www.konkur.in

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

(نوبت اول – دی ماه ۱۴۰۱)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۱)

نکته: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

نکته: اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشد، آنگاه: $۲b = a + c$

نکته: دنبالهٔ هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضریب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جملهٔ اول هم باید غیرصفر باشد.

سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی را به‌صورت $t, tr, tr^۲$ در نظر می‌گیریم.

با توجه به فرض سؤال، سه جملهٔ $۴t, ۸tr, ۱۶tr^۲$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. پس:

$$۲(۸tr) = ۴t + ۱۶tr^۲ \xrightarrow{\div ۴t} ۴r = ۱ + ۴r^۲ \Rightarrow ۴r^۲ - ۴r + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲r-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

با جای‌گذاری $r = \frac{۱}{۲}$، جمله‌های دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t, \frac{t}{۲}, \frac{t}{۴}$ و جمله‌های دنبالهٔ حسابی به‌صورت $۴t, ۴t, ۴t$ خواهند بود.

بنابر فرض سؤال، داریم:

$$t^۲ + (\frac{t}{۲})^۲ + (\frac{t}{۴})^۲ = ۴t + ۴t + ۴t$$

$$t^۲ + \frac{t^۲}{۴} + \frac{t^۲}{۱۶} = ۱۲t \Rightarrow \frac{۲۱}{۱۶}t^۲ = ۱۲t \Rightarrow \frac{۲۱}{۱۶}t = ۱۲ \Rightarrow t = \frac{۶۴}{۷}$$

پس جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی برابر است با: $t = \frac{۶۴}{۷}$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y = ak^۲ + bk + c$، مختصات رأس سهمی به‌صورت $(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ می‌باشد. پس:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = \frac{۴}{۲k} = \frac{۲}{k}$$

$$y_S = -\frac{\Delta}{۴a} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{-۲۴k - ۱۶}{۴k} = -۶ - \frac{۴}{k}$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$-۶ - \frac{۴}{k} = -۴ \times \frac{۲}{k} - ۴ \Rightarrow \frac{۴}{k} = ۲ \Rightarrow k = ۲$$

پس عرض رأس سهمی برابر است با:

$$-۶ - \frac{۴}{k} \xrightarrow{k=۲} -۶ - \frac{۴}{۲} = -۸$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۱)

نکات:

۱) $A - B = A \cap B'$ تبدیل تفاضل به اشتراک

۲) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ شرکت‌پذیری

۳) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ دمورگان

۴) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ دمورگان

۵) $(A')' = A$ متمم

۶) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ توزیع‌پذیری

۷) $A \cap A' = \varnothing$ تعریف متمم

۸) $A \cup \varnothing = A$

۹) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Telegram: @konkur_in

با استفاده از قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها؛ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
[(A-B)'-(B-C)]-C &= [(A-B)'\cap(B-C)']\cap C' && \text{تبدیل تفاضل به اشتراک}\\
&= [(A\cap B')'\cap(B\cap C')']\cap C' && \text{تبدیل تفاضل به اشتراک}\\
&= (A\cap B')'\cap[(B\cap C')'\cap C'] && \text{شرکت‌پذیری}\\
&= (A'\cup B)\cap[(B'\cup C)\cap C'] && \text{دمورگان و متمم}\\
&= (A'\cup B)\cap[(B'\cap C')\cup(C\cap C')] && \text{توزیع‌پذیری}\\
&= (A'\cup B)\cap(B'\cap C') && \text{تعریف متمم}\\
&= [A'\cap(B'\cap C')]\cup[B\cap(B'\cap C')] && \text{توزیع‌پذیری}\\
&= [A'\cap(B'\cap C')]\cup[(B\cap B')\cap C'] && \text{شرکت‌پذیری}\\
&= [A'\cap(B'\cap C')]\cup\varnothing && \text{تعریف متمم}\\
&= [A'\cap(B'\cap C')] && \text{نکتهٔ ۸}\\
&= [A'\cap(B\cup C)'] && \text{دمورگان}\\
&= A'-(B\cup C) && \text{تبدیل تفاضل به اشتراک}
\end{aligned}$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

نکات:

۱) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ توزیع‌پذیری

۲) $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$ شرکت‌پذیری

۳) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee(\sim q)$ دمورگان

۴) $p\vee(\sim p)\equiv T$

۵) $p\wedge T\equiv p$

با استفاده از هم‌ارزی‌های منطقی، گزارهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
[\sim p\wedge(\sim q\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)] &\equiv [\sim p\wedge(\sim q\wedge r)]\vee[r\wedge(p\vee q)] && \text{توزیع‌پذیری}\\
&\equiv [(\sim p\wedge\sim q)\wedge r]\vee[r\wedge(p\vee q)] && \text{شرکت‌پذیری}\\
&\equiv r\wedge[(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\vee q)] && \text{توزیع‌پذیری}\\
&\equiv r\wedge[\sim(p\vee q)\vee(p\vee q)] && \text{دمورگان}\\
&\equiv r\wedge T && \text{نکتهٔ ۴}\\
&\equiv r && \text{نکتهٔ ۵}
\end{aligned}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

نکته: برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنهٔ f) هستند که به‌ازای آن‌ها $f(x)$ برابر صفر می‌شود.

چون دو معادلهٔ داده‌شده دارای ریشهٔ مشترک غیرصفر هستند، پس آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم تا نقطهٔ تلاقی آن‌ها که همان ریشهٔ مشترکشان است، به‌دست آید:

$$x^2+6x+m=x^2+2x-3m \Rightarrow 4x=-4m \Rightarrow x=-m$$

حال چون $x=-m$ ریشهٔ (صفر) هر دو معادلهٔ داده شده است، پس:

$$(-m)^2+6(-m)+(m)=0 \Rightarrow m^2-5m=0 \Rightarrow m(m-5)=0 \Rightarrow m=0 \text{ یا } 5$$

طبق فرض سؤال ریشهٔ مشترک دو معادلهٔ غیرصفر است، پس $m=5$ می‌باشد.

حال با جای‌گذاری مقدار m در دو معادله، ریشه‌های آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+2x-15=0 \Rightarrow (x+5)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=3\\x=-5\end{cases}$$

$$x^2+6x+5=0 \Rightarrow (x+1)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\x=-5\end{cases}$$

در نتیجه اختلاف ریشه‌های غیرمشترک برابر است با:

$$3-(-1)=4$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۴)

نکتهٔ ۱: فرض کنید که معادلهٔ $P(x)=0$ دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2 ($x_1<x_2$) داشته باشد، آنگاه جدول تعیین علامت آن به‌شکل زیر خواهد بود:

x		x_1		x_2	
$P(x)$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

نکتهٔ ۲: اگر در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، داشته باشیم $a+b+c=0$، آنگاه ریشه‌های این معادله برابر با «۱» و «$\frac{c}{a}$» خواهند بود.

طبق فرض سؤال داریم:

$$-2<y<0 \Rightarrow -2<\frac{2}{x^2-3x+2}<0$$

چون $\frac{2}{x^2-3x+2}<0$ ، $2>0$، پس: $x^2-3x+2<0$.

با توجه به نکتهٔ ۲، ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده برابرند با: $x_1=1$ ، $x_2=\frac{c}{a}=2$، پس:

x		1		2	
$P(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

جواب نامعادلهٔ $x^2-3x+2<0$ برابر است با $(1,2)$ که هیچ عدد صحیحی در این بازه قرار ندارد. (توجه شود که دیگر نیازی به بررسی نامعادلهٔ $\frac{2}{x^2-3x+2}<-2$ وجود ندارد.)

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

نکته: اگر در صفحهٔ مختصات دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

نکته: شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

نکته: اگر خطوط d و d' به‌ترتیب با شیب‌های m و m' برهم عمود باشند، آنگاه $mm'=-1$ و برعکس.

مختصات نقطهٔ D را به‌صورت (α,f) در نظر می‌گیریم. چون ABCD مربع است، داریم:

$$AB=AD \Rightarrow \sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-1)^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4^2+(-3)^2=\alpha^2+(\beta-1)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2+(\beta-1)^2=25 \qquad (1)$$

می‌دانیم که AB بر AD عمود است. پس:

$$m_{AB}\times m_{AD}=-1$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-1}{4-0}=\frac{-3}{4} \Rightarrow m_{AD}=\frac{4}{3}$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\frac{\beta-1}{\alpha-0}=\frac{\beta-1}{\alpha}=\frac{4}{3} \Rightarrow \beta-1=\frac{4}{3}\alpha \qquad (2)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) داریم:

$$\alpha^2+(\frac{4}{3}\alpha)^2=25 \Rightarrow \alpha^2+\frac{16}{9}\alpha^2=25 \Rightarrow \frac{25}{9}\alpha^2=25 \Rightarrow \alpha^2=9 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=3 & \text{غ ق ق}\\ \alpha=-3\end{cases}$$

چون نقطهٔ D در ربع سوم است، پس طول آن منفی خواهد بود و $\alpha=-3$.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس‌های ۳ و ۴، فصل ۲)

نکته: اگر f یک تابع باشد، وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ به‌شرط آنکه مقادیر f در دامنهٔ g قرار داشته باشند:

$$gof(x)=g(f(x))$$

با توجه به خواستهٔ سؤال داریم:

$$g^{-1}of^{-1}(0)=\alpha \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(0))=\alpha$$

حال مقدار $f^{-1}(0)$ را مساوی β در نظر می‌گیریم. داریم:

$$(0,\beta)\in f^{-1}(x) \Rightarrow (\beta,0)\in f(x)$$

$$f(\beta)=0 \Rightarrow \log(2\beta-5)=0 \Rightarrow 2\beta-5=1 \Rightarrow \beta=3 \Rightarrow f^{-1}(0)=3$$

در نتیجه:

$$g^{-1}of^{-1}(0)=g^{-1}(f^{-1}(0))=g^{-1}(3)=\alpha$$

$$(3,\alpha)\in g^{-1}(x) \Rightarrow (\alpha,3)\in g(x)$$

$$g(\alpha)=3 \Rightarrow \alpha+\sqrt{2\alpha-4}=3 \Rightarrow \sqrt{2\alpha-4}=3-\alpha \quad (1)$$

می‌دانیم که:

$$2\alpha-4\geq 0 \Rightarrow \alpha\geq 2\ ,\ 3-\alpha\geq 0 \Rightarrow \alpha\leq 3$$

پس: $\alpha\in[2,3]$

حال طرفین رابطهٔ (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2\alpha-4=9+\alpha^2-6\alpha \Rightarrow \alpha^2-8\alpha+13=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=\dfrac{8+\sqrt{64-52}}{2}=4+\sqrt{3} & \text{غ ق ق}\\ \alpha_2=\dfrac{8-\sqrt{64-52}}{2}=4-\sqrt{3} & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس‌های ۱ و ۳، فصل ۲)

نکته: اگر دو تابع f و g یکدیگر را در نقطهٔ (α,β) قطع کنند، آنگاه:

$$(\alpha,\beta)\in f\ ,\ (\alpha,\beta)\in g$$

نکته: اگر f یک تابع باشد، وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$g(1)=f(1)$$

$$g(1)=-(1)^2-3\times 1+8=-1-3+8=4$$

$$f(1)=4 \Rightarrow 2+2^{b-1\times a}=4 \Rightarrow 2^{b-a}=2 \Rightarrow b-a=1 \quad (1)$$

داریم:

$$f^{-1}(10)=-1 \Rightarrow f(-1)=10$$

$$2+2^{b-a(-1)}=10 \Rightarrow 2^{b+a}=8 \Rightarrow b+a=3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases}b-a=1\\ b+a=3\end{cases} \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2\ ,\ a=1$$

در نتیجه:

$$2b-a=2\times 2-1=4-1=3$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۱)

نکته: برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر کند.

