = ۴ = ۳ > ۶ = ۱ > ۲ است.

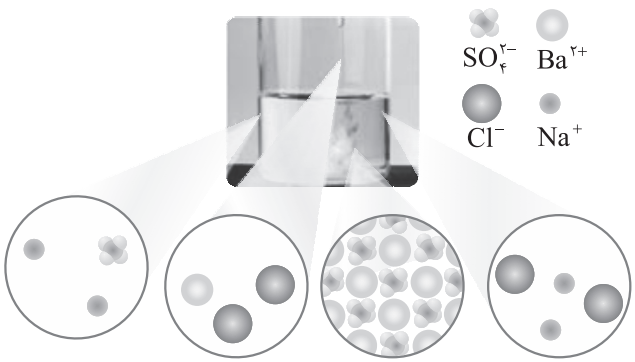
ب) در صورت مخلوط کردن محلول‌های (۳) و (۶)، غلظت مولی محلول حاصل، $\frac{۴}{۳}$ برابر غلظت مولی محلول شمارهٔ (۴) می‌شود.

پ) برای رقیق کردن محلول شمارهٔ (۵) تا ۰/۴ مولار، باید ۵۰ میلی‌لیتر آب به آن اضافه شود.

ت) غلظت مولی محلول شمارهٔ (۱)، ۱/۶ برابر غلظت مولی محلول شمارهٔ (۵) است.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) پ ـ ت

۹۹- معادلهٔ شیمیایی موازنه‌شدهٔ واکنش انجام‌شده در شکل زیر، کدام است؟



۱) $BaSO_4(s) + 2NaCl(aq) \rightarrow Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq)$

۲) $Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + NaCl(aq)$

۳) $Na_2SO_4(s) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(aq) + 2NaCl(aq)$

۴) $Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۰- ۵۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با چگالی ۱/۲ گرم بر میلی‌لیتر با ۳۰ گرم کلسیم کربنات خالص به طور کامل واکنش می‌دهد. غلظت محلول هیدروکلریک اسید چند درصد جرمی است؟

(واکنش موازنه شود، $Ca = ۴۰ , Cl = ۳۵/۵ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

$$CaCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow CaCl_۲(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

۱) ۱۸/۲۵ ۲) ۲۱/۹ ۳) ۳۶/۵ ۴) ۴۳/۸

۱۰۱- ۱۲۷/۵ گرم محلول نقره نیترات ۲۰ درصد جرمی با ۲۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار MCl_x مطابق واکنش زیر به طور کامل واکنش می‌دهد. اگر مقداری مشابه از محلول MCl_x با مقدار کافی آمونیوم هیدروکسید وارد واکنش شود، چند مول آمونیوم کلرید تولید می‌شود؟ (واکنش‌ها موازنه شوند، $Ag = ۱۰۸ , O = ۱۶ , N = ۱۴ : g.mol^{-۱}$)

$$MCl_x(aq) + AgNO_۳(aq) \rightarrow AgCl(s) + M(NO_۳)_x(aq)$$

$$MCl_x(aq) + NH_۴OH(aq) \rightarrow M(OH)_x(s) + NH_۴Cl(aq)$$

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱

۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۱۰۲- کدام مورد، نادرست است؟

۱) تشکیل برف و باران الگویی برای تهیهٔ آب خالص است، فرایندی که تقطیر نام داشته و فراوردهٔ آن آب مقطر است.

۲) گیاهان برای رشد مناسب به عنصرهایی مانند گوگرد، فسفر و نیتروژن نیاز دارند.

۳) با افزودن مقداری حلال به یک محلول با غلظت معین، غلظت محلول افزایش می‌یابد.

۴) تعداد مول‌های حل‌شونده در ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سدیم کلرید ۰/۱ مولار، بیشتر از ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم کلرید ۰/۰۵ مولار است.

۱۰۳- اگر ۱۲/۵ گرم استیک اسید در ۲۳۷/۵ گرم آب مقطر حل شود، غلظت مولی آن کدام است؟ (جرم هر میلی‌لیتر محلول، برابر یک گرم در نظر گرفته شود، $O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۰/۷۹ ۲) ۰/۸۳ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۱/۰۹

۱۰۴- کدام مطلب، نادرست است؟

۱) ساختار فضایی یون کربنات مشابه یون نیترات است.

۲) شکل هندسی یون آمونیوم به صورت چهاروجهی بوده و همهٔ اتم‌ها در ساختار آن به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.

۳) نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در ترکیب آلومینیم هیدروکسید مشابه نسبت شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها در ترکیب آمونیوم فسفات است.

۴) مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در ترکیب آمونیوم کربنات برابر ۱۲ است.

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۵- ۳۰۰ گرم محلول ۳/۲۵ درصد جرمی آهن (III) کلرید با مقدار کافی پتاسیم هیدروکسید جامد، واکنش کامل می‌دهد. اگر به محلول تشکیل‌شده ۱۷۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر اضافه شود، غلظت یون کلرید در پایان واکنش، پس از جداکردن رسوب، برابر چند ppm است؟

(معادلهٔ واکنش موازنه شود، از تغییر جرم محلول بر اثر انجام واکنش صرف نظر شود، $Fe = ۵۶, Cl = ۳۵/۵ : g.mol^{-۱}$)

$$FeCl_۳(aq) + KOH(s) \rightarrow Fe(OH)_۳(s) + KCl(aq)$$

۱) ۱۰۶۵
۲) ۳۱۹۵
۳) ۴۶۲۵
۴) ۷۱۰۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله هشتم

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
فیزیک	امین امینی ـ محمد باغبان ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی علیرضا عبداللهی ـ حمید فدائی‌فرد ـ فرزاد نامی ـ حامد نبی‌منصور
شیمی	مبین توکل ـ عباس سرمایه ـ محمدرضا طاهری‌نژاد ـ سروش عبادی ـ محمد قهرمانی‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	عادل حسینی	محمدسجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	سهیل تقی‌زاده زهرا جالینوسی علی رضایی
آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر علیرضا کاظمی‌بقا
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان علیرضا جباری محمدجواد سورچی	علیرضا جباری علیرضا گونه	مهدی بابائی مریم حسن‌لو مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	وحید فارسیان سروش عبادی	محمد مرادی وحید فارسیان	سید علی حسین‌زاده احسان رحیمی هومن زندی پارسا مرادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴
شروع مجدد دوازدهمی‌ها از مهر
Azmoon.kheilisabz.com
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق‌دوست ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ فاطمه بخششی مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

حسابان و ریاضیات پایه

۱ چندجمله‌ای $f(x)=x^3+3x^2+ax-2$ مفروض است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x+1)$ بر $x-1$ برابر a و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x-1)$ بر $x+1$ برابر b باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

Hint توی چندجمله‌ای $f(x+1)$ به جای x عدد ۱ و توی چندجمله‌ای $f(x-1)$ به جای x عدد -1 رو بذار.

درس Box رابطهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجهٔ یک $x-a$ به صورت زیر است:

$$p(x)=(x-a)q(x)+r$$

که باقی‌ماندهٔ این تقسیم برابر $r=p(a)$ است؛ یعنی کافی است ریشهٔ عبارت $x-a$ را در چندجمله‌ای $p(x)$ جای‌گذاری کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x+1)$ بر $x-1$ (ریشه) برابر $f(1+1)=f(2)$ است و طبق فرض سؤال، این مقدار برابر a است.

$$\Rightarrow a=f(2)=8+12+2a-2 \Rightarrow a=-18$$

گام دوم: پس تا این‌جا $f(x)=x^3+3x^2-18x-2$ است و برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x-1)$ بر $x+1$ کافی است مقدار $f(-2)$ را حساب کنیم:

$$b=f(-2)=-8+12+36-2 \Rightarrow b=38$$

گام سوم: مطلوب مسئله برابر است با:

$$a+b=-18+38=20$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $ax^6 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + a$ بر $x^3 + x$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) $3x^2 + 2$ ۲) $2x^2 + 3$

۳) $3x^2 - 2$ ۴) $2x^2 - 3$

Hint باقی‌ماندهٔ تقسیم جاییه که $x^3 + x$ صفر بشه یا $x^3 = -x$ باشه.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = ax^6 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + a$ بر $x^3 + x$، برابر مقدار چندجمله‌ای $p(x)$ در ریشه(های) عبارت $x^3 + x$ است؛ پس کافی است هر x^3ای که در $p(x)$ می‌بینیم، به جای آن $-x$ قرار دهیم:

$$p(x) = a(x^3)^2 - 3(x^3)x + (x^3) - 2x^2 + x + a \Rightarrow r(x) = a(-x)^2 - 3(-x)x + (-x) - 2x^2 + x + a$$

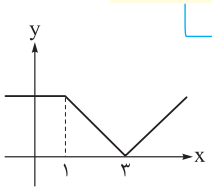
$$= ax^2 + 3x^2 - x - 2x^2 + x + a = (a+1)x^2 + a$$

گام دوم: و اگر a را برابر ۲ فرض کنیم، چندجمله‌ای گزینهٔ (۱) حاصل می‌شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $y = f(a-۲|x|)$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی هم صعودی و هم نزولی باشد، حدود a کدام است؟



تابع ثابت

۱) $a \geq ۱$

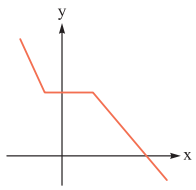
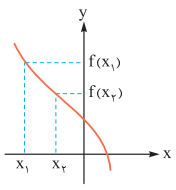
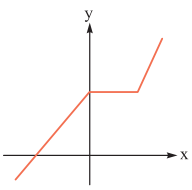
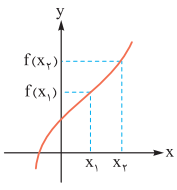
۲) $a \leq ۱$

۳) $a \geq \frac{۱}{۲}$

۴) $a \leq \frac{۱}{۲}$

Hint تعبیر داره بهت می‌گه: یه کاری کن اون تابع ثابت بشه. خود تابع f روی چه بازه‌ای ثابته؟ پس $a-۲|x|$ هم باید حتماً توی اون بازه باشه.

درس Box مجموعهٔ $A\ (A \subseteq D_f)$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به مجموعهٔ A، تابع f:

نزولی است.	اکیداً نزولی است.	صعودی است.	اکیداً صعودی است.
$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲)$	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$	$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$
			
در بازه‌ای که تابع f نزولی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

دقت کنید اگر مجموعهٔ A برابر دامنهٔ تابع باشد، آن‌گاه گوییم تابع f روی دامنهٔ خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. هم‌چنین اگر تابعی بر دامنهٔ خود صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه آن را یکنوا می‌نامیم.

الف) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.

ب) تابع ثابت (روی یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

پ) اگر تابع f روی دامنهٔ خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیریکنوا می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: طبق درس‌باکس، تابعی هم صعودی و هم نزولی است که ثابت باشد؛ پس با توجه به نمودار، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, ۱]$ هم صعودی و هم نزولی است.

گام دوم: این یعنی تابع $y = f(a-۲|x|)$ اگر بخواهد ثابت باشد، لازم است که در بازهٔ $(-\infty, ۱]$ قرار بگیرد:

$$\Rightarrow a-۲|x| \leq ۱$$

گام سوم: نامساوی بالا باید به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x برقرار باشد، در نتیجه قطعاً $a \leq ۱$ است؛ زیرا:

$$a \leq ۱+۲|x| \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} a \leq ۱$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴ نمودار تابع $f(x)=۳+a+\sqrt{۲x-a-۱}$ فقط از دو ربع دستگاه مختصات عبور می‌کند. مجموع مقادیر صحیح ممکن برای a کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۱۰ ۳) -۵ ۴) -۱۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تابع f اکیداً صعودی است؛ زیرا در توابع به فرم $y=a+b\sqrt{cx+d}$، اگر bc مثبت باشد، تابع اکیداً صعودی است و اگر منفی باشد، اکیداً نزولی است.

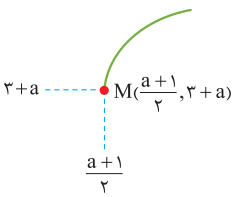
$f(x)=۳+a+۱\sqrt{۲x-a-۱}$; $۱\times۲>۰ \Rightarrow$ اکیداً صعودی است.

گام دوم: دامنه و برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$۲x-a-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq \frac{a+۱}{۲} : D_f=[\frac{a+۱}{۲},+\infty)$$

$$\sqrt{\text{☁}}\geq ۰ \Rightarrow \underbrace{۳+a+\sqrt{\text{☁}}}_{f(x)}\geq ۳+a \Rightarrow R_f=[۳+a,+\infty)$$

گام سوم: نمودار این تابع به صورت کلی به شکل مقابل است:

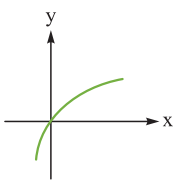


گام چهارم: با توجه خیلی زیاد به گام‌های اول و سوم، به این نتیجه می‌رسیم که اگر حاصل‌ضرب طول و عرض نقطهٔ M نامثبت باشد، تابع f فقط از دو ربع دستگاه مختصات می‌گذرد:

$$\Rightarrow (\frac{a+۱}{۲})(۳+a)\leq ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۳\leq a\leq -۱$$

اما به ازای $a=-۱$ تابع $f(x)=۲+\sqrt{۲x}$ را داریم که فقط از ربع اول می‌گذرد؛ پس تا این‌جا محدودهٔ قابل قبول برای a بازهٔ $[-۳,-۱)$ است.

گام پنجم: یک حالت دیگر هم داریم که نمودار تابع f فقط از دو ربع بگذرد و آن هم این است که نمودار از مبدأ مختصات بگذرد:



پس مختصات مبدأ مختصات را در ضابطهٔ تابع صدق می‌دهیم:

$$f(۰)=۳+a+\sqrt{-a-۱}=۰ \Rightarrow -۳-a=\sqrt{-a-۱}$$

$$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{a<-۳} a^۲+۶a+۹=-a-۱ \Rightarrow a^۲+۷a+۱۰=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیهٔ جمله مشترک}} (a+۵)(a+۲)=۰ \xrightarrow{a<-۳} a=-۵$$

گام ششم: در نهایت مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a به صورت $[-۳,-۱)\cup\{-۵\}$ است. این مجموعه شامل ۳ عدد صحیح -۵، -۳ و -۲ است که مجموع آن‌ها -۱۰ می‌شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵ تابع f با دامنهٔ $[-۲,۶]$ اکیداً نزولی است به طوری که $f(۱)=۶$ است. در این صورت، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x^۲+۲x-۲)\geq ۶$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

Hint تابع f نزولیه، پس باید اون عبارت توی پرانتز از ۶ کم‌تر (یا با اون مساوی) باشه. فقط حواست به دامنه باشه.

درس Box

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

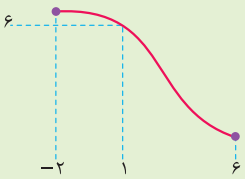
$$f(g(x))>f(h(x)) \Rightarrow \begin{cases} g(x)<h(x) & \text{تابع } f \text{ نزولی باشد} \\ g(x)>h(x) & \text{تابع } f \text{ صعودی باشد} \end{cases}$$

این قانون در سایر نامساوی‌ها هم برقرار است.

فقط نکتهٔ این قانون این است که حتماً دامنهٔ توابع مرکب fog و foh لحاظ شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع f با دامنهٔ $[-۲,۶]$ اکیداً نزولی است؛ برای آن یک نمودار فرضی رسم می‌کنیم:



گام دوم: از روی نمودار فرضی، مشخص است که اگر $f(x^۲+۲x-۲)$ بخواهد بزرگ‌تر از یا مساوی با ۶ باشد، لازم است که در بازهٔ $[-۲,۱]$ قرار گیرد:

$$\Rightarrow -۲\leq x^۲+۲x-۲\leq ۱$$

گام سوم: نامساوی‌ها را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^۲+۲x-۲\geq -۲ \Rightarrow x^۲+۲x\geq ۰ \xrightarrow{\text{خارج ریشه‌ها}} x\leq -۲ \text{ یا } x\geq ۰ \\ x^۲+۲x-۲\leq ۱ \Rightarrow x^۲+۲x-۳\leq ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۳\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

حالا باید اشتراک دو مجموعهٔ به‌دست‌آمده را حساب کنیم:

$$((-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty))\cap[-۳,۱]=[-۳,-۲]\cup[۰,۱]$$

مجموعهٔ بالا شامل چهار عدد صحیح -۳، -۲، ۰ و ۱ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶ تعداد اعداد صحیح عضو دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x-1}-a\sqrt{10-x}$ یکسان است. عدد طبیعی a کدام است؟

چون a طبیعی است، طول بازه‌های دامنه و برد برابرند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint اگه هیچ راهی به ذهنت نرسید، از گزینه‌ها استفاده کن و تو هر حالت دامنه و برد رو حساب کن. فقط باید بدونی تابع f اکیداً صعودیه.

درس Box

جبر توابع و یکنوایی

	توابع f و g هر دو صعودی‌اند.	تابع f صعودی اما تابع g نزولی است.	توابع f و g هر دو نزولی‌اند.
$f+g$	صعودی	نامعلوم	نزولی
$f-g$	نامعلوم	صعودی	نامعلوم

اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد، با محاسبهٔ $f(a)$ و $f(b)$ به سادگی برد به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دامنهٔ تابع را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ 10-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[1,10]$$

این بازه شامل ۱۰ عدد صحیح است.

گام دوم: تابع f حاصل‌جمع دو تابع $y=\sqrt{x-1}$ و $y=-a\sqrt{10-x}$ است که هر دو تابع اکیداً صعودی هستند؛ در نتیجه تابع f هم اکیداً صعودی است.

گام سوم: پس تابع f روی بازهٔ $[1,10]$ اکیداً صعودی است و طبق درس‌باکس، برد آن، بازهٔ $[f(1),f(10)]$ است.

$$\begin{cases} f(1)=0-a\sqrt{10-1}=-3a \\ f(10)=\sqrt{10-1}-0=3 \end{cases} \Rightarrow R_f=[-3a,3]$$

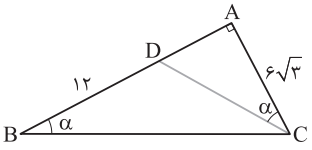
گام چهارم: دامنه شامل ۱۰ عدد صحیح بود، پس برد هم باید شامل ۱۰ عدد صحیح باشد. با توجه به این‌که a عددی طبیعی است، داریم:

$$3-(-3a)+1=10 \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷ در شکل زیر، $AC = ۶\sqrt{۳}$ و $BD = ۱۲$ است. حاصل $\sin ۳\alpha + \cos ۴\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۱

۴) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

Hint از $\tan\alpha$ استفاده کن و طول AD رو حساب کن.

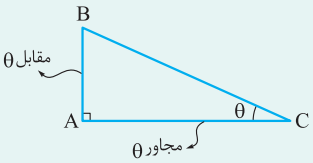
درس Box

در هر مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{کسینوس زاویه} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \quad , \quad \text{سینوس زاویه} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\text{کتانژانت زاویه} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{\text{کسینوس زاویه}}{\text{سینوس زاویه}} \quad , \quad \text{تانژانت زاویه} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\text{سینوس زاویه}}{\text{کسینوس زاویه}}$$

که در مثلث قائم‌الزاویه ABC، این نسبت‌ها برای زاویهٔ θ به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin\theta = \frac{AB}{BC} \quad , \quad \cos\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم در جدول زیر ارائه شده است:

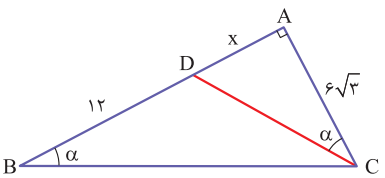
نسبت \ θ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف‌نشده
$\cot\theta$	تعریف‌نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ACD، زاویهٔ حادهٔ α حضور دارد، پس نسبت‌های مثلثاتی α در این دو مثلث برابرند.

حال چون طول وترهای BC و CD را نداریم، بهتر است از $\tan\alpha$ استفاده کنیم.

گام دوم: لازم است که طول ضلع AD را حساب کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABC} : \tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{۶\sqrt{۳}}{x+۱۲}$$

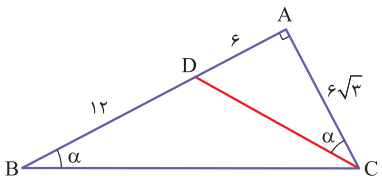
$$\overset{\Delta}{ACD} : \tan\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{x}{۶\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha \text{ برابری}} \frac{۶\sqrt{۳}}{x+۱۲} = \frac{x}{۶\sqrt{۳}} \Rightarrow x^۲ + ۱۲x = ۱۰۸ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x - ۱۰۸ = (x+۱۸)(x-۶) = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۶$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام سوم: اندازه‌های لازم را روی شکل به دست آوردیم:



پس $\tan\alpha = \frac{۶}{۶\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است، یعنی $\alpha = ۳۰^\circ$ است.

گام چهارم: عبارت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\sin ۳\alpha + \cos ۴\alpha = \sin ۹۰^\circ + \cos ۱۲۰^\circ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

نکته

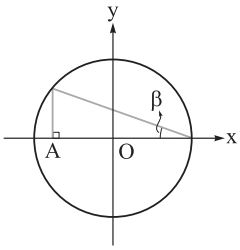
$\cos(\frac{\pi}{۲} + \theta) = -\sin\theta$ است؛ پس:

$$\cos ۱۲۰^\circ = -\sin ۳۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸ در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، $OA = \frac{۵}{\sqrt{۲۹}}$ است. حاصل $\tan ۲\beta + \cot ۲\beta$ کدام است؟



شعاع آن ۱ است.

به کسینوس زاویه مربوط است.

۱) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۲) $\frac{۳۴}{۱۵}$

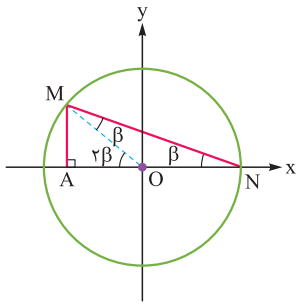
۳) ۳/۶

۴) ۲/۹

Hint یه شعاع دیگه از دایره رو رسم کن تا زاویهٔ ۲β خودنمایی کنه.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

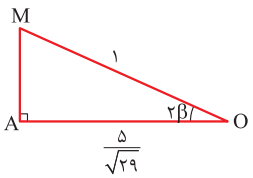
گام اول: مطابق شکل، شعاع OM را رسم می‌کنیم:



مثلث MON متساوی‌الساقین است (چرا؟)، پس دو زاویهٔ M و N در این مثلث هر دو برابر β هستند. زاویهٔ AOM برای مثلث MON، یک زاویهٔ خارجی محسوب می‌شود و برابر ۲β است:

$$A\hat{O}M = \hat{M} + \hat{N} = ۲\beta$$

گام دوم: حال روی مثلث AOM متمرکز می‌شویم:



شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر ۱ است و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول AM را نیز حساب می‌کنیم:

$$AM^۲ = OM^۲ - OA^۲ = ۱ - \frac{۲۵}{۲۹} = \frac{۴}{۲۹} \Rightarrow AM = \frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$$

گام سوم: عبارت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\tan ۲\beta + \cot ۲\beta = \frac{\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}}{\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}} + \frac{\frac{۵}{\sqrt{۲۹}}}{\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}} = \frac{۲}{۵} + \frac{۵}{۲} = ۰/۴ + ۲/۵ = ۲/۹$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹ اگر $\sin^۴ x = \sin^۲ x \cos^۲ x + ۲\cos^۴ x$ باشد، مقدار $\frac{۱}{\cos^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۴

۳) ۲ ۴) ۳

مشاوره چنین سؤالاتی سخت محسوب می‌شوند و پاسخ‌ندادن به آن‌ها در ابتدا ایرادی ندارد. پاسخ‌دادن به سؤالات شبیه به این سؤال، نیازمند تمرین خیلی خیلی زیاد است تا با تجربه، به الگوی حل آن‌ها برسید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سؤال، حاصل عبارت $\frac{۱}{\cos^۲ x}$ را از ما می‌خواهد و می‌دانیم که این عبارت با عبارت $۱+\tan^۲ x$ برابر است؛ پس هدف، محاسبهٔ مقدار $\tan x$ یا $\tan^۲ x$ است.

گام دوم: حال چگونه در عبارت مفروض سؤال $\tan x$ یا $\tan^۲ x$ ایجاد کنیم؟ ... اگر طرفین تساوی را بر $\cos^۴ x$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{\sin^۴ x}{\cos^۴ x} = \frac{\sin^۲ x \cos^۲ x}{\cos^۴ x} + \frac{۲\cos^۴ x}{\cos^۴ x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^۴ x}{\cos^۴ x} = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{۲\cos^۴ x}{\cos^۴ x} \Rightarrow \tan^۴ x = \tan^۲ x + ۲$$

گام سوم: با تغییر متغیر $k = \tan^۲ x$ معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

$$k^۲ = k+۲ \Rightarrow k^۲ - k - ۲ = (k-۲)(k+۱) = ۰ \xrightarrow{k=\tan^۲ x > ۰} k = ۲$$

گام چهارم: پس $\tan^۲ x = ۲$ و در نتیجه $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱+\tan^۲ x = ۳$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰ حاصل عبارت $\frac{\sin ۴۸۰^\circ \cos ۱۵۰^\circ - ۱}{۱ + \tan ۲۴۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷(۱-\sqrt{۳})}{۸}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$

۳) $۱-\frac{۵\sqrt{۳}}{۸}$

۴) $۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$

Hint هر سه زاویه‌ای که داده شده، به اختلاف مشخص و آشنایی با یک ضریب ۱۸۰° دارن؛ پس باید از فرمول‌های $k\pi + a$ استفاده کنی.

درس Box

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad$ $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

در حالت کلی اگر یک مضرب صحیح از π داشته باشیم، در محاسبهٔ تانژانت می‌توانیم کلاً این مضرب π را نادیده بگیریم:

$\tan(k\pi+\alpha) = \tan\alpha$

و در محاسبهٔ سینوس و کسینوس مضارب ۲π را حذف می‌کنیم:

$\sin(۷\pi-\alpha) = \sin(\overbrace{۶\pi}^{\text{مضرب ۲π است و حذف می‌شود.}} + \pi - \alpha) = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(۱۷\pi+\alpha) = \cos(\underbrace{۱۶\pi}_{\text{مضرب ۲π است و حذف می‌شود.}} + \pi + \alpha) = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: در ابتدا باید $\sin ۴۸۰^\circ$، $\cos ۱۵۰^\circ$ و $\tan ۲۴۰^\circ$ را حساب کنیم:

$\sin ۴۸۰^\circ = \sin(\overbrace{۳۶۰^\circ}^{\text{حذف می‌شود.}} + ۱۲۰^\circ) = \sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan ۲۴۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$

گام دوم: پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - ۱}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{-\frac{۷}{۴}}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۷(\sqrt{۳}-۱)}{-۴(۳-۱)} = \frac{۷(۱-\sqrt{۳})}{۸}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۱ نقطهٔ $A(۲,۳)$ را در حول نقطهٔ $O(-۱,۲)$، یک بار ۲۳۱۰° ساعتگرد دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ M برسیم و بار دیگر آن را ۱۴۱۰° پادساعتگرد دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ N برسیم. در این صورت حاصل $\sin(\frac{۵\hat{MON}}{۴})-\cos(\frac{۵\hat{MON}}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

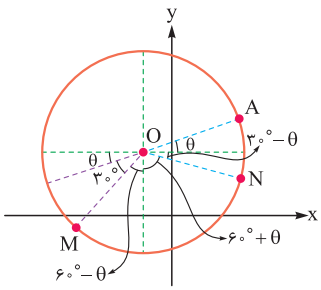
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاط M، A و N روی دایره‌ای به مرکز O و با شعاع $\sqrt{۱۰}$ قرار دارند.

گام دوم: زوایای ۲۳۱۰° و ۱۴۱۰° را در مقایسه با زاویهٔ ۱۸۰° می‌نویسیم:

$$۲۳۱۰^\circ = ۱۳\times ۱۸۰^\circ - ۳۰$$
$$۱۴۱۰^\circ = ۴\times ۳۶۰^\circ - ۳۰$$

گام سوم: شکل مسئله را به صورت تقریبی رسم می‌کنیم:



مطابق شکل مقابل، زاویهٔ MON برابر ۱۲۰° است:

$$\hat{MON} = ۶۰^\circ+\theta+۶۰^\circ-\theta = ۱۲۰^\circ$$

گام چهارم: حالا می‌رویم سراغ محاسبهٔ مطلوب سؤال:

$$\sin(\frac{۵\hat{MON}}{۴})-\cos(\frac{۵\hat{MON}}{۲}) = \sin ۱۵۰^\circ - \cos ۳۰۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)-\cos(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ) = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲} = ۰$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۲ تابع $f(x)=۲\sin(a\pi x-\frac{\pi}{۴})$ با دورهٔ تناوب ۶، روی بازهٔ $(\frac{۵}{۲},b)$ اکیداً یکنوا است. بیشترین مقدار **b** کدام است؟ $(a>۰)$

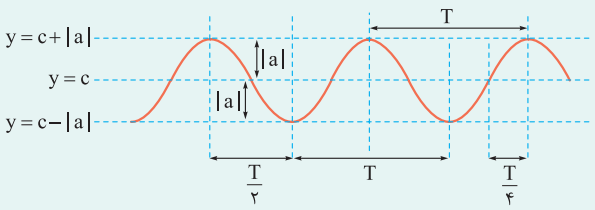
۱) $\frac{۲۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ۴) ۵

Hint

با الگوهای تبدیل نمودار، نمودار تابع f رو از روی نمودار تابع $y=\sin x$ رسم کن.

درس Box

نمودار تابع $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ به صورت زیر است:



در مورد این توابع، نکات زیر را می‌توان گفت:

الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $y_{max}=c+|a|$ و $y_{min}=c-|a|$ است.

ب) فاصلهٔ هر دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی یا هر دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر دورهٔ تناوب تابع است که از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

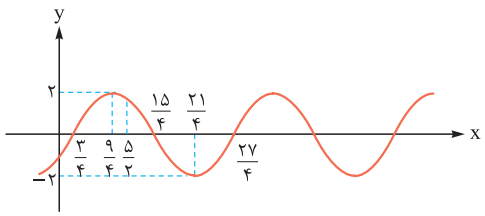
مطابق شکل، فاصلهٔ افقی نقاط ماکزیمم و مینیمم مجاور، برابر نصف دورهٔ تناوب است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا با استفاده از دورهٔ تناوب، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|a|\pi}=\frac{۲}{|a|}=۶ \Rightarrow |a|=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۳}$$

گام دوم: باید نمودار تابع $f(x)=۲\sin(\frac{\pi x}{۳}-\frac{\pi}{۴})$ را از روی نمودار تابع $y=\sin x$ رسم کنیم. برای این کار، نمودار تابع $y=\sin x$ را ابتدا $\frac{\pi}{۴}$ واحد به راست می‌بریم و سپس طول نقاط آن را بر $\frac{\pi}{۳}$ تقسیم و عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم:



گام سوم: مطابق شکل بالا، بیشترین مقدار b که تابع روی بازهٔ $(\frac{۵}{۲},b)$ بتواند اکیداً یکنوا باشد، $\frac{۲۱}{۴}$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۳ در تابع $f(x)=a-b\sin\frac{\pi}{b}x$ مقدار ماکزیمم از مقدار مینیمم ۶ واحد بیشتر و از مقدار عددی دوره تناوب، یک واحد کم‌تر است. دوره تناوب تابع $g(x)=\cos\frac{\pi x}{ab}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

Hint کار خاصی نیاز نیس بکنی، کافیه از فرمول‌های سه‌گانه استفاده کنی.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: در ابتدا مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب تابع f را حساب می‌کنیم:

$$y_{max}=a+|b| \quad , \quad y_{min}=a-|b|$$

$$T_f=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{|b|}}=۲|b|$$

گام دوم: حال روابط مفروض سؤال را بین این سه مقدار برقرار می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_{max}-y_{min}=۶ \Rightarrow a+|b|-(a-|b|)=۲|b|=۶ \Rightarrow |b|=۳ \\ T_f-y_{max}=۱ \Rightarrow ۲|b|-(a+|b|)=۱ \xrightarrow{|b|=۳} ۳-a=۱ \Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

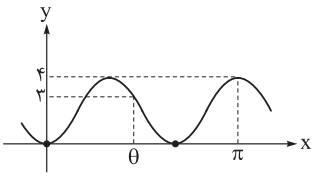
گام سوم: حالا اطلاعات کافی را داریم تا برویم سراغ دورهٔ تناوب تابع g.

$$\Rightarrow T_g=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{|ab|}}=۲|ab|=۲a|b| \Rightarrow T_g=۱۲$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۴ بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{b}{۲+۲\cot^۲ ax}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار θ کدام است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۹}$

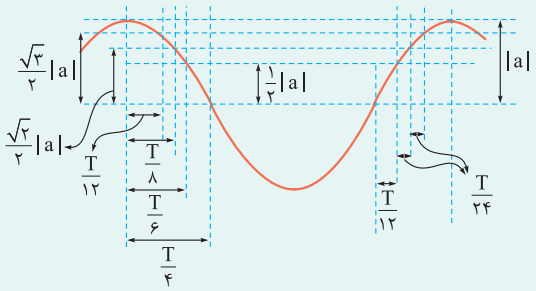
۲) $\frac{۵\pi}{۸}$

۳) $\frac{۴\pi}{۹}$

۴) $\frac{۳\pi}{۸}$

درس Box

نمودار $y=a\cos bx+c$



پاسخ خیلی تشریحی

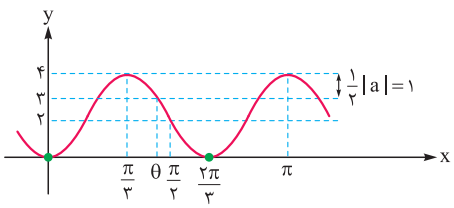
گام اول: از اتحاد $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم تا ضابطه را ساده‌تر کنیم:

$$f(x)=\frac{b}{۲(۱+\cot^۲ ax)}=\frac{b}{۲}\sin^۲ ax$$

گام دوم: حالا از اتحاد $\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{b}{۲}(\frac{۱-\cos ۲ax}{۲})=-\frac{b}{۴}\cos ۲ax+\frac{b}{۴}$$

گام سوم: پس نمودار، کسینوسی است و داریم:



۱/۵ برابر دورهٔ، برابر تناوب π شده است؛ پس $T=\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{T}{۲}=\frac{\pi}{۳}$ است. هم‌چنین خط وسط نمودار، $y=۲$ است.

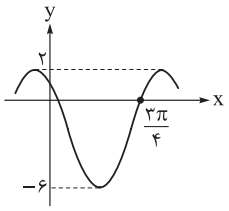
گام چهارم: با توجه به نمودار بالا و شکل مهم درس‌باکس، تابع از $\frac{\pi}{۳}$ تا θ، $\frac{۱}{۶}$ دورهٔ تناوب را طی می‌کند.

$$\Rightarrow \theta-\frac{\pi}{۳}=\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{۶} \Rightarrow \theta-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۹} \Rightarrow \theta=\frac{۴\pi}{۹}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۵ بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+\frac{\pi}{۶})+c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟



۱) -۲

۲) ۲

۳) -۳

۴) ۳

Hint تابع f رو رسم کن، یعنی با الگوی درست تبدیل نمودار، از $y=\cos x$ به $f(x)$ برس.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در نمودارهای $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ مقدار c همواره میانگین y_{max} و y_{min} است؛ پس داریم:

$$c=\frac{۲-۶}{۲}=-۲$$

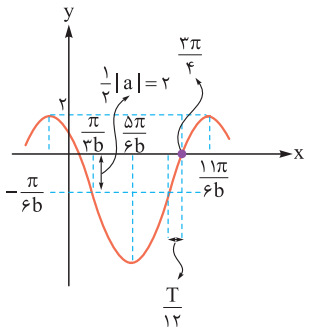
گام دوم: از y_{max} یا y_{min} به دلخواه استفاده می‌کنیم:

$$y_{max}=c+|a|=-۲+|a|=۲ \Rightarrow |a|=۴$$

اما چون طبق نمودار $f(۰)>۰$ است، قطعاً a مثبت است:

$$f(۰)=a\cos\frac{\pi}{۶}+c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a-۲>۰ \Rightarrow a>\frac{۴}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a=۴$$

گام سوم: پس تا این‌جا $f(x)=۴\cos(bx+\frac{\pi}{۶})-۲$ است و قصد داریم نمودار این تابع را از روی نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنیم. برای این کار، نمودار تابع $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۶}$ واحد به چپ می‌بریم، سپس طول نقاط را بر b تقسیم و عرض نقاط آن را در ۴ ضرب می‌کنیم و در انتها ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



مشخص است که $b>۰$ است؛ زیرا اگر $b<۰$ باشد، نقطهٔ ماکزیمم نمودار در سمت راست محور yها قرار می‌گیرد.

گام چهارم: با توجه به شکل بالا، تابع از $x=\frac{۴\pi}{۳b}$ تا $x=\frac{۳\pi}{۴}$ (نقطهٔ برخورد با محور xها)، $\frac{۱}{۱۲}$ دورهٔ تناوب را طی کرده است.

از آن‌جا که $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{b}$ است، داریم:

$$\frac{۳\pi}{۴}-\frac{۴\pi}{۳b}=\frac{\frac{۲\pi}{b}}{۱۲} \Rightarrow \frac{۳\pi}{۴}=\frac{۹\pi}{۶b} \Rightarrow b=۲$$

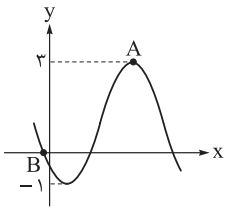
گام پنجم: مطلوب مسئله را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{۴+۲}{-۲}=-۳$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۶ قسمتی از نمودار تابع $y = a - b\sin(\frac{x}{b} + \frac{\pi}{۳})$ در شکل زیر رسم شده است. شیب خط گذرا از نقاط **A** و **B** کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴\pi}$

۲) $\frac{۹}{۸\pi}$

۳) $\frac{۴}{۳\pi}$

۴) $\frac{۸}{۹\pi}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

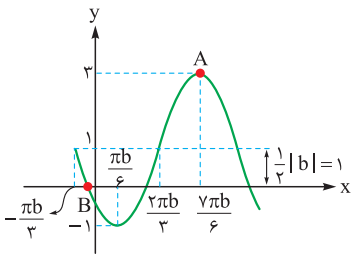
گام اول: در نمودارهای $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ مقدار c همواره میانگین y_{max} و y_{min} است؛ پس داریم:

$$a = \frac{۳ - (-۱)}{۲} = ۱$$

گام دوم: از y_{max} یا y_{min} به دلخواه استفاده می‌کنیم تا مقدار $|b|$ را به دست آوریم:

$$y_{max} = a + |b| \Rightarrow ۱ + |b| = ۳ \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

گام سوم: نمودار تابع $y = ۱ - b\sin(\frac{x}{b} + \frac{\pi}{۳})$ را از روی نمودار $y = -\sin x$ رسم می‌کنیم. برای این کار، نمودار تابع $y = -\sin x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به چپ می‌بریم، سپس طول و عرض نقاط آن را در b ضرب می‌کنیم و در نهایت آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



واضح است که b مثبت است؛ زیرا اگر b منفی باشد، نقطهٔ min تابع به سمت چپ محور yها منتقل می‌شود.

گام چهارم: تابع از $x = -\frac{\pi b}{۳}$ تا $x = x_B$، باید $\frac{۱}{۱۲}$ دورهٔ تناوب خود را طی کند. از آن‌جا که $T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{|b|}} = ۲\pi b$ است، داریم:

$$x_B - (-\frac{\pi b}{۳}) = \frac{۲\pi b}{۱۲} \Rightarrow x_B = -\frac{\pi b}{۶} \xrightarrow{b=۲} x_B = -\frac{\pi}{۳}$$

طول نقطهٔ A نیز برابر $x_A = \frac{۷\pi}{۳}$ است.

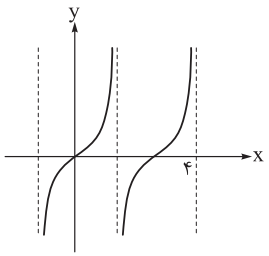
گام پنجم: شیب خطی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۳ - ۰}{\frac{۷\pi}{۳} - (-\frac{\pi}{۳})} = \frac{۳}{\frac{۸\pi}{۳}} = \frac{۹}{۸\pi}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۷ بخشی از نمودار تابع $f(x)=k\tan k\pi x$ در شکل زیر رسم‌شده است. مقدار $f(\frac{۲۸}{۹})$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

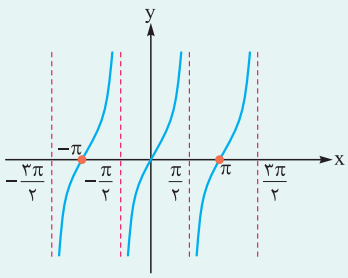
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

Hint کافیه از روی عدد ۴، دورهٔ تناوب نمودار تابع رو حساب کنی.

درس Box دامنهٔ تابع $y=\tan x$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\left\{\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$ است. یعنی تابع تانژانت مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ را نمی‌پذیرد. در حالت کلی دامنهٔ تابع $y=\tan$ ☁ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\left\{\text{☁}=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$ است.

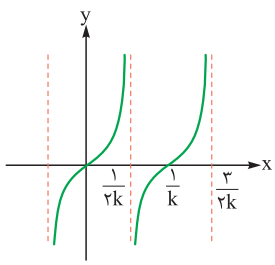
نمودار تابع مطابق شکل مقابل است:



نکات زیر را می‌توان در مورد این نمودار گفت:

- خطوط $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$، مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.
- تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست اما روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً صعودی است.
- فاصلهٔ هر دو مجانب متوالی برابر دورهٔ تناوب است، پس دورهٔ تناوب آن π است. در حالت کلی دورهٔ تناوب تابع $y=\tan mx$ برابر $\frac{\pi}{|m|}$ است.
- تابع $y=a\tan bx$ بر روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً صعودی است. اگر $ab>۰$ باشد و اکیداً نزولی است. اگر $ab<۰$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: برای رسم نمودار تابع f، باید طول نقاط روی نمودار تابع $y=\tan x$ را بر $k\pi$ تقسیم کنیم و عرض نقاط آن را در k ضرب کنیم؛ پس داریم:



گام دوم: و طبق فرض سؤال،۳ و $\frac{۳}{۲k}$ برابر هم شده است:

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲k}=۴ \Rightarrow k=\frac{۳}{۸}$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)=\frac{۳}{۸}\tan\frac{۳\pi}{۸}x$ است و داریم:

$$f(\frac{۲۸}{۹})=\frac{۳}{۸}\tan(\frac{۳\pi}{۸}\times\frac{۲۸}{۹})=\frac{۳}{۸}\tan\frac{۷\pi}{۶}=\frac{۳}{۸}\tan(\pi+\frac{\pi}{۶})=\frac{۳}{۸}\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{۳}{۸\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۸ برد تابع $f(x)=۲-\tan(\frac{۲\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})$ با دامنهٔ $\left[\frac{۷}{۸},\frac{۱۳}{۸}\right]$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) ۱

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

Hint نمودار تابع f رو از روی نمودار تابع $y=\tan x$ رسم کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای رسم نمودار تابع f، نمودار تابع $y=\tan x$ را:

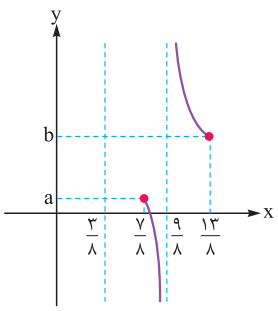
۱) $\frac{\pi}{۴}$ واحد به راست بریم: $\left(y=\tan(x-\frac{\pi}{۴})\right)$

۲) سپس طول نقاط را بر $\frac{۲\pi}{۳}$ تقسیم می‌کنیم؛ $\left(y=\tan(\frac{۲\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})\right)$

۳) نمودار تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم: $\left(y=-\tan(\frac{۲\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})\right)$

۴) در انتها ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

گام دوم: با انجام مراحل بالا به نمودار مقابل می‌رسیم:



گام سوم: با جای‌گذاری $x=\frac{۷}{۸}$ و $x=\frac{۱۳}{۸}$ مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$f(\frac{۷}{۸})=۲-\tan\left(\frac{۲\pi}{۳}(\frac{۷}{۸})-\frac{\pi}{۴}\right)=۲-\tan\frac{\pi}{۳}=۲-\sqrt{۳} \Rightarrow a=۲-\sqrt{۳}$$

$$f(\frac{۱۳}{۸})=۲-\tan\left(\frac{۲\pi}{۳}(\frac{۱۳}{۸})-\frac{\pi}{۴}\right)=۲-\tan\frac{۵\pi}{۶}=۲-\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=۲-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=۲+\frac{\sqrt{۳}}{۳}=b$$

پس $b-a=۲+\frac{\sqrt{۳}}{۳}-۲+\sqrt{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ است.

Telegram: @konkur_in

هندسه

۱۹ چه تعداد از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

الف) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۷ & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۷ & y \end{vmatrix} \Rightarrow x = y$

ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times B \Rightarrow A = B$

پ) $A = A^{-۱} \Rightarrow A = I$ یا $A = -I$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

درس Box

۱) دترمینان ماتریس ۳×۳

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان این ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = a_{۱۱} \times (-۱)^{۱+۱} \times \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۲} \times (-۱)^{۱+۲} \times \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳} \times (-۱)^{۱+۳} \times \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت روبه‌رو است: $|A| = a_{۱۱} \times \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a_{۱۲} \times \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳} \times \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$

توجه: در ماتریس ۳×۳ می‌توان دترمینان را برحسب هر سطر و ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است، ولی بهتر است دترمینان را براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می‌باشد. (تا محاسبات ساده‌تر بشود.) به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس ۳×۳ برای محاسبهٔ دترمینان به صورت مقابل است: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

۲) اگر $AB = AC$ باشد، آن‌گاه $B = C$ است به شرطی که A وارون‌پذیر باشد.

۳) **وارون (معکوس) ماتریس:** برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B است، به طوری که $AB = BA = I$، در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

۴) وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت $A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است $(ad - bc \neq ۰)$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در گزارهٔ «الف»، دترمینان‌های داده‌شده برابرند و به مقادیر x و y بستگی ندارند؛ زیرا با بسط نسبت به سطر سوم مقدار دترمینان هر دو برابر است با:

$$۳\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} - ۷\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} + (y \text{ یا } x)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix}}_{۰}$$

بنابراین گزارهٔ «الف» نادرست است.

در گزارهٔ «ب»، ماتریس داده‌شده وارون‌پذیر نیست؛ زیرا دترمینان آن صفر است. (در درس‌باکس گفته شد از $AB = AC$، زمانی می‌توان نتیجه گرفت $B = C$ که A وارون‌پذیر باشد.) پس گزارهٔ «ب» نادرست است.

در گزارهٔ «پ»، ماتریس‌های زیادی وجود دارند که اسکالر نیستند ولی در شرط $A = A^{-۱}$ صدق می‌کنند؛ مثل $\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$.

پس گزارهٔ «پ» در حالت کلی نادرست است.

در نتیجه هر سه گزاره نادرست است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۰ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۳\\ ۲ & ۰ & ۱\\ ۳ & ۴ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۵}A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $-۰/۰۸$ ۴) $۰/۰۸$

مشاوره سؤال‌های ساده‌ای از این دست را حتی در کنکورهای گذشته هم داشته‌ایم، این سؤال‌ها را نباید از دست دهید.

درس Box

اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ و r عددی حقیقی باشد، در این صورت: $|rA|=r^n|A|$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ $|A|$ با بسط نسبت به سطر دوم): یکی از درایه‌های سطر دوم ماتریس A صفر است؛ پس برای محاسبهٔ $|A|$، از بسط سطر دوم استفاده می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & -۲ & ۳\\ ۲ & ۰ & ۱\\ ۳ & ۴ & -۱\end{vmatrix}=-۲\begin{vmatrix}-۲ & ۳\\ ۴ & -۱\end{vmatrix}+۰-۱\begin{vmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}=-۲(-۱۰)-۱۰=۱۰$$

گام دوم (محاسبهٔ $|\frac{۱}{۵}A|$): مطابق درس‌باکس داریم:

$$|\frac{۱}{۵}A|=(\frac{۱}{۵})^۳|A|=\frac{۱}{۱۲۵}\times ۱۰=\frac{۲}{۲۵}=۰/۰۸$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & |A| \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس A^3 کدام است؟

۱) ۱/۷۵
۲) −۲/۲۵
۳) ۱/۲۵
۴) −۲/۷۵

درس Box

اگر $D=ABC$ باشد، آن‌گاه درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس D، برابر است با:

$$d_{ij}=[\text{سطر iاُم A}].B.[\text{ستون jاُم C}]$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ $|A|$): $|A|$ را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$|A|=0-1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+|A|\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|=-1-7|A| \Rightarrow |A|=-\frac{1}{8}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

$$d_{21}=[\text{سطردوم A}].A.[\text{ستون‌اول A}]$$

با توجه به درس‌باکس، داریم:

$$d_{21}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 3 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=0-3+\frac{1}{4}=-2/75$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۲ اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد، به طوری که $|A^۲| = \sqrt{۲}$، آن‌گاه حاصل $\frac{|۲A^{-۱}|}{|A|}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۱}{۲}$

مشاوره این سؤال که مربوط به ویژگی‌های دترمینان است، با ایده‌گرفتن از یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طرح شده است. به احتمال بسیار زیاد، مشابه این سؤال را در امتحان نهایی خواهید داشت.

درس Box

ویژگی‌های دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$:

۱) $|A^n| = |A|^n$

۲) $|rA| = r^n |A|$

۳) $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$

پاسخ خیلی تشریحی طبق قوانین دترمینان ماتریس A که در درس‌باکس دیدیم، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم تا به فرض مسئله برسیم.

$$\frac{|۲A^{-۱}|}{|A|} = \frac{۲^۲ |A^{-۱}|}{|A|} = \frac{۴}{|A|^۲} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۳ اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ و $2I-AB^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) صفر

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی ۱۴۰۳ طراحی شده است.

درس Box

۱) **وارون (معکوس) ماتریس**: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B است، به طوری که $AB=BA=I$؛ در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم؛ شرط وارون‌پذیربودن ماتریس مربعی A، آن است که $|A|\neq 0$.

۲) اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $A=(A^{-1})^{-1}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ ماتریس AB^{-1}): با استفاده از فرض سؤال، ماتریس AB^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$2I-AB^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow AB^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ ماتریس B^{-1}): با ضرب A^{-1} از سمت چپ در ماتریس به‌دست‌آمده در گام اول، ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$AB^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}B^{-1}=A^{-1}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 7 & -10\end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبهٔ ماتریس B): طبق مورد ۲ درس‌باکس داریم: $B=(B^{-1})^{-1}$، یعنی وارون ماتریس B^{-1} برابر با ماتریس B است؛ پس ماتریس B را به دست می‌آوریم.

$$|B^{-1}|=-4$$

$$\Rightarrow B=(B^{-1})^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{bmatrix}-10 & -2\\ -7 & -1\end{bmatrix}$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مجموع درایه‌های ماتریس B برابر است با:

$$\frac{-(-10-2-7-1)}{4}=5$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۴ از دو دستگاه $\begin{cases} x+2y=a \\ 3x+4y=b \end{cases}$ و $\begin{cases} X+Y=x \\ X-Y=y \end{cases}$ نتیجه می‌شود $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$؛ دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

درس Box

حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی خطی به کمک ماتریس وارون:

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم (ماتریس سمت راست) و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه است؛ در این صورت دستگاه به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته می‌شود و در صورتی که ماتریس A وارون‌پذیر باشد (یا $|A|\neq 0$) با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق، می‌توان ماتریس مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

یعنی برای حل دستگاه، باید معکوس ماتریس ضرایب را از سمت چپ در ماتریس مقادیر معلوم ضرب کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (تبدیل دستگاه معادلاتی اول به ضرب ماتریس‌ها):

$$\begin{cases} x+2y=a \\ 3x+4y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

گام دوم (تبدیل دستگاه معادلاتی دوم به ضرب ماتریس‌ها):

$$\begin{cases} X+Y=x \\ X-Y=y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبهٔ ماتریس A): از برابر قراردادن روابط به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

حالا با ضرب وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ از چپ در هر دو طرف تساوی، ماتریس $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ و در نهایت A را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

گام چهارم (محاسبهٔ $|A|$): دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$|A|=\left(\frac{1}{4}\right)^2(-3+7)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۵ تعداد قطرها در یک چندضلعی محدّب، چهار برابر تعداد اضلاع است. مجموع زاویه‌های داخلی این چندضلعی چند درجه است؟

۱) ۱۴۴۰ ۲) ۱۹۸۰

۳) ۱۶۲۰ ۴) ۱۸۰۰

درس Box

۱) تعداد کل قطرهای هر nضلعی محدّب از رابطهٔ $\frac{n(n-3)}{2}$ محاسبه می‌شود.

۲) مجموع زوایای داخلی هر nضلعی محدّب برابر $(n-2)\times 180^\circ$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ تعداد اضلاع چندضلعی): می‌دانیم تعداد کل قطرهای یک nضلعی محدّب برابر با $d_n=\frac{n(n-3)}{2}$ و مجموع زاویه‌های داخلی آن برابر با $(n-2)\times 180^\circ$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2}=4n \Rightarrow \frac{n-3}{2}=4 \Rightarrow n-3=8 \Rightarrow n=11$$

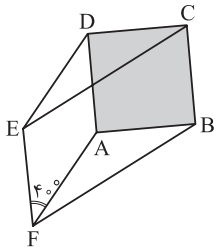
گام دوم (محاسبهٔ مجموع زاویه‌های داخلی): حالا مجموع زاویه‌های داخلی ۱۱ضلعی محدّب را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی}=(n-2)\times 180^\circ=(11-2)\times 180^\circ=1620^\circ$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۶ مطابق شکل، **ABCD** مربع و **ADEF** لوزی است. بزرگ‌ترین زاویهٔ چهارضلعی **BCEF** چند درجه است؟



۱) ۱۲۰

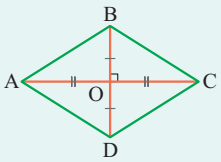
۲) ۱۱۵

۳) ۱۱۰

۴) ۱۰۵

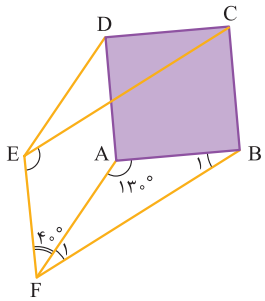
درس Box

لوزی متوازی‌الاضلاعی است که اضلاعش با هم برابر باشند؛ پس در لوزی، اضلاع روبه‌رو موازی‌اند و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ زاویهٔ A در مثلث ABF): می‌دانیم زوایای مجاور در لوزی مکمل‌اند؛ پس زاویهٔ A در لوزی ADEF برابر $۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۴۰^\circ$ است و چون در مربع ABCD، زاویهٔ A برابر ۹۰° است، در مثلث ABF، اندازهٔ زاویهٔ A برابر با $۳۶۰^\circ - (۱۴۰^\circ + ۹۰^\circ) = ۱۳۰^\circ$ می‌باشد.

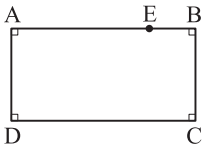


گام دوم (محاسبهٔ زاویهٔ $\hat{CBF}$): مثلث ABF در رأس A متساوی‌الساقین است؛ زیرا تمام اضلاع مربع و لوزی با هم برابرند و در نتیجه $\hat{B_1} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ}{۲} = \frac{۵۰^\circ}{۲} = ۲۵^\circ$، پس بزرگ‌ترین زاویهٔ چهارضلعی BCEF برابر با $\hat{CBF} = ۲۵^\circ + ۹۰^\circ = ۱۱۵^\circ$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

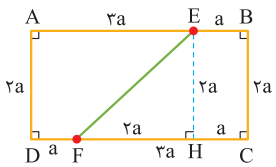
۲۷ با توجه به شکل اگر $4BE = 2AD = CD$، آن‌گاه خطی که از نقطهٔ E گذشته و مساحت مستطیل $ABCD$ را نصف می‌کند، چه زاویه‌ای با AB می‌سازد؟



۱) 30°
۲) 45°
۳) 60°
۴) 75°

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (رسم خط مورد نظر): با توجه به این‌که $4BE = 2AD = CD$، این‌طور در نظر می‌گیریم که $CD = 4a$، $AD = 2a$ و $BE = a$. اگر F را طوری روی CD انتخاب کنیم که $DF = a$، آن‌گاه $FC = 3a$ و دو ذوزنقهٔ همنهشت $AEFD$ و $BEFC$ ایجاد می‌شوند؛ زیرا اضلاع و زوایای متناظر در آن‌ها برابرند، پس مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است؛ پس باید زاویهٔ بین EF و AB را محاسبه کنیم.



گام دوم (محاسبهٔ $\hat{AEF}$): از نقطهٔ E به DC عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم.

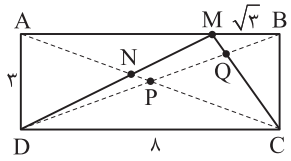
چهارضلعی $EBCH$ مستطیل است؛ پس $EB = HC = a$ و $EH = BC = 2a$. چون $FC = 3a$ است، پس $FH = 2a$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ EFH داریم: $FH = EH = 2a$؛ پس این مثلث متساوی‌الساقین هم هست و در نتیجه $A\hat{E}F = E\hat{F}H = 45^\circ$.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۸ مطابق شکل در مستطیل **ABCD** قطرها رسم و از **M** به **C** و **D** وصل شده است. مجموع مساحت‌های دو مثلث **AND** و **BQC** چه‌قدر از مساحت چهارضلعی **MNPQ** بیشتر است؟

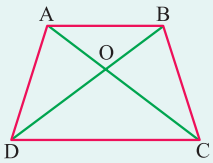


۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

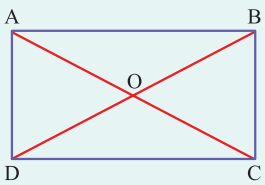
Hint از قضیهٔ شبه‌پروانه در دو ذوزنقهٔ AMCD و MBCD استفاده کن.

درس Box

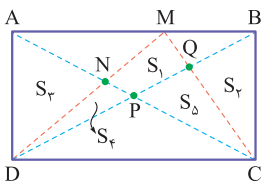
۱) **قضیهٔ شبه‌پروانه:** در ذوزنقهٔ ABCD، دو قطر AC و BD در O متقاطع‌اند. داریم: $S_{OAD} = S_{OBC}$



۲) اگر اقطار مستطیل را رسم کنیم، ۴ مثلث با مساحت‌های برابر داریم: $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{DOC} = S_{AOD}$



پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (قضیهٔ شبه‌پروانه در ذوزنقهٔ AMCD):** بخش‌های مختلف شکل را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم، حالا طبق قضیهٔ شبه‌پروانه در ذوزنقهٔ AMCD داریم: (۱) $S_۳ = S_۱ + S_۵$



گام دوم (قضیهٔ شبه‌پروانه در ذوزنقهٔ MBCD):

طبق قضیهٔ شبه‌پروانه در ذوزنقهٔ MBCD داریم: $S_۲ = S_۱ + S_۴$ (۲)

و حالا با جمع‌کردن طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم: $S_۲ + S_۳ = ۲S_۱ + S_۴ + S_۵$

خواستهٔ سؤال $S_۲ + S_۳ - S_۱$ است؛ بنابراین داریم: $S_۲ + S_۳ - S_۱ = S_۱ + S_۴ + S_۵$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مساحت مثلث MDC، نصف مساحت مستطیل است و از آن‌جایی که قطرهای مستطیل یکدیگر را نصف می‌کنند، مساحت مثلث DPC، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مستطیل است؛ بنابراین داریم:

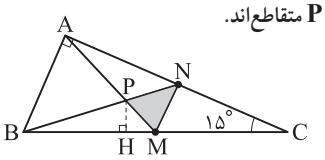
$$S_۱ + S_۴ + S_۵ = S_{MCD} - S_{DPC} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD} - \frac{۱}{۴}S_{ABCD} = \frac{۱}{۴}S_{ABCD} = \frac{۸ \times ۳}{۴} = ۶$$

توجه: همان‌طور که دیدیم $BM = \sqrt{۳}$ در حل سؤال بی‌تأثیر است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۲۹ مطابق شکل، **M** و **N** وسط‌های دو ضلع مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** هستند و **AM** و **BN** در **P** متقاطع‌اند.



مساحت مثلث **MNP**، چند برابر PH^2 است؟

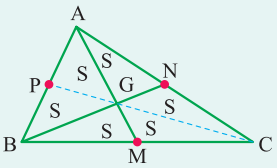
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

مشاوره ترکیب مباحث «تشابه»، «همرسی میانه‌ها» و «خاصیت ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه‌ای که از زاویهٔ ۱۵° دارد»، از این سؤال، یک سؤال مهم ساخته است.

Hint ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC را رسم و از خاصیت نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث استفاده کن.

درس Box

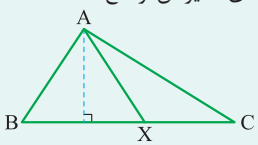
۱) میانه‌های هر مثلث همرس‌اند، یعنی اگر دو تا از میانه‌های مثلثی همدیگر را در نقطهٔ G قطع کنند، حتماً میانهٔ سوم هم از G می‌گذرد. ضمن آن‌که در شکل مقابل داریم:



الف) $\frac{GM}{AG}=\frac{GN}{BG}=\frac{GP}{CG}=\frac{۱}{۲}$

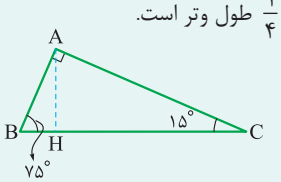
ب) مساحت شش مثلث حاصل از رسم میانه‌ها، با هم برابر و هر کدام $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث اصلی است: $S=\frac{۱}{۶}S_{ABC}$.

۲) اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع.



$$\frac{S_{ABX}}{S_{ACX}}=\frac{BX}{CX}\quad,\quad\frac{S_{ABX}}{S_{ABC}}=\frac{BX}{BC}$$

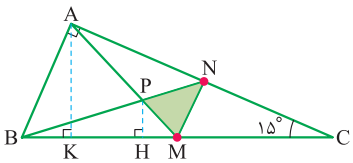
۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حادهٔ آن ۱۵° و ۷۵° هستند، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است.



$$AH=\frac{۱}{۴}BC$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول** (S_{MNP}، چه کسری از S_{ABC} است؟):

دو مثلث MNP و BMP در ارتفاع گذرنده از M مشترک‌اند و P نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس:



$$\frac{S_{MNP}}{S_{BMP}}=\frac{PN}{BP}\Rightarrow\frac{S_{MNP}}{\frac{۱}{۶}S_{ABC}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{MNP}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}\qquad(۱)$$

گام دوم (محاسبهٔ S_{ABC} برحسب $BC=a$): اگر در نظر بگیریم $BC=a$، آن‌گاه با توجه به قسمت (۳) درس‌باکس $AK=\frac{۱}{۴}a$، پس:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AK.BC\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}a)(a)=\frac{۱}{۸}a^۲\qquad(۲)$$

گام سوم (محاسبهٔ PH برحسب a): چون $AK\parallel PH$، با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث AMK، داریم:

$$\frac{PH}{AK}=\frac{PM}{AM}\Rightarrow\frac{PH}{\frac{۱}{۴}a}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow PH=\frac{۱}{۱۲}a\Rightarrow a=۱۲PH\qquad(۳)$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از تساوی‌های (۱) و (۲)، داریم:

$$S_{MNP}=\frac{۱}{۱۲}(\frac{۱}{۸}a^۲)=\frac{۱}{۱۲\times۸}a^۲$$

با در نظر گرفتن تساوی (۳)، داریم:

$$S_{MNP}=\frac{۱}{۱۲\times۸}(۱۲PH)^۲=\frac{۱۲\times۱۲}{۱۲\times۸}PH^۲=\frac{۳}{۲}PH^۲$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۰ مجموع تعداد نقاط مرزی و نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای ۱۰ است. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای مساحت این چندضلعی کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۳

Hint در چندضلعی شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی حداقل ۳ است و تعداد نقاط درونی، یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

درس Box ۱) **فرمول پیک:** اگر تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی آن را با i نشان دهیم، مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:

$$S=\frac{b}{2}-1+i$$

۲) در هر چندضلعی شبکه‌ای داریم: $b\geq 3$ و $i\geq 0$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (محاسبهٔ بیشترین مقدار ممکن مساحت):** می‌دانیم $S=\frac{b}{2}+i-1$ و طبق فرض $b+i=10$، پس $i=10-b$ و در نتیجه داریم:

$$S=\frac{b}{2}+(10-b)-1=9-\frac{b}{2}$$

در هر چندضلعی شبکه‌ای می‌دانیم نقاط مرزی حداقل باید ۳ تا باشند؛ پس داریم:

$$b\geq 3 \Rightarrow -\frac{b}{2}\leq -1/5 \Rightarrow 9-\frac{b}{2}\leq 7/5 \Rightarrow S\leq 7/5$$

پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای S، $7/5$ است.

گام دوم (محاسبهٔ کم‌ترین مقدار ممکن مساحت): در هر چندضلعی شبکه‌ای، تعداد نقاط درونی حداقل صفر است؛ پس داریم:

$$b+i=10 \Rightarrow i=10-b \xrightarrow{i\geq 0} 10-b\geq 0 \Rightarrow b\leq 10 \Rightarrow 9-\frac{b}{2}\geq 4 \Rightarrow S\geq 4$$

پس کوچک‌ترین مقدار ممکن برای S، ۴ است.

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طبق گام اول و دوم $4\leq S\leq 7/5$ است؛ پس اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار S، $7/5-4=3/5$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۳۱ اگر a و b مضرب ۳ باشند، عدد $ab(a+b)$ همواره بر کدام گزینه بخش‌پذیر است؟ ($a, b \neq 0$)

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۴ ۴) ۶۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا تشخیص می‌دهیم که $a = 3k , b = 3t$، در نتیجه $a+b = 3(k+t)$.

گام دوم: از سه عدد $a, b, a+b$ حداقل یکی زوج است؛ چون اگر a و b هر دو فرد باشند. $a+b$ قطعاً زوج است. پس در بین سه عدد گفته‌شده یکی حتماً مضرب ۲ است.

گام سوم: حالا $ab(a+b)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$ab(\underbrace{a+b}_{\text{مضرب ۳}}) = 27 \times \underbrace{2}_{\text{حداقل یکی مضرب ۲ است}} q = 54q$$

(ab: مضرب ۳)

گام چهارم: بنابراین $ab(a+b)$ همواره بر ۵۴ بخش‌پذیر است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۲ کدام گزینه نادرست است؟

۱) حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

۲) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۳) اگر $a \mid b$ و $c \mid d$، آن‌گاه $a+c \mid b+d$

۴) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $d \mid m$، آن‌گاه $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

Hint برو سراغ مثال نقض.

نکته

۱) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ آن‌گاه $a \overset{n}{\equiv} b$.

۲) حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

۳) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۴) اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ همواره نمی‌توان نتیجه گرفت $a+c \mid b+d$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ هر چهار گزینه، تمرین کتاب درسی هستند. طبق نکتهٔ بالا اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ همواره نمی‌توان نتیجه گرفت $a+c \mid b+d$. برای رد گزینهٔ (۳) می‌توان مثال نقض ارائه کرد:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid 3$$

$$\begin{cases} c=2 \\ d=6 \end{cases} \Rightarrow 2 \mid 6$$

$$\Rightarrow 3+2 \mid 3+6 \Rightarrow 5 \mid 9 \quad \times$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۳ اعداد $۵a-۱$ و $۶a+۳$ در یک دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۹ قرار دارند. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) صفر

نکته مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر r می‌باشد، یعنی $A_r=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=mk+r\}$ را کلاس یا دستهٔ همنهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم. همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر r می‌باشد، در دستهٔ همنهشتی r به پیمانهٔ m قرار دارند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** اعداد $۵a-۱$ و $۶a+۳$ در یک دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۹ قرار دارند؛ یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۹ با هم برابر است؛ بنابراین این دو عدد به پیمانهٔ ۹، همنهشت هستند.

گام دوم:

$$۶a+۳\overset{۹}{\equiv}۵a-۱ \Rightarrow ۶a-۵a\overset{۹}{\equiv}-۴ \Rightarrow a\overset{۹}{\equiv}-۴+۹ \Rightarrow a\overset{۹}{\equiv}۵$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ برابر ۵ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۴ اگر a و b نسبت به هم اول باشند، ب.م.م دو عدد $۷a+۲b$ و $۳a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نکته

۱) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb \ (m \in \mathbb{Z})$

۲) $a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

۳) $a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid (b,c)$

درس Box

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)

عدد طبیعی d را ب.م.م. دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $d \mid a, d \mid b$

۲) $\forall m>۰; m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \le d$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنیم d، ب.م.م دو عدد $۷a+۲b$ و $۳a+b$ است؛ بنابراین:

$$(۳a+b, ۷a+۲b)=d$$

گام دوم: طبق تعریف ب.م.م داریم:

$$\begin{matrix} d \mid ۳a+b \xrightarrow{\times ۷} d \mid ۲۱a+۷b \\ d \mid ۷a+۲b \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۲۱a+۶b \end{matrix} \xrightarrow{-} d \mid b \ (۱)$$

گام سوم:

$$\begin{matrix} d \mid ۳a+b \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۶a+۲b \\ d \mid ۷a+۲b \longrightarrow d \mid ۷a+۲b \end{matrix} \xrightarrow{-} d \mid a \qquad (۲)$$

گام چهارم:

$$\xrightarrow{(۲)} d \mid a$$
$$\xrightarrow{(۱)} d \mid b$$

پس d مقسوم علیه a و b است. از آن‌جا که a و b نسبت به هم اول‌اند، پس $d=۱$.

یه‌جور دیگه

$$\begin{matrix} d \mid a \\ d \mid b \end{matrix} \Rightarrow d \mid (a,b) \Rightarrow d \mid ۱ \xrightarrow{d>۰} d=۱$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۵ سه عدد صحیح به صورت $a = 7k + 2$ ، $b = 7k + 4$ و $c = 7k + 6$ داریم. مربع حداکثر چند تا از آن‌ها را می‌توان به صورت $8q + 1$ نوشت؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته مربع هر عدد صحیح و فرد را می‌توان به فرم $8q + 1$ نوشت.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون حداکثر تعداد را می‌خواهیم، k را فرد در نظر می‌گیریم. پس اگر k عددی فرد باشد، اعداد $a = 7k + 2$ ، $b = 7k + 4$ و $c = 7k + 6$ سه عدد فرد متوالی خواهند بود.

گام دوم: می‌دانیم می‌توان مربع هر عدد صحیح و فرد را به فرم $8q + 1$ نوشت؛ بنابراین مربع هر سه عدد a ، b و c به فرم $8q + 1$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۶ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰! + ۷^{۲۰۰} + ۳^{۲۰۰}$ بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۷ ۴) ۱۴

نکته برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره داریم: $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دقت کنید که $۱۰!$ مضرب ۲۱ است، پس بر ۲۱ بخش‌پذیر است. حال کافی است باقی‌ماندهٔ $۳^{۲۰۰} + ۷^{۲۰۰}$ را بر ۲۱ به دست آوریم.

گام دوم: طبق نکتهٔ بالا فرض می‌کنیم $a = ۳$ و $b = ۷$؛ بنابراین:

$$۳^{۲۰۰} + ۷^{۲۰۰} \overset{۳\times۷}{\equiv} (۳+۷)^{۲۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۰^{۲۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} (۱۰۰)^{۱۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶^{۱۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۲^{۴۰۰}$$

گام سوم: به دنبال توانی از ۲ هستیم که به پیمانهٔ ۲۱ باقی‌مانده‌ای برابر ± ۱ داشته باشد؛ پس داریم:

$$۲^۶ \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۶)^{۶۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۱^{۶۶} \Rightarrow ۲^{۳۹۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^۴} ۲^{۴۰۰} \overset{۲۱}{\equiv} ۲^۴ = ۱۶$$

بنابراین:

$$۳^{۲۰۰} + ۷^{۲۰۰} + ۱۰! \overset{۲۱}{\equiv} ۱۶$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۷ به ازای چند عدد طبیعی $m > ۲$، رابطهٔ $(m-۲, m^۲-۴) = (m, m+۲)$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) بی‌شمار ۴) هیچ مقدار

نکته

۱) $a \mid b \Rightarrow (a,b) = \mid a \mid$

۲) $(a,b) = d \Rightarrow d \mid a \, , d \mid b$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون $m^۲-۴ = (m-۲)(m+۲)$ پس همواره داریم:

$$m-۲ \mid m^۲-۴$$

و طبق نکتهٔ (۱) داریم:

$$(m-۲, m^۲-۴) = \mid m-۲ \mid \overset{m>۲}{=\!=} m-۲$$

گام دوم: فرض کنیم $(m, m+۲) = d$؛ بنابراین:

$$\begin{matrix} d \mid m \\ d \mid m+۲ \end{matrix} \xrightarrow{-} d \mid ۲ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } d = ۲$$

گام سوم:

$$m-۲ = ۱ \Rightarrow m = ۳$$

$$m-۲ = ۲ \Rightarrow m = ۴$$

در نتیجه، m دو مقدار می‌تواند داشته باشد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۸ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}$ بر ۷۷ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۴۴ ۳) ۲۲ ۴) ۱

نکته

$$\begin{matrix} a\overset{m}{\equiv}b \\ a\overset{n}{\equiv}b \end{matrix} \Rightarrow a\overset{[n,m]}{\equiv}b$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ $۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}$ بر ۷۷، ابتدا باید باقی‌ماندهٔ این عدد را بر ۷ و ۱۱ محاسبه کنیم.

گام دوم: ابتدا باقی‌مانده بر ۱۱:

$$۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۱۱}{\equiv}۷^{۱۶۰}+۰\overset{۱۱}{\equiv}۷^{۱۶۰}$$

گام سوم: دنبال توانی از ۷ می‌گردیم که به پیمانهٔ ۱۱ باقی‌مانده‌ای برابر ± ۱ داشته باشد؛ پس:

$$۷^{۲}\overset{۱۱}{\equiv}۴۹\overset{۱۱}{\equiv}۵ \Rightarrow (۷^{۲})^{۲}\overset{۱۱}{\equiv}۲۵\overset{۱۱}{\equiv}۳ \Rightarrow ۷^{۴}\overset{۱۱}{\equiv}۳ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۴}\times ۷\overset{۱۱}{\equiv}۳\times ۷ \Rightarrow ۷^{۵}\overset{۱۱}{\equiv}-۱ \Rightarrow (۷^{۵})^{۳۲}\overset{۱۱}{\equiv}(-۱)^{۳۲}$$

$$\Rightarrow ۷^{۱۶۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

در نتیجه:

$$۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۱۱}{\equiv}۱ \qquad (۱)$$

گام چهارم: حال باقی‌مانده بر ۷ را محاسبه می‌کنیم:

$$۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۷}{\equiv}۰+۱۱^{۱۱۷}\overset{۷}{\equiv}۱۱^{۱۱۷}$$

گام پنجم: به دنبال توانی از ۱۱ می‌گردیم که به پیمانهٔ ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ± ۱ داشته باشد؛ پس:

$$۱۱^{۲}\overset{۷}{\equiv}۱۲۱-\underbrace{۱۱۹}_{۷\times ۱۷}\overset{۷}{\equiv}۲ \Rightarrow ۱۱^{۲}\times ۱۱\overset{۷}{\equiv}۲\times ۱۱ \Rightarrow ۱۱^{۳}\overset{۷}{\equiv}۲۲-\underbrace{۲۱}_{۳\times ۷}\overset{۷}{\equiv}۱$$

$$\Rightarrow ۱۱^{۳}\overset{۷}{\equiv}۱ \Rightarrow (۱۱^{۳})^{۳۹}\overset{۷}{\equiv}۱ \Rightarrow ۱۱^{۱۱۷}\overset{۷}{\equiv}۱$$

در نتیجه:

$$۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۷}{\equiv}۱ \qquad (۲)$$

گام ششم:

$$\begin{matrix} (۱)\ ۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۱۱}{\equiv}۱ \\ (۲)\ ۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۷}{\equiv}۱ \end{matrix} \Rightarrow ۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{[۱۱,۷]}{\equiv}۱ \Rightarrow ۷^{۱۶۰}+۱۱^{۱۱۷}\overset{۷۷}{\equiv}۱$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۳۹ اگر $7\times11^{193}+a\overset{19}{\equiv}0$ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی طبیعی a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دنبال توانی از ۱۱ می‌گردیم که به پیمانهٔ ۱۹ باقی‌مانده‌ای برابر ±1 داشته باشد؛ بنابراین:

$$11^2\overset{19}{\equiv}121\overset{19}{\equiv}7 \xrightarrow{\times7} 11^3\overset{19}{\equiv}77\overset{19}{\equiv}1$$

$$11^3\overset{19}{\equiv}1 \Rightarrow (11^3)^{64}\overset{19}{\equiv}1 \xrightarrow{\times11} 11^{193}\overset{19}{\equiv}11$$

گام دوم:

$$7\times11^{193}+a\overset{19}{\equiv}0 \Rightarrow 7\times11+a\overset{19}{\equiv}0 \Rightarrow a\overset{19}{\equiv}-77$$

$$a\overset{19}{\equiv}-77+\underbrace{76}_{4\times19}\overset{19}{\equiv}-1 \Rightarrow a=19k-1$$

گام سوم: دنبال کوچک‌ترین عدد سه رقمی a هستیم:

$k=6 \Rightarrow a=19\times6-1=113$ رقم دهگان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی برابر ۱ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۰ اگر در یک سال، اول مهر یکشنبه باشد، کدام گزینه در مورد روزهای دیگر همین سال، درست است؟

۱) ۱۸ اردیبهشت، دوشنبه است.
۲) ۲۵ مرداد، جمعه است.
۳) ۱ دی، یکشنبه است.
۴) ۲۴ بهمن، چهارشنبه است.