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

چون:

$$x^۳+۸=(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$$

پس کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها عبارت $x^۳+۸=(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$ می‌باشد. پس:

$$\frac{۱}{x+۲}-\frac{x^۲-۹x-۲}{x^۳+۸}=\frac{۶x}{x^۲-۲x+۴} \xrightarrow{\times(x+۲)(x^۲-۲x+۴)} x^۲-۲x+۴-(x^۲-۹x-۲)=۶x(x+۲)$$

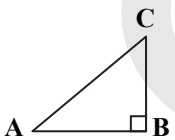
$$x^۲-۲x+۴-x^۲+۹x+۲=۶x^۲+۱۲x \Rightarrow ۶x^۲+۵x-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-۵+\sqrt{۱۶۹}}{۱۲}=\frac{۲}{۳} \\ x_۲=\frac{-۵-\sqrt{۱۶۹}}{۱۲}=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

بنابر خواستهٔ سؤال، فقط $x=\frac{۲}{۳}$ قابل قبول است.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و نیز نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم:

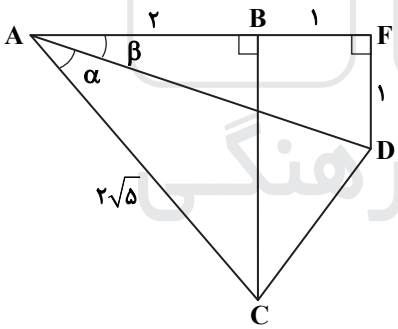


$$\text{Sin A}=\frac{BC}{AC} \quad , \quad \text{Cos A}=\frac{AB}{AC}$$

نکته: $\text{Cos}(\alpha-\beta)=\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta+\text{Sin}\alpha\,\text{Sin}\beta$

بنابر نکته داریم:

$$\text{Cos}\alpha=\text{Cos}(\hat{A}-\beta)=\text{Cos}\,\hat{A}\,\text{Cos}\beta+\text{Sin}\,\hat{A}\,\text{Sin}\beta$$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow ۲^۲+BC^۲=(۲\sqrt{۵})^۲$$

$$\Rightarrow BC^۲=۱۶ \Rightarrow BC=۴$$

$$\text{Cos}\,\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{Sin}\,\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{۴}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AFD داریم:

$$AF^۲+FD^۲=AD^۲$$

$$۳^۲+۱^۲=AD^۲ \Rightarrow AD=\sqrt{۱۰}$$

$$\text{Sin}\beta=\frac{FD}{AD}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\text{Cos}\beta=\frac{AF}{AD}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

در نتیجه:

$$\text{Cos}\alpha=(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})+(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})=\frac{۳}{\sqrt{۵۰}}+\frac{۲}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

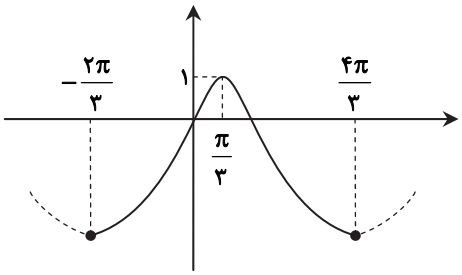
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نمودار داده‌شده، طول نقطهٔ ماکزیمم برابر است با:



$$\frac{\frac{4\pi}{3}+(-\frac{2\pi}{3})}{2}=\frac{\pi}{3}$$

دورهٔ تناوب آن برابر است با:

$$\frac{4\pi}{3}-(-\frac{2\pi}{3})=2\pi$$

$$\frac{2\pi}{|c|}=2\pi \Rightarrow |c|=1 \xrightarrow{\text{ماکزیمم } \frac{\pi}{3}} c>0 \Rightarrow c=1$$

چون مقدار تابع $y=a+b\cos(cx-\frac{\pi}{3})$ در $\frac{\pi}{3}$ ماکزیمم است، پس باید $a+b$ ماکزیمم باشد و چون مقدار ماکزیمم تابع برابر با $a+|b|$ است، پس $b>0$. پس:

$$a+b=1 \quad (1)$$

$$(0,0)\in y \Rightarrow a+b\cos(-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow a+\frac{b}{2}=0 \Rightarrow b=-2a \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده در سؤال برابر است با:

$$b(c-a)=2\times(1-(-1))=2\times 2=4$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

نکته: $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

نکته: $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$

نکته: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

بنابر معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده، داریم:

$$\cos(\frac{17\pi}{8}+x)\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\cos^2(\frac{\pi}{3})$$

$$\cos(2\pi+\frac{\pi}{8}+x)\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{8}+x)\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\frac{1}{4}$$

اگر $\frac{\pi}{8}+x=\alpha$ و $\frac{3\pi}{8}-x=\beta$ قرار دهیم، داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{8}+x+\frac{3\pi}{8}-x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$$

پس:

$$\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}=2x+\frac{\pi}{4} & (1) \\ 2\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}=2kx+\frac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{24} \xrightarrow{k=0} x=-\frac{\pi}{24}$$

$$(2) \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{24} \xrightarrow{k=0} x=\frac{7\pi}{24}$$

دقت شود که به‌ازای $k=1$ و $k=-1$، مقدار x در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرار ندارد.

پس مقدار خواسته‌شدهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{7\pi}{24}-\frac{\pi}{24}=\frac{6\pi}{24}=\frac{\pi}{4}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۱)

نکته: برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم.

اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: جواب‌های معادلهٔ $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادلهٔ $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند.

با توجه به فرض سؤال داریم: $g(f(g(x+2)))=0$

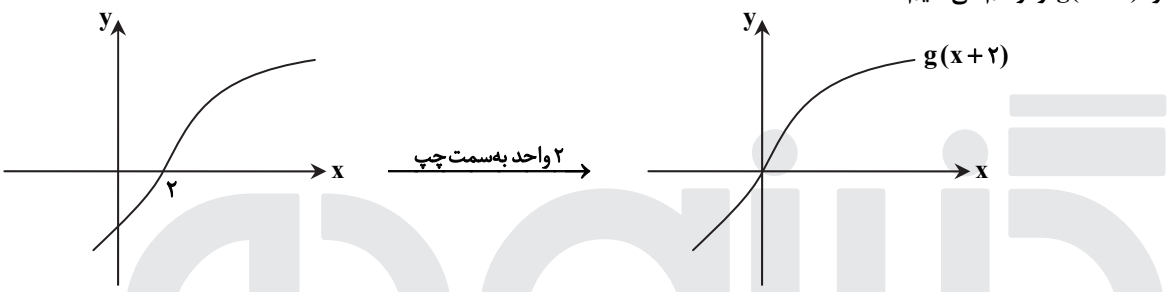
با توجه به نمودار تابع g، واضح است که $g(2)=0$، پس: $g(2)=0=g(f(g(x+2))) \Rightarrow f(g(x+2))=2$

حال اگر قرار دهیم: $g(x+2)=\alpha$ آنگاه: $f(\alpha)=2$، پس:

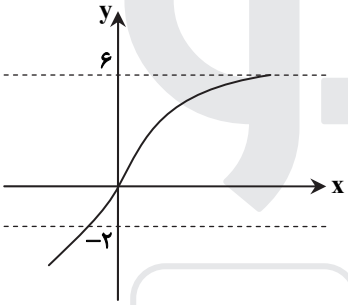
$$f(\alpha)=\left|\frac{1}{2}\alpha-1\right|=2 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\alpha-1=2 \Rightarrow \alpha=6\\ \frac{1}{2}\alpha-1=-2 \Rightarrow \alpha=-2\end{cases}$$

در نتیجه: $g(x+2)=-2$ یا $g(x+2)=6$

حال نمودار $g(x+2)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار $g(x+2)$، هر دو معادلهٔ $g(x+2)=6$ و $g(x+2)=-2$ دارای جواب هستند:



بنابراین معادلهٔ داده‌شده دارای ۲ ریشه است.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: اگر $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ دو چندجمله‌ای باشند، آنگاه:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n}{b_n}$$

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

با توجه به شکل داده‌شده، تابع f^{-1} یک تابع خطی می‌باشد که از نقاط $(0,\pi)$ و $(m,0)$ گذشته است. پس:

$$f^{-1}(x)=\frac{-\pi}{m}x+m \qquad m=\text{عرض از مبدأ و } \text{شیب خط}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\pi-0}{0-m}=-\frac{\pi}{m}$$

حال با استفاده از نکته، تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$y=-\frac{\pi}{m}x+m \Rightarrow -\frac{\pi}{m}x=y-m \Rightarrow x=-\frac{(y-m)m}{\pi} \Rightarrow x=-\frac{m}{\pi}y+\frac{m^2}{\pi}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y=-\frac{m}{\pi}x+\frac{m^2}{\pi} \Rightarrow f(x)=-\frac{m}{\pi}x+\frac{m^2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x+m}{-\frac{m}{\pi}x+\frac{m^2}{\pi}}=\frac{\frac{-\pi}{m}}{-\frac{m}{\pi}}=\frac{\pi^2}{m^2}=\pi \Rightarrow m^2=\pi \Rightarrow m=\pm\sqrt{\pi}$$

با توجه به شکل، فقط $m=-\sqrt{\pi}$ قابل قبول است.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

نکته: گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

چون تابع f در R پیوسته است، پس باید در نقطهٔ $x=۲$ نیز پیوسته باشد:

$$f(۲)=|x-[x]|=|۲-[۲]|=۰$$

چون $[۲^+]=۲$ و عددی زوج است، پس:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}|x-[x]|=|۲-|۲^+||=۰$$

چون $[۲^-]=۱$ و عددی فرد است، پس:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}|x-[x-a]|=|۲-[۲^- -a]|$$

چون تابع f در R پیوسته است، پس باید:

$$|۲-[۲^- -a]|=۰ \Rightarrow [۲^- -a]=۲ \Rightarrow ۰<-a<۱ \Rightarrow -۱<a<۰$$

پس a باید عددی بین -۱ و صفر باشد، در صورتی که در فرض سؤال ذکر شده است که $a<-۱$.

در نتیجه هیچ مقداری برای $[a]$ وجود ندارد.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

[در کلید به اشتباه گزینهٔ ۳ ثبت شده است.]

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۵)

نکته: فرض کنیم $c\in D_f$، نقطهٔ به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

با توجه به وجود $|x|$ در تابع f، دامنه را به ۲ بازه تقسیم می‌کنیم:

$$x\geq ۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱-x^۲} \Rightarrow y'=\frac{(۱-x^۲)-(-۲x)x}{(۱-x^۲)^۲}=\frac{۱+x^۲}{(۱-x^۲)^۲}\neq ۰$$

$$x<۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱+x^۲} \Rightarrow y'=\frac{(۱+x^۲)-(۲x)x}{(۱+x^۲)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}=۰ \Rightarrow ۱-x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غ ق ق} \\ x=-۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

چون $x=-۱$ در دامنهٔ تابع f وجود دارد، پس یک نقطهٔ بحرانی است.

[دقت شود که تابع f در نقطهٔ صفر پیوسته است و همچنین $f'(۰)=\frac{۱}{۱-x|x|}=۱$ و در نتیجه صفر نقطهٔ بحرانی تابع نیست.]

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با توجه به اینکه شیب نیم‌مماس راست به چپ تابع داده‌شده در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ برابر با $f'_+(\frac{۳}{۴})$ و $f'_-(\frac{۳}{۴})$ است، پس:

$$f'_+(\frac{۳}{۴})=\lim_{x\to \frac{۳}{۴}^+}\frac{f(x)-f(\frac{۳}{۴})}{x-\frac{۳}{۴}}=۴\lim_{x\to \frac{۳}{۴}^+}\frac{|۴x-۳|\sqrt{ax}}{۴x-۳}=۴\times ۱\times\sqrt{\frac{۳}{۴}a}=۲\sqrt{۳a}$$

$$f'_-(\frac{۳}{۴})=\lim_{x\to \frac{۳}{۴}^-}\frac{f(x)-f(\frac{۳}{۴})}{x-\frac{۳}{۴}}=۴\lim_{x\to \frac{۳}{۴}^-}\frac{|۴x-۳|\sqrt{ax}}{۴x-۳}=۴\times(-۱)\sqrt{\frac{۳}{۴}a}=-۲\sqrt{۳a}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$۲\sqrt{۳a}-(-۲\sqrt{۳a})=۲\sqrt{۶} \Rightarrow ۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶} \Rightarrow ۲\sqrt{۳a}=\sqrt{۶} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۲a=۶ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ؟؟؟ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۵)

آزمون مشتق اول: فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای مانند I ($I \subseteq D_f$) پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، هرگاه f بر این بازه به‌جز احتمالاً در نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)>0$ و به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)<0$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)<0$ و به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)>0$، آنگاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به‌طوری که f' در هر دو طرف، مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آنگاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

با توجه به فرض سؤال، α و β، ریشه‌های تابع $f(x)=(m^2-1)x^2+(2-m)x+5$ هستند. پس:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{2-m}{m^2-1}=\frac{m-2}{m^2-1}$$

حال مشتق عبارت $\frac{m-2}{m^2-1}$ را به‌دست می‌آوریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{m-2}{m^2-1}\right)'=\frac{1\times(m^2-1)-2m(m-2)}{(m^2-1)^2}=0$$

$$\Rightarrow m^2-1-2m^2+4m=0 \Rightarrow -m^2+4m-1=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=\frac{-4+\sqrt{16-4}}{-2}=2-\sqrt{3} \\ m_2=\frac{-4-\sqrt{16-4}}{-2}=2+\sqrt{3} \end{cases}$$

حال جدول تعیین‌علامت مشتق عبارت $\frac{m-2}{m^2-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
$\left(\frac{m-2}{m^2-1}\right)'$	−		+		−
$\frac{m-2}{m^2-1}$	↘		↗	max	↘

حال اگر $m=2+\sqrt{3}$ را در معادلهٔ اول قرار دهیم، Δ، مقداری منفی خواهد شد که در این صورت آن معادله اصلا ریشه ندارد و در این صورت سؤال غلط می‌باشد.

$$\Delta=(2-m)-20(m^2-1)=3-20(6+4\sqrt{3})<0$$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس‌های ۱ و ۲، فصل ۶)

نکته (اصل ضرب) اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر به $m\times n$ روش قابل انجام است.

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

افراد سخنران را با a، b، c، d و e نمایش داده و دو نفر خاص را a و b در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهیم a و b پشت سرهم سخنرانی کنند، آن‌ها را یک نفر در نظر می‌گیریم و با ۳ نفر دیگر داریم:

$$(ab),c,d,e \xrightarrow{\text{تعداد جایگشت‌ها}} 4!$$

فرد a و b نیز می‌توانند به $2!$ حالت در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین با توجه به اصل ضرب:

$$\text{تعداد حالات} = 4!\times 2! = 24\times 2 = 48$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ؟؟؟ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۱، فصل ۷)

نکته: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

نکته: معادلهٔ درجه‌دوم ax^2+bx+c دارای دو ریشهٔ متمایز است اگر و تنها اگر $\Delta>0$.

معادلهٔ داده‌شده در سؤال دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس: $\Delta>0 \Rightarrow m^2-4n>0 \Rightarrow m^2>4n$

می‌دانیم که فضای نمونه پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است. ($n(S)=36$)

حالات ممکن برای اینکه $m^2>4n$ باشد، عبارت‌اند از:

$$A=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

بنابراین $n(A)=17$ است و احتمال این پیشامد برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{17}{36}$

پاسخ در هیچ‌یک از گزینه‌ها وجود ندارد و سؤال غلط بوده است.

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

نکته: در صورتی که B پیشامدی باشد که $P(B)>0$، برای هر پیشامد A «احتمال A به‌شرط رخ دادن B» (که آن را «Pی A به‌شرط B» نیز می‌خوانیم) به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

نکته: $P(A')=1-P(A)$

نکته: اگر $A\cap B=\varnothing$، آنگاه دو پیشامد A و B ناسازگارند و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$P(B'\mid A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')} \overset{\text{دمورگان}}{=\!=} \frac{P(B\cup A)'}{P(A')}=\frac{1-P(B\cup A)}{1-P(A)}=\frac{1-(P(B)+P(A))}{1-P(A)}=\frac{1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{6})}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}}=0/7$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۳)

نکته (ضریب تغییرات داده‌ها): معیاری است که از تقسیم انحراف‌معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به‌دست می‌آید و آن را با CV نشان می‌دهند.

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

با توجه به فرض سؤال، اعداد دستهٔ اول از بین اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ هستند و نیز اعداد دستهٔ دوم دقیقاً ۲، ۴، ۶ و ۸ هستند. اگر عدد ۵ در دستهٔ اول وجود داشته باشد، ۲ حالت خواهیم داشت:

حالت اول: عدد ۵ را با عدد ۶ جایگزین کنیم. حال چون بعد از ۶ فقط عدد ۸ وجود دارد، پس تنها یکی از اعداد ۷ یا ۹ در دستهٔ اول قرار داشته‌اند. در این صورت چون باید ۱ و ۳ نیز در دستهٔ اول حضور داشته باشند، پس باید ۱ را با ۲ و ۳ را با ۴ جایگزین کنیم. در این حالت ۳ عدد ۱، ۳ و ۵ با کوچک‌ترین عدد زوج بعد از خود جایگزین شده‌اند که با فرض سؤال در تناقض است.

حالت دوم: عدد ۵ را با عدد ۴ جایگزین کنیم. حال چون قبل از ۴ فقط عدد ۲ وجود دارد، پس تنها یکی از اعداد ۱ یا ۳ در دستهٔ اول قرار داشته‌اند. در این صورت چون باید ۷ و ۹ نیز در دستهٔ اول حضور داشته باشند، پس باید ۹ را با ۸ و ۷ را با ۶ جایگزین کنیم. در این حالت ۳ عدد ۵، ۷ و ۹ با بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین شده‌اند که با فرض سؤال در تناقض است.

پس در ۲ حالت دیده شد که عدد ۵ نمی‌تواند در دستهٔ اول قرار گیرد.

در نتیجه اعداد دستهٔ اول برابرند با: ۱،۳،۷،۹ و اعداد دستهٔ دوم برابرند با: ۲،۴،۶،۸

$$\bar{x}_1=\frac{1+3+7+9}{4}=5 \;,\; \sigma_1^2=\frac{(1-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{4}=\frac{40}{4}=10 \Rightarrow \sigma_1=\sqrt{10}$$

$$\bar{x}_2=\frac{2+4+6+8}{4}=5 \;,\; \sigma_2^2=\frac{(2-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2}{4}=\frac{20}{4}=5 \Rightarrow \sigma_2=\sqrt{5}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{CV_1}{CV_2}=\frac{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}}{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

نکته (قانون بیز): فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \le n$ داریم:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

فرض می‌کنیم پیشامد A، یعنی گوی خارج‌شده قرمز باشد و پیشامدهای B_1، B_2 و B_3 به‌ترتیب به‌معنای انتخاب کیسه‌های اول، دوم و سوم باشند.

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid B_1) = 0 \quad , \quad P(A \mid B_2) = 1 \quad , \quad P(A \mid B_3) = \frac{2}{10}$$

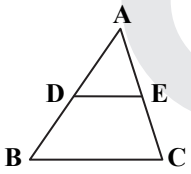
حال داریم:

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{P(B_1 \mid P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{12}{30}} = \frac{5}{6}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

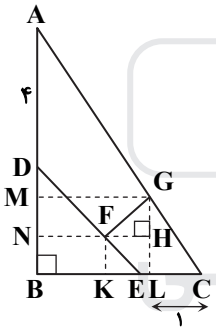
۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۲)

تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

از نقاط F و G خطوطی موازی با اضلاع قائم مثلث ABC رسم می‌کنیم. با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\triangle BDE : FK \parallel BD \Rightarrow \frac{FK}{BD} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow FK = \frac{1}{4}BD \xrightarrow{FK=HL} HL = \frac{1}{4}BD \quad (1)$$

$$\triangle ABC : GL \parallel AB \Rightarrow \frac{GL}{AB} = \frac{CG}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow GL = \frac{1}{4}AB \quad (2)$$

$$GH = GL - HL \xrightarrow{(1),(2)} GH = \frac{1}{4}(AB - BD) = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \quad (3)$$

$$\triangle BDE : FN \parallel BE \Rightarrow \frac{FN}{BE} = \frac{DF}{DE} = \frac{3}{4} \Rightarrow FN = \frac{3}{4}DE \quad (*)$$

$$\triangle ABC : GM \parallel BC \Rightarrow \frac{GM}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow GM = \frac{3}{4}BC \xrightarrow{GM=NH} NH = \frac{3}{4}BC \quad (**)$$

$$FH = NH - FN \xrightarrow{(*),(**)} FH = \frac{3}{4}(BC - DE) = \frac{3}{4}EC = \frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\triangle FGH \Rightarrow FG^2 = FH^2 + GH^2 \xrightarrow{(3),(4)} FG^2 = (\frac{3}{4})^2 + 1^2$$

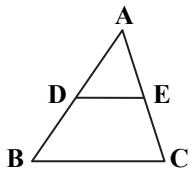
$$\Rightarrow FG^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \Rightarrow FG = \frac{5}{4} = 1/25$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

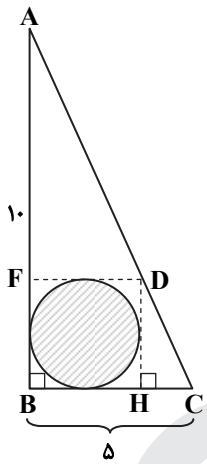
۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۲)



تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلث پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

با توجه به شکل داده‌شده در سؤال، تنها راه موجود برای حل آن این است که فرض کنیم FD بر دایره مماس است.



حال اگر قطر دایره را برابر x در نظر بگیریم، داریم:

$$DH=BH=x\ ,\ HC=5-x$$

طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}:DH\parallel AB\Rightarrow\frac{DH}{AB}=\frac{CH}{BC}\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{5-x}{5}$$

$$\Rightarrow 5x=50-10x\Rightarrow 15x=50\Rightarrow x=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$$

اگر فرض کنیم شعاع دایره برابر r باشد، آنگاه:

$$x=2r=\frac{10}{3}\Rightarrow r=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi r^2=\pi(\frac{5}{3})^2=\frac{25}{9}\pi$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: در هر n‌ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2}-16=\frac{(n-1)(n-4)}{2}\xrightarrow{\times 2}n(n-3)-32=(n-1)(n-4)\Rightarrow n^2-3n-32=n^2-5n+4$$

$$\Rightarrow 2n=36\Rightarrow n=18$$

خواستهٔ سؤال، اختلاف تعداد قطرهای یک ۱۸‌ضلعی و یک ۱۶‌ضلعی است. پس:

$$\frac{18(18-3)}{2}-\frac{16(16-3)}{2}=\frac{18\times 15}{2}-\frac{16\times 13}{2}=135-104=31$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۴)

نکته: دو خط را که نقطهٔ اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:

۱) اگر صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آن‌ها باشد، آن دو خط را موازی می‌نامیم.

۲) اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آن‌ها باشد، آن دو خط را متنافر می‌نامیم.

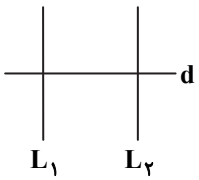
نکته: دو خط موازی با یک خط در فضا، با یکدیگر موازی‌اند.

نکته: دو خط در فضا نسبت به‌هم متقاطع یا موازی یا متنافر هستند.

راه‌حل اول:

برای گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ مثال نقض می‌آوریم:

اگر دو خط L_1 و L_2 را در یک صفحه در نظر بگیریم و خط d را نیز در همان صفحه فرض کنیم، آنگاه خط d و L_2 متقاطع خواهند بود.



در نتیجه هیچ‌یک از گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ همواره درست نیستند.

راه‌حل دوم:

ادعا می‌کنیم که دو خط d و L_2 غیرموازی‌اند. زیرا اگر $d\parallel L_2$ باشد، آنگاه چون $L_2\parallel L_1$، با توجه به نکته باید $d\parallel L_1$ باشد که این با فرض سؤال در تناقض است.

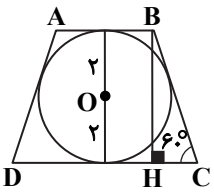
بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)

نکته: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

با توجه به فرض سؤال، دایره در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD محاط شده است.



$$AD = BC \ , \ \hat{C} = ۶۰^\circ \ , \ BH = ۲r = ۴$$

در مثلث BHC داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

حال با استفاده از نکته داریم:

$$AD + BC = AB + DC \xrightarrow{AD=BC} AB + DC = ۲BC = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

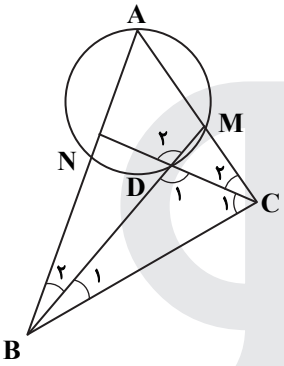
$$S_{ABCD} = \frac{(AB+DC)\times BH}{۲} = \frac{\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}\times ۴}{۲} = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)

نکته: یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

بنابر فرض سؤال، چون DC و DB نیمساز هستند، پس:



$$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \ , \ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$$

$$\overset{\triangle}{BDC} : \hat{D}_۱ + \hat{C}_۱ + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱)$$

چون $\hat{D}_۲$ و $\hat{D}_۱$ متقابل‌به‌رأس هستند، پس:

$$\hat{D}_۲ = \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) \quad (۱)$$

حال با استفاده از نکته، چون چهارضلعی AMDN محاطی است، پس:

$$\hat{A} + D_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(۱)} \hat{A} = (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) + (\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲) + (\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲) = ۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow[\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲]{\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲} (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) + (\hat{B}_۱ + \hat{B}_۱) + (\hat{C}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳(\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: معادلهٔ دایره به مرکز (α,β) و شعاع r برابر است با:

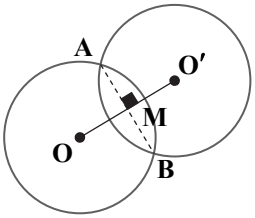
$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

نکته: طول پاره‌خط واصل بین نقاط A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

نکته: خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن دو دایره است.