Hint اول فاصلهٔ بین تاریخ‌ها رو به دست بیار. بعد برو سراغ همنهشتی به پیمانهٔ ۷.

درس Box

- یکی از کاربردهای همنهشتی، در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده‌شده، است.
- هر کدام از روزهای هفته، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود.
- شش ماهِ اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که به‌جز سال کبیسه ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

پاسخ خیلی تشریحی در هر کدام از گزینه‌ها روز مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$d = (\text{اول مهر}) - (\text{۱۸ اردیبهشت}) = \underbrace{۱}_{\text{اول مهر}} + \underbrace{۳\times۳۱}_{\text{تابستان}} + \underbrace{۳۱}_{\text{خرداد}} + \underbrace{۱۳}_{\text{اردیبهشت}} = ۱۳۸$$

$$۱۳۸ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

از یکشنبه باید ۵ روز به عقب برگردیم؛ پس ۱۸ اردیبهشت، سه‌شنبه است.

گزینهٔ (۲):

$$d = (\text{اول مهر}) - (\text{۲۵ مرداد}) = \underbrace{۱}_{\text{مهر}} + \underbrace{۳۱}_{\text{شهریور}} + \underbrace{۶}_{\text{مرداد}} = ۳۸$$

$$۳۸ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

از یکشنبه ۳ روز به عقب برمی‌گردیم؛ پس ۲۵ مرداد، پنج‌شنبه است.

گزینهٔ (۳):

$$d = (\text{اول دی}) - (\text{اول مهر}) = \underbrace{۲۹}_{\text{مهر}} + \underbrace{۲\times۳۰}_{\text{آبان / آذر}} + \underbrace{۱}_{\text{دی}} = ۹۰$$

$$۹۰ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

از یکشنبه ۶ روز به جلو می‌رویم؛ پس اول دی، شنبه است.

گزینهٔ (۴):

$$d = (\text{۲۴ بهمن}) - (\text{۱ مهر}) = \underbrace{۲۹}_{\text{مهر}} + \underbrace{۳\times۳۰}_{\text{آبان / آذر / دی}} + \underbrace{۲۴}_{\text{بهمن}} = ۱۴۳$$

$$۱۴۳ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

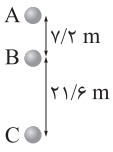
از یکشنبه ۳ روز به جلو می‌رویم؛ پس ۲۴ بهمن، چهارشنبه است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

فیزیک دوازدهم

۴۱ در شکل زیر، گلوله‌ای از نقطهٔ **A** رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در طی جابه‌جایی آن از نقطهٔ **B** تا نقطهٔ **C** برابر چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$



۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۴

Hint ابتدا زمان عبور گلوله از نقاط B و C (t_B و t_C) را پیدا کنید. سپس سرعت متحرک و تندی آن در لحظهٔ $\frac{t_B + t_C}{۲}$ را حساب کنید.

درس Box ۱) معادله‌های جابه‌جایی و سرعت متحرک در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه:

$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ ↑ y

$v = -gt$

Δy = جابه‌جایی (m)

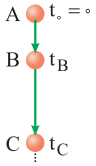
g = شتاب گرانش در سطح زمین $(m/s^۲)$

t = زمان سقوط (s)

v = سرعت (m/s)

۲) در حرکت سقوط آزاد، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ برابر است با سرعت آن در وسط همین بازهٔ زمانی، یعنی سرعت در لحظهٔ $\frac{t_۱ + t_۲}{۲}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** به کمک معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در سقوط آزاد، زمان عبور گلوله از نقاط B و C را پیدا می‌کنیم:



$$\Delta y_{AB} = -\frac{۱}{۲}g t_B^۲ \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{\Delta y_{AB}=-۷/۲m} -۷/۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ t_B^۲$$

$$\Rightarrow ۱/۴۴ = t_B^۲ \Rightarrow t_B = \sqrt{۱/۴۴} = ۱/۲s$$

$$\Delta y_{AC} = -\frac{۱}{۲}g\, t_C^۲ \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{\Delta y_{AC}=-(۷/۲+۲۱/۶)=-۲۸/۸m} -۲۸/۸ = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ t_C^۲$$

$$\Rightarrow ۵/۷۶ = t_C^۲ \Rightarrow t_C = \sqrt{۵/۷۶} = ۲/۴s$$

گام دوم: سرعت متوسط گلوله در فاصلهٔ B تا C برابر است با سرعت لحظه‌ای آن در لحظهٔ $t' \left(t' = \frac{t_B + t_C}{۲}\right)$:

$$t' = \frac{t_B + t_C}{۲} = \frac{۱/۲ + ۲/۴}{۲} = \frac{۳/۶}{۲} = ۱/۸s$$

$$v_{av} = v' = -g\,t' \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{t'=۱/۸s} v_{av} = -۱۰\times ۱/۸ = -۱۸\,m/s \Rightarrow |v_{av}| = ۱۸\,m/s$$

یه جور دیگه $s_{av} = \frac{\ell}{t_C - t_B} = \frac{۲۱/۶}{۲/۴ - ۱/۲} = ۱۸\ m/s$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۲ در شرایط خلأ و در مبدأ زمان، گلوله‌ای از یک بلندی رها می‌شود. اندازهٔ جابه‌جایی گلوله در T ثانیهٔ دوم حرکتش، چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن در $\frac{T}{۳}$ ثانیهٔ پنجم حرکتش است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

مشاوره اگر حرکت شتاب‌دار با شتاب ثابت روی محور x را به خوبی یاد گرفته باشید، در حل تست‌های سقوط آزاد، مشکلی نخواهید داشت، چون حرکت سقوط آزاد، نوع خاصی از حرکت با شتاب ثابت است.

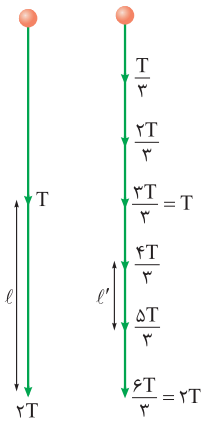
درس Box

در حرکت سقوط آزاد و بدون سرعت اولیه، اندازهٔ جابه‌جایی جسم در T ثانیهٔ nاُم حرکت (ℓ)، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

g = شتاب گرانش در سطح زمین $(m/s^۲)$ $\quad \ell = (n - ۰/۵)gT^۲$

پاسخ خیلی تشریحی

اندازهٔ جابه‌جایی گلوله در T ثانیهٔ دوم را با ℓ و اندازهٔ جابه‌جایی آن در $\frac{T}{۳}$ ثانیهٔ پنجم حرکت را با ℓ' نشان می‌دهیم؛ بنابراین داریم:



$$\frac{\ell}{\ell'} = \frac{(n - ۰/۵)gT^۲}{(n' - ۰/۵)g(\frac{T}{۳})^۲} \xrightarrow[n'=۵]{n=۲} \frac{\ell}{\ell'} = \frac{(۲ - ۰/۵)T^۲}{(۵ - ۰/۵)\frac{T^۲}{۹}} \Rightarrow \frac{\ell}{\ell'} = \frac{۱/۵ \times ۹}{۴/۵} = ۳$$

تیزبازی با توجه به شکل و بدون محاسبهٔ خاصی معلوم است که $\ell > ۲\ell'$ است؛ بنابراین فقط گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۳ گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع **h** رها شده و در ثانیهٔ آخر حرکت خود **۲۶ m** را می‌پیماید. ارتفاع **h** چند متر است؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$

۱) ۳۶/۴۵
۲) ۳۸/۰۵
۳) ۴۸/۰۵
۴) ۴۸/۵

درس Box

در حرکت سقوط آزاد و بدون سرعت اولیه، مسافت طی‌شده در T ثانیهٔ آخر حرکت (ℓ) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

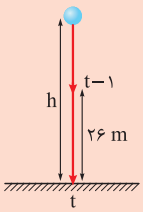
$$\ell = \frac{۱}{۲} g T(۲t - T)$$

g = شتاب گرانش در سطح زمین $(m/s^۲)$

t = کل زمان سقوط (s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ مسافت طی‌شده در ثانیهٔ آخر حرکت گلوله را می‌نویسیم و از آن‌جا، کل زمان سقوط گلوله را پیدا می‌کنیم:



$$\ell = \frac{۱}{۲} g T(۲t - T) \xrightarrow[\ell = ۲۶ m]{T = ۱ s ,\ g = ۱۰ m/s^۲} ۲۶ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۱(۲t - ۱)$$

$$\Rightarrow ۲۶ = ۵(۲t - ۱) \Rightarrow ۵/۲ = ۲t - ۱ \Rightarrow t = \frac{۶/۲}{۲} = ۳/۱ s$$

گام دوم: ارتفاع h به اندازهٔ جابه‌جایی گلوله از شروع تا پایان حرکت آن است:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲} g t^۲ \xrightarrow[g = ۱۰ m/s^۲ ,\ t = ۳/۱ s]{\Delta y = -h} -h = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ (۳/۱)^۲ \Rightarrow h = ۵ \times ۹/۶۱ \Rightarrow h = ۴۸/۰۵ m$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

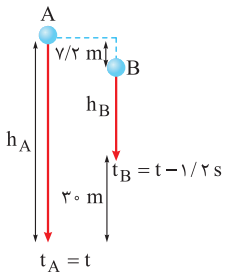
۴۴ در شرایط خلأ و از یک بلندی، گلولهٔ **A** رها می‌شود. **۱/۲ s** پس از رهاشدن گلولهٔ **A** و **۷/۲ m** پایین‌تر از مکان رهاشدن آن، گلولهٔ **B** رها می‌شود. چند ثانیه پس از رهاشدن گلولهٔ **B** فاصلهٔ دو گلوله به **۳۰ m** می‌رسد؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

درس Box اگر دو متحرک با اختلاف زمانی Δt حرکت خود را شروع نمایند، در صورتی که زمان را برای متحرک اول t در نظر بگیریم، برای متحرک دوم که حرکت خود را دیرتر شروع کرده، زمان به صورت $t' = t - \Delta t$ خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل زیر، رابطهٔ بین h_A و h_B را به دست می‌آوریم:

$$h_A = ۷/۲ + h_B + ۳۰ \Rightarrow h_A - h_B = ۳۷/۲ m$$



گام دوم: معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان را برای هر دو گلوله می‌نویسیم. توجه داشته باشید که اگر زمان را برای گلولهٔ اول (A)، t در نظر بگیریم، زمان سقوط گلولهٔ دوم (B) برابر با $t - ۱/۲ s$ خواهد بود:

$$\Delta y_A = -\frac{۱}{۲} g t_A^۲ \xrightarrow[g=۱۰ m/s^۲ ,\ t_A = t]{\Delta y_A = -h_A} -h_A = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ t^۲ \Rightarrow h_A = ۵t^۲$$

$$\Delta y_B = -\frac{۱}{۲} g t_B^۲ \xrightarrow[g=۱۰ m/s^۲ ,\ t_B = t - ۱/۲ s]{\Delta y_B = -h_B} -h_B = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ (t - ۱/۲)^۲ \Rightarrow h_B = ۵ (t - ۱/۲)^۲$$

گام سوم: اختلاف h_A و h_B را داریم؛ پس می‌توانیم زمان سقوط هر یک از گلوله‌ها را پیدا کنیم:

$$h_A - h_B = ۳۷/۲ \Rightarrow ۵t^۲ - ۵(t - ۱/۲)^۲ = ۳۷/۲ \Rightarrow ۵t^۲ - ۵(t^۲ - ۲/۴t + ۱/۴۴) = ۳۷/۲$$
$$\Rightarrow ۱۲t - ۷/۲ = ۳۷/۲ \Rightarrow ۱۲t = ۴۴/۴ \Rightarrow t = ۳/۷ s$$
$$t_B = t - ۱/۲ = ۳/۷ - ۱/۲ = ۲/۵ s$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۵ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) اگر تندی متحرکی ثابت باشد، نیروی خالص وارد بر آن الزاماً برابر صفر است.

ب) نیروی خالص وارد بر یک متحرک، الزاماً در جهت حرکت آن است.

پ) نیروهای کنش و واکنش، همواره به دو جسم وارد شده و منجر به اثرات یکسانی روی آن‌ها می‌شوند.

ت) اگر نیروهای وارد بر متحرکی متوازن باشند، متحرک روی خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره تست‌هایی در فیزیک که به صورت تشریحی مطرح می‌شوند، صرفاً جنبهٔ حفظ‌کردن مطالب را ندارند بلکه مفاهیم فیزیکی در آن‌ها نفهته و چه بسا به فرمول‌ها نیز ربط پیدا کنند.

پاسخ خیلی تشریحی

درستی یا نادرستی عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) ممکن است که متحرک با تندی ثابت حرکت کند، اما حرکت آن روی خط راست نباشد، مانند جسمی که با تندی ثابت روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد. در این صورت به علت تغییر جهت سرعت، شتاب به وجود می‌آید و نیروی خالص وارد بر متحرک صفر نیست؛ بنابراین مورد «الف» الزاماً درست نیست.

ب) ممکن است نیروی خالص وارد بر یک متحرک در جهت حرکت آن نباشد. مثلاً خودرویی که روی خط راست حرکت می‌کند، وقتی ترمز می‌گیرد، نیروی خالص وارد بر آن در خلاف جهت حرکت است؛ پس مورد «ب» الزاماً درست نیست.

پ) نیروهای کنش و واکنش گرچه هم‌اندازه هستند، اما چون در حالت کلی به دو جسم متفاوت و با شرایط متفاوت وارد می‌شوند، الزاماً منجر به اثرات یکسانی نخواهند شد. مثلاً در برخورد یک کامیون با یک موتورسیکلت، هر دو، نیرویی به یک اندازه به یکدیگر وارد می‌کنند، ولی اثر این برخورد روی آن دو کاملاً متفاوت است؛ پس مورد «پ» نادرست است.

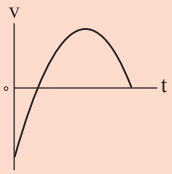
ت) اگر نیروهای وارد بر متحرکی متوازن باشند، $F_{net} = 0$ بوده و شتاب حرکت صفر می‌شود. در این صورت با توجه به قانون اول نیوتون، متحرک روی خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ یعنی مورد «ت» درست است.

بنابراین فقط مورد «ت» صحیح بوده و گزینهٔ (۱) را انتخاب می‌کنیم.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۶ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی با جرم ثابت m که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ نیروی خالص وارد بر این متحرک درست است؟



الف) ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور x است.

ب) ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور x است.

پ) اندازهٔ آن ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

ت) اندازهٔ آن ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

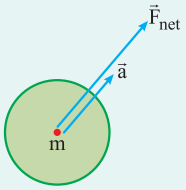
مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور سراسری خارج از کشور رشتهٔ ریاضی در سال ۱۳۹۹ است. پاسخ‌گویی به چنین تستی در کنکور، وقت زیادی از شما نمی‌گیرد.

Hint کافی است نحوهٔ تغییرات اندازه و علامت شتاب در این نمودار را بررسی کنید و با توجه به قانون دوم نیوتون به راحتی موارد درست را پیدا کنید.

درس Box

۱) شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است.

۲) قانون دوم نیوتون: وقتی نیروی خالص غیرصفری بر یک جسم وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.



$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a}$

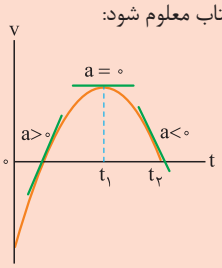
$\vec{F}_{net}$ = نیروی خالص (N)

m = جرم (kg)

$\vec{a}$ = شتاب (m/s^2)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شیب خط مماس بر این نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم تا علامت و نحوهٔ تغییر اندازهٔ شتاب معلوم شود:



در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 شیب خط مماس بر این نمودار مثبت است، یعنی:

$a > 0 \xrightarrow[m>0]{F_{net}=ma} F_{net} > 0$

اما در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر این نمودار منفی است، یعنی:

$a < 0 \xrightarrow[m>0]{F_{net}=ma} F_{net} < 0$

بنابراین نیروی خالص وارد بر این متحرک ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور x است و این یعنی درستی مورد «الف» و نادرستی مورد «ب».

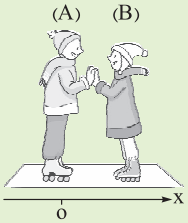
گام دوم: اندازهٔ شتاب ($|a|$) که همان اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان است، از لحظهٔ صفر تا t_1 در حال کاهش است اما در لحظهٔ t_1 تا t_2 در حال افزایش است؛ بنابراین مورد «پ» درست و مورد «ت» نادرست است.

پس گزینهٔ (۱) درست است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۷ در شکل زیر، دو شخص **A** و **B** که جرم آن‌ها به ترتیب $80\,kg$ و $50\,kg$ است، با کفش‌های چرخدار در یک سطح افقی، روبه‌روی هم ایستاده‌اند. اگر شخص **A**، با نیروی ۱۰۰نیوتونی، شخص **B** را به طرف راست هل دهد، شتابی که شخص **A** می‌گیرد، بر حسب متر بر مربع ثانیه، کدام است؟ (اتلاف انرژی در چرخ‌ها ناچیز است.)



۱) $2\vec{i}$

۲) $-2\vec{i}$

۳) $1/25\vec{i}$

۴) $-1/25\vec{i}$

مشاوره این تست کاملاً شبیه یکی از مثال‌های فصل (۲) از کتاب درسی فیزیک (۳) است.

Hint با توجه به قانون‌های دوم و سوم نیوتون، نیروی وارد بر شخص A و شتابی را که او می‌گیرد، به دست آورید.

درس Box **قانون سوم نیوتون:** هرگاه جسم A به جسم B نیرو وارد کند، جسم B هم به جسم A نیرویی هم‌اندازه و هم‌راستا، ولی در خلاف جهت وارد می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از قانون سوم نیوتون می‌دانیم نیرویی که شخص A به B وارد می‌کند $(\vec{F}_{AB})$ هم‌اندازه و در خلاف جهت نیرویی است که شخص B به A وارد می‌کند $(\vec{F}_{BA})$. با توجه به این‌که جهت مثبت محور x به طرف راست است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \xrightarrow[\vec{F}_{AB}=(100N)\vec{i}]{F_{BA}=F_{AB}=100N} \vec{F}_{BA} = -(100N)\vec{i}$$

گام دوم: قانون دوم نیوتون را برای شخص A می‌نویسیم و از آن‌جا، شتابی را که او می‌گیرد به دست می‌آوریم:

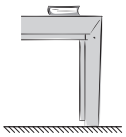
$$\vec{F}_{BA} = m_A\vec{a}_A \xrightarrow[m_A=80kg]{\vec{F}_{BA}=-(100N)\vec{i}} \vec{a}_A = -(\frac{100}{80})\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_A = -(1/25\,m/s^2)\vec{i}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۸ در شکل زیر، میزی روی سطح افقی و کتابی روی میز قرار دارد. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟



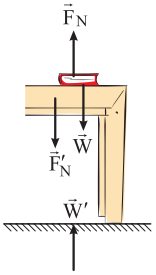
۱) واکنش نیروی وزن وارد بر کتاب، به میز وارد می‌شود.

۲) دو نیروی عمودی سطح و وزن وارد بر کتاب، کنش و واکنش‌اند.

۳) واکنش نیروهای وارد بر میز، فقط به کتاب و سطح افقی وارد می‌شود.

۴) واکنش نیروی عمودی سطح وارد بر کتاب، رو به پایین به میز وارد می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔



درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): واکنش نیروی وزن هر جسم که آن را با $\vec{W}'$ نشان می‌دهیم، بر مرکز کرهٔ زمین اثر می‌کند؛ بنابراین واکنش نیروی وزن کتاب بر میز وارد نمی‌شود و عبارت گزینهٔ (۱) نادرست است. توجه داشته باشید در مواردی که کل کرهٔ زمین در شکل نمایش داده نمی‌شود، $\vec{W}'$ را رو به بالا و عمود بر سطح زمین رسم می‌کنیم.

گزینهٔ (۲): نیروهای کنش و واکنش به دو جسم وارد می‌شوند؛ بنابراین دو نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و وزن کتاب $\vec{W}$ که هر دو بر کتاب وارد شده‌اند، نمی‌توانند کنش و واکنش باشند و عبارت گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): یکی از نیروهایی که به میز وارد می‌شود وزن آن است. واکنش نیروی وزن میز، به کتاب و یا سطح زمین وارد نمی‌شود، بلکه به مرکز کرهٔ زمین وارد می‌شود؛ بنابراین عبارت گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): واکنش نیروی عمودی سطح وارد بر کتاب $(\vec{F}'_N)$ مطابق شکل، رو به پایین است و به میز وارد می‌شود؛ بنابراین عبارت گزینهٔ (۴) درست است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۹ چتربازی به جرم $۷۰\ kg$ مدتی پس از یک پرش آزاد، چتر خود را باز می‌کند. ناگهان نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد و حرکت چترباز کند می‌شود. اگر شتاب حرکت چترباز در یک لحظه پس از بازشدن چتر $۸\ m/s^۲$ رو به بالا باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در این لحظه چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

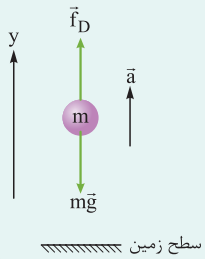
۱) ۱۴۰ ۲) ۵۶۰

۳) ۸۴۰ ۴) ۱۲۶۰

مشاوره این تست یکی از سؤال‌های امتحان نهایی پایهٔ دوازدهم در دی‌ماه ۱۴۰۳ است و مشابه آن در مثال‌های کتاب درسی وجود دارد. مثال‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

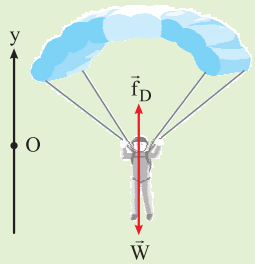
Hint نیروهای وارد بر چترباز را رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی مقاومت هوا را به دست آورید.

درس Box **نیروی مقاومت شاره**: وقتی جسمی درون یک شاره قرار دارد و نسبت به آن حرکت می‌کند، از طرف شاره، نیرویی در خلاف حرکت جسم به آن وارد می‌شود که آن را با $\vec{f}_D$ نشان می‌دهند و نیروی مقاومت شاره می‌نامند. مثلاً برای جسمی به جرم m و به وزن mg که در هوا سقوط می‌کند، با توجه به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_D - mg = ma$$

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به شکل، نیروی وزن به طرف پایین و مقاومت هوا به طرف بالا است. اگر جهت محور مختصات را رو به بالا انتخاب کنیم، برای محاسبهٔ f_D وارد بر چترباز در این حالت، می‌توانیم بنویسیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_D - mg = ma \Rightarrow f_D = m(g+a)$$

$$\xrightarrow[a=۸\ m/s^۲]{m=۷۰\ kg\ ,\ g=۱۰\ N/kg} f_D = ۷۰(۱۰+۸) = ۷۰\times ۱۸ = ۱۲۶۰\ N$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

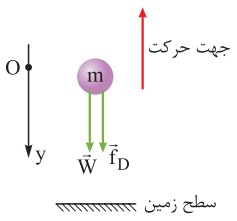
۵۰ دو گوی هم‌اندازهٔ **A** و **B** را از سطح زمین، با تندی یکسان، در راستای قائم و به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جرم گوی **B** بیشتر از جرم گوی **A** و اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی، ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، جهت حرکت کدام گوی زودتر تغییر می‌کند و بیشینهٔ ارتفاع کدام گوی، بیشتر است؟

۱) A ، A
۲) B ، B
۳) B ، A
۴) A ، B

مشاوره این تست بر اساس یکی از مثال‌های کتاب درسی فیزیک (۳) طرح شده است با این تفاوت که در این‌جا پرتاب گوی‌ها رو به بالا است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بر این گوی‌ها دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر گوی برابر با حاصل‌ضرب جرم در شتاب آن است. نیروی مقاومت هوا را با f_D و وزن را با W نشان می‌دهیم و برای بررسی ساده‌تر حرکت گوی‌ها، جهت مثبت محور y را به طرف پایین انتخاب می‌کنیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow W + f_D = ma \Rightarrow mg + f_D = ma \Rightarrow a = g + \frac{f_D}{m}$$

گام دوم: با توجه به یکسان‌بودن g و f_D برای هر دو گوی، هر چه m بیشتر باشد، شتاب کاهش می‌یابد:

$$\downarrow a = g + \frac{f_D}{m \uparrow} \qquad m_B > m_A \Rightarrow a_B < a_A$$

زمانی که طول می‌کشد تا هر گوی به نقطهٔ اوج خود برسد و جهت حرکت آن تغییر کند، به صورت زیر است:

$$v = at + v_\circ \xrightarrow[t=t_s]{v=\circ} \circ = at_s + v_\circ \Rightarrow t_s = -\frac{v_\circ}{a} \quad (a > \circ , v_\circ < \circ)$$

سرعت اولیهٔ هر دو گوی یکسان است؛ پس گوی **A** که شتاب بیشتری دارد، زمان کم‌تری طول می‌کشد تا جهت حرکت آن تغییر کند:

$$a_A > a_B \Rightarrow t_{s_A} < t_{s_B}$$

گام سوم: بیشینهٔ ارتفاع گوی‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$v^2 - v_\circ^2 = 2a\Delta y \xrightarrow{v=\circ} \Delta y = -\frac{v_\circ^2}{2a} \quad (a > \circ \Rightarrow \Delta y < \circ)$$

گوی **B** شتاب کم‌تری دارد؛ پس تا ارتفاع بیشتری بالا می‌رود:

$$a_B < a_A \Rightarrow |\Delta y_B| > |\Delta y_A|$$

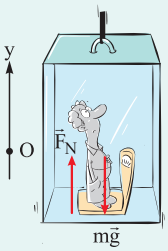
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۱ شخصی به جرم $۶۰kg$ درون آسانسور روی ترازوی فنری ایستاده است. آسانسور ابتدا با شتاب ثابت به بزرگی a رو به بالا شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی حرکت خود را با شتاب ثابتی به بزرگی $\frac{a}{۲}$ کند می‌کند. اگر در طی این حرکت، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، ۲۵ درصد تغییر کند، a چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = ۱۰m/s^۲)$

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱

درس Box اگر شخصی به وزن mg درون آسانسوری ایستاده باشد و آسانسور با شتاب ثابت a در راستای قائم حرکت نماید، نیروی F_N از کف آسانسور بر پای شخص وارد می‌شود.



$F_{net} = ma \Rightarrow F_N - mg = ma$

$\Rightarrow F_N = m(g+a)$

m = جرم (kg)

g = شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

علامت a با توجه به جهت و نوع حرکت تعیین می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** مقداری که ترازو نشان می‌دهد، (به اندازهٔ) نیروی F_N است که رو به بالا بر پای شخص وارد می‌شود.

رابطهٔ این نیرو را در دو حالت می‌نویسیم:

الف) وقتی آسانسور رو به بالا شروع به حرکت می‌کند، یعنی حرکت آن تندشونده است:

وقتی حرکت آسانسور رو به بالا است، سرعت آن مثبت است.

$$av > ۰ \xrightarrow{v>۰} a > ۰$$

$$F_N = m(g+a) \xrightarrow{m=۶۰kg\ ,\ g=۱۰m/s^۲} F_N = ۶۰(۱۰+a)$$

ب) وقتی آسانسور کندشونده رو به بالا می‌رود:

$$a'v < ۰ \xrightarrow{v>۰} a' < ۰$$

$$F'_N = m(g+a') \xrightarrow[a'=-\frac{a}{۲}]{m=۶۰kg\ ,\ g=۱۰m/s^۲} F_N = ۶۰(۱۰-\frac{a}{۲})$$

گام دوم: با توجه به این‌که $F_N > F'_N$ است، می‌توان نوشت: $F_N - F'_N = ۰/۲۵F_N \Rightarrow F'_N = ۰/۷۵F_N \Rightarrow F'_N = \frac{۳}{۴}F_N$

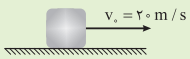
$$\Rightarrow ۶۰(۱۰-\frac{a}{۲}) = \frac{۳}{۴}\times ۶۰(۱۰+a) \Rightarrow ۱۰-\frac{a}{۲} = \frac{۳}{۴}(۱۰+a)$$

$$\Rightarrow ۱۰-\frac{a}{۲} = ۷/۵+\frac{۳}{۴}a \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۵}{۴}a \Rightarrow a = ۲m/s^۲$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۲ در شکل زیر، مکعب چوبی را با تندی $۲۰\ m/s$ روی سطح افقی پرتاب می‌کنیم. اگر مکعب چوبی پس از طی مسافت $۴۰\ m$ متوقف شود، ضریب اصطکاک جنبشی سطح با جسم کدام است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$



۱) ۰/۲
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۵
۴) ۰/۷۵

مشاوره در سؤال‌هایی که به صورت ترکیبی بین حرکت‌شناسی و دینامیک مطرح می‌شود، حلقهٔ رابط بین این دو مبحث، کمیت شتاب است.

Hint ابتدا شتاب حرکت را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست آورید، سپس این شتاب را در رابطهٔ قانون دوم نیوتون به کار ببرید تا ضریب اصطکاک جنبشی سطح با جسم به دست آید.

درس Box نیروی اصطکاک جنبشی، نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می‌کند.

$f_k = \mu_k F_N$

f_k = اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (N)

μ_k = ضریب اصطکاک جنبشی

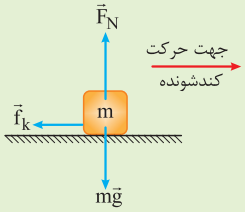
F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت مکعب چوبی را به دست می‌آوریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = ۴۰ m]{v=۰\ ,\ v_۰ = ۲۰ m/s} ۰ - ۲۰^۲ = ۲a \times ۴۰$$

$$\Rightarrow -۴۰۰ = ۸۰a \Rightarrow a = -۵\ m/s^۲$$

گام دوم: قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم و به کمک آن ضریب اصطکاک جنبشی سطح با جسم را حساب می‌کنیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow ۰ - f_k = ma$$

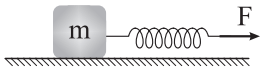
$$\xrightarrow{f_k = \mu_k F_N} -\mu_k F_N = ma \xrightarrow[a = -۵\ m/s^۲]{F_N = mg} -\mu_k \times mg = m(-۵)$$

$$\xrightarrow{g = ۱۰\ m/s^۲} \mu_k \times ۱۰ = ۵ \Rightarrow \mu_k = \frac{۵}{۱۰} = ۰/۵$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۳ در شکل زیر، جسمی به جرم $2/4\ kg$ توسط فنری افقی با ثابت $500\ N/m$ و جرم ناچیز، با سرعت ثابت روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر اندازهٔ نیروی سطح وارد بر جسم $26N$ باشد، افزایش طول فنر نسبت به حالت عادی در آن، چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10N/Kg)$



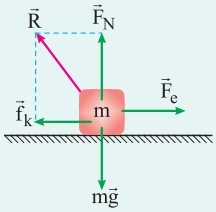
۱) ۴/۸ ۲) ۲ ۳) ۲/۴ ۴) ۱

Hint

با معلوم‌بودن اندازهٔ نیروی سطح و هم‌چنین اندازهٔ نیروی عمودی سطح، بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم را به دست آورید. سپس به کمک قانون دوم نیوتون و با توجه به این‌که شتاب حرکت صفر است، اندازهٔ نیروی کشسانی فنر و از آن‌جا تغییر طول فنر را پیدا کنید.

درس Box

۱) نیروی سطح: از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ و $\vec{f}$ بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برایند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم.



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

R = اندازهٔ نیروی سطح (N)

F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

f = بزرگی نیروی اصطکاک (N)

نکته بسته به شرایط سؤال، نیروی $\vec{f}$ می‌تواند نیروی اصطکاک ایستایی یا جنبشی باشد.

۲) نیروی کشسانی فنر: اگر فنری را نسبت به نقطهٔ تعادل خود به اندازهٔ x بکشیم یا فشرده کنیم، نیروی بازگرداننده‌ای در فنر ایجاد می‌شود که به طرف نقطهٔ تعادل است و نیروی کشسانی فنر نام دارد.

$$F_e = k\Delta L$$

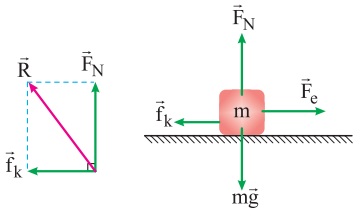
F_e = اندازهٔ نیروی کشسانی فنر (N)

k = ثابت فنر (N/m)

ΔL = تغییر طول فنر (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم. سپس اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) را به دست می‌آوریم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow[F_N = mg = 2/4 \times 10 = 24N]{R = 26N} 26 = \sqrt{24^2 + f_k^2}$$

$$\Rightarrow 676 = 576 + f_k^2 \Rightarrow f_k^2 = 100 \Rightarrow f_k = 10N$$

گام دوم: با توجه به این‌که سرعت جسم ثابت است، شتاب آن صفر بوده و قانون دوم نیوتون در راستای افقی برای آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_{net} = ma \xrightarrow{a=0} F_e - f_k = 0 \xrightarrow{f_k = 10N} F_e = 10N$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ نیروی کشسانی فنر، تغییر طول فنر نسبت به حالت تعادل آن را حساب می‌کنیم:

$$F_e = k\Delta L \xrightarrow[k = 500\ N/m]{F_e = 10N} 10 = 500\Delta L \Rightarrow \Delta L = \frac{1}{50}m = 2cm$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

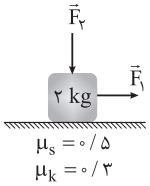
۵۴ در شکل زیر، به جسمی به جرم $2\ kg$ که روی سطح افقی قرار دارد، نیروهای افقی $\vec{F}_1$ و قائم $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت است. اگر جهت نیروی $\vec{F}_2$ قرینه شود، جسم با شتاب $4\ m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. بزرگی $\vec{F}_1$ چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۵

۲) ۱۴

۳) ۱۲/۵

۴) ۲۰



مشاوره این تیپ سؤال که جسمی روی یک سطح افقی قرار گیرد و دو نیروی عمود بر هم $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر آن وارد شوند و ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی نیز داده شوند، در سال‌های اخیر به شکل‌های متنوعی مطرح شده‌اند و نمونهٔ آن در کنکور سراسری تجربی در تیر ماه ۱۴۰۱ دیده می‌شود.

درس Box

بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت، نامیده می‌شود.