چون OO' عمودمنصف AB است، پس نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB قرار دارد:



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۳}{۲} = ۲ \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۴+۲}{۲} = ۳ \end{cases} \Rightarrow M = (۲,۳)$$

حال شیب خط AB را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۴-۲}{۱-۳} = -۱$$

چون OO' بر AB عمود است، پس:

$$m_{OO'} = +۱$$

حال معادلهٔ خط OO' را به‌دست می‌آوریم؛ با توجه به اینکه نقطهٔ M روی OO' قرار دارد، پس:

$$y - ۳ = ۱\times(x-۲) \Rightarrow y = x + ۱$$

Telegram: @konkur_in

طبق فرض سؤال، طول خط‌المرکزین دو دایره، ۲ برابر طول پاره‌خط AB است، پس: $OO' = ۲AB = ۲\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۳-۱)^۲} = ۲\sqrt{۸} = ۴\sqrt{۲}$

چون شعاع دو دایره برابر است، پس $OM = O'M$. در نتیجه: $OM = O'M = \frac{OO'}{۲} = ۲\sqrt{۲}$

حال مختصات دو نقطهٔ O و O' را به‌دست می‌آوریم: ($OM = O'M = ۲\sqrt{۲}$)

$$\sqrt{(۲-x)^۲ + (۳-y)^۲} = ۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۲-x)^۲ + (۳-y)^۲ = ۸ \xrightarrow{y=x+۱} (۲-x)^۲ + (۲-x)^۲ = ۸$$

$$\Rightarrow (۲-x)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۲-x = ۲ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow O = (۰,۱) \\ ۲-x = -۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow O' = (۴,۵) \end{cases}$$

دایره به مرکز $O'(۴,۵)$، محور xها را قطع نمی‌کند.

شعاع دایره به مرکز $O(۰,۱)$ برابر است با: $r = OA = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$

حال معادلهٔ دایره به مرکز O و شعاع $\sqrt{۱۰}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰ \xrightarrow{y=۰} x^۲ + ۱ = ۱۰ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$$

پس دایره به مرکز O، محور xها را در دو نقطه با طول‌های ۳ و -۳ قطع می‌کند و در نتیجه فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر است با: $۳ - (-۳) = ۶$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با: $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

اگر فرض کنیم $\vec{x} = (۲,-a,۳)$ و $\vec{y} = (۱,۰,a)$، پس:

$$\frac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{|\vec{y}|} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{|۲\times۱ + ۰ + ۳a|}{\sqrt{۱^۲ + a^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{|۳a+۲|}{\sqrt{a^۲+۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(۳a+۲)^۲}{a^۲+۱} = \frac{۲۵}{۲} \Rightarrow ۱۸a^۲ + ۲۴a + ۸ = ۲۵a^۲ + ۲۵ \Rightarrow ۷a^۲ - ۲۴a + ۱۷ = ۰$$

چون مجموع ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم بالا برابر صفر است، پس: $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۱۷}{۷}$.

در نتیجه مقدار خواسته‌شده در سؤال برابر است با: $\frac{۱۷}{۷} - ۱ = \frac{۱۰}{۷}$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

نکته:

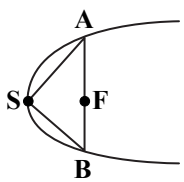
	دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی
روبه راست	خط	$y=k$	$x=-a+h$	$(a+h,k)$	$(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$
روبه چپ	خط	$y=k$	$x=a+h$	$(-a+h,k)$	$(y-k)^۲ = -۴a(x-h)$
روبه بالا	خط	$x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^۲ = ۴a(y-k)$
روبه پایین	خط	$x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$

نکته: پاره‌خط واصل بین نقاط A و B روی سهمی که از نقطهٔ کانونی می‌گذرد و بر محور سهمی عمود است را وتر کانونی سهمی می‌نامند و طول آن ۴ برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است.

ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^۲ - x - ۴y + ۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۴y = x - ۲ \Rightarrow y^۲ - ۴y + ۴ = x - ۲ + ۴ \Rightarrow (y-۲)^۲ = x + ۲$$

با توجه به جدول بالا، دهانهٔ سهمی روبه راست می‌باشد، نقطهٔ $S(-۲,۲)$ رأس سهمی است و $۴a = ۱$، در نتیجه $a = \frac{۱}{۴}$ فاصلهٔ کانونی سهمی می‌باشد.



با توجه به نکته، طول پاره‌خط AB برابر است با: $AB = ۴\times\frac{۱}{۴} = ۱$

$$S_{\triangle ABS} = \frac{SF \times AB}{۲} = \frac{\frac{۱}{۴}\times ۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

Telegram: @konkur_in

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۱)

نکته (ضریب ماتریس در ماتریس): اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریس $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=\left[C_{ij}\right]$، ماتریس C ماتریس $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم در آن، یعنی C_{ij} از ضریب سطر iاُم A در ستون jاُم B به‌دست می‌آید، یعنی:

$$C_{ij}=\text{سطر } i \text{ اُم } A\times \text{ستون } j \text{ اُم } B$$

$$\Rightarrow C_{ij}=\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{i2}+b_{pj}$$

$$D=ABC=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x & -1\\ 1 & 1 & x\\ x & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & x+1 & x-1\\ x & 2-x & x\\ -x-2 & -3 & 1-2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+5 & 3-x & x+1\\ x+2 & 0 & 2-x\\ -2x-7 & x-3 & -3\end{bmatrix}$$

می‌خواهیم مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس B برابر باشند، پس:

$$(x+5)+0+(-3)=(x+1)+0+(-2x-7)\Rightarrow x+2=-x-6\Rightarrow 2x=-8\Rightarrow x=-4$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد ($1\le n\le 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{برحسب سطر اول}}|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستون به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

نکته: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه: $|kA|=k^n|A|$

با توجه به نکته داریم:

$$\left||A|A\right|=|A|^3|A|=|A|^4$$

حال $|A|$ را برحسب ستون اول به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=1\times\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 4\end{vmatrix}-0+3\times\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1\times(8-6)+3\times(3-4)=2-3=-1$$

در نتیجه:

$$|A|^4=(-1)^4=1$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: اگر a و b، ۲ عدد طبیعی باشند که $x\overset{a}{\equiv}y$ و $x\overset{b}{\equiv}y$، آنگاه: $x\overset{[a,b]}{\equiv}y$

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد. $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$

نکته: دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم کم و یا در هم ضرب کرد.

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow\begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bd\\ a+c\overset{m}{\equiv}b+d\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-d\end{cases}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۹\times(۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳})$ را بر ۷ و ۸ می‌یابیم:

باقی‌مانده بر ۸:

$$۲۴\overset{۸}{\equiv}۰ \quad (۱)$$

$$۲۱\overset{۸}{\equiv}۵ \xrightarrow{\text{توان }۲} ۲۱^{۲}\overset{۸}{\equiv}۲۵\overset{۸}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{توان }۱۱} ۲۱^{۲۲}\overset{۸}{\equiv}۱ \xrightarrow{\times ۲۱} ۲۱^{۲۳}\overset{۸}{\equiv}۲۱\overset{۸}{\equiv}۵ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow ۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳}\overset{۸}{\equiv}۰-۵\overset{۸}{\equiv}-۵\overset{۸}{\equiv}۳ \xrightarrow{\times ۹} (۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳})\times ۹\overset{۸}{\equiv}۳\times ۹\overset{۸}{\equiv}۲۷\overset{۸}{\equiv}۳ \quad (*)$$

باقی‌مانده بر ۷:

$$۲۴\overset{۷}{\equiv}۳ \xrightarrow{\text{توان }۳} ۲۴^{۳}\overset{۷}{\equiv}۳^{۳}\overset{۷}{\equiv}۲۷\overset{۷}{\equiv}-۱$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۷} ۲۴^{۲۱}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۷}\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\times ۲۴^{۲}} ۲۴^{۲۳}\overset{۷}{\equiv}-۲۴^{۲}\overset{۷}{\equiv}-۳^{۲}\overset{۷}{\equiv}-۹\overset{۷}{\equiv}۵ \quad (۳)$$

$$۲۱\overset{۷}{\equiv}۰ \quad (۴)$$

$$(۳),(۴)\Rightarrow ۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳}\overset{۷}{\equiv}۵-۰\overset{۷}{\equiv}۵ \xrightarrow{\times ۹} (۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳})\times ۹\overset{۷}{\equiv}۵\times ۹\overset{۷}{\equiv}۴۵\overset{۷}{\equiv}۳ \quad (**)$$

$$(*),(**)\Rightarrow \begin{cases}(۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳})\times ۹\overset{۸}{\equiv}۳\\ (۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳})\times ۹\overset{۷}{\equiv}۳\end{cases}\Rightarrow (۲۴^{۲۳}-۲۱^{۲۳})\times ۹\overset{۵۶}{\equiv}۳$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود:

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b\,|\,ax-c \Rightarrow b\,|\,ax-c$$

$$\Rightarrow ax\overset{|b|}{\equiv}c \quad (b>۰)\ ,\ ax\overset{-b}{\equiv}c \quad (b<۰) \quad \text{یا} \quad ax\overset{b}{\equiv}c$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت: $by\overset{-a}{\equiv}c\ ,\ by\overset{a}{\equiv}c$

با توجه به نکته، ابتدا معادلهٔ سیاله $۱۷x+۱۸y=۹۸۷$ را به یک معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$۱۷x+۱۸y=۹۸۷ \Rightarrow ۱۸y\overset{۱۷}{\equiv}۹۸۷ \Rightarrow y\overset{۱۷}{\equiv}۱ \Rightarrow y=۱۷k+۱$$

$$۱۷x+۱۸(۱۷k+۱)=۹۸۷ \Rightarrow ۱۷x=-۱۸\times ۱۷k+۹۶۹ \Rightarrow x=-۱۸k+۵۷$$

$$\begin{cases}x>۰\Rightarrow ۵۷-۱۸k>۰\Rightarrow k<\frac{۵۷}{۱۸} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le ۳\\ y>۰\Rightarrow ۱۷k+۱>۰\Rightarrow k>-\frac{۱}{۱۷} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\ge ۰\end{cases}\xrightarrow{n} k=۰,۱,۲,۳$$

در نتیجه معادلهٔ سیالهٔ داده‌شده، ۴ دسته جواب در مجموعه اعداد طبیعی دارد.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۲)

نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $|D|\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil$. (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود.)

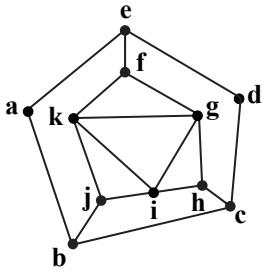
با توجه به گراف داده‌شده، مرتبهٔ آن برابر است با: $n=۱۱$

ماکزیمم درجهٔ آن که درجهٔ رئوس i، g و k است، برابر است با: $\Delta=۴$

بنابر نکته داریم: $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۱}{۴+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۱}{۵}\right\rceil=۳$

چون مجموعهٔ $D=[e,i,b]$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف داده‌شده است، پس: $\gamma(G)=۳$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.



Telegram: @konkur_in

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مجموعه‌های ۲تایی که مجموع اعداد آن برابر ۴۷ می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$\{۱۲,۳۵\},\{۱۳,۳۴\},\{۱۴,۳۳\},\{۱۵,۳۲\},\{۱۶,۳۱\},\{۱۷,۳۰\},\{۱۸,۲۹\},\{۱۹,۲۸\},\{۲۰,۲۷\},\{۲۱,۲۶\},\{۲۲,۲۵\},\{۲۳,۲۴\}$$

با توجه به مجموعه‌های ۲عضوی بالا، اگر از یک مجموعه هر دو عضو انتخاب شود، مجموع آن‌ها برابر ۴۷ خواهد بود.

بنابر فرض سؤال، حداقل مقدار n برابر ۲۰ می‌باشد. یعنی اگر مجموعه‌ای ۱۹عضوی از مجموعهٔ $\{۱۲,۱۳,\cdots,m\}$ انتخاب شود، مجموع هیچ ۲عضوی نباید ۴۷ شود. برای آنکه زیرمجموعهٔ انتخاب‌شده دارای هیچ ۲عضوی با مجموع ۴۷ نباشد، از هریک از مجموعه‌های ۲عضوی باید یک عضو انتخاب شود که برابر ۱۲ عضو خواهد بود در این صورت به ۷ عضو دیگر نیاز داریم تا به یک زیرمجموعهٔ ۱۹عضوی برسیم که مجموع هیچ ۲تایی از آن‌ها ۴۷ نیست. مجموعه‌های تک‌عضوی $\{۳۶\},\{۳۷\},\{۳۸\},\{۳۹\},\{۴۰\},\{۴۱\},\{۴۲\}$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر از هریک از مجموعه‌های ۲عضوی، تنها یک عضو انتخاب کرده و از مجموعه‌های تک‌عضوی نیز یک عضو برداریم، آنگاه زیرمجموعهٔ انتخاب‌شده دارای ۱۹ عضوی است که مجموع هیچ کدام برابر ۴۷ نیست.

حال بنابر اصل لانه کبوتری اگر زیرمجموعه‌ای شامل ۲۰ عضو از این مجموعه انتخاب شود، آنگاه حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۴۷ خواهد شد، پس مجموعهٔ اصلی برابر است با:

$$\{۱۲,۱۳,۱۴,\cdots,۴۲\}$$

بنابراین بیشترین مقدار m برابر ۴۲ است.