$f_{s,max} = \mu_s F_N$

$f_{s,max}$ = اندازهٔ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت (N)

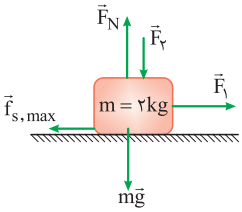
μ_s = ضریب اصطکاک ایستایی

F_N = اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

نکته بزرگی نیروی F_N الزاماً با اندازهٔ نیروی وزن برابر نیست، بلکه بسته به شرایط، F_N می‌تواند از W بزرگ‌تر یا کوچک‌تر نیز باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در حالت اول، نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم. با توجه به این‌که جسم ساکن است، داریم:

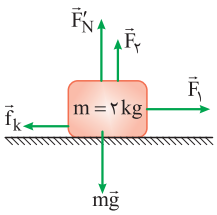


$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_N - F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_N = F_2 + mg \xrightarrow{m=2kg,\ g=10\ N/kg} F_N = F_2 + 20$$

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_1 - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F_1 = f_{s,max}$$

$$\xrightarrow[F_N = F_2 + 20]{f_{s,max} = \mu_s F_N} F_1 = \mu_s (F_2 + 20) \xrightarrow{\mu_s = 0/5} F_1 = 0/5 (F_2 + 20)$$

گام دوم: در حالت دوم که جهت نیروی $\vec{F}_2$ قرینه شده، نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم. در راستای قائم، جسم هم‌چنان حرکتی ندارد، اما در راستای افقی با شتاب $4\ m/s^2$ به حرکت درمی‌آید:



$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F'_N + F_2 - mg = 0 \Rightarrow F'_N = mg - F_2 \Rightarrow F'_N = 20 - F_2$$

$$(F_{net})_x = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma \xrightarrow[m=2kg\ ,\ a=4\ m/s^2]{f_k = \mu_k F'_N} F_1 - \mu_k F'_N = 2 \times 4$$

$$\xrightarrow[F'_N = 20 - F_2]{\mu_k = 0/3} F_1 - 0/3(20 - F_2) = 8$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم را با هم ترکیب می‌کنیم تا اندازهٔ نیروهای F_1 و F_2 معلوم شوند:

$$\left.\begin{matrix} F_1 = 0/5(F_2 + 20) \\ F_1 - 0/3(20 - F_2) = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0/5(F_2 + 20) - 0/3(20 - F_2) = 8$$

$$\Rightarrow 0/5F_2 + 10 - 6 + 0/3F_2 = 8 \Rightarrow 0/8F_2 = 4 \Rightarrow F_2 = 5N$$

$$F_1 = 0/5(5 + 20) \Rightarrow F_1 = 12/5\ N$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

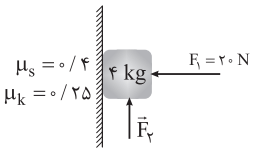
۵۵ مطابق شکل، به جسمی به جرم $4kg$ نیروهای افقی $\vec{F}_1$ و قائم $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد. اگر بزرگی هر یک از نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، ۲ برابر شود، بزرگی شتاب جسم چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟ $(g = 10 m/s^2)$

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۳/۵

۴) ۴/۷۵



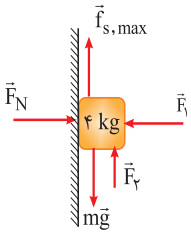
مشاوره این تیپ سؤال که جسمی روی یک سطح قائم قرار گیرد و دو نیروی عمود بر هم $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر آن وارد شوند و ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی نیز داده شوند، در سال‌های اخیر به شکل‌های متنوعی مطرح شده‌اند و نمونهٔ آن در کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ دیده می‌شود.

Hint

در حالت اول، نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را به دست آورید. سپس بزرگی هر یک از نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را تعیین کنید. در حالت دوم نیروی خالص وارد بر جسم در راستای قائم رو به بالا است. در این حالت بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی را به دست آورید و به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای وارد بر جسم را در حالت اول روی شکل نشان می‌دهیم. از آن‌جا که جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد، نیروی اصطکاک، رو به بالا بر جسم اثر می‌کند. با توجه به ساکن‌بودن جسم، نیروی خالص وارد بر آن در هر دو راستای افقی و قائم، برابر صفر است:

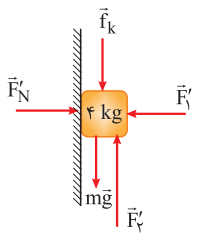


$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_N - F_1 = 0 \xrightarrow{F_1 = 20N} F_N = F_1 = 20N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = 20\,N]{\mu_s = 0/4} f_{s,max} = 0/4 \times 20 = 8N$$

$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_2 + f_{s,max} - mg = 0 \xrightarrow[mg = 4 \times 10 = 40N]{f_{s,max} = 8N} F_2 + 8 - 40 = 0 \Rightarrow F_2 = 32N$$

گام دوم: در حالت دوم نیز نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نشان می‌دهیم. در این حالت نیروی خالص وارد بر جسم در راستای قائم، رو به بالا است؛ بنابراین نیروی اصطکاک رو به پایین اثر می‌کند.



$$F'_1 = 2F_1 \xrightarrow{F_1 = 20N} F'_1 = 40N$$

$$F'_2 = 2F_2 \xrightarrow{F_2 = 32N} F'_2 = 64N$$

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F'_N - F'_1 = 0 \Rightarrow F'_N = F'_1 = 40N$$

توجه:

$$f'_{s,max} = \mu_s F'_N = 0/4 \times 40 = 16N$$

بنابراین جسم به حرکت درمی‌آید:

$$F'_2 - mg > f'_{s,max}$$

$$f_k = \mu_k F'_N \xrightarrow[F'_N = 40N]{\mu_k = 0/25} f_k = 0/25 \times 40 = 10N$$

گام سوم: قانون دوم نیوتون را در راستای قائم می‌نویسیم و بزرگی شتاب حرکت جسم را به دست می‌آوریم:

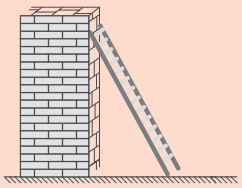
$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow F'_2 - f_k - mg = ma$$

$$\xrightarrow[mg = 4 \times 10 = 40N,\ m = 4kg]{F'_2 = 64N,\ f_k = 10N} 64 - 10 - 40 = 4a \Rightarrow 14 = 4a \Rightarrow a = \frac{14}{4} = 3/5\ m/s^2$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۶ در شکل زیر، نردبانی به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده و ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و نردبان برابر ۰/۷۵ است. اگر نردبان در آستانهٔ سرخوردن باشد، اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند، چند برابر اندازهٔ نیرویی است که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

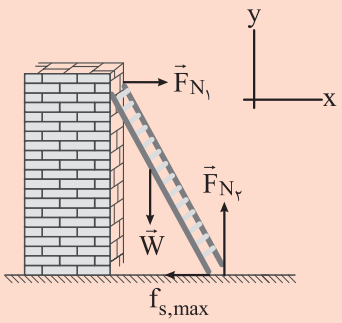
۴) $\frac{۵}{۳}$

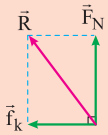
مشاوره این تست بر اساس یکی از مثال‌های فصل ۲ از کتاب درسی فیزیک (۳) طرح شده است. مشابه این سؤال در کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۸ نیز مطرح شده است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نخست نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم که عبارت‌اند از: نیروی عمودی سطح دیوار $(\vec{F}_{N_1})$، نیروی وزن $(\vec{W})$، نیروی عمودی سطح زمین $(\vec{F}_{N_2})$ و نیروی اصطکاک ایستایی بین زمین و نردبان $(f_{s,max})$.

یک دستگاه مختصات انتخاب می‌کنیم. در آستانهٔ حرکت، نردبان هم‌چنان در حال تعادل است؛ بنابراین نیروی خالص در راستای قائم و افقی صفر است.





$$(F_{net})_y = ۰ \Rightarrow F_{N_2} - W = ۰ \Rightarrow F_{N_2} = W$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_2} \xrightarrow[F_{N_2}=W]{\mu_s=۰/۷۵=\frac{۳}{۴}} f_{s,max} = \frac{۳}{۴}W$$

$$(F_{net})_x = ۰ \Rightarrow F_{N_1} - f_{s,max} = ۰ \Rightarrow F_{N_1} = f_{s,max} \Rightarrow F_{N_1} = \frac{۳}{۴}W$$

گام دوم: از طرف سطح زمین بر نردبان دو نیروی عمودی F_{N_2} و افقی $f_{s,max}$ وارد می شود؛ بنابراین برایند این دو نیرو که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم، نیرویی است که سطح زمین بر نردبان وارد می‌کند:

$$R = \sqrt{F_{N_2}^۲ + f_{s,max}^۲} \xrightarrow[f_{s,max}=\frac{۳}{۴}W]{F_{N_2}=W} R = \sqrt{W^۲ + \frac{۹}{۱۶}W^۲} \Rightarrow$$

$$R = W\sqrt{۱ + \frac{۹}{۱۶}} = W\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}} \Rightarrow R = \frac{۵}{۴}W$$

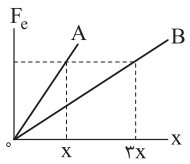
در پایان، نسبت $\frac{F_{N_1}}{R}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_{N_1}}{R} = \frac{\frac{۳}{۴}W}{\frac{۵}{۴}W} = \frac{۳}{۵}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۷ نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی در فنرهای **A** و **B** برحسب تغییر طول آن‌ها نسبت به حالت عادی به شکل زیر است. فنرها را به طور جداگانه از نقطه‌ای آویزان کرده و به انتهای دیگر آن‌ها، به ترتیب وزنه‌هایی به جرم **m** و **۲m** وصل می‌کنیم. در حالت تعادل، تغییر طول فنر **A** نسبت به حالت عادی، چند برابر تغییر طول فنر **B** نسبت به حالت عادی است؟ $(g = ۹/۸ N/kg)$



۱) ۶

۲) $\frac{۱}{۶}$

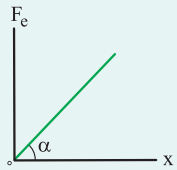
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

Hint ابتدا نسبت ثابت فنر A (k_A) به ثابت فنر B (k_B) را به دست آورید. سپس نسبت نیروی وزن دو جسم آویخته به فنرها را با نسبت نیروی کشسانی فنرها برابر قرار دهید تا نسبت تغییر طول فنرها را پیدا کنید.

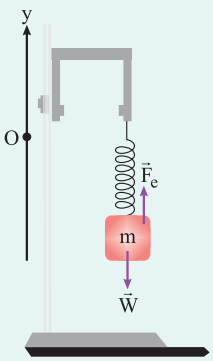
درس Box ۱) نمودار نیروی کشسانی یک فنر (F_e) برحسب تغییر طول آن (x) به صورت یک خط شیبدار است که شیب این خط برابر با ثابت فنر است.

$\tan\alpha = k$



۲) هرگاه وزنهٔ آویخته به فنر قائم، باعث افزایش طول آن شود، در حال تعادل $F_e = mg$ خواهد بود:

$F_{net} = ۰ \Rightarrow F_e - W = ۰ \Rightarrow F_e = W = mg$



F_e = اندازهٔ نیروی کشسانی فنر (N)

m = جرم جسم (kg)

g = شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با استفاده از نمودار داده‌شده، نسبت ثابت فنرها را به دست می‌آوریم:

$$(F_e)_A = (F_e)_B \Rightarrow k_A x_A = k_B x_B \Rightarrow \frac{k_A}{k_B} = \frac{x_B}{x_A} \xrightarrow[x_A = x]{x_B = ۳x} \frac{k_A}{k_B} = \frac{۳x}{x} = ۳$$

گام دوم: نسبت نیروی وزن دو جسم را با نسبت نیروی کشسانی فنرها برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{k_A \Delta L_A}{k_B \Delta L_B} \Rightarrow \frac{m_A g}{m_B g} = \frac{k_A}{k_B} \times \frac{\Delta L_A}{\Delta L_B} \xrightarrow[m_B = ۲m]{m_A = m \,,\, \frac{k_A}{k_B} = ۳} \frac{m}{۲m} = ۳ \times \frac{\Delta L_A}{\Delta L_B} \Rightarrow \frac{\Delta L_A}{\Delta L_B} = \frac{۱}{۶}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۸ وزنه‌ای به جرم $۲\,kg$ را به انتهای فنری به ثابت $۱۰۰\,N/m$ که از سقف آسانسور آویزان است، می‌بندیم. وقتی آسانسور با شتاب رو به پایین $۲\,m/s^۲$ حرکت می‌کند، طول فنر به $L_۱$ می‌رسد و هنگامی که آسانسور با شتاب رو به بالای $۱\,m/s^۲$ حرکت می‌کند، طول فنر به $L_۲$ می‌رسد. $L_۲ - L_۱$ چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲ ۲) −۲

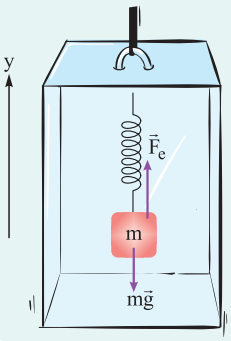
۳) ۶ ۴) −۶

مشاوره در کنکورهای سال‌های اخیر، تعدادی از تست‌های مربوط به فنر، طوری طرح شده‌اند که با حرکت آسانسور ترکیب شوند. نمونهٔ آن در کنکورهای سراسری تجربی ۱۴۰۰، سراسری ریاضی ۱۴۰۰ و سراسری تجربی ۱۴۰۱ دیده می‌شود.

درس Box

برای وزنهٔ آویخته به فنر قائم، درون آسانسوری که با شتاب ثابت a در راستای قائم حرکت می‌کند، داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - mg = ma \Rightarrow F_e = m(g+a) \xrightarrow{F_e = k\Delta L} k\Delta L = m(g+a)$$



k = ثابت فنر (N/m)

$\Delta L = L - L_۰$ = تغییر طول فنر (m)

$L_۰$ = طول آزاد فنر (m)

L = طول فنر همراه وزنهٔ آویخته به آن (m)

g = شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

a = شتاب حرکت $(m/s^۲)$

نکته اگر شتاب آسانسور رو به بالا باشد، $a > ۰$ و اگر رو به پایین باشد، $a < ۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطهٔ بین نیروی کشسانی فنر را در دو حالت گفته‌شده می‌نویسیم:

در حالت اول که شتاب رو به پایین است، $a_۱ = -۲\,m/s^۲$ و در حالت دوم که شتاب رو به بالا است، $a_۲ = ۱\,m/s^۲$ به کار می‌روند.

$$k\Delta L_۱ = m(g+a_۱) \xrightarrow[k=۱۰۰\,N/m\ ,\ m=۲kg\ ,\ a_۱=-۲\,m/s^۲]{\Delta L_۱ = L_۱ - L_۰\ ,\ g=۱۰\,N/kg} ۱۰۰(L_۱ - L_۰) = ۲(۱۰-۲) \Rightarrow ۱۰۰\,(L_۱ - L_۰) = ۱۶$$

$$k\Delta L_۲ = m(g+a_۲) \xrightarrow[k=۱۰۰\,N/m\ ,\ m=۲kg\ ,\ a_۲=۱\,m/s^۲]{\Delta L_۲ = L_۲ - L_۰\ ,\ g=۱۰\,N/kg} ۱۰۰(L_۲ - L_۰) = ۲(۱۰+۱) \Rightarrow ۱۰۰\,(L_۲ - L_۰) = ۲۲$$

گام دوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام اول را از هم تفریق می‌کنیم تا $L_۲ - L_۱$ به دست آید:

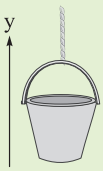
$$\left.\begin{array}{l} ۱۰۰(L_۲ - L_۰) = ۲۲ \\ ۱۰۰(L_۱ - L_۰) = ۱۶ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۰۰L_۲ - ۱۰۰L_۰ - (۱۰۰L_۱ - ۱۰۰L_۰) = ۲۲ - ۱۶$$

$$\Rightarrow ۱۰۰(L_۲ - L_۱) = ۶ \Rightarrow L_۲ - L_۱ = \frac{۶}{۱۰۰}\,m = ۶\,cm$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۹ شکل زیر، یک سطل به جرم $5kg$ را نشان می‌دهد که توسط یک طناب با نیروی کشش $60N$ در راستای قائم به طرف بالا کشیده می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوای وارد بر سطل $2/5N$ باشد، شتاب آن بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ $(g = 10N/kg)$



۱) $1/5\vec{j}$

۲) $-1/5\vec{j}$

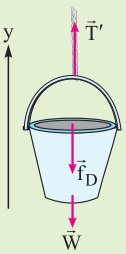
۳) $2/5\vec{j}$

۴) $-2/5\vec{j}$

مشاوره این سؤال در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ مطرح شده است.

Hint نیروهای وارد بر سطل را رسم کنید. سپس قانون دوم نیوتون را برای آن بنویسید و شتاب حرکت را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نیروهای وارد بر این سطل را رسم می‌کنیم. نیروی کشش طناب $(\vec{T})$ رو به بالا اثر می‌کند، اما نیروی مقاومت هوا $(\vec{f}_D)$ و وزن سطل $(\vec{W})$ رو به پایین اثر دارند:



گام دوم: قانون دوم نیوتون را برای این سطل در راستای قائم می‌نویسیم و شتاب حرکت آن را حساب می‌کنیم:

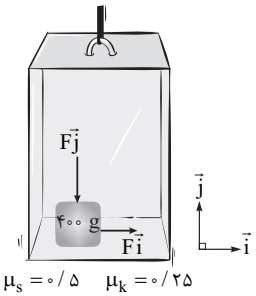
$$F_{net} = ma \Rightarrow T - f_D - W = ma \xrightarrow[W=5\times10=50N\ ,\ m=5kg]{T=60N\ ,\ f_D=2/5N}$$

$$60 - 2/5 - 50 = 5a \Rightarrow 7/5 = 5a \Rightarrow a = \frac{7/5}{5} = 1/5\,m/s^2 \Rightarrow \vec{a} = (1/5\,m/s^2)\vec{j}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۰ مطابق شکل، به جسمی ۴۰۰گرمی که بر روی کف یک آسانسور قرار دارد، دو نیرو، هر یک با اندازهٔ **F** در جهت‌های نشان داده شده، وارد می شود. اگر آسانسور با شتاب $2/5\,m/s^2$ به سمت پایین شروع به حرکت کند، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. در حالتی که آسانسور ساکن است، نیرویی که جسم به کف آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) $\sqrt{58}$

۲) ۹

۳) ۷

۴) $\sqrt{106}$

مشاوره این سؤال کاملاً ترکیبی بوده و حل آن نسبتاً وقت‌گیر است. پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها در کنکور را در اولویت‌های آخر خود قرار دهید.

Hint

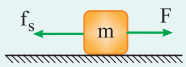
در حالت اول که آسانسور با شتاب حرکت می‌کند، به کمک قانون دوم نیوتون، اندازهٔ نیروی F را به دست آورید. سپس در حالت دوم، نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک را تعیین کرده و با استفاده از آن‌ها، نیروی جسم بر کف آسانسور را محاسبه کنید.

درس Box

۱) در حرکت تندشونده $av > 0$ و در حرکت کندشونده $av < 0$ است.

۲) **نیروی اصطکاک ایستایی در حال سکون (f_s):**

وقتی نیرویی بخواهد جسمی را روی سطحی به حرکت درآورد، ولی قادر به تکان دادن آن نباشد، معلوم می‌شود نیروی دیگری، هم‌اندازهٔ آن و در جهت مخالف بر جسم اثر می‌کند که مانع حرکت می‌شود. این نیروی مخالف، همان f_s است و مقدارهای متفاوتی بین صفر تا یک مقدار بیشینه دارد.



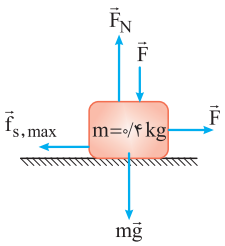
$f_s = F$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در حالت اول، آسانسور رو به پایین شروع به حرکت می‌کند $(v < 0)$ و حرکت آن تندشونده است.

$$av > 0 \xrightarrow{v<0} a < 0 \Rightarrow a = -2/5\,m/s^2$$

قانون دوم نیوتون را برای جسم در راستای قائم می‌نویسیم:



$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow F_N - F - mg = ma \xrightarrow[a=-2/5\,m/s^2,\ g=10\,m/s^2]{m=0/4\,kg} F_N - F - 0/4\times10 = 0/4\times(-2/5) \Rightarrow F_N = F + 3$$

در این حالت جسم در آستانهٔ حرکت است و داریم:

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = F+3]{\mu_s = 0/5} F = 0/5(F+3)$$

$$\Rightarrow F = 0/5F + 1/5 \Rightarrow 0/5F = 1/5 \Rightarrow F = 3N$$

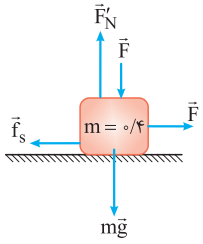
$$F_N = F + 3 \xrightarrow{F=3N} F_N = 3 + 3 = 6N$$

گام دوم: در حالت دوم، آسانسور ساکن است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F'_N - F - mg = 0 \Rightarrow F'_N = F + mg = 3 + 0/4\times10 = 7N$$

نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت در حالت دوم را به دست می‌آوریم:

$$f'_{s,max} = \mu_s F'_N = 0/5\times7 = 3/5N$$



$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F - f_s = 0 \Rightarrow f_s = F \xrightarrow{F=3N} f_s = 3N$$

جسم ساکن می‌ماند، ولی در آستانهٔ حرکت نیست.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام سوم: نیرویی که جسم به کف آسانسور وارد می‌کند، طبق قانون سوم نیوتون، با نیرویی که کف آسانسور به جسم وارد می‌کند، هم‌اندازه است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \sqrt{F_N'^2 + f_s^2} \xrightarrow[f_s = 3N]{F_N' = 7N} R = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

فیزیک دهم

۶۱ ظرفی شامل $3kg$ آب است. با هم‌زدن آب داخل ظرف، $40kJ$ کار روی آن انجام می‌دهیم و در این مدت $30kJ$ گرما از داخل ظرف به بیرون منتقل می‌شود. انرژی درونی آب چند کیلوژول و چگونه تغییر می‌کند؟

علامت کار مثبت است.

علامت گرما منفی است.

۱) ۷۰، افزایش می‌یابد.
۲) ۷۰، کاهش می‌یابد.
۳) ۱۰، افزایش می‌یابد.
۴) ۱۰، کاهش می‌یابد.

درس Box

طبق قانون اول ترمودینامیک، مجموع کار و گرمای مبادله‌شده بین دستگاه و محیط، برابر با تغییر انرژی درونی دستگاه است و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\Delta U = Q + W$$

Q: گرمای داده‌شده به دستگاه

W: کار محیط روی دستگاه

ΔU: تغییر انرژی درونی

- اگر محیط بر روی دستگاه کار انجام دهد، علامت کار مثبت و اگر دستگاه بر روی محیط کار انجام دهد، علامت کار منفی است.
- اگر گرما از محیط به دستگاه منتقل شود، علامت گرما مثبت و اگر گرما از دستگاه به محیط منتقل شود، علامت گرما منفی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قانون اول ترمودینامیک، تغییر انرژی درونی آب را حساب می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W=40\ kJ]{Q=-30\ kJ} \Delta U = -30 + 40 = 10\ kJ$$

بنابراین انرژی درونی آب، $10\ kJ$ افزایش می‌یابد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۲ دمای ۹۰g گاز اکسیژن را در فشار ثابت، $200^\circ F$ افزایش می‌دهیم. در این فرایند، کار انجام‌شده روی گاز چند کیلوژول است؟ ($R = 8 \frac{J}{mol.K}$ و جرم مولی گاز اکسیژن $32 g/mol$ است.)

۱) ۴/۵ ۲) ۲/۵

۳) −۴/۵ ۴) −۲/۵

Hint اول تعداد مول گاز و تغییر دما را برحسب کلوین حساب کن. بعدش کار انجام‌شده روی گاز در فرایند هم فشار را به دست بیار.

درس Box

۱) رابطهٔ بین تغییر دما برحسب فارنهایت (ΔF) با تغییر دما برحسب کلوین (ΔT) به صورت زیر است:

$$\Delta F = 1/8 \Delta T$$

۲) در فرایند هم‌فشار، کار انجام‌شده روی گاز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$W = -nR\Delta T$ ← کار انجام‌شده بر روی گاز (J)؛ n: تعداد مول گاز (mol)؛ R: ثابت جهانی گازها $(\frac{J}{mol.K})$؛ ΔT: تغییر دما (K) یا (°C)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد مول گاز را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{m}{M} \xrightarrow[m=90\,g]{M=32\,g/mol} n = \frac{90}{32} = \frac{45}{16}\,mol$$

گام دوم: تغییر دمای گاز را برحسب کلوین حساب می‌کنیم:

$$\Delta F = 1/8 \Delta T \xrightarrow{\Delta F = 200^\circ F} 200 = 1/8 \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{200}{1/8} = \frac{1000}{9} K$$

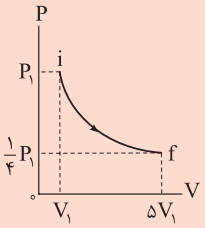
گام سوم: کار انجام‌شده بر روی گاز در فرایند هم‌فشار را محاسبه می‌کنیم:

$$W = -nR\Delta T \xrightarrow[\Delta T = \frac{1000}{9} K]{n = \frac{45}{16} mol} W = -\frac{45}{16} \times 8 \times \frac{1000}{9} = -2500\,J \times \frac{1\,kJ}{1000\,J} = -2/5\,kJ$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۳ در نمودار زیر، مقداری گاز آرمانی طی فرایندی ایستاوار از حالت **i** به حالت **f** می‌رسد. اگر ΔU تغییر انرژی درونی گاز، **W** کار انجام‌شده روی گاز و **Q** گرمای داده‌شده به گاز باشد، کدام رابطه درست است؟



۱) $\Delta U < ۰$

۲) $W > ۰$

۳) $Q < ۰$

۴) $|Q| > |W|$

Hint

اول علامت ΔU رو از روی مقایسهٔ حاصل‌ضرب $P.V$ نقطه‌های ابتدا و انتها به دست بیار، بعدش علامت W رو از روی تغییر حجم گاز پیدا کن، در نهایت علامت Q رو با مقایسهٔ علامت ΔU و W مشخص کن.

درس Box

انرژی درونی گاز با حاصل‌ضرب فشار در حجم گاز متناسب است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{U_۲}{U_۱} = \frac{P_۲V_۲}{P_۱V_۱}$$

P : فشار گاز

V : حجم گاز

U : انرژی درونی گاز

نکته

اگر در یک فرایند، حجم گاز افزایش یابد، کار انجام‌شده روی گاز منفی و اگر حجم گاز کاهش یابد، کار انجام‌شده روی گاز، مثبت خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: علامت تغییر انرژی درونی گاز (ΔU) را به کمک فشار و حجم گاز در حالت‌های i و f در نمودار به دست می‌آوریم:

$$\frac{U_f}{U_i} = \frac{P_fV_f}{P_iV_i} \Rightarrow \frac{U_f}{U_i} = \frac{\frac{۱}{۴}P_۱ \times ۵V_۱}{P_۱ \times V_۱} = \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{۵}{۴}U_i \Rightarrow \Delta U = U_f - U_i > ۰$$ (رد گزینهٔ (۱))

گام دوم: علامت کار انجام‌شده بر روی گاز را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که حجم گاز افزایش یافته است، درمی‌یابیم علامت W، منفی است $(W < ۰)$ (رد گزینهٔ (۲)).

گام سوم: علامت گرما را به دست می‌آوریم و مقدار آن را با W و ΔU مقایسه می‌کنیم:

طبق قانون اول ترمودینامیک، داریم:

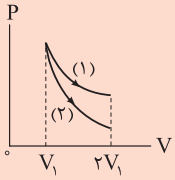
$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W \xrightarrow[W<۰ \Rightarrow -W>۰]{\Delta U>۰} Q > ۰ \ , \ |Q| > |W| \ , \ |Q| > |\Delta U|$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۴ در شکل زیر، حجم مقدار معینی از گاز آرمانی با دو فرایند ایستاوار (۱) و (۲)، دو برابر شده است. یکی از فرایندها هم‌دما و دیگری بی‌دررو است. اگر در این فرایندها، گرمای داده‌شده به گاز به ترتیب Q_1 و Q_2 باشد، کدام رابطه درست است؟



۱) $Q_1 > ۰ ، Q_2 > ۰$

۲) $Q_1 > ۰ ، Q_2 = ۰$

۳) $Q_1 < ۰ ، Q_2 > ۰$

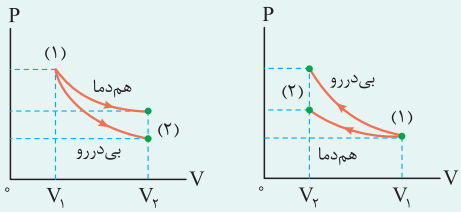
۴) $Q_1 < ۰ ، Q_2 = ۰$

درس Box

فرایند بی‌دررو چیست؟

فرایندی است که در آن بین دستگاه (گاز) و محیط، گرما مبادله نمی‌شود.

به ازای تغییر حجم یکسان، تغییر فشار در فرایند بی‌دررو بیشتر از تغییر فشار در فرایند هم‌دما است؛ بنابراین نمودار $P-V$ این دو فرایند برای یک گاز با حالت اولیهٔ یکسان، مطابق شکل زیر است:

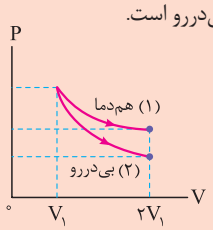


نکته در انبساط هم‌دما، به صورت زیر اثبات می‌شود که گاز از محیط گرما می‌گیرد.

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W \xrightarrow{\text{هم‌دما} \Rightarrow \Delta U = ۰} Q = -W \xrightarrow[W<۰]{\text{انبساط}} Q > ۰$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به نمودار $P-V$ باید فرایندهای هم‌دما و بی‌دررو را مشخص کنیم. می‌دانیم به ازای تغییر حجم یکسان، تغییر فشار در فرایند بی‌دررو بیشتر است؛ بنابراین نمودار (۱) مربوط به فرایند هم‌دما و نمودار (۲) مربوط به فرایند بی‌دررو است.

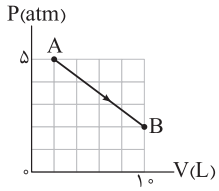


گام دوم: علامت گرمای مبادله‌شدهٔ هر فرایند را به دست می‌آوریم. می‌دانیم در فرایند بی‌دررو، گرما مبادله نمی‌شود؛ بنابراین $Q_2 = ۰$ است. از طرفی، می‌دانیم در فرایند انبساط هم‌دما، گاز از محیط گرما می‌گیرد؛ بنابراین $Q_1 > ۰$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۵ نمودار فشار گازی آرمانی برحسب حجم آن در طی فرایند ایستاوار **AB** مطابق شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در حالت **A** برابر **۴۰۰J** باشد، گاز در فرایند **AB** چند ژول گرما و چگونه مبادله کرده است؟



۱) ۲۴۰۰، دریافت کرده است.

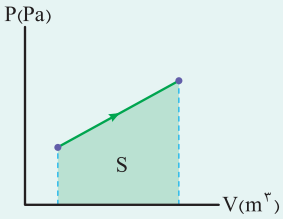
۲) ۲۴۰۰، از دست داده است.

۳) ۳۲۰۰، دریافت کرده است.

۴) ۳۲۰۰، از دست داده است.

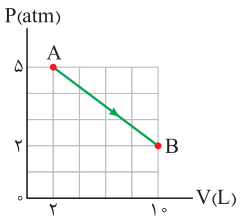
Hint اول V_A و P_B رو در نمودار مشخص کن. بعدش از روی نسبت PV و انرژی درونی در حالت A، انرژی درونی در حالت B رو به دست بیار. سپس کار انجام‌شده روی گاز رو از روی مساحت محصور نمودار $P-V$ حساب کن و در نهایت با داشتن W و ΔU، Q رو به دست بیار.

درس Box مساحت محصور نمودار $P-V$ با محور V، برابر است با قدرمطلق کار انجام‌شده بر روی گاز. در نمودار شکل زیر داریم:



$$|W| = S$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار $P-V$، V_A و P_B را بر روی نمودار مشخص می‌کنیم:

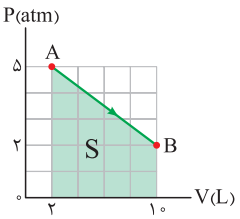


گام دوم: انرژی درونی گاز در حالت B را حساب می‌کنیم و بعد از آن تغییر انرژی درونی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} \xrightarrow[V_A=2L,\ V_B=10L]{U_A=400J,\ P_A=5atm,\ P_B=2atm} \frac{U_B}{400} = \frac{2\times10}{5\times2} \Rightarrow U_B = 800\,J$$

$$\Delta U = U_B - U_A \xrightarrow[U_B=800\,J]{U_A=400\,J} \Delta U = 800-400 = 400\,J$$

گام سوم: کار انجام‌شده بر روی گاز را حساب می‌کنیم. با توجه به مساحت محصور نمودار $P-V$ با محور V داریم:



$$|W| = S = \frac{(5+2)\times10^5 \times (10-2)\times10^{-3}}{2} \Rightarrow |W| = 28\times10^2 = 2800\,J$$

$$\xrightarrow[W<0]{\text{افزایش حجم}} W = -2800\,J$$

گام چهارم: گرمای مبادله‌شده را به دست می‌آوریم:

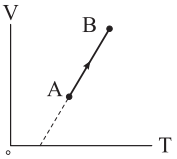
$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W=-2800\,J]{\Delta U=400\,J} 400 = Q - 2800 \Rightarrow Q = 3200\,J$$

بنابراین گاز در فرایند AB، ۳۲۰۰ J گرما دریافت کرده است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۶ نمودار حجم برحسب دمای یک گاز آرمانی در طی فرایند ایستاوار **AB** به شکل زیر است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این فرایند، درست است؟



الف) در طی این فرایند، فشار گاز ثابت است.

ب) در طی این فرایند، فشار گاز کاهش می‌یابد.

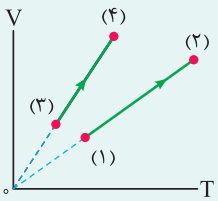
پ) در این فرایند، گاز گرما دریافت کرده است.

ت) در این فرایند، گاز گرما از دست داده است.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

درس Box اگر نمودار حجم برحسب دمای یک گاز (V ـ T) به صورت خطی باشد که امتداد این خط از مبدأ محور عبور کند، در تمام نقاطی که بر روی آن خط قرار دارند، فشار یکسان است. از طرفی، مطابق شکل زیر، هر چه شیب این خط کوچک‌تر باشد، مقدار فشار بیشتر است.



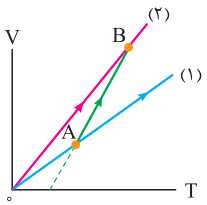
$$V = \frac{nR}{P}T$$

$$P_۱ = P_۲ > P_۳ = P_۴$$

نکته در یک فرایند ترمودینامیکی اگر دما افزایش یابد، انرژی درونی دستگاه افزایش و اگر دما کاهش یابد، انرژی درونی دستگاه کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فشار نقاط A و B را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر مطابق شکل زیر، از مبدأ محور، خطوطی رسم کنیم که نقاط A و B را قطع کنند، می‌بینیم شیب خطی که نقطهٔ A را قطع می‌کند، کوچک‌تر از شیب خطی است که نقطهٔ B را قطع می‌کند؛ بنابراین طبق درس‌باکس فشار در نقطهٔ A از نقطهٔ B بیشتر است و در طی این فرایند از A به B، فشار گاز کاهش می‌یابد؛ در نتیجه عبارت «الف» نادرست و عبارت «ب» درست است.



$$\text{شیب (۱)} < \text{شیب (۲)} \Rightarrow P_۱ > P_۲ \Rightarrow P_A > P_B$$

گام دوم: علامت W_{AB} و ΔU_{AB} را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار V ـ T داریم:

$$V_B > V_A \Rightarrow \Delta V_{AB} > ۰ \Rightarrow W_{AB} < ۰$$

$$T_B > T_A \Rightarrow \Delta T_{AB} > ۰ \Rightarrow \Delta U_{AB} > ۰$$

گام سوم: علامت‌گرمای فرایند AB را به دست می‌آوریم:

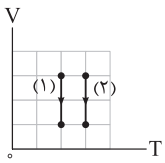
$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W \xrightarrow[W_{AB}<۰ \Rightarrow -W_{AB}>۰]{\Delta U_{AB}>۰} Q_{AB} > ۰$$

بنابراین در این فرایند، گاز گرما دریافت کرده است؛ در نتیجه عبارت «پ» درست و عبارت «ت» نادرست است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۷ نمودار حجم برحسب دما برای دو فرایند ایستاوار گازهای کامل (۱) و (۲) به شکل زیر است. اگر گرمایی که گاز در این دو فرایند به محیط داده است، به ترتیب Q_1 و Q_2 باشد، کدام درست است؟



۱) $Q_2 > Q_1 > 0$

۲) $Q_1 > Q_2 > 0$

۳) $Q_2 < Q_1 < 0$

۴) $Q_1 < Q_2 < 0$

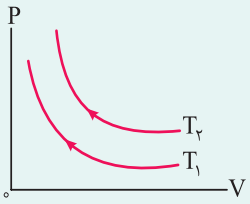
درس Box

در فرایند هم‌دما، با توجه به ثابت‌بودن دما، انرژی درونی تغییر نمی‌کند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta U = Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{تراکم هم‌دما} \Rightarrow W > 0 \Rightarrow Q < 0 \Rightarrow \text{گرما از دستگاه به محیط منتقل می‌شود.} \\ \text{انبساط هم‌دما} \Rightarrow W < 0 \Rightarrow Q > 0 \Rightarrow \text{گرما از محیط به دستگاه منتقل می‌شود.} \end{cases}$$

نمودار $P-V$ دو فرایند هم‌دما مطابق شکل زیر است. به ازای یک تغییر حجم معین، هر چه مساحت محصور بین این نمودار و محور V بیشتر باشد قدرمطلق کار انجام‌شده و اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بیشتر است.



$$S_2 > S_1 \Rightarrow |W_2| > |W_1| \Rightarrow |Q_2| > |Q_1|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار $V-T$ دو فرایند (۱) و (۲)، درمی‌یابیم هر دو فرایند هم‌دما بوده و $T_2 > T_1$ است. از طرفی، طبق درس‌باکس می‌دانیم در تراکم هم‌دما، گرما از گاز به محیط منتقل می‌شود؛ بنابراین Q_1 و Q_2 که گرمای منتقل‌شده از گاز به محیط هستند، هر دو مثبت هستند (رد گزینه‌های (۳) و (۴)).

از طرفی، با توجه به این‌که $T_2 > T_1$ است، درمی‌یابیم $|Q_2| > |Q_1|$ است؛ بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

$(Q_2 > Q_1 > 0)$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۸ دمای یک مکعب آلومینیمی توپر به ضلع $20\ cm$ از $30^\circ C$ به $80^\circ C$ می‌رسد. اگر فشار هوای محیط $10^5\ Pa$ باشد، کار انجام‌شده توسط مکعب در این فرایند چند ژول است؟ (ضریب انبساط طولی آلومینیم برابر $2/5\times10^{-5}\ \frac{1}{K}$ است.)

تغییر دما $50^\circ C$ است.

حجم مکعب $(20)^3\ cm^3$ است.

فرایند انبساط هم‌فشار

۱) ۳

۲) ۳۰

۳) -3

۴) -30

Hint اول تغییر حجم رو حساب کن، بعدش کار انجام‌شده توسط دستگاه رو در فرایند هم‌فشار به دست بیار.

درس Box

۱) کار انجام‌شده بر روی دستگاه، در فشار ثابت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W = -P\Delta V$$

کار (J) ← W ، فشار (Pa) ↑ P ، تغییر حجم (m³) ↓ ΔV

۲) کار انجام‌شده توسط دستگاه بر روی محیط، برابر است با منفی کار محیط بر روی دستگاه.

$$W' = -W$$

۳) اگر دمای جسمی با حجم اولیهٔ V_1 را به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر دهیم، حجم جسم به اندازهٔ ΔV تغییر می‌کند و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\Delta V = V_1\beta\Delta\theta$$

β: ضریب انبساط حجمی $(\frac{1}{K})$

$$\beta_{\text{جامد}} \simeq 3\alpha$$

α: ضریب انبساط طولی

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تغییر حجم جسم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1\beta\Delta\theta \xrightarrow[\beta=3\alpha=3\times2/5\times10^{-5}=7/5\times10^{-5}\frac{1}{K},\ \Delta\theta=80-30=50^\circ C]{V_1=(20)^3=8000\,cm^3=8\times10^{-3}\,m^3} \Delta V = 8\times10^{-3}\times7/5\times10^{-5}\times50 = 3\times10^{-5}\,m^3$$

گام دوم: کار انجام‌شده بر روی دستگاه را حساب می‌کنیم. با توجه به ثابت‌بودن فشار در طی فرایند، داریم:

$$W = -P\Delta V \xrightarrow[\Delta V=3\times10^{-5}\,m^3]{P=10^5\,Pa} W = -10^5\times3\times10^{-5} = -3\ J$$

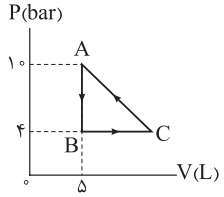
گام سوم: کار دستگاه بر روی محیط را به دست می‌آوریم:

$$W' = -W = -(-3) = 3\ J$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۹ نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز آرمانی در طی یک چرخه به شکل زیر است. اگر تغییر انرژی درونی گاز در فرایند CA برابر صفر باشد، کار انجام‌شده توسط گاز در هر چرخه برابر چند کیلوژول است؟



۱) ۴/۵

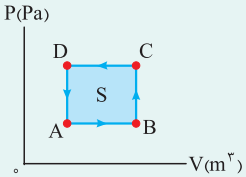
۲) −۴/۵

۳) ۲/۲۵

۴) −۲/۲۵

Hint اول حجم گاز در نقطهٔ C رو به دست بیار. بعدش کار انجام‌شده بر روی گاز در هر چرخه رو از روی مساحت محصور نمودار $P-V$ در چرخه و با توجه به جهت چرخه حساب کن.

درس Box قدرمطلق کار انجام‌شده بر روی دستگاه در یک چرخه برابر است با مساحت محصور نمودار فشار برحسب حجم در چرخه. مطابق شکل زیر داریم:



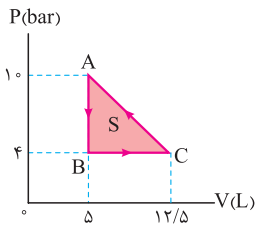
$$|W_{ABCDA}| = S$$

اگر چرخه به صورت ساعتگرد باشد، $W_{\text{چرخه}} < 0$ و اگر چرخه به صورت پادساعتگرد باشد، $W_{\text{چرخه}} > 0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** حجم گاز در نقطهٔ C را به دست می‌آوریم. می‌دانیم انرژی درونی گاز با حاصل‌ضرب فشار در حجم گاز متناسب است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{U_C}{U_A} = \frac{P_C V_C}{P_A V_A} \xrightarrow[P_A=10\,bar,\ P_C=4\,bar,\ V_A=5L]{\Delta U_{CA}=0 \Rightarrow U_C=U_A} 1 = \frac{4\times V_C}{10\times 5} \Rightarrow V_C = 12/5\,L$$

گام دوم: کار انجام‌شده بر روی گاز را حساب می‌کنیم. با توجه به مساحت محصور چرخه داریم:



$$|W_{\text{چرخه}}| = S = \frac{(12/5-5)10^{-3}\times(10-4)10^{5}}{2} = 2250\,J = 2/25\,kJ$$

چرخهٔ پادساعتگرد $\Rightarrow W_{\text{چرخه}} > 0 \Rightarrow W_{\text{چرخه}} = 2/25\,kJ$

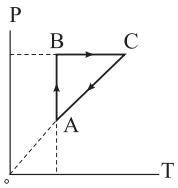
گام سوم: کار انجام‌شده توسط گاز بر روی محیط را حساب می‌کنیم:

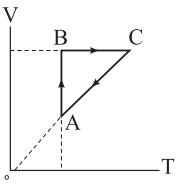
$$W'_{\text{چرخه}} = -W_{\text{چرخه}} = -2/25\,kJ$$

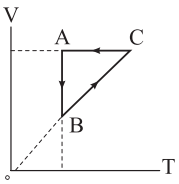
Telegram: @konkur_in

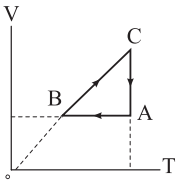
www.konkur.in

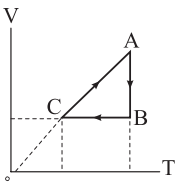
۷۰ نمودار **P ـ T** مقدار معینی گاز آرمانی در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. نمودار **V ـ T** این گاز در طی این چرخه، به صورت کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

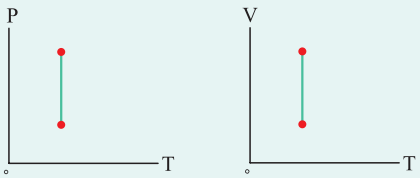
۴) 

مشاوره این سؤال رو حتماً برای مرور فرایندها علامت بذار؛ چون توی این سؤال کلی موضوع رو می‌تونی بررسی کنی.

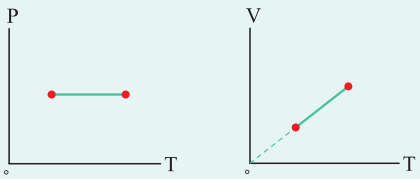
درس Box

چگونه از روی نمودار P ـ T نمودار V ـ T را رسم کنیم؟

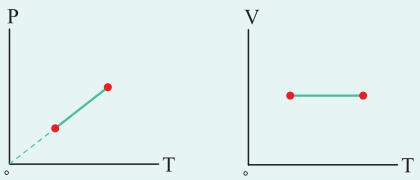
اگر نمودار P ـ T گازی، خطی موازی محور قائم (محور P) باشد، با توجه به هم‌دمابودن فرایند، نمودار V ـ T آن هم خطی موازی محور قائم (محور V) خواهد بود. مطابق شکل زیر داریم:



اگر نمودار P ـ T گازی، خطی موازی محور افقی (محور T) باشد، با توجه به هم‌فشاربودن فرایند، نمودار V ـ T آن خطی است با شیب ثابت که امتداد آن از مبدأ نمودار می‌گذرد. مطابق شکل زیر داریم:



اگر نمودار P ـ T گازی، خطی با شیب ثابت باشد که امتداد آن از مبدأ محور می‌گذرد، با توجه به هم‌حجم‌بودن فرایند، نمودار V ـ T آن خطی افقی است. مطابق شکل زیر، داریم:



نکته در فرایند هم‌فشار، با افزایش دما، حجم افزایش می‌یابد.

$$\frac{V}{T} = \text{ثابت} \Rightarrow V \propto T$$

نکته در فرایند هم‌دما، با افزایش فشار، حجم کاهش می‌یابد.

$$PV = \text{ثابت} \Rightarrow P \propto \frac{1}{V}$$

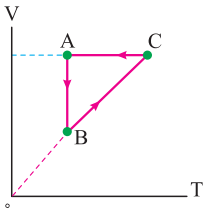
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

نکته در فرایند هم‌حجم، با افزایش دما، فشار افزایش می‌یابد.

$$\frac{P}{T} = \text{ثابت} \Rightarrow P \propto T$$

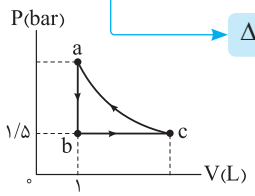
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس درمی‌یابیم فرایند AB یک فرایند هم‌دما با کاهش حجم، فرایند BC یک فرایند هم‌فشار با افزایش حجم و دما و فرایند CA یک فرایند هم‌حجم با کاهش دما است؛ بنابراین نمودار V ـ T این گاز به صورت زیر است:



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۱ نمودار فشار برحسب حجم مقدار معینی گاز آرمانی در طی یک چرخه به شکل زیر است. اگر فرایند **ca** هم‌دما و اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در فرایند **ab** و **bc** به‌ترتیب برابر **۷۵۰ J** و **۱۰۵۰ J** باشد، حجم گاز در حالت **c** چند لیتر است؟



$\Delta U_{ca} = ۰$

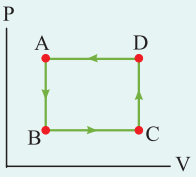
۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

درس Box تغییر انرژی درونی گاز در یک چرخهٔ کامل صفر است. مثلاً در چرخهٔ زیر، می‌توانیم بنویسیم:



$$\Delta U_{ABCDA} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA} = ۰$$

نکته تغییر انرژی درونی گاز در یک فرایند هم‌دما، صفر است. $(\Delta U_{\text{هم‌دما}} = ۰)$

نکته در فرایند هم‌حجم، تغییر انرژی درونی گاز با گرمای منتقل‌شده از محیط به گاز برابر است. $(\Delta U_{\text{هم‌حجم}} = Q_{\text{هم‌حجم}})$

نکته در فرایند انبساط هم‌فشار، گرما از محیط به گاز منتقل می‌شود.

$$\text{انبساط هم‌فشار} \begin{cases} \Delta T > ۰ \Rightarrow \Delta U > ۰ \\ \Delta V > ۰ \Rightarrow W < ۰ \end{cases} \Rightarrow Q > ۰$$

نکته در فرایند هم‌حجم با کاهش فشار، دما کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تغییر انرژی درونی گاز در هر فرایند را به دست می‌آوریم:

ca: فرایند هم‌دما $\Rightarrow \Delta U_{ca} = ۰$

ab: فرایند هم‌حجم $\Rightarrow \Delta U_{ab} = Q_{ab} \xrightarrow[\Delta U = Q < ۰]{\Delta T < ۰ \ , \ |Q| = ۷۵۰ J} \Delta U_{ab} = -۷۵۰ \text{ J}$

bc: فرایند هم‌فشار $\Rightarrow \Delta U_{\text{چرخه}} = \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} + \Delta U_{ca} = ۰$

$$\Rightarrow ۰ = -۷۵۰ + \Delta U_{bc} + ۰ \Rightarrow \Delta U_{bc} = ۷۵۰ \text{ J}$$

گام دوم: کار انجام‌شده بر روی گاز در فرایند bc را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \Delta U_{bc} = ۷۵۰ \text{ J} \\ |Q_{bc}| = ۱۰۵۰ \text{ J} \end{cases} \xrightarrow[Q > ۰]{\text{انبساط هم‌فشار}} Q_{bc} = ۱۰۵۰ \text{ J}$$

$$\Delta U_{bc} = Q_{bc} + W_{bc} \Rightarrow ۷۵۰ = ۱۰۵۰ + W_{bc} \Rightarrow W_{bc} = -۳۰۰ \text{ J}$$

گام سوم: تغییر حجم گاز در فرایند bc را حساب می‌کنیم:

فرایند bc، فرایند هم‌فشار است. $\Rightarrow W_{bc} = -P\Delta V \xrightarrow[W_{bc} = -۳۰۰ \text{ J}]{P = ۱/۵ \text{ bar} = ۱/۵ \times ۱۰^{۵} \text{ Pa}} -۳۰۰ = -۱/۵ \times ۱۰^{۵} \times \Delta V_{bc}$

$$\Rightarrow \Delta V_{bc} = ۲ \times ۱۰^{-۳} \text{ m}^{۳} = ۲ \text{L}$$

گام چهارم: حجم گاز در حالت c را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V_{bc} = V_c - V_b \xrightarrow[V_b = ۱ \text{L}]{\Delta V_{bc} = ۲ \text{L}} ۲ = V_c - ۱ \Rightarrow V_c = ۳ \text{L}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۲ یک ماشین گرمایی در هر چرخه $500\ J$ گرما از منبع دمابالا می‌گیرد و $300\ J$ گرما به منبع دماپایین می‌دهد. اگر هر چرخه $0/5\ s$ طول بکشد، به ترتیب بازده ماشین چند درصد و توان خروجی آن چند کیلووات است؟

۱) ۰/۱،۶۰ ۲) ۰/۴،۶۰

۳) ۰/۱،۴۰ ۴) ۰/۴،۴۰

درس Box

ماشین گرمایی مقداری گرما از یک منبع دمابالا می‌گیرد (Q_H)، بخشی از این گرما را به کار (W) تبدیل می‌کند و بقیهٔ گرما را به یک منبع دماپایین (Q_L) می‌دهد. برای ماشین گرمایی آرمانی رابطهٔ روبه‌رو برقرار است: $Q_H = |W| + |Q_L|$

نسبت کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی به مقدار گرمای گرفته‌شده از منبع دمابالا، برابر بازده ماشین گرمایی است و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\eta_{\text{بازده}} = \frac{|W|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

نسبت کار انجام‌شده به مدت‌زمان انجام کار توسط ماشین گرمایی، توان خروجی ماشین گرمایی است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{\text{توان ماشین گرمایی (W)}} = \frac{|W|_{\text{کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی (J)}}}{t_{\text{مدت‌زمان (s)}}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بازده ماشین گرمایی را به صورت درصدی حساب می‌کنیم:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} \xrightarrow[Q_H = 500\ J]{|Q_L| = 300\ J} \eta = 1 - \frac{300}{500} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0/4$$

$$\Rightarrow \text{بازده درصدی} = \eta \times 100 = 0/4 \times 100 = \%40$$

گام دوم: توان خروجی ماشین گرمایی را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{|W|}{t} \xrightarrow[t = 0/5\ s]{|W| = Q_H - |Q_L| = 500 - 300 = 200\ J} P = \frac{200}{0/5} = 400\ W \times \frac{1\ kW}{1000\ W} = 0/4\ kW$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۳ بازده یک ماشین گرمایی که از سوزاندن گازوئیل، گرما دریافت می‌کند، ۲۵ درصد و توان آن ۸۴ kW است. این ماشین در هر ثانیه ۴۰ چرخه را می‌پیماید. اگر گرمای حاصل از سوختن گازوئیل $۴/۲\times۱۰^{۴}\ J/g$ باشد، گازوئیل مصرف‌شده توسط ماشین در هر چرخه چند گرم است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۲

Hint اول مدت‌زمان هر چرخه و کار انجام‌شده در هر چرخه رو حساب کن. بعدش گرمای دریافتی از منبع دمابالا یعنی همون گرمای حاصل از سوختن گازوئیل رو به دست بیار و در نهایت جرم گازوئیل مصرف‌شده رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مدت‌زمان هر چرخه را حساب می‌کنیم. با یک تناسب ساده می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۴۰\text{چرخه}}{۱\ s}=\frac{۱\text{چرخه}}{t}\Rightarrow t=\frac{۱}{۴۰}s$$

گام دوم: کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی در هر چرخه را حساب می‌کنیم:

$$P=\frac{|W|}{t}\xrightarrow[t=\frac{۱}{۴۰}s]{P=۸۴kW=۸۴\times۱۰^{۳}W}۸۴\times۱۰^{۳}=\frac{|W|}{\frac{۱}{۴۰}}\Rightarrow |W|=۲/۱\times۱۰^{۳}J$$

گام سوم: گرمای دریافتی ماشین گرمایی از منبع دمابالا در هر چرخه را به دست می‌آوریم:

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\xrightarrow[|W|=۲/۱\times۱۰^{۳}J]{\eta=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}}\frac{۱}{۴}=\frac{۲/۱\times۱۰^{۳}}{Q_H}\Rightarrow Q_H=۸/۴\times۱۰^{۳}J$$

گام چهارم: جرم گازوئیل مصرف‌شده را حساب می‌کنیم:

$$۸/۴\times۱۰^{۳}J\times\frac{۱\ g\ \text{گازوئیل}}{۴/۲\times۱۰^{۴}J}=۰/۲\ g\ \text{گازوئیل}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۴ در چرخهٔ یک ماشین بنزینی، کدام فرایندها بی‌دررو در نظر گرفته می‌شود؟

۱) ضربهٔ مکش، ضربهٔ خروج گاز
۲) ضربهٔ مکش، ضربهٔ تراکم
۳) ضربهٔ قدرت، ضربهٔ خروج گاز
۴) ضربهٔ قدرت، ضربهٔ تراکم

درس Box

فرایندهای چرخهٔ یک ماشین بنزینی به ترتیب زیر است:

۱) ضربهٔ مکش
۲) ضربهٔ تراکم ← تراکم بی‌دررو
۳) آتش‌گرفتن ← هم‌حجم با افزایش دما و فشار
۴) ضربهٔ قدرت ← انبساط بی‌دررو
۵) تخلیه
۶) ضربهٔ خروج

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس، فرایندهای ضربهٔ تراکم و ضربهٔ قدرت، بی‌دررو در نظر گرفته می‌شوند.

Telegram: @konkur_in

فیزیک

۷۵ چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) ممکن نیست ماشین گرمایی چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دمابالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.

ب) اگر در چرخهٔ یک ماشین گرمایی، تمام گرمای گرفته‌شده از منبع دمابالا به کار تبدیل شود، قانون اول ترمودینامیک نقض می‌شود.

پ) ممکن نیست گرما به‌طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

ت) یخچال با انجام کار، گرما را از منبعی دماپایین می‌گیرد و به منبعی دمابالا می‌دهد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی بیان می‌کند:

ممکن نیست دستگاهی چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دمابالا گرفته و تمام آن را به کار تبدیل کند.

بر این اساس بازده هیچ ماشین گرمایی برابر یک (۱۰۰ درصد) نیست.

قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی:

ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

یخچال چیست؟

یخچال وسیله‌ای است که با دریافت کار، گرما را از منبعی دماپایین می‌گیرد و به منبعی دمابالا می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قانون دوم ترمودینامیک هر یک از عبارات را بررسی می‌کنیم:

عبارت «الف» درست است.

عبارت «ب» نادرست است؛ زیرا اگر در چرخهٔ یک ماشین گرمایی، تمام گرمای گرفته‌شده از منبع دمابالا به کار تبدیل شود، قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.

عبارت «پ» درست است.

عبارت «ت» نادرست است؛ زیرا یخچال با دریافت کار، گرما را از منبعی دماپایین می‌گیرد و به منبعی دمابالا می‌دهد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۶ کربوکسیلیک اسیدها از جمله اسیدهای ..... هستند که تنها هیدروژن گروه ..... آن‌ها می‌تواند به صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

۱) قوی ـ کربوکسیل
۲) قوی ـ هیدروکسیل
۳) ضعیف ـ کربوکسیل
۴) ضعیف ـ هیدروکسیل

نکته کربوکسیلیک اسیدها $(RCOOH)$ از جمله اسیدهای **ضعیف** هستند که تنها هیدروژن **گروه کربوکسیل آن‌ها** می‌تواند به صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود؛ بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

معادلهٔ یونش کلی کربوکسیلیک اسیدها در آب : $RCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + RCOO^-(aq)$

به طور مثال معادلهٔ یونش استیک اسید در آب *این‌چنین‌است*:

$$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CH_3COO^-(aq)$$

پاسخ خیلی تشریحی نام آنیون حاصل از یونش کربوکسیلیک اسیدها در آب، بر وزن کربوکسیلات است:

$$\underset{\text{کربوکسیلیک اسید}}{RCOOH} \rightarrow \underset{\text{یون کربوکسیلات}}{RCOO^-}$$

مثال:

$$\underset{\text{استیک اسید (اتانوئیک اسید)}}{CH_3COOH} \rightarrow \underset{\text{یون استات (اتانوات)}}{CH_3COO^-} \quad , \quad \underset{\text{فورمیک اسید (متانوئیک اسید)}}{HCOOH} \rightarrow \underset{\text{یون فورمات (متانوات)}}{HCOO^-}$$

توجه: گروه عاملی هیدروکسیل، مربوط به الکل‌هاست، *مواستون باشه* که الکل‌ها به صورت کاملاً مولکولی در آب حل شده و غیرالکترولیت محسوب می‌شوند؛ در نتیجه خاصیت اسیدی یا بازی در آب ایجاد نمی‌کنند.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۷ اگر pH محلول اسید HA یک واحد کم‌تر از pH محلول اسید HB بوده و غلظت اولیهٔ HA، ۱۰۰ برابر غلظت اولیهٔ HB باشد، کدام مطلب در مورد آن‌ها درست است؟

۱) غلظت یون هیدرونیوم و ثابت یونش اسید HA، ۱۰ برابر HB است.

۲) درجهٔ یونش اسید HB در این شرایط، ۱۰ برابر HA است.

۳) اسید HA ضعیف بوده و به یقین اسید HB، یک اسید قوی است.

۴) میزان اسیدی‌بودن محلول HB و قدرت اسید HB بیشتر از HA است.

مشاوره مفاهیم اسیدها و بازها پای ثابت سؤالات کنکور و از مباحث مورد علاقهٔ طراحان کنکور است. این سؤالات معمولاً هم دارای مفاهیم و هم دارای محاسبات هستند و معمولاً به صورت مقایسه‌ای مطرح می‌شوند. برای حل این سؤالات باید علاوه بر تک‌تک مفاهیم، بتوانید با نظم و ترتیب و *بدون قاطی پاتی کردن!* مطالب را نوشته و هم‌چنین حواستان به خواستهٔ اصلی سؤال باشه تا گمراه نشده و *رستگار شوید.*

پاسخ خیلی تشریحی

اگر pH محلول اسید HB را برابر x در نظر بگیریم، طبق اطلاعات داده‌شده pH محلول HA برابر $x-۱$ خواهد بود؛ هم‌چنین غلظت اولیهٔ محلول HA، ۱۰۰ برابر محلول HB می‌باشد؛ در نتیجه می‌توانیم رابطهٔ بین درجهٔ یونش دو اسید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$\text{محلول اسید HA}: [H^+]=۱۰^{-pH} \xrightarrow{[H^+]=M\alpha} M_{HA}\times\alpha_{HA}=۱۰^{-(x-۱)}=۱۰^{۱-x}$$

$$\text{محلول اسید HB}: [H^+]=۱۰^{-pH} \xrightarrow{[H^+]=M\alpha} M_{HB}\times\alpha_{HB}=۱۰^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰^{۱-x}}{۱۰^{-x}}=\frac{M_{HA}\times\alpha_{HA}}{M_{HB}\times\alpha_{HB}} \Rightarrow \alpha_{HB}=۱۰\alpha_{HA}$$

در نتیجه درجهٔ یونش محلول اسید HB، ۱۰ برابر محلول اسید HA می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نسبت غلظت مولی یون هیدرونیوم ($[H^+]$) در محلول دو اسید برابر است با:

$$\frac{[H^+]_{HA}}{[H^+]_{HB}}=\frac{(۱۰^{-pH})_{HA}}{(۱۰^{-pH})_{HB}}=\frac{۱۰^{۱-x}}{۱۰^{-x}}=۱۰$$

هم‌چنین نسبت ثابت یونش (K_a) محلول دو اسید برابر است با:

$$\frac{(K_a)_{HA}}{(K_a)_{HB}}=\frac{\frac{M_{HA}\times(\alpha_{HA})^۲}{(۱-\alpha_{HA})}}{\frac{M_{HB}\times(\alpha_{HB})^۲}{(۱-\alpha_{HB})}}=\boxed{\frac{M_{HA}}{M_{HB}}\times\left(\frac{\alpha_{HA}}{\alpha_{HB}}\right)^۲}\times\frac{۱-\alpha_{HB}}{۱-\alpha_{HA}}=\frac{۱-\alpha_{HB}}{۱-\alpha_{HA}} \xrightarrow{\alpha_{HA}<\alpha_{HB}} \frac{(K_a)_{HA}}{(K_a)_{HB}}<۱$$

$$\Rightarrow (K_a)_{HA}<(K_a)_{HB}$$

در نتیجه ثابت یونش اسید HB، بیشتر از HA است و *این‌که ثابت یونش اسید HA، ۱۰ برابر اسید HB باشه، غلط اندر غلطه!*

گزینهٔ (۳): با توجه به این‌که درجهٔ یونش اسید HA، $\frac{۱}{۱۰}$ اسید HB است؛ پس *حتماً* اسید HA به صورت ناقص در آب یونش می‌یابد ($\alpha_{HA}<۱$) و اسید ضعیف محسوب می‌شود اما *هواستون باشه* برای آن‌که اسیدی را اسید قوی بنامیم، باید تقریباً به طور کامل یونش یافته و محلول آن را تنها شامل یون‌های آبپوشیده دانست؛ در واقع درجهٔ یونش آن را *صوداً* باید برابر یک در نظر گرفت. در مورد اسید HB، نمی‌توان لزوماً یونش آن را در آب کامل در نظر گرفت و به همین دلیل نمی‌توان آن را لزوماً اسید قوی دانست.

نکته

بازهٔ تغییرات درجهٔ یونش و درصد یونش

- اسیدهای قوی ← $\alpha=۱, ٪\alpha=۱۰۰$ ← مثال: HI، HBr، HCl، $HNO_۳$ و...
- اسیدهای ضعیف ← $۰<\alpha<۱, ۰<٪\alpha<۱۰۰$ ← مثال: HF، HCN، $H_۲CO_۳$، کربوکسیلیک‌اسیدها و...
- مولکول‌های آلی ← $\alpha=۰, ٪\alpha=۰$ ← مثال: اتانول، استون، اتیلن گلیکول و ...

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گزینهٔ (۴):

نکته

مقایسهٔ قدرت اسیدی اسیدها

- مقایسهٔ K_a آن‌ها در دمای ثابت ← هر چه K_a بزرگ‌تر، اسید قوی‌تر
- به غلظت محلول و pH آن ربطی ندارد.

مقایسهٔ خاصیت اسیدی محلول اسیدها

- مقایسهٔ pH محلول آن‌ها ← هر چه pH کم‌تر، خاصیت اسیدی محلول بیشتر
- به غلظت محلول و قدرت اسیدی اسید ربط دارد.

با توجه به این‌که ثابت یونش اسید HB، بیشتر از اسید HA است؛ در نتیجه می‌توان گفت که اسید HB، نسبت به HA قوی‌تر است اما چون pH محلول اسید HA کم‌تر از محلول اسید HB می‌باشد؛ بنابراین محلول اسید HA، خاصیت اسیدی بیشتری نسبت به محلول اسید HB دارد *و در واقع محلول اسید* HA، *اسیدی‌تره!*

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۸ با توجه به جدول زیر که ثابت یونش بازی چند ماده را در دمای $25^\circ C$ نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

نام باز	فرمول شیمیایی	K_b
آمونیاک	NH_3	$1/8\times10^{-5}$
متیل آمین	CH_3NH_2	$4/6\times10^{-4}$
دی‌متیل آمین	$(CH_3)_2NH$	$5/4\times10^{-4}$

- در دمایی یکسان و غلظت‌های برابر، pH محلول دی‌متیل آمین از دو محلول دیگر بیشتر است.
- رسانایی الکتریکی محلول آمونیاک در آب از رسانایی الکتریکی محلول سدیم هیدروکسید در آب کم‌تر است.
- در محلول‌های ۰/۱ مولار از هر یک از ترکیب‌های بالا، بیشترین غلظت کاتیون در محلول آمونیاک است.
- اگر pH دو محلول دی‌متیل آمین و متیل آمین برابر باشد، به یقین خاصیت بازی هر یک از دو محلول از محلول آمونیاک بیشتر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

تنها عبارت اول درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول:

نکته

اسید قوی در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت
- K_a بزرگ‌تر
- یونش بیشتر
- $[H^+]$ بیشتر
- $[OH^-]$ کم‌تر
- pH کم‌تر

باز قوی در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت
- K_b بزرگ‌تر
- یونش بیشتر
- $[H^+]$ کم‌تر
- $[OH^-]$ بیشتر
- pH بیشتر

در شرایط یکسان غلظت و دما در بازها، هر چه بازی، K_b بزرگ‌تری داشته باشد، غلظت یون OH^- در محلول آن بیشتر بوده و در نتیجه pH محلول آن نیز بیشتر است؛ در نتیجه چون ثابت یونش دی‌متیل آمین از دو باز دیگر بیشتر است؛ بنابراین در شرایط یکسان، pH محلول آن بیشتر از محلول دو باز دیگر است.

عبارت دوم: هر چه مجموع غلظت یون‌های موجود در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن بیشتر است و غلظت اولیهٔ محلول این بازها علاوه بر خاصیت بازی محلول آن‌ها، در رسانایی الکتریکی و غلظت یون‌های موجود در آن‌ها نیز مؤثر است؛ در نتیجه *هواستون باشه که* تنها **در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت**، محلول باز با قدرت بازی بیشتر، رسانایی الکتریکی بیشتری خواهد داشت.

بنابراین برای مقایسهٔ رسانایی الکتریکی سه محلول داده‌شده، باید غلظت اولیهٔ آن‌ها نیز داده شود وگرنه ممکن است محلول آمونیاک، با وجود K_b کوچک‌تر نسبت به محلول باز قوی NaOH، به دلیل غلظت بالاتر، pH بزرگ‌تر و رسانایی الکتریکی بیشتری داشته باشد.

عبارت سوم: در غلظت و دمای یکسان از محلول سه باز داده‌شده، بیشترین غلظت یون‌ها *(چه مثبت و چه منفی!)*، مربوط به باز با K_b بزرگ‌تر است؛ در نتیجه بیشترین غلظت کاتیون در غلظت برابر از محلول این سه باز، مربوط به دی‌متیل آمین $((CH_3)_2NH)$ و *اتفاقاً* کم‌ترین آن، مربوط به آمونیاک (NH_3) است.

عبارت چهارم:

نکته

در محلول‌های آبی، مقدار pH با خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون هیدرونیوم رابطهٔ عکس و با خاصیت بازی محلول و غلظت یون هیدروکسید رابطهٔ مستقیم دارد، به طوری که هر چه غلظت یون H^+ در یک محلول بیشتر باشد، غلظت OH^- در آن کم‌تر، خاصیت اسیدی محلول بیشتر، خاصیت بازی محلول کم‌تر و در نتیجه pH محلول کم‌تر است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

هر چه خاصیت اسیدی یک محلول بیشتر باشد
- غلظت یون H^+ بیشتر است.
- غلظت یون OH^- کم‌تر است.
- pH محلول کم‌تر است.

هر چه خاصیت بازی یک محلول بیشتر باشد
- غلظت یون H^+ کم‌تر است.
- غلظت یون OH^- بیشتر است.
- pH محلول بیشتر است.

نکتهٔ ۲) در دو یا چند محلول با غلظت و دمای یکسان از بازهای مختلف، هر چه درجهٔ یونش (α) یا ثابت یونش (K_b) باز موجود در یک محلول بزرگ‌تر باشد، غلظت یون‌های موجود در محلول آن بیشتر است و در نتیجه رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است. هم‌چنین در این محلول غلظت OH^- بیشتر، غلظت H^+ کم‌تر و در نهایت pH محلول نیز بزرگ‌تر است.

در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت برای دو یا چند محلول حاوی بازهای گوناگون ← محلول با خاصیت بازی بالاتر
- حاوی باز قوی است.
  - K_b باز بزرگ‌تر باشد.
  - α باز بیشتر باشد.
- رسانایی الکتریکی بالاتری دارد.
- غلظت OH^- بیشتری دارد. ← غلظت H^+ در آن کم‌تر است.
- pH بیشتری دارد.

توجه: غلظت H^+ و در نتیجه pH محلول‌های اسیدی، هم به قدرت اسید و هم به غلظت محلول بستگی دارد، بنابراین همواره نمی‌توان گفت pH محلول اسید قوی‌تر، کم‌تر است و یا محلول شامل اسید قوی‌تر، خاصیت اسیدی بیشتری دارد؛ زیرا ممکن است غلظت اسید ضعیف‌تر به قدری باشد که pH محلول آن از pH محلول اسید قوی‌تر هم، کم‌تر باشد. این نکته در مورد محلول‌های بازی هم صدق می‌کند.

اگه گفتین چه چیزی طبق نکتهٔ بالا، خاصیت بازی محلول رو نشون می‌ده! آفرین! pH محلول به طوری که هر چه بالاتر باشد، آن محلول خاصیت بازی بالاتری دارد. حواستون باشه که بازم مثل رسانایی الکتریکی، pH محلول بازها، علاوه بر قدرت اسیدی، به غلظت محلول هم بستگی دارد؛ در نتیجه مقایسهٔ قدرت بازی صرفاً با استفاده از pH محلول دو یا چند باز، بدون داشتن غلظت اولیهٔ آن‌ها، از *بیخ غلطه!*

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۹ اگر در دمای اتاق، pH باز BOH با درصد یونش ۰/۰۶، برابر a و pH باز B′OH با درصد یونش ۰/۱۵، برابر $a+1$ باشد، غلظت مولی آغازی باز B′OH، چند برابر غلظت مولی آغازی باز BOH است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

Hint ابتدا غلظت یون OH^- را در محلول هر دو باز BOH و B′OH محاسبه کن. سپس با استفاده از رابطهٔ $[OH^-]=M\alpha$ و داشتن مقدار α برای هر یک از دو محلول، *فیلی راحت!* غلظت اولیهٔ این محلول‌های بازی را مقایسه کن.

درس Box

۱) آزمایش‌ها نشان می‌دهد که مولکول‌های آب نیز می‌توانند مطابق معادلهٔ زیر یونیده شوند که به این واکنش، خودیونش آب گفته می‌شود.

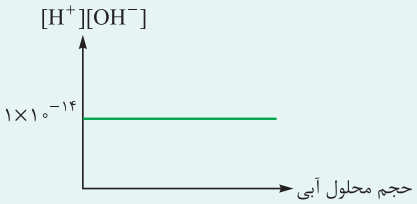
$$H_2O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$$

توجه: رسانایی الکتریکی ناچیز آب خالص به دلیل وجود مقدار بسیار کمی از یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در آن است.

۲) براساس اندازه‌گیری‌ها و یافته‌های تجربی در دمای اتاق ($25^\circ C$)، برای آب و محلول‌های آبی، حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید ثابت و برابر 1×10^{-14} است.

$$[H^+][OH^-]=1\times10^{-14} \leftarrow (25^\circ C) \text{ در دمای اتاق}$$

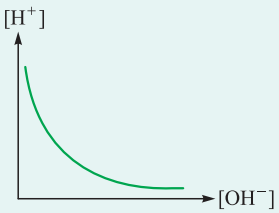
توجه: نمودار حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید برحسب حجم محلول‌های آبی در دمای اتاق به صورت زیر است.



توجه: از آن‌جا که در واکنش یونش آب، ضریب استوکیومتری یون هیدرونیوم و هیدروکسید یکسان است، آب خالص خنثی بوده و غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در دمای اتاق برابر 1×10^{-7} مول بر لیتر است.

$$[H^+][OH^-]=1\times10^{-14} \Rightarrow [H^+]=[OH^-]=\sqrt{1\times10^{-14}}=1\times10^{-7}\,mol.L^{-1}$$

۳) با توجه به این‌که حاصل‌ضرب $[H^+]$ و $[OH^-]$ در محلول‌های آبی در دمای اتاق همواره برابر 1×10^{-14} است، می‌توان نتیجه گرفت هر اندازه غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلول بیشتر شود، به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد تا حاصل‌ضرب غلظت این یون‌ها در دمای اتاق برابر 1×10^{-14} شود.



$$\text{در دمای اتاق } (25^\circ C) \Rightarrow [H^+][OH^-]=1\times10^{-14} \Rightarrow [H^+]=\frac{1\times10^{-14}}{[OH^-]} \Rightarrow \begin{cases}\downarrow[H^+] \Rightarrow \uparrow[OH^-]\\ \uparrow[H^+] \Rightarrow \downarrow[OH^-]\end{cases}$$

۴) در محلول‌های اسیدی نیز، یون هیدروکسید وجود دارد، فقط غلظت آن از یون هیدرونیوم کم‌تر است، به همین ترتیب در محلول‌های بازی هم، یون هیدرونیوم وجود دارد و فقط غلظت آن از یون هیدروکسید کم‌تر است. به طور خلاصه در دمای اتاق می‌توان نوشت:

نوع محیط	$[H^+]$	$[OH^-]$	رابطهٔ بین $[H^+]$ و $[OH^-]$	حاصل $[H^+][OH^-]$ در دمای اتاق	pH
خنثی	برابر با 10^{-7}	برابر با 10^{-7}	$[H^+]=[OH^-]$	10^{-14}	۷
اسیدی	بزرگ‌تر از 10^{-7}	کوچک‌تر از 10^{-7}	$[H^+]>[OH^-]$	10^{-14}	کوچک‌تر از ۷
بازی	کوچک‌تر از 10^{-7}	بزرگ‌تر از 10^{-7}	$[H^+]<[OH^-]$	10^{-14}	بزرگ‌تر از ۷

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به pH محلول دو باز BOH و B′OH، غلظت یون OH^- را در هر یک از آن‌ها حساب می‌کنیم:

محلول BOH: $[H^+]=10^{-pH}=10^{-a} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=1\times10^{-14}} [OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{10^{-a}}=10^{a-14}\ mol.L^{-1}$

محلول B′OH: $[H^+]=10^{-pH}=10^{-a-1} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=1\times10^{-14}} [OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{10^{-a-1}}=10^{a-13}\ mol.L^{-1}$

یه‌جور دیگه

از همون رابطهٔ $[H^+][OH^-]=1\times10^{-14}$، می‌توان نتیجه گرفت که در محلول‌های آبی در دمای اتاق رابطهٔ زیر برقرار است:

$$[H^+][OH^-]=1\times10^{-14} \xrightarrow{\text{از دو طرف } -\log \text{ می‌گیریم}} -\log([H^+][OH^-])=-\log10^{-14}$$

$$\Rightarrow -\log[H^+]+(-\log[OH^-])=14 \Rightarrow pH+pOH=14$$

بنابراین در این سؤال، اگر بخواهیم غلظت یون OH^- را در هر یک از محلول‌های دو باز BOH و B′OH *بسازیم*! خواهیم داشت:

محلول BOH: $pOH=14-pH=14-a \Rightarrow [OH^-]=10^{-pOH}=10^{a-14}$

محلول B′OH: $pOH=14-pH=14-(a+1)=13-a \Rightarrow [OH^-]=10^{-pOH}=10^{a-13}$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ $[OH^-]=M\alpha$ که در محلول‌های آبی برقرار است، نسبت غلظت اولیهٔ (M) دو باز BOH و B′OH را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{[OH^-]_{B'OH}}{[OH^-]_{BOH}}=\frac{M_{B'OH}}{M_{BOH}}\times\frac{\alpha_{B'OH}}{\alpha_{BOH}} \Rightarrow \frac{10^{a-13}}{10^{a-14}}=\frac{M_{B'OH}}{M_{BOH}}\times\frac{0/15\times10^{-2}}{0/06\times10^{-2}} \Rightarrow \frac{M_{B'OH}}{M_{BOH}}=4$$

(۱۰ → ۴، ۲/۵ → ۱)

اگر در دمای اتاق، pH باز DOH با درصد یونش ۰/۱۲ برابر a و pH باز AOH با درصد یونش ۰/۳، برابر a+۱ باشد، غلظت مولی آغازی باز AOH، چند برابر غلظت مولی آغازی باز DOH است؟ *(ریاضی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰/۵۰ ۴) ۰/۲۵

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۰ کدام موارد، نادرست هستند؟

الف) با استفاده از شوینده‌های خورندهٔ مناسب، اسیدهای چرب تبدیل به مولکول‌های محلول در آب می‌شوند.