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف گوییم و با $P(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V=\{V_۱,V_۲,\cdots,V_P\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{P}\deg v_i = ۲q$$

نکته: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

برای داشتن بیشترین تعداد یال، باید رئوس از درجهٔ Δ و برای داشتن کمترین تعداد یال باید رئوس از درجهٔ δ را ماکزیمم کنیم.

حالت ماکزیمم تعداد یال: چون تعداد رئوس فرد باید عددی زوج باشد، پس باید ۱۶ رأس از درجهٔ ۸، یک رأس از درجهٔ ۷ و یک رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم:

$$\max\sum_{i=۱}^{۱۸}\deg V_i = ۱۶\times۸+۷+۳=۱۳۸=۲q_{max} \Rightarrow q_{max}=۶۹$$

حالت مینیمم تعداد یال: چون تعداد رئوس فرد باید عددی زوج باشد، پس باید ۱۶ رأس از درجهٔ ۳، یک رأس از درجهٔ ۴ و یک رأس از درجهٔ ۸ داشته باشیم:

$$\min\sum_{i=۱}^{۱۸}\deg V_i = ۱۶\times۳+۴+۸=۶۰=۲q_{min} \Rightarrow q_{min}=۳۰$$

مقدار خواسته‌شده در سؤال برابر است با:

$$q_{max}-q_{min}=۶۹-۳۰=۳۹$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)

هفت کمیت اصلی به همراه یکاهای آن‌ها عبارت‌اند از:

۱) جرم $\xleftarrow{\text{یکا}}$ کیلوگرم ۲) طول $\xleftarrow{\text{یکا}}$ متر ۳) زمان $\xleftarrow{\text{یکا}}$ ثانیه

۴) دما $\xleftarrow{\text{یکا}}$ کلوین ۵) مقدار ماده $\xleftarrow{\text{یکا}}$ مول ۶) جریان الکتریکی $\xleftarrow{\text{یکا}}$ آمپر

۷) شدت روشنایی $\xleftarrow{\text{یکا}}$ کندلا (شمع)

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

مواد پارامغناطیسی، دارای دوقطبی‌هایی هستند که به‌صورت کاتوره‌ای سمت‌گیری می‌کنند و در حضور یک میدان مغناطیسی قوی خارجی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت خواهند داشت.

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۲)

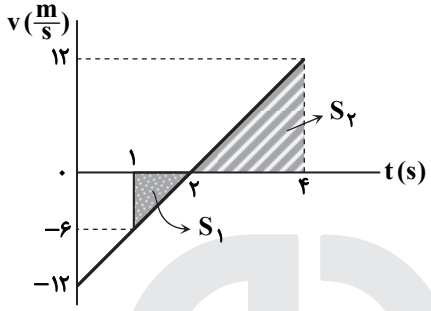
از مقاومت نوری در چشم‌های الکترونیکی استفاده می‌شود.

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان، معادلهٔ سرعت- زمان را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = ۳t^۲ - ۱۲t + ۹ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۱۲\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v = ۶t - ۱۲$$

اکنون می‌توان نمودار سرعت- زمان را رسم کرد و با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان مسافت و در نتیجه تندی متوسط را محاسبه کرد:

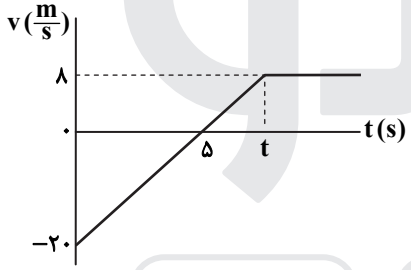


$$\ell = S_۱ + S_۲ = ۳ + ۱۲ = ۱۵\,m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۵}{۴-۱} = ۵\frac{m}{s}$$

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا شیب نمودار سرعت- زمان را در بازهٔ زمانی ۰ تا ۵s محاسبه می‌کنیم، شیب این قسمت از نمودار شتاب متحرک در این بازه است:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰-(-۲۰)}{۵} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

حال در بازهٔ ۰ تا t داریم:

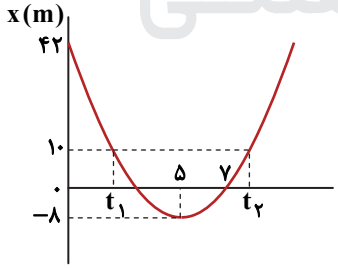
$$۴ = \frac{۸-(-۲۰)}{t} \Rightarrow t = ۷\,s$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان متحرک در بازهٔ ۰ تا ۷ ثانیه نمودار مکان- زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x = ۲t^۲ - ۲۰t + ۴۲$$

$$\begin{cases} t = ۵\,s \Rightarrow x = ۲(۲۵) - ۲۰(۵) + ۴۲ = -۸\,m \\ t = ۷\,s \Rightarrow x = ۲(۴۹) - ۲۰(۷) + ۴۲ = ۰ \end{cases}$$

طبق نمودار، کافی است زمان‌هایی که متحرک در بازه‌های $t_۱$ تا $t_۲$ حرکت می‌کند را محاسبه کنیم:



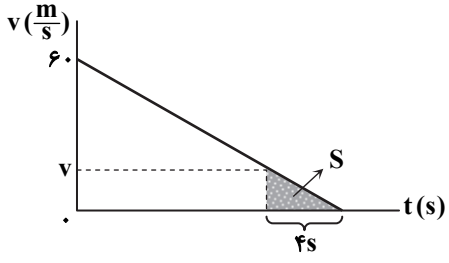
بازهٔ ۰ تا $t_۱$:

$$\begin{cases} t_۱ \text{ تا } ۰ : ۱۰ - ۴۲ = ۲t_۱^۲ - ۲۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۲\,s \\ t_۲ \text{ تا } ۷ : ۱۰ - ۰ = ۸(t_۲ - ۷) \Rightarrow t_۲ = ۸/۲۵\,s \end{cases} \Rightarrow t_۲ - t_۱ = ۶/۲۵\,s$$

بنابراین به‌مدت ۶/۲۵s فاصلهٔ متحرک تا مبدأ محور، کمتر یا مساوی ۱۰ متر بوده است.

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم:



$$S = ۳۲ \Rightarrow \frac{v \times ۴}{۲} = ۳۲ \Rightarrow v = ۱۶\frac{m}{s}$$

با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{S}{S_{کل}} = (\frac{v}{۶۰})^۲ \Rightarrow \frac{۳۲}{S_{کل}} = (\frac{۱۶}{۶۰})^۲ \Rightarrow \frac{۳۲}{S_{کل}} = (\frac{۴}{۱۵})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳۲}{S_{کل}} = \frac{۱۶}{۲۲۵} \Rightarrow S_{کل} = ۴۵۰\,m$$

Telegram: @konkur_in

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا سرعت گلوله در نقطهٔ C را حساب می‌کنیم.

$$\Delta y_{BC} = \frac{v_C + v_B}{2}\Delta t \xrightarrow[v_C = -gt + v_B]{} -90 = \frac{2v_C + 30}{2} \times 3 \Rightarrow v_C = -45\frac{m}{s}$$

حالا سرعت برخورد گلوله به سطح زمین را حساب می‌کنیم:

$$v_{\text{زمین}}^2 - v_C^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v_{\text{زمین}}^2 - (-45)^2 = -20(-50) \Rightarrow v_{\text{زمین}} = +55\frac{m}{s}$$

سه ثانیه قبل از برخورد گلوله به زمین سرعت گلوله برابر است با:

$$v = -gt + v_{\text{زمین}} = -30 + 55 = 25\frac{m}{s}$$

اکنون ارتفاع گلوله از سطح زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y = \frac{v + v_{\text{زمین}}}{2} \times \Delta t = \frac{25 + 55}{2} \times 3 = 120\,m$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در حالت تعادل وزن داریم:

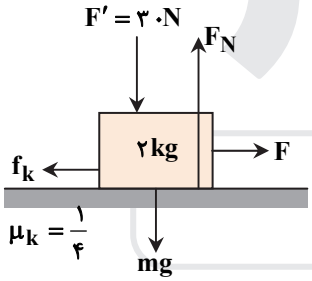
$$F_e = mg \Rightarrow kx = 10 \Rightarrow 400 \times x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{40}m = 2/5\,cm \Rightarrow A = 2/5\,cm$$

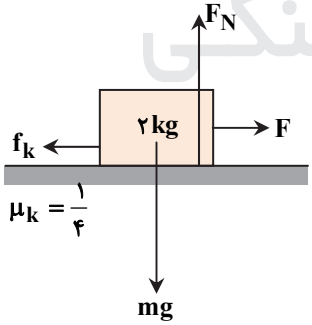
اما بیشترین طول فنر مربوط به زمانی است که نوسانگر تا پایین‌تر از مرکز، نوسان می‌کند و بنابراین بیشترین طول فنر در حین نوسان $25\,cm$ است و در این نقطه تندی نوسانگر صفر می‌شود.

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را در دو حالت مشخص کرده و سپس قانون دوم نیوتون را برای هر دو حالت می‌نویسیم:



$$\begin{cases} F_N - F' - mg = 0 \Rightarrow F_N = 30 + 20 = 50\,N \\ F - f_k = 0 \Rightarrow F = \mu_k F_N = \frac{1}{4}(50) = 12/5\,N \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg = 20\,N \\ F - f_k = ma \Rightarrow 12/5 - \frac{1}{4} \times 20 = 2 \times a \Rightarrow a = 3/75\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$54\frac{km}{h} \times \frac{3600}{1000} = 15\frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - (15)^2 = 2a \times 22/5 \Rightarrow a = -5\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{f}_k = m\vec{a} \Rightarrow -\mu_k F_N = ma \Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow -\mu_k \times 10 = -5 \Rightarrow \mu_k = 0/5$$

Telegram: @konkur_in

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

با استفاده از روابط شتاب گرانش و شتاب مرکزگرا داریم:

$$\begin{cases} a_c = \frac{4\pi r}{T^2} \\ g = \frac{GM}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{4\pi r}{T^2} = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^3} \Rightarrow \frac{1}{8} = (\frac{r_A}{r_B})^3 \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{1}{2}$$

اکنون از رابطهٔ $g = \frac{GM}{r^2}$ داریم:

$$\frac{g_B}{g_A} = (\frac{r_A}{r_B})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

با توجه به اینکه طول پاره‌خط ۱۰ سانتی‌متر است؛ بنابراین $A = 5\,cm$ است و حداقل زمان ممکن برای طی کردن مسافت ۵ سانتی‌متر به‌صورت مقابل است:

$$2\frac{T}{12} = \frac{1}{30} \Rightarrow T = \frac{1}{5}s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \frac{rad}{s}$$

و بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} \times (\frac{5}{100} \times 10\pi)^2$$

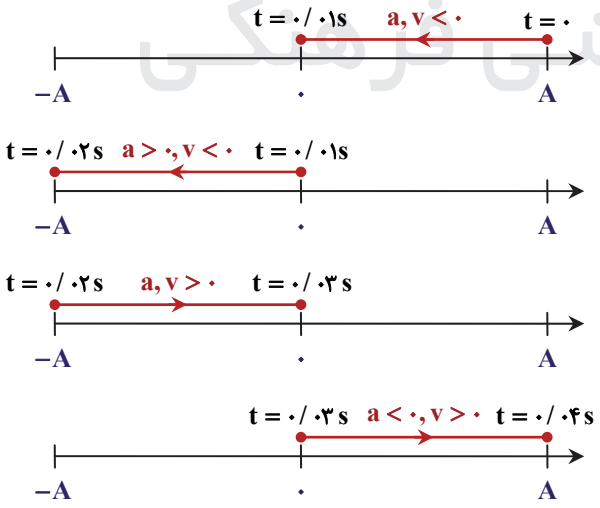
$$\Rightarrow K_{max} = \frac{2}{10} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{9}{20}J = 450\,mJ$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

برای پیدا کردن جواب این مسئله ابتدا لازم است دورهٔ تناوب نوسان را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ x = 0/03\cos 50\pi t \end{cases} \Rightarrow \omega = 50\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0/04s$$

با توجه به معادلهٔ مکان- زمان در لحظهٔ $t = 0$ مکان نوسانگر $x = 0/03\,m$ است و به این ترتیب می‌توان مسیر حرکت آن را در یک دوره تناوب ابتدایی به‌صورت زیر رسم کرد:



۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

با استفاده از قاعدهٔ دست راست می‌توان جهت آن را به‌دست آورد، کافی است ۴ انگشت دست راست درجهت $\vec{E}$ باشد به‌گونه‌ای که انگشت شست جهت مثبت محور z را نشان دهد و در این حالت کف دست به‌سمت خلاف محور xها است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

ابتدا لازم است طول موج نور را در خلأ به‌دست آوریم: $\lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{5\times10^{14}} = 6\times10^{-7}\,m = 600\,nm$

نکته: چون نور از خلأ وارد یک محیط شفاف دیگر می‌شود، تندی و طول موج آن کاهش می‌یابد. پس:

$\lambda_2 = \lambda_1 - 150 = 600 - 150 = 450\,nm$

حال با استفاده از رابطهٔ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$ داریم: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{450}{600} = \frac{1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{4}{3}$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

با استفاده از رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ تندی انتشار موج در تار را محاسبه می‌کنیم:

$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{25}{100} = \frac{v}{200} \Rightarrow v = 50\,\frac{m}{s}$

با استفاده از رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در تار داریم:

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F\ell}{m}} \xrightarrow{m=\rho V} v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow 50 = \sqrt{\frac{60}{8\times10^3\times A}} \Rightarrow A = \frac{60}{8\times10^3\times2500} = 3\times10^{-6}\,m^2$

$A = \pi(\frac{D}{2})^2 \Rightarrow 3\times10^{-6} = 3(\frac{D}{2})^2 \Rightarrow \frac{D}{2} = 10^{-3} \Rightarrow D = 2\times10^{-3}\,m = 2\,mm$

۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را برحسب الکترون‌ولت محاسبه می‌کنیم:

$K_{max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times(\frac{4}{3}\times10^6)^2 = 8\times10^{-19}\,J \xrightarrow{\div1/6\times10^{-19}} K_{max} = 5\,eV$

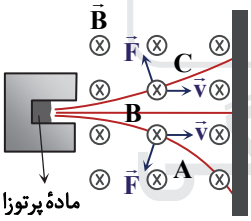
$K_{max} = h(f - f_0) \Rightarrow 5 = 4\times10^{-15}(f - 5\times10^{14}) \Rightarrow 12/5\times10^{14} = f - 5\times10^{14} \Rightarrow f = 17/5\times10^{14}\,Hz = 1/75\times10^{15}\,Hz$

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

نکته: محدودهٔ طول موج نور مرئی بین ۴۰۰nm و ۷۰۰nm است؛ بنابراین محدودهٔ انرژی فوتون نور مرئی به‌صورت زیر است:

$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_{max}} \le E_{مرئی} \le \frac{hc}{\lambda_{min}} \Rightarrow \frac{1240}{700} \le E_{مرئی} \le \frac{1240}{400} \Rightarrow 1/7\,eV \le E_{مرئی} \le 3/1\,eV$

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)



ابتدا جهت نیروی وارد بر هر ذره را با توجه به مسیر انحرافی آن به‌دست می‌آوریم؛ سپس بررسی می‌کنیم جهت این نیرو با قاعدهٔ دست راست هم‌خوانی دارد یا نه و از این طریق نوع ذره را مشخص می‌کنیم:

نیروی وارد بر ذره‌ای که مسیر A را طی می‌کند با قاعدهٔ دست چپ هم‌خوانی دارد بنابراین این ذره دارای بار منفی و الکترون است. ذره‌ای که در مسیر B است منحرف نشده و بنابراین خنثی است و ذرهٔ گاما است اما ذره با مسیر C از قاعدهٔ دست راست پیروی می‌کند و بار آن مثبت و ذرهٔ آلفا است.

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

با توجه به اینکه ۷۵ درصد از هسته‌های مادهٔ پرتوزا تبدیل شده یعنی ۲۵ درصد باقی مانده است، پس نیمه‌عمر برابر است با:

$N = N_0(\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{N_0}{4} = N_0(\frac{1}{2})^n \Rightarrow (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 2$

$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 2 = \frac{4}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 2$ سال

حال برای اینکه ۱۲/۵ درصد از هسته‌ها باقی بماند، زمان سپری‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$\frac{12/5}{100}N_0 = (\frac{1}{2})^{n'}N_0 \Rightarrow \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^{n'} \Rightarrow n' = 3$

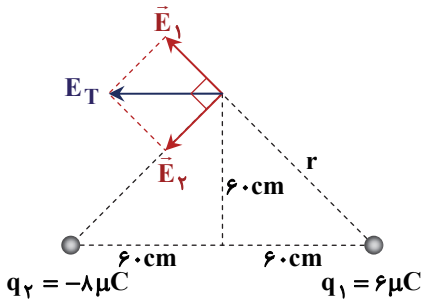
$n' = \frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 3 = \frac{t'}{2} \Rightarrow t' = 6$ سال

بنابراین باید $t' - t = 6 - 4 = 2$ سال دیگر بگذرد.

Telegram: @konkur_in

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

به کمک اطلاعات مسئله، آرایش بارها و نقطهٔ موردنظر را تعیین می‌کنیم و با توجه به علامت بارها، بردار میدان الکتریکی حاصل از دو بار را در محل موردنظر رسم می‌کنیم:



حال میدان‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E_1=k\frac{|q_1|}{r^2}=9\times10^9\times\frac{6\times10^{-6}}{(60\sqrt{2}\times10^{-2})^2}=\frac{3}{4}\times10^5\ \frac{N}{C}$$

$$E_2=k\frac{|q_2|}{r^2}=9\times10^9\times\frac{8\times10^{-6}}{(60\sqrt{2}\times10^{-2})^2}=10^5\ \frac{N}{C}$$

زاویهٔ بین میدان‌های E_1 و E_2، 90° است، پس برایند میدان‌ها برابر است با:

$$E_T=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=\sqrt{(\frac{3}{4}\times10^5)^2+(10^5)^2}=\sqrt{\frac{25}{16}\times10^{10}}=1/25\times10^5\ \frac{N}{C}$$

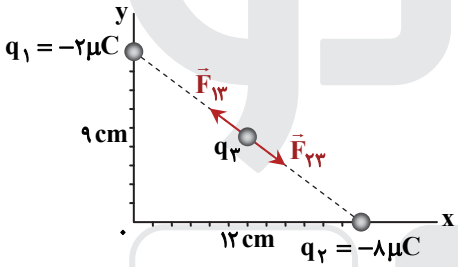
۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

با استفاده از رابطهٔ چگالی سطحی بار، داریم:

$$\sigma=\frac{q}{4\pi r^2}\Rightarrow\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{q_A}{q_B}\times\frac{4\pi r_B^2}{4\pi r_A^2}=\frac{q_A}{0/5\,q_A}\times(\frac{r_B}{2r_B})^2\Rightarrow\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

ابتدا شکل مناسبی برای مسئله رسم می‌کنیم (دقت کنید که فاصلهٔ بار q_1 از q_2، $\sqrt{9^2+12^2}=15\,cm$ است):



نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 صفر است، در نتیجه داریم:

$$F_{13}=F_{23}\Rightarrow k\frac{|q_1q_3|}{r_{13}^2}=k\frac{|q_2q_3|}{r_{23}^2}$$

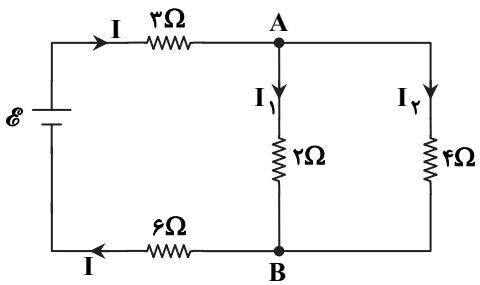
$$\xrightarrow{\substack{|q_1|=2\mu C\ ,\ |q_2|=8\mu C\\ r_{23}+r_{13}=15cm}}\frac{2}{r_{13}^2}=\frac{8}{(15-r_{13})^2}\Rightarrow\frac{1}{r_{13}}=\frac{2}{15-r_{13}}$$

$$\Rightarrow 2r_{13}=15-r_{13}\Rightarrow 3r_{13}=15\Rightarrow r_{13}=5\,cm$$

توجه کنید که به‌دلیل هم‌نام بودن دو بار q_1 و q_2، بار q_3 را بین این دو بار قرار داریم.

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

اگر از شاخهٔ اصلی جریان I عبور کند، جریان عبوری از دو شاخهٔ موازی 2Ω و 4Ω را برحسب I محاسبه می‌کنیم:



$$V_{AB}=V_{AB}\xrightarrow{V=RI}2I_1=4I_2\Rightarrow I_1=2I_2$$

$$\xrightarrow{I=I_1+I_2}2I_2+I_2=I\Rightarrow I_2=\frac{I}{3}\ ,\ I_1=\frac{2I}{3}$$

حال توان مصرفی مقاومت از رابطهٔ $P=RI^2$ حساب می‌شود، پس:

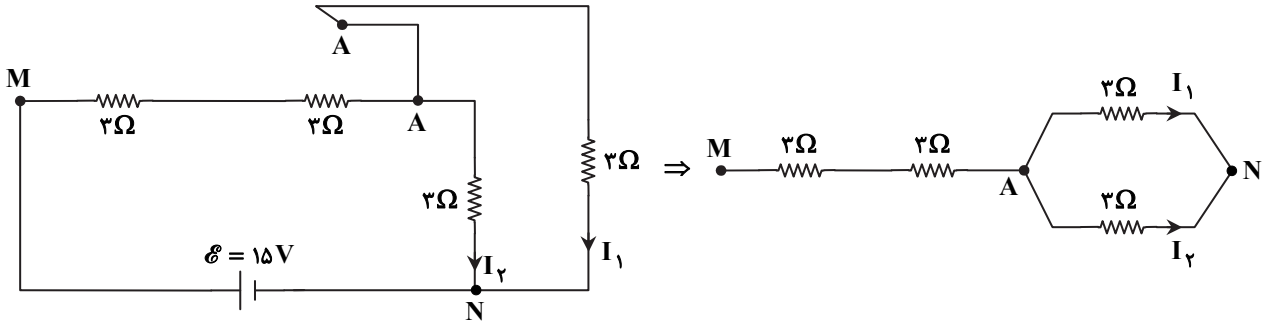
$$\frac{P_{6\Omega}}{P_{4\Omega}}=\frac{6}{4}\times\frac{I^2}{I_2^2}=\frac{6}{4}\times\frac{I^2}{\frac{I^2}{9}}=\frac{6}{4}\times9=13/5$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

به‌کمک نقطه‌گذاری مدار را هنگامی که کلید به A متصل است، ساده می‌کنیم:



اکنون مقاومت معادل و جریان الکتریکی شاخهٔ اصلی مدار را حساب می‌کنیم:

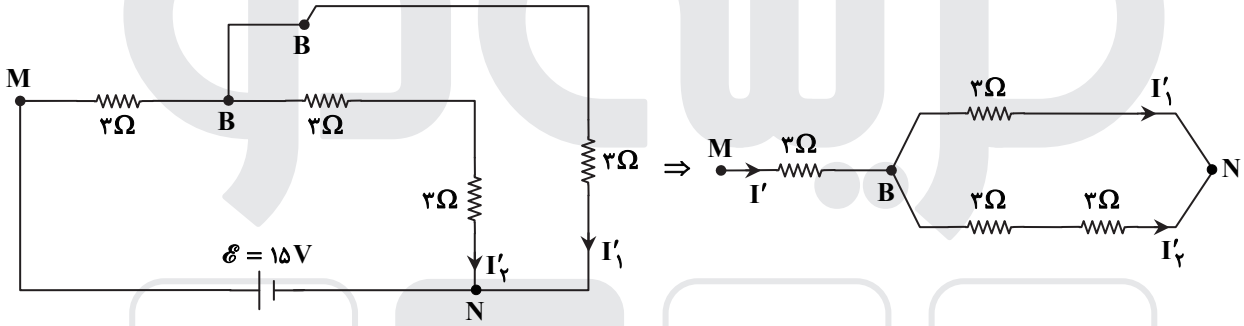
$$R_{eq}=۳+۳+\frac{۳}{۲}=۷/۵\Omega$$

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}+r}=\frac{۱۵}{۷/۵+۰}=۲A$$

جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

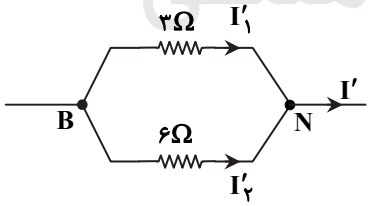
$$V_{AN}=۳I_۱=۳I_۲ \Rightarrow I_۱=I_۲ \xrightarrow{I_۱+I_۲=I} I_۱=I_۲=۱A$$

کلید را به B متصل می‌کنیم و مراحل قبل را برای این حالت طی می‌کنیم:



$$R_{eq}=۳+\frac{۳\times۶}{۳+۶}=۵\Omega$$

$$I'=\frac{\mathscr{E}}{R'_{eq}+r}=\frac{۱۵}{۵+۰}=۳A$$



$$V_{BN}=۳I'_۱=۶I'_۲ \Rightarrow I'_۱=۲I'_۲ \xrightarrow{I'_۱+I'_۲=I'} I'_۲=\frac{I'}{۳}=\frac{۳}{۳}=۱A \ , \ I'_۱=۲A$$

حالا به سادگی نسبت جریان‌ها در دو حالت را می‌یابیم:

$$\frac{I'_۱}{I_۱}=\frac{۲}{۱}=۲ \ , \ \frac{I'_۲}{I_۲}=\frac{۱}{۱}=۱$$

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

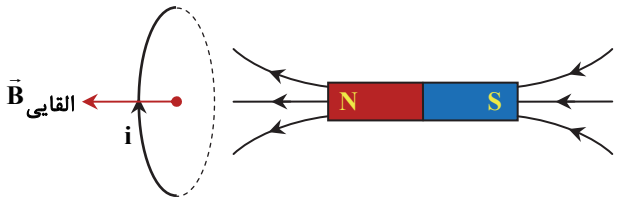
با استفاده از روابط میدان مغناطیسی و ضریب القاوری سیم‌لولهٔ B داریم:

$$B=\frac{\mu_۰NI}{\ell} \Rightarrow \frac{B_A}{B_B}=\frac{N_A}{N_B}\times\frac{I_A}{I_B}\times\frac{\ell_B}{\ell_A}=۲\times۱\times\frac{۱}{۲}=۱$$

$$L=\frac{\mu_۰N^۲A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B}=(\frac{N_A}{N_B})^۲(\frac{A_A}{A_B})(\frac{\ell_B}{\ell_A})=۲^۲\times۱\times\frac{۱}{۲}=۲$$

Telegram: @konkur_in

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)



با توجه به خطوط میدان آهن‌ربا که قطب A خارج شده است، قطب A قطب N آهن‌ربا است.