ب) در واکنش جوش شیرین با هیدروکلریک اسید، ۳ فراوردهٔ متفاوت تولید می‌شوند.

پ) شیشه پاک‌کن، محلول حاوی سدیم هیدروکسید و لوله‌بازکن محلول حاوی آمونیاک است.

ت) شویندهٔ مناسب برای لوله‌ای که با $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ مسدود شده است، محلول غلیظ سدیم هیدروکسید است.

۱) الف ـ پ

۲) ب ـ ت

۳) ب ـ پ

۴) الف ـ ت

مشاوره هرگاه سؤالی چندموردی با گزینه‌های «الف، ب و ...» *به تورمان فورد!* حتماً برای بررسی عبارت‌ها، نگاه به گزینه‌ها را فراموش نکنید. توصیهٔ ما این است که از ساده‌ترین عبارت شروع کنید؛ مثلاً در این تست بهتر است که ابتدا عبارت «پ»، را به وضوح رد و گزینه‌های (۲) و (۴) که شامل این عبارت نیستند را حذف کنید. حال از بین عبارت‌های «الف» و «ب» *کافیه* که یکی را بررسی کرده و در نهایت به پاسخ درست تست برسید.

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در اثر این واکنش، اسیدهای چرب $(RCOOH)$ تبدیل به صابون $(RCOO^-Na^+)$ می‌شوند که یک **ترکیب یونی** است، نه مولکولی!

ب) $NaHCO_۳$ ، سدیم هیدروژن کربنات یا همون جوش شیرین است. واکنش این ماده با اسید معده *این‌طوریاست*:

$$NaHCO_۳(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

همان‌طور که از معادلهٔ واکنش مشخص است، در این واکنش، سه فراوردهٔ متفاوت $(H_۲O$ ، $CO_۲$ و $NaCl)$ تولید می‌شود.

پ) سود سوزآور $(NaOH)$ و پتاس سوزآور (KOH) نمونه‌هایی از بازهای بسیار قوی هستند که خاصیت خورندگی دارند و از آن‌ها می‌توان برای بازکردن لوله‌هایی که با چربی مسدود شده‌اند استفاده کرد! اما در شیشه پاک‌کن، از محلول محتوی آمونیاک که یک باز ضعیف است استفاده می‌شود.

ت) برای بازکردن لوله‌هایی که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد تا با اسیدهای چرب واکنش دهد و آن را به یک فراوردهٔ محلول در آب تبدیل کند.

$$RCOOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow RCOONa(aq) + H_۲O(l)$$

توجه: فراوردهٔ واکنش بالا، خود نوعی پاک‌کننده (صابون) است که علاوه بر این‌که در آب حل می‌شود، می‌تواند سبب پخش‌شدن چربی‌های اضافی در آب شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۱ ۵۰ میلی‌لیتر از یک شربت ضداسید دارای ۱/۱۶ میلی‌گرم منیزیم هیدروکسید و جرم معینی از آلومینیم هیدروکسید است. اگر این ضداسید ۹/۵ میلی‌لیتر شیرهٔ معده با $pH = ۱/۷$ را خنثی کند، اختلاف جرم آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید موجود در این شربت چند میلی‌گرم است؟ (معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود و $Al = ۲۷, Mg = ۲۴, O = ۱۶, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

$$I)\ Mg(OH)_۲(s) + HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + H_۲O(l)$$

$$II)\ Al(OH)_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + H_۲O(l)$$

۱) ۲/۷۴ ۲) ۴/۶۹

۳) ۶/۶۴ ۴) ۱۰/۵۴

Hint ابتدا با توجه به جرم $Mg(OH)_۲$ موجود در این ضداسید، محاسبه کن چه مقدار از اسید HCl اولیه با $Mg(OH)_۲$ خنثی شده و چه مقدار از آن باقی می‌ماند که آن مقدار باقی‌مانده با $Al(OH)_۳$ به طور کامل خنثی می‌شود و بر این اساس می‌توان جرم $Al(OH)_۳$ و اختلاف جرم آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید موجود در شربت را به دست آورد!

درس Box می‌خواهیم شما را با مسائل خنثی‌شدن اسید و باز آشنا کنیم. هرچند می‌شه این مسائل رو به کمک استوکیومتری واکنش‌ها حل کرد، اما ما برای راحتی شما، یک راه حل سریع پیشنهاد می‌کنیم. شما می‌توانید در حل این‌گونه مسائل از رابطهٔ زیر استفاده کنید:

$$\underset{\text{ظرفیت اسید}}{n_a} \cdot \underset{\text{غلظت اسید}}{M_a} \cdot \underset{\text{حجم اسید}}{V_a} = \underset{\text{ظرفیت باز}}{n_b} \cdot \underset{\text{غلظت باز}}{M_b} \cdot \underset{\text{حجم باز}}{V_b}$$

توجه: n_a و n_b (ظرفیت اسید و باز) برابر تعداد هیدروژن اسیدی یا OH^- است که اسید و باز در واکنش شرکت داده‌اند.

اسید	n_a	باز	n_b
$HNO_۳, HBr, HCl$	۱	$NaOH, KOH$	۱
$H_۲SO_۴$	۲	$Ba(OH)_۲$	۲

توجه: اگر در سؤالی با آمونیاک ($NH_۳$) سروکار داشتید، n_b برای آن را ۱ در نظر بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش‌های انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$Mg(OH)_۲(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

$$Al(OH)_۳(s) + ۳HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

گام دوم: با توجه به جرم منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_۲$) موجود در شربت، محاسبه می‌کنیم چند مول از اسید HCl اولیه با $Mg(OH)_۲$ واکنش داده و خنثی می‌شود:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Mg(OH)_۲}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{HCl}} \Rightarrow \frac{۱/۱۶ \times ۱۰^{-۳}}{۱ \times ۵۸} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲ \times \cancel{۱/۱۶}^{۱} \times ۱۰^{-۳}}{\cancel{۵۸}_{۵۰}} = ۴ \times ۱۰^{-۵}\ molHCl$$

یه جور دیگه شمار مول‌های HCl که به طور کامل با $Mg(OH)_۲$ موجود در شربت خنثی می‌شود *رو می‌شه بدون استفاده از معادلهٔ واکنش هم حساب کتاب کرد:*

$$\underset{\text{ظرفیت اسید}}{n_a} \cdot \underset{\text{غلظت اسید}}{M_a} \cdot \underset{\text{حجم اسید}}{V_a} = \underset{\text{ظرفیت باز}}{n_b} \cdot \underset{\text{غلظت باز}}{M_b} \cdot \underset{\text{حجم باز}}{V_b} \Rightarrow ۱ \times \underbrace{M_a \times V_a}_{\text{شمار مول‌های اسیدی}} = ۲ \times \frac{\cancel{۱/۱۶}^{۱} \times ۱۰^{-۳}}{\cancel{۵۸}} \times \cancel{۵۰}$$

$$\Rightarrow \text{شمار مول‌های اسید} = ۴ \times ۱۰^{-۵}\ molHCl$$

گام سوم: شمار مول‌هایی از اسید اولیه که با $Al(OH)_۳$ خنثی می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت مولی اولیهٔ HCl} = [H^+] = ۱۰^{-۱/۷} = ۱۰^{۰/۳} \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$$

$$\text{تعداد مول اولیهٔ HCl} = ۹/۵\ mL \times \frac{۱L}{۱۰^۳ mL} \times \frac{۰/۰۲ molHCl}{۱L} = ۱۹ \times ۱۰^{-۵}\ molHCl$$

$$\text{تعداد مول HCl خنثی‌شده با } Al(OH)_۳ = ۱۹ \times ۱۰^{-۵} - ۴ \times ۱۰^{-۵} = ۱۵ \times ۱۰^{-۵}\ molHCl$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گام چهارم: با توجه به شمار مول‌های HCl ای که با $Al(OH)_3$ واکنش داده و خنثی می‌شود، جرم $Al(OH)_3$ شرکت‌کننده در این واکنش را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Al(OH)_3}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{HCl}} \Rightarrow \frac{x}{1\times 78} = \frac{15\times 10^{-5}}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{26\cancel{78}\times 15\times 10^{-5}}{\cancel{3}_{1}} = 390\times 10^{-5}\,g\times\frac{10^{3}\,mg}{1g} = 3/90\,mg\,Al(OH)_3$$

یه‌جور دیگه *بازم!* جرم $Al(OH)_3$ موجود در شربت را بدون استفاده از معادلهٔ واکنش، *می‌شه حسابید:*

$$\underset{\text{ظرفیت اسید}}{n_a}\cdot\underset{\text{غلظت اسید}}{M_a}\cdot\underset{\text{حجم اسید}}{V_a} = \underset{\text{ظرفیت باز}}{n_b}\cdot\underset{\text{غلظت باز}}{M_b}\cdot\underset{\text{حجم باز}}{V_b} \Rightarrow 1\times \underbrace{M_a\times V_a}_{\text{شمار مول‌های اسید}} = \cancel{3}\times\frac{\frac{x}{\cancel{78}}}{\cancel{50}}\times\cancel{50}$$

$$\Rightarrow x = 26\times 15\times 10^{-5}\,g\times\frac{10^{3}\,mg}{1g} = 3/90\,mg\,Al(OH)_3$$

گام پنجم: اختلاف جرم $Al(OH)_3$ و $Mg(OH)_2$ موجود در شربت را محاسبه کنیم:

اختلاف جرم $3/90-1/16=2/74\,mg$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۲ کدام مورد درست است؟

۱) اگر غلظت یون هیدرونیوم در شیرهٔ معده برابر ۰/۰۳ مولار باشد، pH آن برابر ۲/۷ خواهد بود.

۲) اگر pH معده در زمان استراحت برابر ۳/۷ باشد، غلظت یون هیدرونیوم در این حالت برابر ۳×۱۰^{-۴} مولار خواهد بود.

۳) با توجه به ویژگی و کاربرد سدیم هیدروژن کربنات، محلول جوش شیرین در آب خاصیت بازی دارد.

۴) برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها شیر منیزی می‌افزایند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نام مادهٔ $NaHCO_3$، سدیم هیدروژن کربنات یا همون جوش شیرین است. یک مول جوش شیرین، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.

توجه: با توجه به این‌که جوش شیرین یک ضداسید است، می‌توان گفت محلول این ماده خاصیت بازی دارد، به همین دلیل برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها، به آن‌ها جوش شیرین اضافه می‌کنند، زیرا این مادهٔ بازی می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر $[H^+]$ در شیرهٔ معده برابر $۰/۰۳mol.L^{-۱}$ باشد، pH برابر است با:

$$۰/۰۳mol.L^{-۱} \Rightarrow pH=-\log[H^+]=-\log۰/۰۳=-\log(۳\times۱۰^{-۲})=۲-\log۳=۲-۰/۴۸=۱/۵۲$$

گزینهٔ (۲): در زمان استراحت معده که غذا در آن وجود ندارد، pH معده برابر ۳/۷ است. از این‌رو غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر است با:

$$[H^+]=۱۰^{-pH}=۱۰^{-۳/۷}=۱۰^{۰/۳}\times۱۰^{-۴}=۲\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}$$

گزینهٔ (۴): *متن کتاب به این زودی یادت رفته؟!* برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها به شوینده‌ها جوش شیرین می‌افزایند.

۱) pH شیرهٔ معده را حساب کنید (غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود $۰/۰۳molL^{-۱}$ است). *(خود را بیازمایید ـ صفحهٔ ۳۲)*

۲) در زمان استراحت، pH معده برابر با ۳/۷ است. غلظت یون هیدرونیوم را در این حالت حساب کنید.

۳) با توجه به ویژگی و کاربرد سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) مطابق جدول بالا:

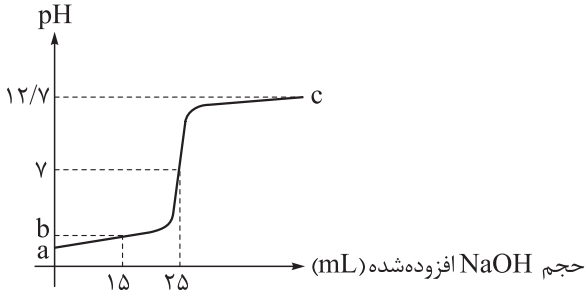
آ) پیش‌بینی کنید که محلول سدیم هیدروژن کربنات در آب چه خاصیتی دارد؟ چرا؟

ب) توضیح دهید چرا برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین می‌افزایند؟

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۳ با توجه به نمودار زیر که تغییرات pH ۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار HCl را بر اثر افزودن تدریجی محلول NaOH نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟ $(Na=۲۳, O=۱۶, H=۱ : g.mol^{-1} \;;\; \log ۱۳ = ۱/۱۱)$



۱) اختلاف عددی بین a و b برابر ۰/۵۱ است.

۲) در نقطهٔ c، حجم NaOH اضافه‌شده برابر ۵۰ میلی‌لیتر است.

۳) اگر ۵۰ میلی‌لیتر از محلول NaOH این آزمایش با ۴۰ میلی‌لیتر $H_۲SO_۴$ واکنش دهد، پس از خنثی‌شدن کامل، غلظت NaOH باقی‌مانده کم‌تر از ۰/۰۰۱ ppm است.

۴) در لحظه‌ای که حجم محلول ۸۰ میلی‌لیتر می‌باشد، pH محلول تقریباً ۱۳ است.

مشاوره در کنکورهای نظام جدید، تست‌های خنثی‌شدن معمولاً مربوط به نقطهٔ خنثی‌شدن کامل است، ولی در کنکور ۱۴۰۳ سر و کلهٔ خنثی‌شدن ناقص هم پیدا شده! بررسی این تست به شما کمک می‌کند که دید خیلی خوبی نسبت به نقطه‌های قبل و بعد از خنثی‌شدن کامل پیدا کنید.

نکته وقتی یک اسید قوی و یک باز قوی به طور کامل خنثی شوند، pH در نقطهٔ خنثی‌شدن کامل برابر با ۷ می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نکتهٔ بالا و با استفاده از حجم محلول NaOH اضافه‌شده در نقطهٔ خنثی‌شدن کامل (یعنی ۲۵ میلی‌لیتر)، می‌توانیم غلظت محلول NaOH را حساب کنیم.

در نقطهٔ خنثی‌شدن کامل داریم:

$$n_a.M_a.V_a = n_b.M_b.V_b \Rightarrow ۱\times ۰/۱\times ۵۰\,mL = ۱\times M_b\times ۲۵\,mL \Rightarrow M_b = ۰/۲M$$

گام دوم: حجم محلول در نقطهٔ خنثی‌شدن کامل $(pH=۷)$ برابر با ۷۵ میلی‌لیتر $(۵۰+۲۵=۷۵\,mL)$ است، بنابراین زمانی که حجم محلول به ۸۰ میلی‌لیتر برسد، مقدار بیشتری از محلول NaOH استفاده کرده‌ایم و محلول خاصیت بازی خواهد داشت.

با توجه به حجم اولیهٔ اسید (۵۰ میلی‌لیتر)، حجم NaOH استفاده‌شده تا این نقطه برابر ۳۰ میلی‌لیتر است $(۸۰-۵۰=۳۰)$

گام سوم: با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توانیم غلظت هیدروکسید را در این نقطه حساب کنیم.

$$[OH^-] = \frac{n_b.M_b.V_b - n_a.M_a.V_a}{V_a+V_b} = \frac{۱\times ۰/۲\times ۳۰ - ۱\times ۰/۱\times ۵۰}{۵۰+۳۰} = \frac{۶-۵}{۸۰} = \frac{۱}{۸۰} = \frac{۱}{۸}\times ۱۰^{-۱}M$$

گام چهارم: حالا pOH و سپس pH را حساب می‌کنیم.

$$pOH = -\log[OH^-] = -\log(\frac{۱}{۸}\times ۱۰^{-۱}) = ۱-\log\frac{۱}{۸} = ۱+\log ۸ = ۱+۳\log ۲ = ۱+۳(۰/۳) = ۱/۹$$

$$\Rightarrow pH = ۱۴ - pOH = ۱۴ - ۱/۹ = ۱۲/۱$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عدد a، نشان‌دهندهٔ pH محلول، قبل از اضافه‌کردن NaOH است. یعنی pH محلول HCl با غلظت ۰/۱ مولار.

pH محلول HCl ۰/۱ مولار برابر است با:

$$[H^+] = \alpha M_a = ۱\times ۰/۱ = ۰/۱$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log ۰/۱ = ۱$$

عدد b، نشان‌دهندهٔ pH محلول، بعد از اضافه‌شدن ۱۵ میلی‌لیتر محلول NaOH با غلظت ۰/۲ مولار است. از آن‌جا که NaOH اضافه‌شده، کم‌تر از نقطهٔ خنثی‌شدن کامل است، پس محلول حاصل هم‌چنان خاصیت اسیدی خواهد داشت.

با استفاده از رابطهٔ زیر، می‌توانیم غلظت هیدرونیوم را در این نقطه حساب کنیم.

$$[H^+] = \frac{n_a.M_a.V_a - n_b.M_b.V_b}{V_a+V_b} = \frac{۱\times ۰/۱\times ۵۰ - ۱\times ۰/۲\times ۱۵}{۵۰+۱۵} = \frac{۵-۳}{۶۵} = \frac{۲}{۶۵}M$$

حالا pH را حساب می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(\frac{۲}{۶۵}) = -\log ۲ + \log \overbrace{۶۵}^{۱۳\times ۵} = -\log ۲ + \log ۱۳ + \log ۵ = -۰/۳ + ۱/۱۱ + ۰/۷ = ۱/۵۱$$

بنابراین اختلاف عددی بین نقطهٔ a $(pH=۱)$ و نقطهٔ b $(pH=۱/۵۱)$ برابر ۰/۵۱ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

گزینهٔ (۲): در نقطهٔ C، pH برابر با ۱۲/۷ است، یعنی غلظت هیدروکسید برابر است با:

$$pOH = ۱۴ - pH = ۱۴ - ۱۲/۷ = ۱/۳$$

$$[OH^-] = ۱۰^{-pOH} = ۱۰^{-۱/۳} = ۱۰^{-۲+۰/۷} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۲} M$$

حالا با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ غلظت هیدروکسید، بعد از نقطهٔ خنثی‌شدن، می‌بینیم که حجم ۵۰ میلی‌لیتر از NaOH، به غلظت ۵×۱۰^{-۲} مولار برای (OH^-) ختم می‌شود.

$$[OH^-] = \frac{n_b.M_b.V_b - n_a.M_a.V_a}{V_a + V_b} = \frac{۱ \times ۰/۲ \times ۵۰ - ۱ \times ۰/۱ \times ۵۰}{۵۰ + ۵۰} = \frac{۱۰ - ۵}{۱۰۰} = \frac{۵}{۱۰۰} = ۵ \times ۱۰^{-۲} M$$

گزینهٔ (۳): این گزینه نیاز به حساب و کتاب نداره. از آن‌جا که واکنش اسید قوی $(H_۲SO_۴)$ با باز قوی (NaOH) یک واکنش کامل محسوب می‌شود، پس در نقطهٔ خنثی‌شدن کامل، اسید و باز، به تمامی مصرف می‌شوند و چیزی از آن‌ها باقی نمی‌ماند، پس حتماً غلظت آن کم‌تر از ۰/۰۰۱ ppm خواهد بود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۴ کدام مورد، نادرست است؟

۱) از دستاوردهای الکتروشیمی می‌توان به پیاده‌کردن اصول شیمی سبز و تولید انرژی گرمایی پاک اشاره کرد.

۲) از قلمروهای اصلی علم الکتروشیمی می‌توان به کسب اطمینان از کیفیت تولید فراورده‌های غذایی اشاره کرد.

۳) در پدیده‌های طبیعی همچون تندر و آذرخش بخشی از انرژی به شکل انرژی الکتریکی میان سامانه و محیط پیرامون جاری می‌شود.

۴) دو رکن اساسی تحقق فناوری‌هایی که باعث آسایش و رفاه می‌شوند، دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

تولید **انرژی الکتریکی پاک و ارزان** (نه انرژی گرمایی!) دستاوردی از دانش الکتروشیمی است. الکتروشیمی علاوه بر تهیهٔ مواد جدید به کمک انرژی الکتریکی می‌تواند در راستای **پیاده‌کردن اصول شیمی سبز** گام بردارد. *رمش گرم!*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲):

نکته

سه قلمرو مهم الکتروشیمی

- تأمین انرژی (مانند باتری‌ها و سلول سوختی و سوخت آن‌ها)

- تولید مواد (مانند برقکافت و آبکاری)

- اندازه‌گیری و کنترل کیفی (اطمینان از کیفیت فراورده‌ها، مانند فراورده‌های غذایی)

گزینهٔ (۳): *یادتون باشه که* پدیده‌های طبیعی مثل تندر یا آذرخش نشان‌دهندهٔ جاری‌شدن انرژی الکتریکی هستند.

گزینهٔ (۴): آسایش و رفاه در جهان همواره در گرو دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی *بوده و هست!*

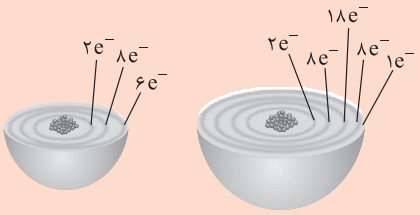
دو رکن اساسی در تحقق فناوری

- دستیابی به مواد مناسب
- تأمین انرژی

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۵ با توجه به شکل زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



(A) (B)

- اتم A با گرفتن دو الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسد.
- اتم B یک عنصر اکسندهٔ قوی است و واکنش‌پذیری بالایی دارد.
- تبدیل اتم A به یون پایدار آن به صورت: $A + 2e^- \rightarrow A^{2-}$ ، انجام می‌شود.
- در واکنش A با B، به ازای انتقال دو مول الکترون، یک مول فراورده تشکیل می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند.

عنصر A، دارای ۲ لایهٔ اول پُر و لایهٔ سوم با ۶ الکترون می‌باشد، پس مجموع الکترون‌های آن برابر $۲+۸+۶=۱۶$ است که همان عنصر $_{۱۶}S$ می‌باشد:

$$A \Rightarrow {}_{۱۶}S = ۱s^۲ / \underbrace{۲s^۲۲p^۶}_{\text{۸ الکترون در لایهٔ دوم}} / \underbrace{۳s^۲۳p^۴}_{\text{۶ الکترون در لایهٔ سوم}}$$

عنصر B ، دارای ۳ لایهٔ اول پر و لایه‌های چهارم و پنجم، به ترتیب با ۸ و ۱ الکترون می‌باشد؛ پس مجموع الکترون‌های آن برابر $۲+۸+۱۸+۸+۱=۳۷$ است و همان عنصر $_{۳۷}Rb$ می‌باشد:

$$B \Rightarrow {}_{۳۷}Rb : ۱s^۲ / ۲s^۲۲p^۶ / \underbrace{۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}}_{\text{۱۸ الکترون در لایهٔ سوم}} / \underbrace{۴s^۲۴p^۶}_{\text{۸ الکترون در لایهٔ چهارم}} / \underbrace{۵s^۱}_{\text{یک الکترون در لایهٔ پنجم}}$$

بررسی عبارت‌ها:

- اتم عنصر گوگرد $(_{۱۶}S)$، با گرفتن دو الکترون و تشکیل یون $_{۱۶}S^{2-}$، به آرایش گاز نجیب آرگون $(_{۱۸}Ar)$ می‌رسد:

$$_{۱۶}S^{2-} : ۱s^۲ / ۲s^۲۲p^۶ / ۳s^۲۳p^۶ \Rightarrow \text{مشابه آرایش الکترونی گاز نجیب آرگون}$$

- فلز روبیدیم $(_{۳۷}Rb)$، جزء فلزات قلیایی است و در نتیجه واکنش‌پذیری بالایی دارد اما *هواستون باشه که* فلزهایی که در واکنش‌های اکسایش ـ کاهش شرکت می‌کنند، همواره کاهنده‌اند؛ زیرا فلزها هیچ‌وقت نمی‌توانند الکترون بگیرند و کاهش یابند (فلزها نمی‌توانند به یون منفی تبدیل شوند.)
- نیم‌واکنش کاهش اتم گوگرد به یون پایدار آن (*همون* S^{2-} *فورمون!*)، به صورت زیر است و اتم گوگرد با گرفتن دو الکترون، به یون سولفید تبدیل می‌شود:

$$S + 2e^- \rightarrow S^{2-}$$

- فراوردهٔ یونی حاصل از واکنش دو عنصر گوگرد و روبیدیم، روبیدیم سولفید (Rb_2S) است.

نکته

شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر مول از یک ترکیب یونی، برابر است با:

شمار (زیروند) آنیون × قدرمطلق بار آنیون = شمار (زیروند) کاتیون × بار کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله‌شده

مثلاً! شمار الکترون‌های مبادله‌شده برای تشکیل یک مول Rb_2S را می‌توانیم به صورت زیر حساب کنیم:

$$\text{تعداد } e^- \text{ مبادله‌شده} = \underbrace{۱}_{\text{بار کاتیون}} \times \underbrace{۲}_{\text{زیروند کاتیون}} \quad \text{یا} \quad \underbrace{|-۲|}_{\text{قدرمطلق بار آنیون}} \times \underbrace{۱}_{\text{زیروند آنیون}} = ۲\text{mole}^-$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

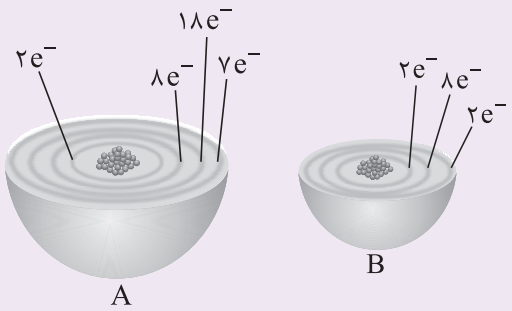
با توجه به شکل زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ (ریاضی داخل ـ ۱۴۰۱)

اتم A با گرفتن یک الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسد.

اتم B یک عنصر اکسندهٔ قوی است و واکنش‌پذیری بالایی دارد.

تبدیل اتم A به یون پایدار آن، به صورت: $A + e^- \rightarrow A^-$، انجام می‌شود.

در واکنش A با B، به ازای انتقال دو مول الکترون، یک مول فراورده تشکیل می‌شود.



۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۶ کدام مورد، نادرست است؟

۱) در یک واکنش اکسایش ـ کاهش، ماده‌ای که الکترون گرفته، کاهش و ماده‌ای که الکترون از دست داده، اکسایش می‌یابد.

۲) اغلب فلزها در واکنش با نافلزها، تمایل دارند که با دادن الکترون، سبب کاهش نافلز شوند، از این‌رو اغلب نقش کاهنده دارند.

۳) در واکنش تیغهٔ روی، با محلول مس (II) سولفات، انتقال الکترون تنها در سطح فلز روی رخ می‌دهد.

۴) همهٔ فلزها در واکنش با محلول اسیدها، گاز هیدروژن و نمک تولید می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

هواستون باشه که اغلب فلزها (نه همه!) در واکنش با محلول اسیدها، گاز هیدروژن و نمک تولید می‌کنند:

فلز + محلول اسید $\rightarrow$ گاز هیدروژن + نمک

یعنی بعضی فلزها با محلول اسیدها واکنش نمی‌دهند (مثلاً Ag با $HCl(aq)$ واکنش نمی‌دهد)، همچنین از این جملهٔ کتاب برمیاد که در واکنش بعضی فلزها با محلول اسیدها، گاز هیدروژن تولید نمی‌شه، اگه دلتون خواست، فراورده‌های واکنش فلز مس با نیتریک اسید *رو یه سرچ بکنین!*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در یک واکنش اکسایش ـ کاهش، به گونه‌ای که اکسایش می‌یابد، کاهنده و به گونه‌ای که کاهش می‌یابد، اکسنده می‌گویند؛ به عبارت دیگر کاهنده ماده‌ای است که با دادن الکترون به گونه‌های دیگر، آن‌ها را کاهش می‌دهد (می‌کاهد) و خود طی این فرایند، اکسایش می‌یابد (اکسید می‌شود)، به همین ترتیب، اکسنده ماده‌ای است که با گرفتن الکترون از گونه‌های دیگر، آن‌ها را اکسید می‌کند و خود طی این فرایند کاهش می‌یابد.

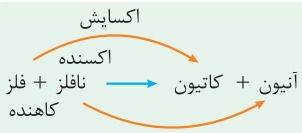
کاهنده ← خودش اکسایش می‌یابد (الکترون از دست می‌دهد) و گونه‌های دیگر را کاهش می‌دهد.

اکسنده ← خودش کاهش می‌یابد (الکترون می‌گیرد) و گونه‌های دیگر را اکسید می‌کند.

گزینهٔ (۲):

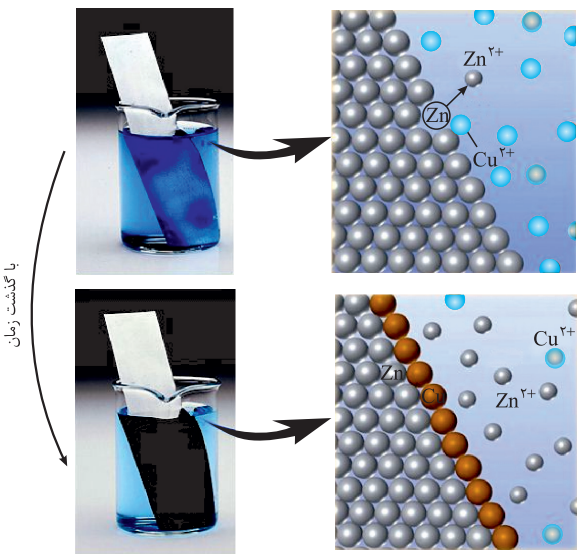
نکته

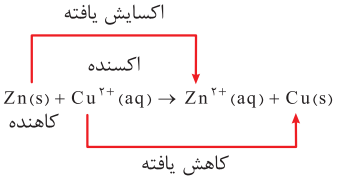
اغلب (نه همه!) فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به نافلزها داده و ضمن اکسایش به کاتیون تبدیل شوند. نافلزها با گرفتن یک یا چند الکترون کاهش یافته و به آنیون تبدیل می‌شوند. از این‌رو فلزها اغلب (نه همیشه!) کاهنده و نافلزها اغلب (نه همیشه!) اکسنده هستند.



توجه: همهٔ فلزها در واکنش با نافلزها الکترون از دست نمی‌دهند. برای نمونه فلز آلومینیم تنها به فلوئور. اکسیژن و برخی بنیان‌های اکسیژن‌دار مانند SO_4^{2-}، PO_4^{2-} و ... الکترون می‌دهد و با آن‌ها پیوند یونی تشکیل می‌دهد. ولی با سایر نافلزها مانند برم و ... الکترون به اشتراک می‌گذارد و با آن‌ها پیوند کووالانسی (اشتراکی) تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۳): در واکنش تیغهٔ روی با محلول آبی‌رنگ مس (II) سولفات، اتم‌های Zn دو الکترون به یون‌های Cu^{2+} می‌دهند (اکسایش می‌یابند) و به صورت یون‌های Zn^{2+} وارد محلول می‌شوند. یون‌های Cu^{2+} هم با گرفتن همان دو الکترون کاهش می‌یابند و به صورت $Cu(s)$ روی تیغه می‌نشینند.





با توجه به شکل بالا، مشخص است که در این واکنش، انتقال و تبادل الکترون‌ها، تنها در سطح فلز روی (تیغهٔ Zn) رخ می‌دهد:

دلیلش هم آن است که الکترون‌ها تنها می‌توانند در رسانای الکترونی (فلز روی) جابه‌جا شوند، پس الکترون نمی‌تواند *همین‌پوری* وارد محلول (که رسانای یونی است) وارد شود.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۷ کدام مورد درست است؟ $(Cl = ۳۵/۵, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) در واکنش فلز سدیم با گاز کلر اگر ۱۴۲ گرم گونهٔ کاهنده مصرف شود، ۳۱۴ گرم فراورده تولید می‌شود.

۲) پس از موازنهٔ واکنش $Cr(s) + Fe^{۳+}(aq) \rightarrow Cr^{۳+}(aq) + Fe^{۲+}(aq)$، مجموع ضریب گونهٔ اکسنده و گونهٔ اکسایش‌یافته برابر ۶ می‌باشد.

۳) در واکنش آلومینیم با محلول هیدروکلریک اسید، نسبت ضریب گونهٔ اکسنده به ضریب گاز تولیدشده برابر ضریب گونهٔ کاهنده است.

۴) اغلب نافلزها اکسنده هستند و همیشه در یک واکنش اکسایش ـ کاهش موازنه‌شده، تعداد یون‌های با بار همنام در دو سمت معادله برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در واکنش فلز آلومینیم (Al) با محلول هیدروکلریک اسید (HCl)، گاز هیدروژن و نمک $AlCl_۳$ تولید می‌شود:

$$۲Al(s) + ۶HCl(aq) \rightarrow ۲AlCl_۳(aq) + ۳H_۲(g)$$

توجه کنید که در این واکنش یون Cl^- نه الکترون گرفته و نه الکترون از دست داده و *به‌هورایی نقش تماشاچی رو داره*، پس واکنش کلی *رو می‌تونیم* به صورت زیر بنویسیم:

$$\underset{\text{کاهنده}}{۲Al(s)} + \underset{\text{اکسنده}}{۶H^+(aq)} \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳H_۲(g)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\text{ضریب گونهٔ اکسنده}}{\text{ضریب گاز } H_۲} = \text{ضریب گونهٔ کاهنده} \Rightarrow \frac{۶}{۳} = ۲$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در واکنش فلز سدیم با گاز کلر، فلز سدیم (Na) اکسایش می‌یابد و نقش کاهنده را دارد و گاز کلر کاهش می‌یابد و نقش اکسنده را دارد.

معادلهٔ موازنه‌شده‌ش این‌جوریاس:

$$\underset{\text{کاهنده}}{۲Na(s)} + \underset{\text{اکسنده}}{Cl_۲(g)} \rightarrow ۲NaCl(s)$$

خب باید ببینیم اگر ۱۴۲ گرم سدیم مصرف شود، چند گرم فراورده تولید می‌شود.

یه‌جور دیگه ✔

استفاده از کسر تبدیل:

$$۱۴۲gNa \times \frac{۱molNa}{۲۳gNa} \times \frac{۲molNaCl}{۲molNa} \times \frac{۵۸/۵gNaCl}{۱mol NaCl} \simeq ۳۶۱\,g\ NaCl$$

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Na}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{NaCl}} \Rightarrow \frac{۱۴۲}{۲ \times ۲۳} = \frac{x}{۲ \times ۵۸/۵} \Rightarrow x \simeq ۳۶۱\,g$$

گزینهٔ (۲): در این واکنش Cr به $Cr^{۳+}$ اکسایش و $Fe^{۳+}$ به $Fe^{۲+}$ کاهش یافته است.

نیم‌واکنش اکسایش : $Cr \rightarrow Cr^{۳+} + ۳e^-$

نیم‌واکنش کاهش : $Fe^{۳+} + e^- \rightarrow Fe^{۲+}$

خب برای این‌که تعداد الکترون‌ها در دو نیم‌واکنش برابر شود، نیم‌واکنش کاهش را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$Cr \rightarrow Cr^{۳+} + ۳e^-$$

$$۳Fe^{۳+} + ۳e^- \rightarrow ۳Fe^{۲+}$$

واکنش کلی : $\underset{\substack{\text{کاهنده}\\(\text{اکسایش یافته})}}{Cr} + \underset{\substack{\text{اکسنده}\\(\text{کاهش یافته})}}{۳Fe^{۳+}} \rightarrow Cr^{۳+} + ۳Fe^{۲+}$

مجموع ضریب گونهٔ اکسنده $(Fe^{۳+})$ و گونهٔ اکسایش‌یافته (Cr) برابر ۴ است.

گزینهٔ (۴): درسته که اغلب نافلزها اکسنده هستند اما تعداد یون‌های با بار همنام ممکن است در دو سمت معادلهٔ واکنش برابر نباشند، مثلاً در واکنش فلز Al با $HCl(aq)$، تعداد کاتیون‌ها در سمت چپ و راست با هم برابر نیست. (سمت واکنش‌دهنده‌ها شش‌تا H^+ داریم اما سمت فراورده‌ها دوتا $Al^{۳+}$)

$$۲Al(s) + ۶H^+(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳H_۲(g)$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۸ با بررسی نیم‌واکنش زیر پس از موازنه، کدام مورد درست است؟ $(Mn = 55, O = 16 : g.mol^{-1})$

$$Mn^{2+}(aq) + H_2O(l) \rightarrow MnO_2(s) + H^+(aq) + e^-$$

۱) اگر در آغاز واکنش غلظت Mn^{2+}، ۰/۸ مول بر لیتر باشد، با آزادشدن ۰/۴ مول الکترون غلظت نهایی آن به ۰/۴ مول بر لیتر می‌رسد.

۲) در صورتی که با انجام این نیم‌واکنش، pH ۱/۳ واحد کاهش یابد، ۰/۰۱ مول الکترون تولید می‌شود.

۳) ضریب H^+ در نیم‌واکنش مطرح‌شده با ضریب H_2O در نیم‌واکنش زیر برابر است.

$$NO_3^-(aq) + H^+(aq) + e^- \rightarrow NO(g) + H_2O(l)$$

۴) به ازای تولید ۱۷/۴ گرم MnO_2، $24/08 \times 10^{22}$ الکترون تولید می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اول واکنش را موازنه می‌کنیم.

$$1Mn^{2+}(aq) + 2H_2O(l) \rightarrow 1MnO_2(s) + 4H^+(aq) + 2e^-$$

به ازای تولید هر یک مول MnO_2، ۲ مول الکترون آزاد می‌شود:

استفاده از کسر تبدیل:

$$17/4 g MnO_2 \times \frac{1 mol MnO_2}{87 g MnO_2} \times \frac{2 mole^-}{1 mol MnO_2} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1 mole^-} = 24/08 \times 10^{22} e^-$$

یه جور دیگه ✔

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{جرم}}_{MnO_2}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{MnO_2}} = \frac{\underbrace{\text{تعداد}}_{\text{الکترون}}}{\underbrace{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}}_{\text{الکترون}}} \Rightarrow \frac{17/4}{1 \times 87} = \frac{x}{2 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow x = 24/08 \times 10^{22} e^-$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به نیم‌واکنش موازنه‌شده، به ازای مصرف ۱ مول Mn^{2+}، ۲ مول الکترون آزاد می‌شود؛ حالا اگر ۰/۴ مول الکترون آزاد شود خواهیم داشت:

$$0/4 mole^- \times \frac{1 mol Mn^{2+}}{2 mole^-} \simeq 0/2 mol Mn^{2+}$$

اما نکته این‌جاست که ما حجم محلول را نداریم تا بررسی کنیم غلظت آن چه‌قدر تغییر خواهد کرد. بدون داشتن حجم، نمی‌توانیم غلظت نهایی رو حساب کنیم؛ بنابراین درستی این گزینه رو نمی‌شه بررسی کرد.

گزینهٔ (۲): وقتی pH، ۱/۳ واحد کاهش یابد، یعنی غلظت یون هیدرونیوم، $10^{1/3}$ واحد یعنی ۲۰ برابر شده است. اما باز هم برای بررسی این‌که چند مول H^+ و در نتیجه چند مول الکترون تولید شده است، نیاز به حجم محلول داریم؛ بنابراین درستی این گزینه رو هم نمی‌شه بررسی کرد.

گزینهٔ (۳): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش داده‌شده، به صورت زیر است:

$$\underset{+5}{1NO_3^-}(aq) + 4H^+(aq) + 3e^- \rightarrow \underset{+2}{1NO}(g) + 2H_2O(l)$$

(۳ درجه کاهش)

ضریب H^+ در واکنش اکسایش Mn^{2+}، برابر ۴، اما ضریب H_2O در واکنش بالا، برابر ۲ می‌باشد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۹ با توجه به واکنش‌های زیر که در شرایط یکسان، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شوند، کدام مطالب نادرست است؟ $(Zn = 65 g.mol^{-1})$

الف) $Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$

ب) $Cu^{2+}(aq) + Mn(s) \rightarrow Cu(s) + Mn^{2+}(aq)$

پ) $Zn(s) + V^{3+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + V^{2+}(aq)$

۱) واکنش‌پذیری فلزهای آلومینیم و منگنز بیشتر از مس است.

۲) مجموع ضرایب واکنش موازنه‌شدهٔ (الف)، ۱/۶۷ برابر مجموع ضرایب واکنش موازنه‌شدهٔ (پ) است.

۳) محصولات واکنش (الف) می‌تواند فلز مس و $Al^{3+}(s)$ باشند.

۴) در واکنش (پ) با مبادلهٔ $2/408 \times 10^{23}$ الکترون، ۱۳ گرم فلز روی مصرف می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

۱) با توجه به این‌که واکنش‌های داده‌شده به طور خودبه‌خودی (طبیعی) انجام می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که:

الف) $Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow$ — قدرت کاهندگی: $Al > Cu$

ب) $Cu^{2+}(aq) + Mn(s) \rightarrow Cu(s) + Mn^{2+}(aq)$ — قدرت کاهندگی: $Mn > Cu$

پ) $Zn(s) + V^{3+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + V^{2+}(aq)$ — قدرت کاهندگی: $Zn > V^{2+}$

با توجه به واکنش‌های (الف) و (ب)، فلزهای Al و Mn، قدرت کاهندگی بیشتری از فلز Cu دارند.

۲) معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌ها *این‌هوریاس*:

الف) $2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$

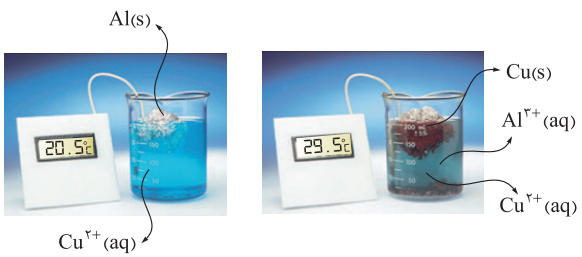
پ) $Zn(s) + 2V^{3+}(aq) \rightarrow 1Zn^{2+}(aq) + 2V^{2+}(aq)$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع ضرایب (الف)}}{\text{مجموع ضرایب (پ)}} = \frac{10}{6} \simeq 1/67$$

۳) در واکنش (الف)، فلز آلومینیم در محلول آبی از کاتیون مس (II) $(Cu^{2+}(aq))$ قرار دارد؛ با توجه به این‌که فلز آلومینیم $(Al(s))$ کاهندهٔ قوی‌تری است، الکترون‌های خود را از دست می‌دهد و به صورت یون $Al^{3+}(aq)$ (نه $Al^{3+}(s)$!) وارد محلول می‌شود. از طرفی دیگر یون‌های $Cu^{2+}(aq)$ موجود در محلول، الکترون‌هایی که $Al(s)$ از دست داده بود را دریافت کرده و به صورت اتم‌های مس $(Cu(s))$ روی تیغهٔ (فلز) آلومینیم رسوب می‌کنند.

$$Al(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Al^{3+}(aq) + Cu(s)$$

دقت داشته باشید که در این واکنش فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند، یعنی آنتالپی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌هاست و بر اثر انجام این واکنش، دمای محلول افزایش می‌یابد (گرماده، $\Delta H < 0$).



۴) در واکنش (پ) به ازای مصرف ۱ مول Zn، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود؛ *ولا* حساب می‌کنیم اگر $2/408 \times 10^{23}$ الکترون مبادله شود، چند گرم Zn مصرف می‌شود:

$$1Zn(s) + 2V^{3+}(aq) \rightarrow 1Zn^{2+}(aq) + 2V^{2+}(aq) \Rightarrow \begin{cases} \text{نیم‌واکنش اکسایش}: Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^- \\ \text{نیم‌واکنش کاهش}: V^{3+}(aq) + e^- \rightarrow V^{2+}(aq) \end{cases}$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$2/408 \times 10^{23} e^- \times \frac{1 mole^-}{6/02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 molZn}{2 mole^-} \times \frac{65 gZn}{1 molZn} = 13 gZn$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$Zn \sim 2e^-$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zn}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}}_{\text{الکترون}}} \Rightarrow \frac{x}{1 \times 65} = \frac{2/408 \times 10^{23}}{2 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow x = 13 gZn$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۰ با توجه به جدول زیر که داده‌هایی را از قراردادن برخی تیغه‌های فلزی در محلول مس (II) سولفات در دمای $20^\circ C$ نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟ $(Zn = 65, Cu = 64, Fe = 56, Al = 27 : g.mol^{-1})$

شمارهٔ آزمایش	نماد شیمیایی فلز	دمای مخلوط واکنش پس از مدتی ($^\circ C$)	جرم نهایی تیغه (g)
۱	Zn	۲۶	b
۲	Al	a	c
۳	Fe	۲۳	d

۱) اگر فلز M بتواند مس را از مس (II) سولفات آزاد کند، اما بر محلول حاوی کاتیون آهن بی‌اثر باشد، به یقین دمای مخلوط واکنش فلز M با محلول مس (II) سولفات از دمای a کم‌تر است.

۲) اگر جرم یکسانی از هر تیغه را به صورت جداگانه در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم، مقایسهٔ $c > d > b$ را برای جرم نهایی هر تیغه داریم.

۳) در صورتی که تیغه‌ای از جنس آلومینیم را در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار مس (II) سولفات قرار دهیم و تغییرات جرم تیغه ۶/۹ گرم باشد، تغییر غلظت گونهٔ اکسایش‌یافته ۱/۵ مولار می‌باشد.

۴) اگر در آزمایش ۱، تغییر جرم تیغه ۱۰ گرم باشد و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آزمایش ۳ برابر آزمایش ۱ باشد، در آزمایش ۳ پس از مبادلهٔ این تعداد الکترون ۸۰ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ترتیب قدرت کاهندگی فلزهای موجود در جدول به صورت $Al > Zn > Fe$ می‌باشد. می‌دانیم هر چه قدرت کاهندگی فلزی بیشتر باشد، تغییر دمای مخلوط واکنش آن نیز بیشتر است. بنابراین در این جدول ترتیب تغییر دمای واکنش نیز به صورت $Al > Zn > Fe$ است.

۱) با توجه به این‌که فلز M می‌تواند فلز مس را از محلول مس (II) سولفات آزاد کند، یعنی قدرت کاهندگی $M > Cu$ است. هم‌چنین فلز M با کاتیون‌های آهن واکنش نمی‌دهد و در نتیجه قدرت کاهندگی $M < Fe$ خواهد بود؛ بنابراین به یقین می‌توان گفت که دمای مخلوط واکنش فلز M با محلول مس (II) سولفات، کم‌تر از دمای مخلوط آلومینیم با محلول مس (II) سولفات (a) می‌باشد.

۲) معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های انجام‌شده *این‌بوریاس*؛

$$2Al + 3Cu^{2+} \rightarrow 2Al^{3+} + 3Cu$$
$$Zn + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Cu$$
$$Fe + Cu^{2+} \rightarrow Fe^{2+} + Cu$$

ابتدا مول Cu^{2+} را به دست می‌آوریم:

$$100mL CuSO_4(aq) \times \frac{1L}{1000mL} \times \frac{1molCuSO_4(aq)}{1LCuSO_4(aq)} \times \frac{1molCu^{2+}(aq)}{1molCuSO_4(aq)} = 0/1molCu^{2+}$$

حال حساب می‌کنیم که به ازای مصرف ۰/۱ مول Cu^{2+} در هر آزمایش، جرم تیغه‌ها چه‌قدر تغییر می‌کند:

آزمایش شمارهٔ ۱:

$$\underset{65g}{Zn} + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + \underset{64g}{Cu} \Rightarrow \text{تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۱ مول } Cu^{2+} = 65 - 64 = 1g$$

۰/۱ گرم از جرم تیغه **کاسته** می‌شود:

$$\text{تغییر جرم} = 0/1molCu^{2+} \times \frac{\text{تغییر جرم } 1g}{1molCu^{2+}} = 0/1g$$

آزمایش شمارهٔ ۲:

$$\underset{2\times27=54g}{2Al} + 3Cu^{2+} \rightarrow 2Al^{3+} + \underset{3\times64=192g}{3Cu} \Rightarrow \text{تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۳ مول } Cu^{2+} = 192 - 54 = 138g$$

۴/۶ گرم به جرم تیغه **اضافه** خواهد شد:

$$\text{تغییر جرم} = 0/1molCu^{2+} \times \frac{\text{تغییر جرم } 138g}{3molCu^{2+}} = 4/6g$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

آزمایش شمارهٔ ۳:

$$\underset{۵۶g}{Fe} + Cu^{۲+} \rightarrow Fe^{۲+} + \underset{۶۴g}{Cu} \Rightarrow Cu^{۲+} \text{ تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۱ مول} = ۶۴ - ۵۶ = ۸g$$

۰/۸ گرم به جرم تیغه اضافه خواهد شد:

$$۰/۱molCu^{۲+} \times \frac{\text{تغییر جرم } ۸g}{۱molCu^{۲+}} = \text{تغییر جرم } ۰/۸g$$

با توجه به تغییر جرم هر تیغه، جرم نهایی تیغهٔ Al (c) بیشتر از Fe (d) و آن نیز بیشتر از Zn (b) خواهد بود $(c > d > b)$.

۳) در واکنش تیغهٔ آلومینیم با محلول مس (II) سولفات:

$$\underset{\substack{\text{کاهنده}\\(\text{اکسایش می‌یابد})}}{۲Al(s)} + \underset{\substack{\text{اکسنده}\\(\text{کاهش می‌یابد})}}{۳Cu^{۲+}(aq)} \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳Cu(s)$$

Al(s) اکسایش می‌یابد و محلول آن (یعنی $Al^{۳+}(aq)$) گونهٔ اکسایش‌یافته است. حالا حساب می‌کنیم که به ازای تغییر جرم تیغه به اندازهٔ ۶/۹ گرم، غلظت $Al^{۳+}(aq)$ چه‌قدر تغییر می‌کند.

$$۲Al(s) + ۳Cu^{۲+}(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳Cu(s)$$

$$Al^{۳+} \text{ تغییر جرم به ازای تولید ۲ مول} = (۳ \times ۶۴) - (۲ \times ۲۷) = ۱۹۲ - ۵۴ = ۱۳۸g$$

$$۶/۹g \text{ تغییر جرم} \times \frac{۲molAl^{۳+}}{\text{تغییر جرم } ۱۳۸\,g} = ۰/۱molAl^{۳+} \Rightarrow [Al^{۳+}]_{\text{تولید شده}} = \frac{۰/۱mol}{۰/۱L} = ۱M$$

۴) در آزمایش ۱، به ازای مصرف هر یک مول $Cu^{۲+}$، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین اگر جرم تیغه ۱۰ گرم تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\underset{۶۵g}{Zn} + Cu^{۲+} \rightarrow Zn^{۲+} + \underset{۶۴g}{Cu} \Rightarrow Cu^{۲+} \text{ تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۱ مول} = ۶۵ - ۶۴ = ۱g$$

$$۱۰g \text{ تغییر جرم} \times \frac{۱molCu^{۲+}}{\text{تغییر جرم } ۱g} \times \frac{۲mole^-}{۱molCu^{۲+}} = ۲۰mole^-$$

۵ـ باید حساب کنیم به ازای مبادلهٔ ۲۰ مول الکترون، چند گرم به جرم تیغه در آزمایش ۳ افزوده خواهد شد:

$$\underset{۵۶g}{Fe} + Cu^{۲+} \rightarrow Fe^{۲+} + \underset{۶۴g}{Cu} \Rightarrow Cu^{۲+} \text{ تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۱ مول} = ۶۴ - ۵۶ = ۸g$$

$$۲۰mole^- \times \frac{۱molCu^{۲+}}{۲mole^-} \times \frac{\text{تغییر جرم } ۸g}{۱molCu^{۲+}} = \text{تغییر جرم } ۸۰g$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۱ اگر واکنش‌های **a** و **d** انجام‌پذیر و واکنش‌های **b** و **c** انجام‌ناپذیر باشند، کدام مطلب نادرست است؟ (معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

a) $Fe^{3+}(aq) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Sn^{4+}(aq)$

b) $Cr^{3+}(aq) + Fe^{2+}(aq) \rightarrow Cr(s) + Fe^{3+}(aq)$

c) $NiSO_4(aq) + Pb(s) \rightarrow Ni(s) + PbSO_4(s)$

d) $Cl_2(g) + NaBr(aq) \rightarrow NaCl(aq) + Br_2(l)$

۱) قدرت اکسندگی $Sn^{4+} < Fe^{3+}$ است.

۲) قدرت کاهندگی $Pb < Ni$ است و با قراردادن تیغهٔ طلا در محلول حاوی یون Ni^{2+} واکنشی انجام نمی‌شود.

۳) قدرت کاهندگی $Br^-(aq) > Cl^-(aq)$ می‌باشد.

۴) با مصرف کامل ۰/۲ مول تیغهٔ کرومی که در محلول $Fe^{3+}(aq)$ قرار دارد، ۰/۲ مول از کاتیون‌ها تولید می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

۱) با توجه به واکنش انجام‌شده خواهیم داشت:

کاهش

$Fe^{3+}(aq) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + Sn^{4+}(aq) \rightarrow$ (کاهش‌یافتن) : قدرت اکسندگی $Fe^{3+} > Sn^{4+}$

اکسندهٔ قوی‌تر — کاهندهٔ قوی‌تر — کاهندهٔ ضعیف‌تر — اکسندهٔ ضعیف‌تر

۲) واکنش (c) به طور طبیعی انجام نمی‌شود، به عبارت دیگر قدرت کاهندگی $Ni > Pb$ می‌باشد:

$NiSO_4(aq) + Pb(s) \xrightarrow{\text{انجام نمی‌شود}} Ni(s) + PbSO_4(s)$

از طرفی دیگر با قراردادن فلز طلا (Au) در محلولی از $Ni^{2+}(aq)$، واکنشی انجام نخواهد شد، زیرا فلز طلا به عنوان یک فلز نجیب، قدرت کاهندگی بسیار کمی داشته اما فلز نیکل به یقین قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به طلا دارد.

$Au(s) + Ni^{2+}(aq) \rightarrow$ به طور طبیعی انجام نمی‌شود

نکته

۳) در هالوژن‌ها از بالا به پایین، خصلت نافلزی کاهش یافته، بنابراین قدرت اکسندگی گونه‌ها کاهش و قدرت کاهندگی یون‌ها در آن افزایش می‌یابد.

قدرت اکسندگی : $F_2 > Cl_2 > Br_2 > I_2$

قدرت کاهندگی : $F^- < Cl^- < Br^- < I^-$

هالوژن بالاتر در جدول دوره‌ای می‌تواند با نمک هالوژن پایین‌تر در جدول، واکنش داده و آن هالوژن را به صورت X_2 آزاد کند.

هالوژن بالاتر — هالوژن پایین‌تر

$Cl_2 + 2NaBr \rightarrow 2NaCl + Br_2 \quad (Cl_2 + 2Br^- \rightarrow 2Cl^- + Br_2)$

هالوژن پایین‌تر

$I_2 + 2NaBr$ انجام نمی‌شود. $(I_2 + 2Br^- \rightarrow$ انجام نمی‌شود)

هالوژن بالاتر

واکنش (d) به طور طبیعی انجام می‌شود، یعنی واکنش بین هالوژن بالاتر در جدول تناوبی با نمک هالوژن پایین‌تر در جدول انجام شده است. به عبارت دیگر قدرت کاهندگی $Cl^- < Br^-$ است.

$Cl_2(g) + 2NaBr(aq) \rightarrow 2NaCl(aq) + Br_2(l)$ یا $Cl_2 + 2Br^- \rightarrow 2Cl^- + Br_2$

هالوژن بالاتر — هالوژن پایین‌تر

۴) واکنش فلز کروم $(Cr(s))$ و محلول آهن (III) $(Fe^{3+}(aq))$، همان واکنش (b) در جهت برگشت است. ابتدا واکنش را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$1Cr(s) + 3Fe^{3+}(aq) \rightarrow 1Cr^{3+}(aq) + 3Fe^{2+}(aq)$

با مصرف ۱ مول تیغهٔ کرومی در محلول آبی Fe^{3+}، ۴ مول کاتیون (Cr^{3+}, Fe^{2+}) تولید می‌شود:

$$0/2\ molCr \times \frac{4mol\ \text{کاتیون}}{1molCr} = 0/8mol\ \text{کاتیون}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۲ تیغه‌ای از یک فلز مجهول را در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول مس (II) سولفات با غلظت ۰/۳ مول بر لیتر قرار می‌دهیم. اگر بعد از بی‌رنگ‌شدن محلول، ۱/۳۵ گرم به جرم تیغه افزوده شود، فلز مجهول، کدام‌یک از فلزهای زیر می‌تواند باشد؟

$(Sn = ۱۱۹, Cu = ۶۴, Fe = ۵۶, Mn = ۵۵, Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

۱) Al　　۲) Mn　　۳) Fe　　۴) Sn

پاسخ خیلی تشریحی

اگر فلز مجهول ما، یکی از بین گزینه‌های(۲)، (۳) و (۴) باشد (یعنی Fe، Mn یا Sn) در محصولات، یون ۲+ تشکیل می‌دهد.

بیایید اول این ۳ گزینه را بررسی کنیم.

عنصر مورد نظر را X در نظر می‌گیریم و معادلهٔ واکنش آن را می‌نویسیم:

$$X(s) + CuSO_۴(aq) \rightarrow XSO_۴(aq) + Cu(s)$$

طبق معادله، به ازای هر مول $CuSO_۴$ (در صورت کامل در نظر گرفتن واکنش)، ۱ مول فلز X به جرم M گرم مصرف شده و ۱ مول مس به جرم ۶۴ گرم تولید می‌شود، بنابراین با انجام واکنش، $M - ۶۴$ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{افزایش جرم} = ۵۰۰mLCuSO_۴ \times \frac{۱LCuSO_۴}{۱۰۰۰mLCuSO_۴} \times \frac{۰/۳molCuSO_۴}{۱LCuSO_۴} \times \frac{\text{افزایش جرم}\ (۶۴ - M)g}{۱molCuSO_۴} = ۱/۳۵g$$

$$۰/۱۵(۶۴ - M) = ۱/۳۵ \Rightarrow ۹/۶ - ۰/۱۵M = ۱/۳۵ \Rightarrow M = \frac{۸/۲۵}{۰/۱۵} = ۵۵g.mol^{-۱}$$

بنابراین فلز مورد نظر Mn با جرم مولی ۵۵ گرم بر مول می‌باشد.

به جواب که رسیدیم ولی بیایید گزینهٔ (۱) رو هم با هم بررسی کنیم.

اگر فلز مورد نظر Al باشد، در محصولات یون ۳+ تشکیل می‌دهد. پس معادلهٔ موازنه‌شدهٔ آن به صورت زیر خواهد بود:

$$۲Al(s) + ۳CuSO_۴(aq) \rightarrow ۱Al_۲(SO_۴)_۳(aq) + ۳Cu(s)$$

تغییر جرم به ازای ۳ مول $CuSO_۴ = ۳ \times ۶۴ - ۲ \times ۲۷ = ۱۳۸g$

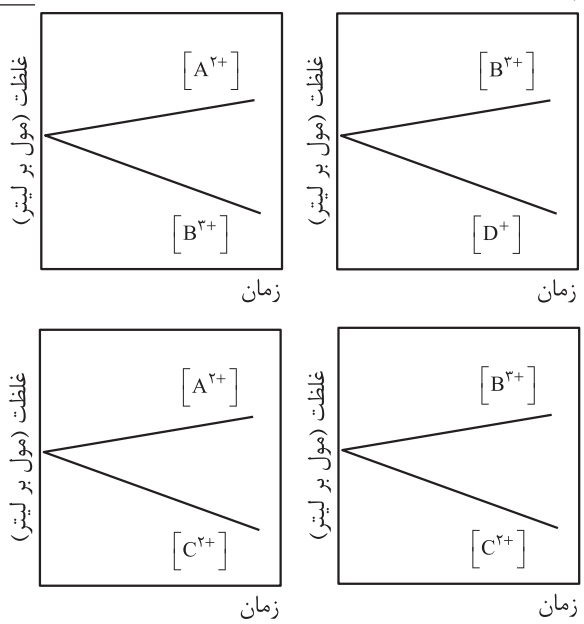
حالا می‌بینیم که تغییر جرم تیغه، برابر ۶/۹ گرم می‌شود نه ۱/۳۵ گرم.

$$\text{تغییر جرم} = ۵۰۰mLCuSO_۴ \times \frac{۱L}{۱۰۰۰mL} \times \frac{۰/۳molCuSO_۴}{۱LCuSO_۴} \times \frac{\text{تغییر جرم}\ ۱۳۸g}{۳molCuSO_۴} = ۶/۹g$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۳ تیغه‌هایی از فلزهای **A**، **B**، **C** و **D** در ۴ آزمایش جداگانه در محلول‌هایی که فقط حاوی یک نوع کاتیون فلزهای ذکرشده در شرایط یکسان می‌باشد را قرار می‌دهیم. با بررسی نمودار تقریبی غلظت برحسب زمان چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



- واکنش $A + B^{3+} \rightarrow$ انجام‌پذیر است و پس از تکمیل معادلهٔ واکنش و موازنهٔ آن، اختلاف ضریب کاهنده با ضریب رسوب ایجادشده برابر ۲ می‌باشد.
- اگر تیغهٔ **D** در محلول حاوی کاتیون A^{2+} قرار بگیرد، به مرور زمان ظرف واکنش گرم‌تر می‌شود.
- با قراردادن تیغهٔ **B** در هر یک از محلول‌های حاوی کاتیون‌های D^{+} و C^{2+}، جرم تیغه تغییر می‌کند.
- واکنش $B^{3+} + C \rightarrow$ انجام‌ناپذیر است، زیرا قدرت کاهندگی **B** از **C** بیشتر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

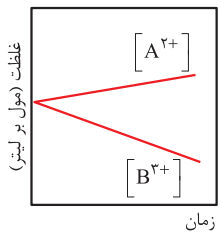
پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول و دوم نادرست‌اند.

وقتی تیغه‌ای را در محلولی قرار دهیم و واکنش به طور خودبه‌خودی انجام شود، غلظت کاتیون‌های فراورده افزایش و غلظت کاتیون‌های واکنش‌دهنده کاهش می‌یابد؛ بنابراین در نمودارهای غلظت ـ زمان این سلول‌ها، کاتیون واکنش‌دهنده که در معادلهٔ کلی واکنش مصرف می‌شود روند نزولی داشته و کاتیون فراورده که تولید می‌شود، روند صعودی دارد.

بررسی عبارت‌ها:

- با توجه به نمودار زیر، غلظت A^{2+} در حال افزایش و غلظت B^{3+} در حال کاهش بوده و A^{2+} و B^{3+} به ترتیب کاتیون‌های مربوط به فراورده و واکنش‌دهنده می‌باشند. به عبارت دیگر واکنش کلی به صورت زیر است:



$$A(s) + B^{3+}(aq) \rightarrow A^{2+}(aq) + B(s)$$

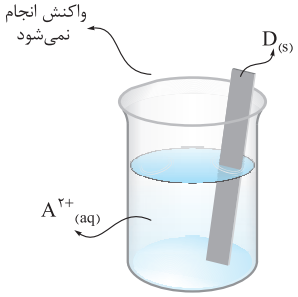
لا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$\overset{\text{کاهنده}}{3A(s)} + \overset{\text{اکسنده}}{2B^{3+}(aq)} \rightarrow 3A^{2+}(aq) + \overset{\text{رسوب}}{2B(s)} \quad \Rightarrow \quad \text{تفاوت ضریب A و B} = 3 - 2 = 1$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

طبق نمودارهای داده‌شده، قدرت کاهندگی A از B و C و هم‌چنین قدرت کاهندگی B از C و D بیشتر است، زیرا در هر واکنش A و B نقش کاهندهٔ قوی‌تر را ایفا کرده‌اند. بنابراین با توجه به این‌که ترتیب قدرت کاهندگی به صورت $A > B > D$ است، اگر تیغه‌ای از فلز D را در محلول A^{2+} قرار دهیم، واکنش انجام نخواهد شد! زیرا هر چه فلزی قدرت کاهندگی بیشتری داشته باشد، کاتیون آن، تمایل کم‌تری برای گرفتن الکترون دارد.



با توجه به نمودارها، قدرت کاهندگی B از C و D بیشتر بوده و با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز B در هر یک از محلول‌های آبی D^+ و C^{2+}، فلز B الکترون‌های خود را به کاتیون‌های D^+ و C^{2+} (در ظرف‌های جداگانه) *تقسیم می‌کند*. پس از دریافت الکترون‌ها توسط کاتیون‌های موجود در محلول‌ها (C^{2+}, D^+)، اتم‌های D و C روی تیغهٔ B رسوب کرده و جرم تیغه تغییر خواهد کرد.

قدرت کاهندگی B بیشتر از C می‌باشد؛ پس واکنش بین یک کاهندهٔ ضعیف‌تر با یک اکسندهٔ ضعیف‌تر انجام نمی‌شود.

به طور طبیعی انجام نمی‌شود. $C + B^{3+} \rightarrow$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

شیمی دهم

۹۴ کدام مورد درست است؟

۱) جرم کل آب‌های روی کرهٔ زمین در حدود $۱/۵ \times ۱۰^{۱۸}$ تن برآورد می‌شود که نزدیک به ۷۵ درصد جرم کرهٔ زمین را تشکیل داده است.

۲) زیست‌کره شامل جانداران روی کرهٔ زمین است که در واکنش‌های آن‌ها ریزمولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.

۳) کوه‌های یخ بیش از $\frac{۲}{۳}$ منابع غیراقیانوسی را تشکیل می‌دهند.

۴) جانداران آبزی سالانه میلیاردها تن کربن دی‌اکسید را وارد هواکره و مقدار بسیار زیادی از گاز اکسیژن محلول در آب را تولید می‌کنند.

مشاوره توجه داشته باشید که هر ساله، بخشی از سؤالات کنکور را *تست‌های کاملاً حفظی!* به خود اختصاص می‌دهند که به‌ویژه در کنکور امسال، نقش و تعداد این سؤالات پررنگ بود! *پس به جای غرغرکردن، قول بده که از این به بعد با ذره‌بین! متن کتاب رو بررسی کنی!*

نکته

- **منابع آب**
  - منابع اقیانوسی ← ٪۹۷/۲
  - منابع غیراقیانوسی ← ٪۲/۸
    - کوه‌های یخ ← ٪۲/۱۵
    - در مجموع ٪۰/۶۵
      - آب‌های زیرزمینی مانند چشمه‌ها
      - نهرها و جوی‌ها
      - آب شیرین و آب شور دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب موجود در هوا

پاسخ خیلی تشریحی

از بین منابع آبی غیراقیانوسی (۲/۸ درصد کل منابع آب) بیشترین سهم مربوط به کوه‌های یخ است. کوه‌های یخ ٪۲/۱۵ از کل آب کرهٔ زمین را تشکیل می‌دهند؛ در نتیجه اگر بخواهیم محاسبه کنیم که کوه‌های یخ چند درصد از منابع غیراقیانوسی را به خود اختصاص می‌دهند، خواهیم داشت:

$$\text{درصد کوه‌های یخ در منابع غیراقیانوسی} = \frac{\text{درصد کوه‌های یخ}}{\text{درصد منابع غیراقیانوسی}} \times ۱۰۰ = \frac{۲/۱۵}{۲/۸} \times ۱۰۰ = ٪۷۶/۷۸$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): زمین در فضا به رنگ آبی دیده می‌شود، زیرا نزدیک به **۷۵ درصد سطح** آن را آب پوشانده است. *هواستون باشه که* ۷۵ درصد از سطح زمین را آب پوشانده، نه ۷۵ درصد از جرم آن را!

گزینهٔ (۲): زیست‌کره، شامل جانداران روی کرهٔ زمین است و در واکنش‌های آن‌ها، **درشت‌مولکول‌ها** نقش اساسی ایفا می‌کنند.

گزینهٔ (۴): جانداران آبزی سالانه میلیاردها تن کربن دی‌اکسید را وارد هواکره می‌کنند و هم‌چنین مقدار بسیار زیادی از گاز اکسیژن محلول در آب را نیز **مصرف** (نه تولید!) می‌کنند.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۵ کدام مورد عبارت زیر را به صورت صحیح تکمیل نمی‌کند؟

«ترکیب ..... به عنوان ..... کاربرد دارد و در صورت انحلال هر واحد آن در آب ..... یون تولید می‌شود.»

۱) آمونیوم نیترات ـ کود شیمیایی جهت نیتراته‌کردن خاک ـ ۲

۲) کلسیم کربنات ـ گچ شکسته‌بندی ـ ۲

۳) منیزیم هیدروکسید ـ مادهٔ مؤثر موجود در شیر منیزی ـ ۳

۴) آمونیوم سولفات ـ کود شیمیایی تأمین‌کنندهٔ نیتروژن و گوگرد برای گیاه ـ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

کلسیم سولفات ($CaSO_4$) در گچ شکسته‌بندی کاربرد دارد؛ نه کلسیم کربنات ($CaCO_3$)!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): یکی از کاربردهای **آمونیوم نیترات (NH_4NO_3)**، در **کودهای شیمیایی جهت نیتراته‌کردن خاک** است. هر واحد آمونیوم نیترات با انحلال در آب، ۲ یون ایجاد می‌کند:

$$NH_4NO_3(s) \xrightarrow{\text{آب}} \underbrace{NH_4^+(aq) + NO_3^-(aq)}_{\text{۲ یون}}$$

گزینهٔ (۳): **شیر منیزی** به عنوان یکی از رایج‌ترین ضداسیدها، شامل **منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$)** است. هر واحد منیزیم هیدروکسید با انحلال در مقدار کافی آب، ۳ یون ایجاد می‌کند:

$$Mg(OH)_2(s) \xrightarrow{\text{آب}} \underbrace{Mg^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)}_{\text{۳ یون}}$$

گزینهٔ (۴): گیاهان برای رشد مناسب، افزون بر CO_2 و H_2O به عنصرهایی مانند N، P، S و ... نیاز دارند. **آمونیوم سولفات ($(NH_4)_2SO_4$)**، **یکی از کودهای شیمیایی است که دو عنصر نیتروژن (N) و گوگرد (S) را در اختیار گیاه قرار می‌دهد.** هر واحد آمونیوم سولفات با انحلال در آب، ۳ یون ایجاد می‌کند:

$$(NH_4)_2SO_4(s) \xrightarrow{\text{آب}} 2NH_4^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۶ ۲۰/۲ گرم پتاسیم نیترات را در ۲۹/۸ گرم آب حل می‌کنیم. اگر غلظت مولی کل یون‌ها در محلول حاصل برابر ۸/۱۶ مولار باشد، چگالی محلول چند گرم بر میلی‌لیتر است؟ ($K = ۳۹ , O = ۱۶ , N = ۱۴ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱/۰۲ ۲) ۲/۰۴

۳) ۱/۲ ۴) ۲/۴

Hint ابتدا با توجه به جرم $KNO_۳$ موجود در محلول، شمار مول‌های آن و با توجه به غلظت مولار یون‌ها و در نتیجه غلظت مولار $KNO_۳$ در محلول و شمار مول‌های آن، حجم محلول را حساب کن؛ سپس با محاسبهٔ جرم محلول (نه جرم حلال!) و داشتن حجم آن، چگالی محلول را به راحتی به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شمار مول‌های $KNO_۳$ موجود در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$۲۰/۲\ g KNO_۳ \times \frac{۱\ mol\ KNO_۳}{۱۰۱\ g\ KNO_۳} = ۰/۲\ mol\ KNO_۳$$

گام دوم: با توجه به غلظت مولی یون‌ها در محلول، غلظت مولی $KNO_۳$ را حساب می‌کنیم:

هر مول پتاسیم نیترات $(KNO_۳)$ با انحلال در آب، ۲ مول یون ایجاد می‌کند؛ در نتیجه غلظت مولی یون‌ها در محلول، ۲ برابر غلظت مولی $KNO_۳$ خواهد بود.

$$KNO_۳(s) \xrightarrow{\text{آب}} \underbrace{K^+(aq) + NO_۳^-(aq)}_{\text{یون}}$$

$$\Rightarrow \text{غلظت مولی } KNO_۳ = \frac{\text{غلظت مولی یون‌ها}}{۲} = \frac{۸/۱۶}{۲} = ۴/۰۸\ mol.L^{-۱}$$

گام سوم: حجم محلول را با توجه به غلظت مولی آن و شمار مول‌های حل‌شونده به دست می‌آوریم.

$$\text{غلظت مولی } (M) = \frac{\text{شمار مول‌های مادهٔ حل‌شونده } (n)}{\text{حجم محلول برحسب لیتر } (V)} \Rightarrow ۴/۰۸ = \frac{۰/۲}{V} \Rightarrow V = \frac{۱}{۲۰/۴} L = \frac{۱۰۰۰}{۲۰/۴} mL$$

گام چهارم: *دیگه معما حل شد!* چگالی محلول را با استفاده از جرم و حجم آن حساب می‌کنیم:

توجه: برای محاسبهٔ چگالی محلول، *هواستون باشه که از جرم محلول* باید استفاده کنیم؛ نه جرم حلال! *یه‌وقت جرم آب رو ننداری تو رابطهٔ چگالی!*

$$\text{جرم محلول } (m) = \text{جرم حل‌شونده} + \text{جرم حلال} = ۲۰/۲ + ۲۹/۸ = ۵۰\ g \quad , \quad \text{حجم محلول } (V) = \frac{۱۰۰۰}{۲۰/۴} mL$$

$$\Rightarrow d = \frac{m}{V} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۵۰}}}{\frac{\overset{۲۰}{\cancel{۱۰۰۰}}}{۲۰/۴}} = \frac{۲۰/۴}{۲۰} = ۱/۰۲ g.mL^{-۱}$$

یه‌جور دیگه

نکته *اگه حوصله‌ات نمی‌کشه این مراحل رو بری، خوب به نکتهٔ زیر توجه کن؛*

اگر درصد جرمی محلولی برابر a و چگالی محلول برابر d (برحسب $g.mL^{-۱}$ یا $g.cm^{-۳}$) باشد، غلظت مولی (M) این محلول (برحسب $mol.L^{-۱}$) برابر است با:

$$M = \frac{۱۰ ad}{\text{جرم مولی}}$$

توجه: اگر به طور مثال محلول ۶۰٪ جرمی داشته باشیم، در رابطهٔ $M = \frac{۱۰ ad}{\text{جرم مولی}}$ به جای a عدد ۶۰ می‌گذاریم، نه $\frac{۶۰}{۱۰۰}$ را!