با توجه به جهت جریان القایی در حلقه، جهت میدان مغناطیسی آن طبق قاعدهٔ دست راست به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

چون جهت میدان القایی هم‌سو با میدان آهن‌رباست، پس آهن‌ربا در حال دور شدن از حلقه بوده است یعنی به‌سمت راست در حال حرکت بوده است.

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

با استفاده از رابطهٔ جریان القایی متوسط می‌توان نوشت:

$$I_{av}=\frac{-N\Delta\Phi}{R\Delta t}=\frac{-۲۰۰\times(۰/۰۰۵-۰/۰۲)}{۱۵\times۰/۱}\Rightarrow I_{av}=۲A$$

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

شیب نمودار $P-h$ برابر با ρg است؛ بنابراین داریم:

$$\rho g=\frac{(۱/۷۱-۱/۰۳)\times۱۰^{۵}}{۵۰\times۱۰^{-۲}}=۱/۳۶\times۱۰^{۵}\qquad(۱)$$

فشار در عمق h از مایع طبق رابطهٔ $P=P_{\circ}+\rho gh$ به‌دست می‌آید، بنابراین فشار پیمانه‌ای در عمق h برابر است با:

$$P_g=P-P_{\circ}=\rho gh\xrightarrow{(۱)}P_g=۱/۳۶\times۱۰^{۵}\times۰/۱=۱/۳۶\times۱۰^{۴}Pa$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

بزرگی نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند برابر با مجموع وزن ظرف و آب درون آن است. با توجه به اینکه وزن آب درون ظرف به‌اندازهٔ $W_۱$ افزایش می‌یابد، پس این نیرو نیز به $W_۱$ افزایش می‌یابد.

بزرگی نیرویی که آب بر کف ظرف وارد می‌کند برابر با حاصل‌ضرب فشار کف ظرف در مساحت کف ظرف است.

با توجه به اینکه هرگونه افزایش فشار در هر مقطع ظرف بدون کم‌وکاست به نقاط دیگر هم منتقل می‌شود، داریم:

افزایش فشار در مقطع باریک لوله: $\Delta P_۱=\frac{F}{A_۱}=\frac{W_۱}{۲}(\frac{N}{cm^{۲}})$

پس افزایش فشار در کف ظرف نیز $\frac{W_۱}{۲}$ است.

حالا وقت آن است که افزایش نیرو در کف ظرف را بیابیم:

$$\Delta F_{\text{کف ظرف}}=\Delta P_{\text{کف ظرف}}\times A_{\text{کف}}=\frac{W_۱}{۲}(\frac{N}{cm^{۲}})\times(۱۰\times۱۰)(cm^{۲})=۵۰W_۱$$

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$\Delta K=\frac{۱}{۲}mv_{۲}^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_{۱}^{۲}=\frac{۱}{۲}m(v_{۲}^{۲}-v_{۱}^{۲})\Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}m(۶^{۲}-۲^{۲})=\frac{۱}{۲}m(۳۶-۴)\Rightarrow ۴=۱۶m$$

$$m=\frac{۱}{۴}kg\xrightarrow[\text{تبدیل به گرم}]{\times۱۰۰۰}m=۲۵۰g$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

تنها نیروهای مؤثر که روی جسم کار انجام می‌دهند، نیروهای ثابت F و اصطکاک هستند، بنابراین طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_{f_k}+W_F=\frac{۱}{۲}mv_{۲}^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_{۱}^{۲}\Rightarrow -f_kd+FdCos۶۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}\times mv_{۲}^{۲}$$

$$\Rightarrow(-f_k\times۵)+(۴۰\times۵\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}\times۸\times(۲/۵)^{۲}\Rightarrow -۵f_k+۱۰۰=۲۵\Rightarrow ۵f_k=۷۵\Rightarrow f_k=۱۵N$$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

با استفاده از رابطهٔ $PV=nRT$ و ثابت بودن دما داریم:

$$\frac{P_۱V_۱}{P_۲V_۲}=\frac{nRT_۱}{nRT_۲}\Rightarrow\frac{۱۰^{۵}\times(۳۴\times A)}{P_۲\times(۴۰\times A)}=۱\Rightarrow P_۲=۸/۵\times۱۰^{۴}Pa$$

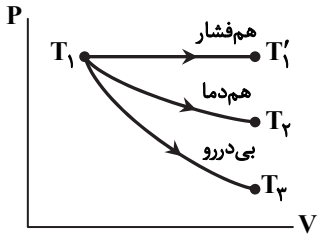
$$P_۲=\rho gh_{\text{جیوه}}\Rightarrow ۸/۵\times۱۰^{۴}=۱۳۶۰۰\times۱۰\times h_{\text{جیوه}}\Rightarrow h_{\text{جیوه}}=۰/۶۲۵m=۶۲/۵cm$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

ابتدا نمودار $P-V$ مربوط به هر سه فرایند را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و با استفاده از مساحت زیر نمودارها به جواب می‌رسیم:



$$T \propto PV \Rightarrow T'_1 > T_1 \Rightarrow \Delta U_{\text{هم‌فشار}} > 0 \xrightarrow{W<0} Q_{\text{هم‌فشار}} > 0$$

بنابراین مورد «ت» نادرست است.

$$\Delta U_{\text{هم‌دما}} = 0 \Rightarrow Q + W = 0 \xrightarrow{|W|=S\neq 0} Q \neq 0$$

بنابراین مورد «ب» نادرست است.

$$\begin{cases} \Delta U_{\text{هم‌دما}} = 0 \\ \Delta U_{\text{بی‌دررو}} < 0 \\ \Delta U_{\text{هم‌فشار}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{مورد «پ» درست است.}$$

$$\begin{cases} \Delta U = Q + W \\ W = -S_{\text{نمودار}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{\text{هم‌دما}} = -W_{\text{هم‌دما}} = +S_{\text{هم‌دما}} \\ Q_{\text{بی‌دررو}} = 0 \\ Q_{\text{هم‌فشار}} = S_{\text{هم‌فشار}} + \Delta U \end{cases} \Rightarrow Q_{\text{هم‌فشار}} > Q_{\text{هم‌دما}} > Q_{\text{بی‌دررو}} \Rightarrow \text{مورد «الف» درست است.}$$

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

انرژی درونی یک گاز متناسب با دمای مطلق آن است. طبق رابطهٔ $PV = nRT$ دمای مطلق نیز متناسب با حاصل‌ضرب PV است، پس:

$$U \propto T \propto PV \Rightarrow \begin{cases} U_A \propto 2/5 \times 10^5 \times 2/2 \\ U_B \propto 2/5 \times 10^5 \times 6/6 \\ U_C \propto 1/5 \times 10^5 \times 6/6 \end{cases}$$

$$\frac{U_B}{U_A} = 3 \ , \ \frac{U_B}{U_C} = \frac{5}{3} \Rightarrow U_B = 3U_A = \frac{5}{3}U_C$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

باید نافلز باشد: ${}_{16}S$

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

عبارت اول: نادرست؛ کمتر از ۰/۷ درصد است.

عبارت دوم: درست

عبارت سوم: درست

عبارت چهارم: درست

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

عبارت اول: نادرست

$${}_{28}M \ , \ 18 < 28 < 36 \ , \ 28 = 18 + 10$$

دورهٔ ۴ و گروه ۱۰

عبارت دوم: درست؛ هر سه دارای $4s^2$ هستند.

$${}_{27}A : [Ar]4s^2 3d^7$$

$${}_{28}M : [{}_{18}Ar]4s^2 3d^8$$

$${}_{34}X : [{}_{18}Ar]3d^{10}4s^2 4p^6$$

عبارت سوم: درست؛ $X^{2-} : [{}_{36}Kr]$، در آرایش گاز نجیب همهٔ زیرلایه‌ها پر هستند.

عبارت چهارم: درست، دارای $3d^7$ و $3d^8$ هستند.

عبارت پنجم: نادرست؛ هیچ‌کدام عدد اتمی یکسان ندارند و ایزوتوپ نیستند، اما فلز هستند و اکسید آن‌ها یک ترکیب یونی است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

ابتدا ذرات موجود در شکل را می‌شماریم و در ۰/۲ ضرب می‌کنیم تا تعداد مول هر سه ماده در تعادل به‌دست آید.

$N_2 : 9 \times 0/2 = 1/8 mol$

$H_2 : 27 \times 0/2 = 5/4 mol$

$NH_3 : 6 \times 0/2 = 1/2 mol$

حالا براساس جدول تغییرات زیر می‌توانیم گزینه‌ها را بررسی کنیم:

	N_2	+ $3H_2$	$\rightleftharpoons$	$2NH_3$
اولیه	a	b		۰
تغییرات	$-x$	$-3x$		$+2x$
تعادل	۱/۸	۵/۴		۱/۲

$\Rightarrow 2x = 1/2 \Rightarrow x = 0/6$

$a - 0/6 = 1/8 \Rightarrow a = 2/4$

$b - 3 \times 0/6 = 5/4 \Rightarrow b = 7/2 mol$

گزینه‌های ۱ و ۲ تا اینجا هر دو نادرست هستند. مقدار اولیه N_2 و H_2 به‌ترتیب ۲/۴ و ۷/۲ مول است.

گزینهٔ ۳: درست

$$2/4 mol\, N_2 \times \frac{2 mol\, NH_3}{1 mol\, N_2} = 4/8 mol\, NH_3$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ فرایند هابر گرماده است. با افزایش دما تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و مقدار مول آمونیاک از ۱/۲ کمتر خواهد شد.

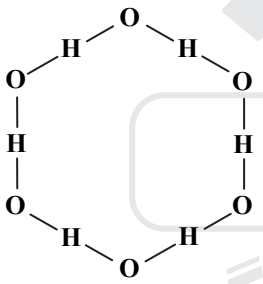
۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

عبارت اول: درست

عبارت دوم: درست؛ از دمای ۴ به صفر، حجم آب افزایش و چگالی آن کاهش می‌یابد.

عبارت سوم: نادرست؛ نیروی بین مولکولی فقط هیدروژنی است.

عبارت چهارم: درست؛ ساختار یخ به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:



عبارت پنجم: نادرست؛ جایگاه ثابت ندارد. امکان حرکت مولکول‌های آب در حالت مایع وجود دارد.

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

$\theta_1 = 75°C \Rightarrow 75 g\, محلول - 25 g\, نمک = 50 g\, H_2O$

$$S_1 = \frac{25}{50} \times 100 = \frac{50 g}{100 g\, H_2O}$$

$\theta_2 = 0°C \Rightarrow 50 g\, محلول - 13/5 g\, نمک = 36/5 g\, H_2O$

$$S_2 = \frac{13/5}{36/5} \times 100 \cong \frac{37 g}{100 g\, H_2O}$$

$$\theta\, ضریب = شیب\, خط = \frac{\Delta S}{\Delta \theta} = \frac{37 - 50}{0 - 75} = \frac{13}{75} \simeq +0/17$$

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

عبارت اول: درست

$H - C \equiv N :$

عبارت دوم: درست؛ اکسیدهای نافلزی به حالت گاز هستند.

عبارت سوم: درست؛ Mg و S می‌توانند دچار سوختن شوند.

عبارت چهارم: درست؛ چون N_2 نسبت به O_2 واکنش‌پذیرتر است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$2HCl + FeS \rightarrow FeCl_2 + H_2S$$

$$448\,mL\,H_2S \times \frac{1\,L\,H_2S}{1000\,mL\,H_2S} \times \frac{1\,mol\,H_2S}{22/4\,L\,H_2S} \times \frac{1\,mol\,FeS}{1\,mol\,H_2S} \times \frac{88\,g\,FeS}{1\,mol\,FeS} = 2 \times 88 \times 10^{-2}\,g\,FeS \text{ خالص}$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{2 \times 88 \times 10^{-2}}{3/15} \times 100 \cong \%56$$

$$448\,mL\,H_2S \times \frac{1\,L\,H_2S}{1000\,mL\,H_2S} \times \frac{1\,mol\,H_2S}{22/4\,L\,H_2S} \times \frac{1\,mol\,FeCl_2}{1\,mol\,H_2S} \times \frac{127\,g\,FeCl_2}{1\,mol\,FeCl_2} = 2/54\,g\,FeCl_2$$

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۱)

از بالا به پایین با افزایش تعداد لایه‌های الکترونی شعاع افزایش می‌یابد. با افزایش شعاع اتمی، جدا شدن الکترون آسان‌تر و خصلت فلزی افزایش می‌یابد. شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت تغییر نمی‌کند. همگی ns^1 هستند. با افزایش عدد اتمی، تعداد پروتون و بار مثبت در هستهٔ اتم افزایش می‌یابد.

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$Fe + H_2SO_4 \rightarrow FeSO_4 + H_2$$

$$FeSO_4 + Ba(NO_3)_2 \rightarrow Fe(NO_3)_2 + BaSO_4$$

$$\Rightarrow 1\,mol\,H_2SO_4 \sim 1\,mol\,BaSO_4$$

$$0/04\,mol\,H_2SO_4 \times \frac{1\,mol\,BaSO_4}{1\,mol\,H_2SO_4} \times \frac{233\,g\,BaSO_4}{1\,mol\,BaSO_4} \times \frac{62/5}{100} = 4 \times 62/5 \times 10^{-4} \times 233 = \frac{1}{40} \times 233 = 5/825\,g\,BaSO_4$$

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱) و شیمی ۳ (فصل ۳)

عبارت اول: درست؛ متقارن است. $D-A-D$ یا $D=A=D$

عبارت دوم: درست؛ مثلاً CO_2 یا BeF_2 که هر دو عنصر سازنده در دورهٔ ۲ هستند.

عبارت سوم: نادرست

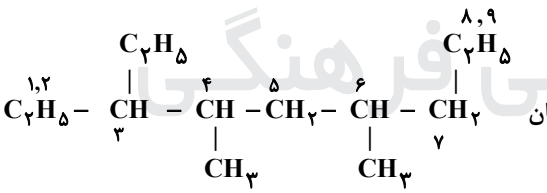
نقض قسمت اول: $:\ddot{F}-Be-\ddot{F}:$

نقض قسمت دوم: $\ddot{S}=C=\ddot{S}$

شعاع $C < S$

عبارت چهارم: درست؛ مثلاً اکسیژن در کربن‌دی‌اکسید دارای دو جفت الکترون ناپیوندی است.

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



۳- متیل، ۴ و ۶- دی‌متیل نونان

$$C_{13}H_{28} = 13 \times 12 + 28 = 130 + 26 + 28 = 130 + 54 = 184\,\frac{g}{mol}$$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$C = \frac{q}{m \cdot \Delta\theta} = \frac{18/2\,kJ}{1\,kg \times 20^\circ C} = 0/91\,\frac{J}{g^\circ C}$$

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

آلدهید دارای گروه $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-H$ است ← b

استر دارای گروه $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-$ است ← a

اسید و استر تک‌عاملی سیرشده و هم‌کربن ایزومر یکدیگرند ← a و b

آلدهید و کتون تک‌عاملی سیرشده و هم‌کربن ایزومر یکدیگرند ← b و c

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۴)

سه قله در نمودار به‌ترتیب از چپ به راست متعلق به NO، NO_2 و O_3 است.

$$\frac{\bar{R}_{O_3}}{\bar{R}_{NO}} = \frac{۰/۰۷}{۰/۰۷} = ۱$$

$$\frac{\bar{R}_{NO_2}}{\bar{R}_{NO}} = \frac{۰/۰۳}{۰/۰۷} = \frac{۳}{۷}$$

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱} + H_۲O \rightarrow ۲C_۶H_{۱۲}O_۶$$

عبارت اول: نادرست

$$R = R_{\text{گلوکز}} = \frac{۳۵\times۱۰^{-۳}\ \frac{mol}{L}}{۱۰\times۶۰} \cong \frac{۳۵}{۶}\times۱۰^{-۵} < ۶\times۱۰^{-۵}\ \frac{mol}{Ls}$$

عبارت دوم: نادرست؛ با تولید ۰/۰۲ مول گلوکز، ۰/۰۱ مول مالتوز مصرف می‌شود.

$$۰/۱ - ۰/۰۱ = ۰/۰۹ mol$$

عبارت سوم: نادرست؛ باید سرعت در این بازه زمانی، از آخرین بازه زمانی قابل اندازه‌گیری در شکل کمتر باشد.

$$R_{۱۰-۱۴} = \frac{۵\times۱۰^{-۳}\ \frac{mol}{L}}{۴} = ۱/۲۵\times۱۰^{-۳} < ۲/۴\times۱۰^{-۳}$$

عبارت چهارم: درست

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۲)

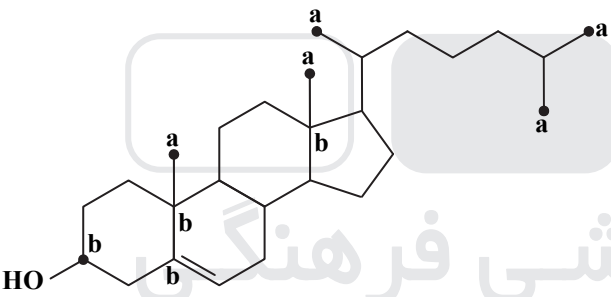
عبارت اول: درست؛ تنها یک گروه OH بخش آب‌دوست آن است.

عبارت دوم: درست؛ پیوند $C=C$ از $C-C$، $C-O$، $C-H$ و $O-H$ محکم‌تر است و آنتالپی پیوند بالاتری دارد.

عبارت سوم: درست؛ دارای ۵ گروه متیل و دو جفت ناپیوندی روی اتم اکسیژن است. $\frac{۵}{۲} = ۲/۵$

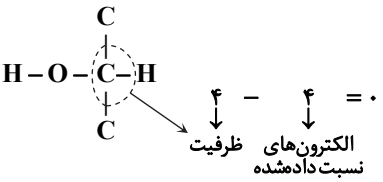
a : گروه $CH_۳$

b: کربن با عدد اکسایش صفر



عبارت چهارم: درست؛ دارای ۲۷ کربن است و ۴ کربن اکسایش صفر دارند. دقت کنیم که کربن گروه عاملی و کربن‌های فاقد هیدروژن در این ساختار عدد اکسایش صفر دارند.

$$\frac{۲۷}{۴} = ۶/۷۵$$



$$۴ - ۴ = ۰$$

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

کافیست واکنش اول ۳ برابر، واکنش دوم در جهت برگشت و واکنش سوم برعکس و ۴ برابر شود.

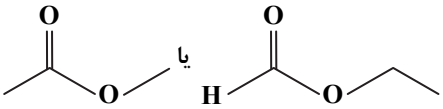
$$\Delta H = ۳\Delta H_۱ - \Delta H_۲ - ۴\Delta H_۳ = ۳\times(-۳۹۴) - (-۲۰۵۶) - ۴\times۲۴۵ = -۱۱۸۲ + ۲۰۵۶ - ۹۸۰ = -۱۰۶ kJ$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

عبارت اول: درست؛ هر دو استر سه کربنی هستند.



عبارت دوم: نادرست؛ فاقد H متصل به O هستند.

عبارت سوم: درست

$$CH_3COOH + HOCH_3 \rightarrow CH_3COOCH_3 + H_2O$$

عبارت چهارم: نادرست؛ جرم مولی هر دو یکسان است. هر دو قطبی هستند، اما پروپانوئیک اسید دارای پیوند هیدروژنی است.

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

عبارت اول: نادرست؛ با مدل آرنیوس فقط اسید یا باز بودن را مشخص می‌کنیم.

عبارت دوم: نادرست؛ اکسید فلزی خاصیت بازی دارد و کاغذ pH به رنگ آبی در می‌آید.

عبارت سوم: نادرست؛ ملاک قدرت اسیدی Ka و α است. $[H^+]$ نشان‌دهندهٔ میزان اسیدی بودن است.

عبارت چهارم: درست؛ استیک اسید یک الکترولیت ضعیف است که کمی در آب یونیده می‌شود، اما حل اتانول در آب مولکولی است.

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$M_{HNO_3} = [H^+] = 10^{-3}\ \frac{mol}{L}$$

$$pH_1 = pH_2 \Rightarrow [H^+]_1 = [H^+]_2 = 10^{-3}\ \frac{mol}{L}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \Rightarrow 2\times10^{-4} = \frac{10^{-6}}{M - 10^{-3}} \Rightarrow M - 10^{-3} = 5\times10^{-3} \Rightarrow M = 6\times10^{-3}$$

$$\frac{M_{HA}}{M_{HNO_3}} = \frac{6\times10^{-3}}{10^{-3}} = 6$$

صورت سؤال کنکور نادرست است. نیازی به لفظ به‌تقریب نیست. تقریب اشتباه پاسخ را به عدد ۵ می‌رساند.

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۱) نادرست؛ حلقهٔ بنزن آن‌ها پیوند دوگانه دارد.

۲) نادرست؛ ترکیب‌های کلردار ضدعفونی‌کننده هستند.

۳) نادرست؛ صابون با آلاینده برهم‌کنش دارد و نه واکنش.

۴) درست

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$pH_1 = 10 \Rightarrow [H^+] = 10^{-10} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-4}\ \frac{mol}{L}$$

$$1OH^- + 1HNO_3 \rightarrow H_2O + NO_3^-$$

$$100\,L \times \frac{10^{-4}\,mol\,OH^-}{1\,L\,OH^-} \times \frac{1\,mol\,HNO_3}{1\,mol\,OH^-} \times \frac{63\,g\,HNO_3}{1\,mol\,HNO_3} = 0/63\,g\,HNO_3$$

$$pH_2 = 4 \Rightarrow [H^+]_2 = 10^{-4} = M_2$$

$$HA + NaOH \rightarrow NaA + H_2O$$

$$100\,L\,HA \times \frac{10^{-4}\,mol\,HA}{1\,L\,HA} \times \frac{1\,mol\,NaOH}{1\,mol\,HA} \times \frac{40\,g\,NaOH}{1\,mol\,NaOH} = 0/4\,g\,NaOH$$

$$\frac{0/63}{0/4} = \frac{63}{40} = 1/575$$

البته نیازی به محاسبه نبود. چون هم اسید و هم باز اولیه غلظت و حجم برابر دارند، کافی بود نسبت جرم مولی نیتریک اسید به سود محاسبه شود.

Telegram: @konkur_in

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

$E(A) > E(D) \Leftarrow$ کاتد : $A : A - D$

$E(D) < E(M) \Leftarrow$ کاتد : $M : D - M$

$E(A) < E(M) \Leftarrow$ آند : $A : A - M$

پس:

$M > A > D$

بیشترین اختلاف M و D دارند.

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۲)

هرچه اکسیژن‌های بیشتری به کربن متصل باشد، عدد اکسایش آن بالاتر می‌رود. پس به دنبال اسید یا استر هستیم.

$R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-R'$ $R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-H$ $\overset{OH}{R}-\overset{OH}{R'}$ $R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-R'$

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

الکترون‌های آزاد متعلق به اتم فلز هستند و نه کاتیون باقی‌مانده از آن.

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

جاذبه در ترکیب یونی قوی‌تر است و اختلاف نقطهٔ ذوب و جوش بیشتری دارد.

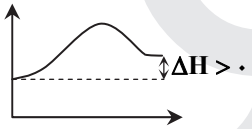
۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

عبارت اول: درست؛ در یک واکنش گرماگیر K (ثابت تعادل) و T (دما) رابطه مستقیم دارند.

عبارت دوم: درست

عبارت سوم: نادرست؛ چون فرایند گرماگیر است، افزایش دما باعث جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما، یعنی جهت برگشت می‌شود.

عبارت چهارم: نادرست



عبارت پنجم: درست

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

کاتالیزگر Ea را کاهش می‌دهد، سرعت را افزایش می‌دهد، اما ΔH، سطح انرژی مواد و استوکیومتری واکنش را تغییر نمی‌دهد.

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

	X_2	+ $3D_2$	$\rightleftharpoons$	$2A$
اولیه	x	b		۰
تغییرات	$-y$	$-3y$		$+2y$
	۰/۶	۰/۵		۱/۵

$$V = 3L \Rightarrow K = \frac{(\frac{1}{3})^2}{(\frac{1}{3})^4} \times \frac{1/5 \times 1/5}{0/6 \times 0/5 \times 0/5 \times 0/5} = \frac{3^2 \times 3^2}{0/3} = 270$$

$$2y = 1/5 \Rightarrow y = 0/75$$

$$b - 3 \times 0/75 = 0/5 \Rightarrow b = 2/75$$

Telegram: @konkur_in