توجه: ممکن است یک محلول شامل چند حل‌شونده باشد. برای محاسبهٔ غلظت مولی هر گونه، باید درصد جرمی و جرم مولی همان گونه را در رابطهٔ بالا قرار دهیم.

خلاصه این‌که هر وقت در سؤالی صحبت از درصد جرمی به همراه غلظت مولی و چگالی محلول بود، سریع مغزتان باید یاد فرمول $M = \frac{۱۰ ad}{\text{جرم مولی}}$ بیفتد!

خب حالا تو این تست، بعد از محاسبهٔ غلظت مولی $KNO_۳$ در محلول داریم؛

درصد جرمی پتاسیم نیترات در محلول برابر است با:

$$\text{درصد جرمی } (a) = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۰/۲}{۲۰/۲ + ۲۹/۸} \times ۱۰۰ = \frac{۲۰/۲}{۵۰} \times \overset{۲}{\cancel{۱۰۰}} = ۴۰/۴$$

(جرم محلول = جرم حلال + جرم حل‌شونده)

حالا می‌توانیم با استفاده از غلظت مولی و درصد جرمی محلول، چگالی آن را *بسنجیم*:

$$M = \frac{۱۰ ad}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow ۴/۰۸ = \frac{۱۰ \times \overset{۴}{\cancel{۴۰/۴}} \times d}{\underset{۱}{\cancel{۱۰۱}}} \Rightarrow d = \frac{۴/۰۸}{۴} = ۱/۰۲ g.mL^{-۱}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۷ مقداری سدیم فسفات را با ۱۱/۸ گرم آب مخلوط می‌کنیم تا یک محلول ۴۱ درصد جرمی از سدیم فسفات ایجاد شود. یون فسفات موجود در این محلول، از چند کیلوگرم محلول ppm ۵ کلسیم فسفات قابل استخراج است؟ $(Ca = ۴۰ , P = ۳۱ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۵۵۰ ۲) ۱۷۵۰

۳) ۳۱۰۰ ۴) ۳۵۰۰

Hint

ابتدا با توجه به درصد جرمی و جرم آب (حلال) در محلول سدیم فسفات، جرم یون فسفات موجود در این محلول را حساب کن، سپس محاسبه کن که این مقدار یون فسفات، در چند گرم کلسیم فسفات وجود دارد، در نهایت با استفاده از غلظت ppm محلول و جرم حل‌شونده، جرم محلول کلسیم فسفات را به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جرم سدیم فسفات $(Na_۳PO_۴)$، در محلول ۴۱ درصد جرمی آن، که شامل ۱۱/۸ گرم آب است، را حساب می‌کنیم:

اگر جرم سدیم فسفات موجود در محلول را x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۴۱ = \frac{x}{۱۱/۸ + x} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۱۱/۸ + x}{x} = \frac{۱۰۰}{۴۱}$$

$$\xrightarrow{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}} \frac{\overset{۱}{\cancel{۱۱/۸}}}{x} = \frac{\overset{۵}{\cancel{۵۹}}}{۴۱} \Rightarrow x = \frac{۴۱}{۵} = ۸/۲\ g\ Na_۳PO_۴$$

گام دوم: با توجه به جرم سدیم فسفات $(Na_۳PO_۴)$ و در نتیجه جرم یون فسفات $(PO_۴^{۳-})$ موجود در آن، حساب می‌کنیم این مقدار یون فسفات در چند گرم کلسیم فسفات $(Ca_۳(PO_۴)_۲)$ وجود دارد:

$$۸/۲ g\ Na_۳PO_۴ \times \frac{۱\ mol\ Na_۳PO_۴}{۱۶۴\ g\ Na_۳PO_۴} \times \frac{۱\ mol\ PO_۴^{۳-}}{۱\ mol\ Na_۳PO_۴} \times \frac{۱\ mol\ Ca_۳(PO_۴)_۲}{۲\ mol\ PO_۴^{۳-}} \times \frac{۳۱۰\ g\ Ca_۳(PO_۴)_۲}{۱\ mol\ Ca_۳(PO_۴)_۲}$$

$$= ۷/۷۵ g\ Ca_۳(PO_۴)_۲$$

گام سوم: با توجه به جرم کلسیم فسفات موجود در محلول و غلظت ppm آن، جرم محلول رو می‌سابیم:

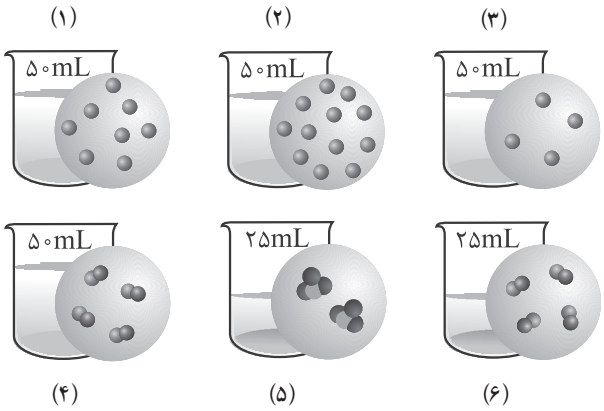
اگر جرم محلول کلسیم فسفات را y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Rightarrow ۵ = \frac{۷/۷۵}{y} \times ۱۰^۶ \Rightarrow y = \frac{۷/۷۵}{۵} \times ۱۰^۶ = ۱/۵۵ \times ۱۰^۶ g \times \frac{۱\ kg}{۱۰^۳ g} = ۱۵۵۰\ kg$$ محلول

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۸ اگر در شکل زیر هر ذرهٔ حل‌شونده معادل ۰/۰۱ مول باشد، کدام مورد از موارد زیر درست است؟ (در صورت افزودن محلول‌ها به یکدیگر، ذرات حل‌شونده واکنش نمی‌دهند.)



الف) مقایسهٔ غلظت مولار محلول‌های بالا به صورت $۵ = ۴ = ۳ > ۶ = ۱ > ۲$ است.

ب) در صورت مخلوط‌کردن محلول‌های (۳) و (۶)، غلظت مولی محلول حاصل، $\frac{۴}{۳}$ برابر غلظت مولی محلول شمارهٔ (۴) می‌شود.

پ) برای رقیق‌کردن محلول شمارهٔ (۵) تا ۰/۴ مولار، باید ۵۰ میلی‌لیتر آب به آن اضافه شود.

ت) غلظت مولی محلول شمارهٔ (۱)، ۱/۶ برابر غلظت مولی محلول شمارهٔ (۵) است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) پ ـ ت

مشاوره تمرین‌های کتاب درسی، منبع مهمی برای طرح سؤال هم تو کنکور سراسری و هم امتحانات نهاییه! پس بر ما واجبه که به همهٔ تمرین‌های کتاب، از جمله تمرین‌های دوره‌ای آخر هر فصل، تسلط کامل پیدا کنیم و حتماً انواع سؤالات طرح شده از اون‌ها رو بررسی کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

اول بهتره غلظت مولی همهٔ محلول‌ها را محاسبه کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{تعداد مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول (L)}}$$

$$\text{محلول (۱)} = \frac{۸\times ۰/۰۱}{\frac{۵۰}{۱۰۰۰}} = ۱/۶ \text{ mol.L}^{-۱} \quad , \quad \text{محلول (۲)} = \frac{۱۲\times ۰/۰۱}{\frac{۵۰}{۱۰۰۰}} = ۲/۴ \text{ mol.L}^{-۱}$$

$$\text{محلول (۳)} = \frac{۴\times ۰/۰۱}{\frac{۵۰}{۱۰۰۰}} = ۰/۸ \text{ mol.L}^{-۱} \quad , \quad \text{محلول (۴)} = \frac{۴\times ۰/۰۱}{\frac{۵۰}{۱۰۰۰}} = ۰/۸ \text{ mol.L}^{-۱}$$

$$\text{محلول (۵)} = \frac{۲\times ۰/۰۱}{\frac{۲۵}{۱۰۰۰}} = ۰/۸ \text{ mol.L}^{-۱} \quad , \quad \text{محلول (۶)} = \frac{۴\times ۰/۰۱}{\frac{۲۵}{۱۰۰۰}} = ۱/۶ \text{ mol.L}^{-۱}$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) *اینو که حساب کردیم! تازه با مقایسهٔ* $\frac{\text{تعداد ذره‌ها}}{\text{حجم محلول}}$ *هم به راحتی می‌شه فهمید غلظت مولی محلول‌ها چه رابطه‌ای با هم دارن!*

ب) حجم محلول نهایی از مخلوط‌کردن دو محلول (۳) و (۶)، برابر با ۷۵ mL و تعداد کل ذره‌های حل‌شونده، برابر با ۸ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{۸\times ۰/۰۱}{\frac{۷۵}{۱۰۰۰}} = \frac{۸۰}{۷۵} = \frac{۱۶}{۱۵} \text{ mol.L}^{-۱}$$

یه جور دیگه

غلظت مولی محلول حاصل از مخلوط‌کردن دو محلول با حل‌شوندهٔ یکسان، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$M = \frac{M_۱V_۱ + M_۲V_۲}{V_۱ + V_۲} \Rightarrow M = \frac{\overbrace{(۰/۸\times ۵۰)}^{۴۰} + \overbrace{(۱/۶\times ۲۵)}^{۴۰}}{\underbrace{۵۰+۲۵}_{۷۵}} = \frac{۸۰}{۷۵} = \frac{۱۶}{۱۵} \text{ mol.L}^{-۱}$$

حال نسبت غلظت مولی محلول حاصل از اختلاط محلول‌های (۳) و (۶) به غلظت مولی محلول (۴) *رو می‌سنجیم*:

$$\frac{\frac{۴}{۲۰}}{\frac{۱۶}{۱۵}} = \frac{۳}{۰/۸} = \frac{۴}{۳}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پ) با رقیق‌کردن محلول (۵)، تا غلظت ۰/۴ مولار، شمار مول‌های حل‌شونده در آن ثابت می‌ماند؛ در نتیجه می‌توانیم حجم آب افزوده‌شده به آن را به صورت زیر حساب کنیم:

$$n_{\text{غلیظ}} = n_{\text{رقیق}} \Rightarrow M_{\text{غلیظ}} V_{\text{غلیظ}} = M_{\text{رقیق}} V_{\text{رقیق}} \Rightarrow {}^{2}\!\!\not{0/8} \times 25 = \not{0/4} \times V_{\text{رقیق}} \Rightarrow V_{\text{رقیق}} = 50\ \text{mL}$$

$$V_{\text{رقیق}} = V_{\text{غلیظ}} + V_{\text{آب اضافه شده}} \Rightarrow 50 = 25 + V_{\text{آب اضافه شده}} \Rightarrow V_{\text{آب اضافه شده}} = 25\text{mL}$$

یه‌جور دیگه

با توجه به این‌که غلظت اولیهٔ محلول (۵)، برابر ۰/۸ مولار بوده و غلظت این محلول پس از رقیق‌شدن، نصف شده و به ۰/۴ مولار رسیده است، در نتیجه حجم محلول نیز باید با توجه به ثابت‌بودن شمار ذرات حل‌شونده، دو برابر شود و به ۵۰ mL برسد؛ در نتیجه حجم آب اضافه‌شده، برابر $25\ \text{mL} = 25 - 50$ است.

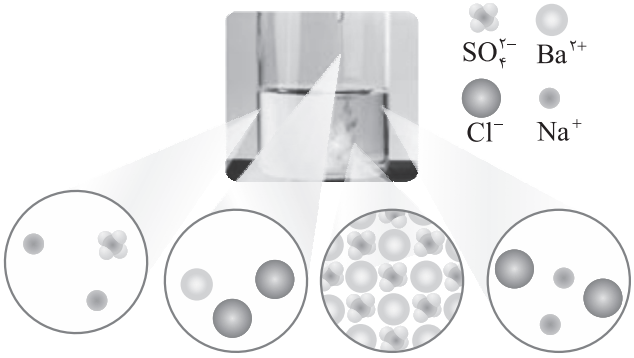
ت) نسبت غلظت مولی محلول (۱) به غلظت مولی محلول (۵)، برابر است با:

$$\frac{\text{غلظت مولی محلول (۱)}}{\text{غلظت مولی محلول (۵)}} = \frac{1/6}{0/8} = 2$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۹ معادلهٔ شیمیایی موازنه‌شدهٔ واکنش انجام‌شده در شکل زیر، کدام است؟



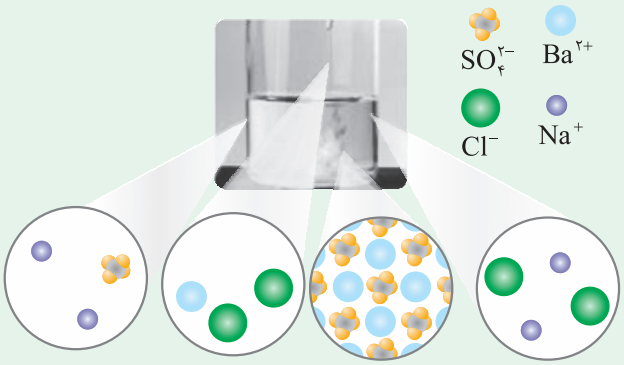
۱) $BaSO_4(s) + 2NaCl(aq) \rightarrow Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq)$

۲) $Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + NaCl(aq)$

۳) $Na_2SO_4(s) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(aq) + 2NaCl(aq)$

۴) $Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$

نکته با توجه به این‌که باریم سولفات ($BaSO_4$)، یک ترکیب یونی نامحلول در آب (رسوبی سفیدرنگ) است، از تشکیل این ماده می‌توان برای شناسایی یون $Ba^{2+}(aq)$ یا $SO_4^{2-}(aq)$ در محلول استفاده کرد. اگر به محلول باریم کلرید، مقداری محلول سدیم سولفات اضافه کنیم، یون‌های $Ba^{2+}(aq)$ با یون‌های $SO_4^{2-}(aq)$، رسوب سفیدرنگ باریم سولفات را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب می‌توان یون باریم (Ba^{2+}) را در محلول اولیه شناسایی کرد:



$$Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$$

محلول بی‌رنگ — محلول بی‌رنگ — رسوب سفیدرنگ — محلول بی‌رنگ

پاسخ خیلی تشریحی *حالا ایراد بقیهٔ گزینه‌ها چیه!!* در مورد گزینه‌های (۱) و (۳) *هواستون باشه که* چون $BaSO_4$، نامحلول در آب و Na_2SO_4، محلول در آب است؛ در نتیجه به ترتیب حالت‌های فیزیکی (s) و (aq) را باید به آن‌ها نسبت داد که *توی گزینهٔ (۳)، حالت‌های فیزیکی رو غلط نوشته؛* هم‌چنین با توجه به تولید رسوب سفیدرنگ $BaSO_4$ در این واکنش، این ماده باید در سمت فراورده‌ها باشد؛ *توی گزینهٔ (۱) جای واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها رو برعکس نوشته!* در *نهایت دقت کنید که* معادلهٔ موجود در گزینهٔ (۲) اصلاً موازنه‌شده نیست.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۰ ۵۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با چگالی ۱/۲ گرم بر میلی‌لیتر با ۳۰ گرم کلسیم کربنات خالص به طور کامل واکنش می‌دهد. غلظت محلول هیدروکلریک اسید چند درصد جرمی است؟ (واکنش موازنه شود، $g.mol^{-1}$: $H=1, C=12, O=16, Cl=35/5, Ca=40$)

$$CaCO_3(s)+HCl(aq)\rightarrow CaCl_2(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$$

۱) ۱۸/۲۵ ۲) ۲۱/۹

۳) ۳۶/۵ ۴) ۴۳/۸

مشاوره موازنه که اولین گام حل اغلب مسائل استوکیومتری در درس شیمی است *رو یه‌وقت فراموش نکنی!*

Hint ابتدا معادلهٔ واکنش انجام‌شده را موازنه کن، سپس با توجه به جرم $CaCO_3$ مصرف‌شده در واکنش، جرم HCl مصرف‌شده در واکنش را محاسبه کن و در نهایت پس از محاسبهٔ جرم محلول، با استفاده از حجم و چگالی محلول، درصد جرمی محلول HCl را به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واکنش انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$CaCO_3(s)+2HCl(aq)\rightarrow CaCl_2(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$$

گام دوم: با توجه به جرم $CaCO_3$ مصرف‌شده در واکنش، جرم HCl مصرفی در آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{CaCO_3}}=\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{HCl}}\Rightarrow\frac{\overset{3}{\cancel{30}}}{1\times\underset{10}{\cancel{100}}}=\frac{x}{2\times36/5}\Rightarrow x=\frac{2\times36/5\times3}{10}=21/9\ g\ HCl$$

گام سوم: جرم محلول HCl را با استفاده از حجم و چگالی محلول به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{m}{V}\Rightarrow m=d\times V=1/2\frac{g}{mL}\times50\ mL=60\ g\ \text{محلول}$$

گام چهارم: درصد جرمی محلول HCl را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی}=\frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}\times100=\frac{21/9}{60}\times100=36/5$$

یه‌جور دیگه پس از موازنه‌کردن معادلهٔ واکنش، می‌توانیم با توجه به جرم $CaCO_3$ مصرفی در واکنش و حجم محلول HCl، غلظت مولی محلول HCl را حساب کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{CaCO_3}}=\frac{\text{حجم (L)}\times\text{غلظت مولی}\left(\frac{mol}{L}\right)}{\underbrace{\text{ضریب}}_{\text{محلول HCl}}}\Rightarrow\frac{\overset{3}{\cancel{30}}}{1\times\underset{5}{\cancel{100}}}=\frac{50\times10^{-3}\times x}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{\underbrace{5\times50\times10^{-3}}_{0/25}}=\frac{3}{0/25}=3\times4=12\ mol.L^{-1}$$

حالا که چگالی و غلظت مولار محلول HCl را داریم، می‌توانیم درصد جرمی آن را با استفاده از رابطهٔ $M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$، به راحتی حساب کنیم:

$$M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}\Rightarrow 12=\frac{10\times a\times1/2}{36/5}\Rightarrow a=36/5$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۱ ۱۲۷/۵ گرم محلول نقره نیترات ۲۰ درصد جرمی با ۲۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار MCl_x مطابق واکنش زیر به طور کامل واکنش می‌دهد. اگر مقداری مشابه از محلول MCl_x با مقدار کافی آمونیوم هیدروکسید وارد واکنش شود، چند مول آمونیوم کلرید تولید می‌شود؟ (واکنش‌ها موازنه شوند، $Ag = ۱۰۸ , O = ۱۶ , N = ۱۴ : g.mol^{-1}$)

$$MCl_x(aq) + AgNO_3(aq) \rightarrow AgCl(s) + M(NO_3)_x(aq)$$

$$MCl_x(aq) + NH_4OH(aq) \rightarrow M(OH)_x(s) + NH_4Cl(aq)$$

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

Hint ابتدا معادلهٔ واکنش اول را موازنه کن، سپس مقدار x را از این واکنش به دست بیار! در نهایت معادلهٔ واکنش دوم را موازنه کرده و شمار مول‌های NH_4Cl تولیدی در این واکنش را حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ واکنش اول را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$MCl_x(aq) + x\,AgNO_3(aq) \rightarrow x\,AgCl(s) + M(NO_3)_x(aq)$$

گام دوم: مقدار x را با توجه به اطلاعات سؤال محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{غلظت مولی : محلول } MCl_x = \frac{\text{تعداد مول } MCl_x}{\text{حجم محلول (L)}} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{\text{تعداد مول } MCl_x}{۰/۲۵}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول } MCl_x = ۰/۲ \times ۰/۲۵ = ۰/۰۵ \text{ mol}$$

$$۱۲۷/۵ \text{ g } AgNO_3 \text{ محلول} \times \frac{۲۰ \text{ g } AgNO_3}{۱۰۰ \text{ g } AgNO_3 \text{ محلول}} \times \frac{۱ \text{ mol } AgNO_3}{۱۷۰ \text{ g } AgNO_3} \times \frac{۱ \text{ mol } MCl_x}{x \text{ mol } AgNO_3} = ۰/۰۵ \text{ mol } MCl_x$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲۷/۵ \times ۲۰}{۱۰۰ \times ۱۷۰ \times x} = ۰/۰۵ \Rightarrow ۰/۰۵ \times ۲۰ x = ۳ \Rightarrow x = ۳$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم محلول} \times \frac{\text{درصد جرمی}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{AgNO_3}} = \frac{\text{حجم محلول (L)} \times \text{غلظت مولی}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{MCl_x}} \Rightarrow \frac{۱۲۷/۵ \times \frac{۲۰}{۱۰۰}}{x \times ۱۷۰} = \frac{۰/۲ \times ۰/۲۵}{۱}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۰/۱۵}{۰/۰۵} = ۳$$

گام سوم: با توجه به مقدار x، معادلهٔ واکنش دوم را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$MCl_3(aq) + ۳NH_4OH(aq) \rightarrow M(OH)_3(s) + ۳NH_4Cl(aq)$$

گام چهارم: شمار مول‌های آمونیوم کلرید (NH_4Cl) تولیدی در این واکنش را با مصرف ۲۵۰ mL محلول ۰/۲ مولار MCl_3 در آن به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{حجم محلول (L)} \times \text{غلظت مولی}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{MCl_3}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{NH_4Cl}} \Rightarrow \frac{۰/۲ \times ۰/۲۵}{۱} = \frac{y}{۳} \Rightarrow y = ۳ \times ۰/۰۵ = ۰/۱۵ \text{ mol } NH_4Cl$$

یه‌جور دیگه

بدون محاسبهٔ مقدار x هم می‌شه این سؤال رو حل کرد! حالا چه‌طوری؟! بریم ببینیم.

معادلهٔ دو واکنش انجام‌شده را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$MCl_x(aq) + x\,AgNO_3(aq) \rightarrow x\,AgCl(s) + M(NO_3)_x(aq)$$

$$MCl_x(aq) + x\,NH_4OH(aq) \rightarrow M(OH)_x(s) + x\,NH_4Cl(aq)$$

با توجه به این‌که در این دو واکنش، مقدار MCl_x مصرف‌شده برابر است؛ در نتیجه به طور مستقیم می‌توانیم بین نقره نیترات $(AgNO_3)$ و آمونیوم کلرید (NH_4Cl)، کسر تناسب بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱MCl_x \sim x\,AgNO_3 \\ ۱MCl_x \sim x\,NH_4Cl \end{array}\right\} \Rightarrow ۱AgNO_3 \sim ۱NH_4Cl$$

$$\text{ژ} \quad \frac{\text{جرم محلول} \times \frac{\text{درصد جرمی}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{AgNO_3}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{NH_4Cl}} \Rightarrow \frac{۱۲۷/۵ \times \frac{۲۰}{۱۰۰}}{۱ \times ۱۷۰} = \frac{y}{۱} \Rightarrow y = ۰/۱۵ \text{ mol } NH_4Cl$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۲ کدام مورد، نادرست است؟

۱) تشکیل برف و باران الگویی برای تهیهٔ آب خالص است، فرایندی که تقطیر نام داشته و فراوردهٔ آن آب مقطر است.

۲) گیاهان برای رشد مناسب به عنصرهایی مانند گوگرد، فسفر و نیتروژن نیاز دارند.

۳) با افزودن مقداری حلال به یک محلول با غلظت معین، غلظت محلول افزایش می‌یابد.

۴) تعداد مول‌های حل‌شونده در ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سدیم کلرید ۰/۱ مولار، بیشتر از ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم کلرید ۰/۰۵ مولار است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

غلظت یک محلول برحسب مقدار حل‌شونده در مقدار معینی از حلال یا محلول تعریف می‌شود؛ در نتیجه با افزودن مقداری حلال به یک محلول با غلظت معین، غلظت محلول کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آب باران در هوای پاک تقریباً خالص است، زیرا هنگام تشکیل برف و باران، تقریباً همهٔ مواد حل‌شده در آب از آن جدا می‌شود. این فرایند، الگویی برای تهیه آب خالص است، فرایندی که **تقطیر** و فراوردهٔ آن **آب مقطر** نام دارد.

گزینهٔ (۲): *درسته!* گیاهان برای رشد مناسب، افزون بر CO_2 و H_2O به **عنصرهایی مانند** S ، P ، N و ... نیاز دارند.

گزینهٔ (۴):

$$\text{تعداد مول حل‌شونده} = \text{غلظت مولی} \times \text{حجم محلول} \quad (\text{mol.L}^{-1}) \times (\text{L})$$

$$\text{تعداد مول حل‌شونده: محلول سدیم کلرید } (NaCl) = ۰/۱\ \text{mol.L}^{-1} \times ۰/۲\text{L} = ۰/۰۲\ \text{mol}$$

$$\text{تعداد مول حل‌شونده: محلول پتاسیم کلرید } (KCl) = ۰/۰۵\ \text{mol.L}^{-1} \times ۰/۳\text{L} = ۰/۰۱۵\ \text{mol}$$

بنابراین شمار مول‌های حل‌شونده در محلول سدیم کلرید، بیشتر از محلول پتاسیم کلرید می‌باشد.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۳ اگر ۱۲/۵ گرم استیک اسید در ۲۳۷/۵ گرم آب مقطر حل شود، غلظت مولی آن کدام است؟ (جرم هر میلی‌لیتر محلول، برابر یک گرم در نظر گرفته شود، $H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)

۱) ۰/۷۹ ۲) ۰/۸۳ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۱/۰۹

مشاوره این شما و این شبیه‌سازی یکی از سؤالات جالب و خوب کنکور سراسری! این تست، دانش شما را به طور کامل مورد ارزیابی قرار می‌دهد؛ در نتیجه توصیهٔ ما به شما این است که هر دو روش حل تست را به خوبی یاد بگیرید.

Hint اول از خودت بپرس که برای محاسبهٔ غلظت مولی یک محلول، *نیاز به چیا داریم؟! آفرین شمار مول‌های حل‌شونده و حجم محلول*. شمار مول‌های استیک اسید را با استفاده از جرم آن حساب کن! سپس محاسبهٔ جرم محلول را انجام بده و با استفاده از چگالی محلول، حجم و در نهایت غلظت مولی آن را به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به جرم استیک اسید موجود در محلول، شمار مول‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$12/5\ g\ CH_3COOH \times \frac{1\ mol\ CH_3COOH}{60\ g\ CH_3COOH} = \frac{12/5}{60}\ mol\ CH_3COOH$$

گام دوم: جرم محلول و سپس حجم آن را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم محلول} = \text{جرم حل‌شونده} + \text{جرم حلال} = 12/5 + 237/5 = 250\ g$$

$$\text{حجم محلول} = 250\ g\ \text{محلول} \times \frac{1\ mL\ \text{محلول}}{1\ g\ \text{محلول}} \times \frac{1\ L}{10^3\ mL} = 0/25\ L\ \text{محلول}$$

گام سوم: غلظت مولی محلول را با توجه به شمار مول‌های حل‌شونده و حجم محلول، حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی } (M) = \frac{\text{شمار مول‌های مادهٔ حل‌شونده } (n)}{\text{حجم محلول برحسب لیتر } (V)} = \frac{\frac{12/5}{60}}{0/25} = \frac{50}{60} \simeq 0/83\ mol.L^{-1}$$

یه‌جور دیگه گفتیم که هر وقت در سؤالی صحبت از درصد جرمی به همراه غلظت مولی و چگالی محلول بود، سریع *مغزتان* باید یاد فرمول $M = \frac{10\,ad}{\text{جرم مولی}}$ بیفتد! درصد جرمی استیک اسید را در محلول محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی } (a) = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{12/5}{12/5+237/5} \times 100 = \frac{\cancel{12/5}^{1}}{\cancel{250}^{20}} \times \cancel{100}^{5} = 5$$

(جرم محلول ↓ جرم حلال + جرم حل‌شونده)

حالا وقتشه که با استفاده از چگالی و درصد جرمی محلول، غلظت مولی آن را *بسازیم*:

$$M = \frac{10\,ad}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow M = \frac{10 \times 5 \times 1}{60} = \frac{50}{60} \simeq 0/83\ mol.L^{-1}$$

اگر ۲۲/۵ گرم اوره در ۷۲۷/۵ گرم آب مقطر حل شود، غلظت مولی آن کدام است؟ (جرم هر میلی‌لیتر محلول، برابر یک گرم در نظر گرفته شود، $H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$) *(تجربی داخل ۱۴۰۳ نوبت دوم)*

۱) ۱/۰ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱/۲۵

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۴ کدام مطلب، نادرست است؟

۱) ساختار فضایی یون کربنات مشابه یون نیترات است.

۲) شکل هندسی یون آمونیوم به صورت چهاروجهی بوده و همهٔ اتم‌ها در ساختار آن به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.

۳) نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در ترکیب آلومینیم هیدروکسید مشابه نسبت شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها در ترکیب آمونیوم فسفات است.

۴) مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در ترکیب آمونیوم کربنات برابر ۱۲ است.

مشاوره مبحث یون‌های چندتایی از مباحث پایه‌ای است که انواع و اقسام مختلف تست‌ها را در کنکور سراسری داشته. *حتماً مسلط باشید* و سعی کنید سؤالات متنوعی از این مبحث حل کنید. *راستی توی درس‌باکس پایین، این مبحث رو کامل کامل براتون تشریح کردیم!*

درس Box

یون‌هایی وجود دارند که از اتصال دو یا چند اتم (یکسان یا متفاوت) تشکیل شده‌اند، مانند NO_3^-، SO_4^{2-} و NH_4^+ و ...! به این‌گونه یون‌ها، **یون‌های چندتایی** می‌گویند.

توجه: ملاک تقسیم‌بندی یون‌ها به تک‌اتمی و چندتایی، تعداد اتم‌های آن‌ها است و نه تعداد عنصر یا نوع اتم‌ها! یعنی یک یون چندتایی فقط می‌تواند از یک عنصر (یک نوع اتم) تشکیل شده باشد، مانند: O_2^{2-} و N_3^-!

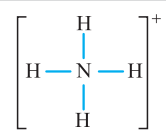
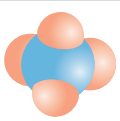
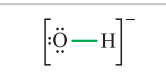
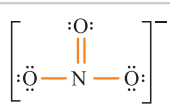
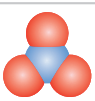
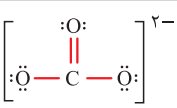
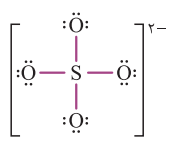
و اینک! لیست یون‌های چندتایی که در گوشه و کنار کتاب درسی وجود دارد را اعلام می‌کنیم.

نام یون	فرمول یون	نام یون	فرمول یون
آمونیوم	NH_4^+	سولفات	SO_4^{2-}
هیدروکسید	OH^-	فسفات	PO_4^{3-}
نیترات	NO_3^-	کربنات	CO_3^{2-}
پرکلرات	ClO_4^-	اتانوات (استات)	CH_3COO^-
هیدروژن کربنات	HCO_3^-	سیلیکات	SiO_4^{4-}
سیانید	CN^-	پرمنگنات	MnO_4^-
متانوات (فورمات)	$HCOO^-$		

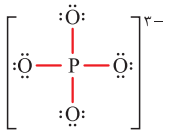
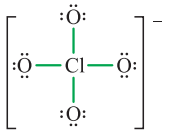
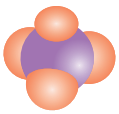
نکته

۱) بار یون در یون‌های چندتایی به کل مجموعه تعلق دارد و نه به اتم خاصی! به طور مثال بار -2 در SO_4^{2-} و $+1$ در NH_4^+ برای کل مجموعه است.

۲) بین اتم‌های سازندهٔ یون‌های چندتایی، پیوند کووالانسی (اشتراکی) وجود دارد. ساختار لوویس و مدل فضاپرکن یون‌های چندتایی شیمی دهم *رو در جدول زیر براتون آوردیم:*

یون	ساختار لوویس	مدل فضاپرکن
NH_4^+ (آمونیوم)		
OH^- (هیدروکسید)		
NO_3^- (نیترات)		
CO_3^{2-} (کربنات)		
SO_4^{2-} (سولفات)		

Telegram: @konkur_in

یون	ساختار لوویس	مدل فضاپرکن
PO_4^{3-} (فسفات)		
ClO_4^- (پرکلرات)		

پاسخ خیلی تشریحی ✔ *تو همول بالا تماشا کردیم با هم که* شکل هندسی یون آمونیوم (NH_4^+) به صورت چهاروجهی است، *اما هواستون باشه که* در این ساختار اتم‌های هیدروژن برخلاف اتم نیتروژن، **به آرایش دوتایی گاز نجیب هلیم** رسیده‌اند!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *دوباره به همول بالا نگاه کنین!* یون‌های NO_3^- و CO_3^{2-} با هم و یون‌های SO_4^{2-}، PO_4^{3-} و ClO_4^- با هم، ساختار لوویس و مدل فضاپرکن مشابهی دارند.

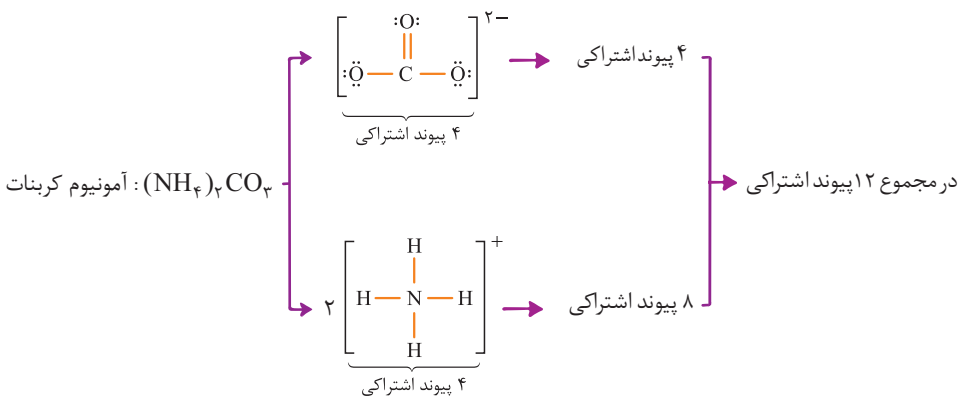
گزینهٔ (۳):

آلومینیم هیدروکسید : $Al(OH)_3 \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{1}{3}$

آمونیوم فسفات : $(NH_4)_3PO_4 \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{1}{3}$

گزینهٔ (۴):

آمونیوم کربنات : $(NH_4)_2CO_3$



Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۰۵ ۳۰۰ گرم محلول ۳/۲۵ درصد جرمی آهن (III) کلرید با مقدار کافی پتاسیم هیدروکسید جامد، واکنش کامل می‌دهد. اگر به محلول تشکیل‌شده ۱۷۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر اضافه شود، غلظت یون کلرید در پایان واکنش، پس از جداکردن رسوب، برابر چند ppm است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود، از تغییر جرم محلول بر اثر انجام واکنش صرف نظر شود، $Fe = 56, Cl = 35/5 : g.mol^{-1}$)

$$FeCl_3(aq) + KOH(s) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + KCl(aq)$$

۱) ۱۰۶۵ ۲) ۳۱۹۵

۳) ۴۶۲۵ ۴) ۷۱۰۰

مشاوره *هواستون باشه که* برای حل این تست، نیازی به موازنه‌کردن معادلهٔ واکنش نیست؛ پس حتماً متن سؤال را خوب بخوانید و وقت خودتان را صرف موازنهٔ واکنش در این تست نکنید! *اگه باور ندارید، پاسخ رو خوب مطالعه کنین!*

Hint *اول از خودت بپرس که* برای محاسبهٔ غلظت ppm یون Cl^- در محلول نهایی، *به چیا نیاز داری؟ باریکلا!* جرم یون Cl^- موجود در محلول $FeCl_3$ که برابر با جرم این یون در محلول نهایی است و هم‌چنین جرم محلول نهایی که برابر با مجموع جرم محلول اولیه و جرم آب افزوده‌شده است. *خب حالا!* غلظت ppm یون Cl^- را در محلول نهایی حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جرم یون کلرید (Cl^-) موجود در محلول آهن (III) کلرید ($FeCl_3$) را حساب می‌کنیم که براساس قانون پایستگی جرم، برابر با جرم این یون در محلول نهایی است:

$$\text{جرم یون } Cl^- \text{ در محلول آهن (III) کلرید} = 300g \text{ محلول} \times \frac{3/25gFeCl_3}{100g \text{ محلول}} \times \frac{1molFeCl_3}{162/5gFeCl_3} \times \frac{3molCl^-}{1molFeCl_3} \times \frac{35/5gCl^-}{1molCl^-} = 6/39gCl^-$$

گام دوم: با توجه به این‌که صورت سؤال گفته از تغییر جرم محلول، در اثر انجام واکنش صرف نظر شود؛ در نتیجه می‌توان جرم محلول را پس از انجام واکنش نیز برابر ۳۰۰ گرم دانست. بنابراین جرم محلول نهایی برابر است با:

$$\text{جرم محلول نهایی پس از انجام واکنش} = \text{جرم محلول اولیه} + \text{جرم آب افزوده‌شده} = 300 + 1700 = 2000g$$

گام سوم: غلظت ppm یون کلرید (Cl^-) در محلول نهایی را با توجه به جرم این یون در محلول و هم‌چنین جرم محلول، به دست می‌آوریم:

$$ppm(Cl^-) = \frac{\text{جرم یون } Cl^-}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{6/39}{2000} \times 10^6 = 3195$$

۲۰۰ گرم محلول ۲/۲۲ درصد جرمی کلسیم کلرید با مقدار کافی سدیم فسفات جامد واکنش کامل می‌دهد. اگر به محلول تشکیل‌شده، ۱۸۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر اضافه شود، غلظت یون کلرید در پایان واکنش، پس از جداکردن رسوب، برابر چند ppm است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود، از تغییر جرم محلول بر اثر انجام واکنش صرف‌نظر شود، $Cl = 35/5, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)

$$CaCl_2(aq) + Na_3PO_4(s) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + NaCl(aq)$$

۱) ۲۸۴۰ ۲) ۱۴۲۰

۳) ۴۲۶۰ ۴) ۵۶۸۰

(ریاضی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

Telegram: @konkur_in