

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۲

(تیر ماه ۱۴۰۲)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۱)

نکته: اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه: $2b = a + c$.

نکته: تنها دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله ثابت است.

راه حل اول:

جملات دنباله هندسی را به صورت $a, ar, ar^2, \dots$ در نظر می‌گیریم.با توجه به فرض سؤال، جملات $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \dots$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، پس:

$$\frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} = 2\left(\frac{ar}{2}\right) \Rightarrow a + ar^2 = 2ar \Rightarrow a(1 + r^2) = 2ar \Rightarrow r^2 + 1 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$d = 0$$

پس جملات دنباله حسابی به صورت $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \dots$ خواهند بود و در نتیجه:

پس مقدار خواسته شده در سؤال برابر است با:

$$r + d = 1 + 0 = 1$$

راه حل دوم:

جملات دنباله هندسی را به صورت $a, ar, ar^2, \dots$ در نظر می‌گیریم. با نصف کردن جملات این دنباله، به جملات $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \dots$ می‌رسیم که با توجه به فرض سؤال یک دنباله حسابی است. می‌دانیم که اگر جملات یک دنباله هندسی را نصف کنیم، دنباله جدید نیز دنباله هندسی خواهد بود. در نتیجه $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \dots$ هم یک دنباله هندسی با قدرنسبت r است و هم یک دنباله حسابی با قدرنسبت d است. در نتیجه یک دنباله ثابت می‌باشد.در دنباله ثابت $r = 1$ و $d = 0$ است و در نتیجه:

$$r + d = 1 + 0 = 1$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأس به مختصات (h, k) دارد.نکته: به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، روابط زیر برقرار است:

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

چون نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی سهمی قرار دارند و عرض‌های آن‌ها نیز برابر است، پس:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

$$S(-1, 1)$$

با توجه به فرض سؤال که عرض رأس سهمی برابر با ۱ است، پس:

سهمی به صورت $y = a(x + 1)^2 + 1$ خواهد بود.

$$y = a(x + 1)^2 + 1 \Rightarrow y = ax^2 + 2ax + a + 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 5$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2a}{a} = -2, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{a+1}{a}$$

$$\Rightarrow (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 5 \Rightarrow -1 = 2\left(\frac{a+1}{a}\right) \Rightarrow \frac{a+1}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a+2 = -a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

بنابراین $y = -\frac{2}{3}(x + 1)^2 + 1$ است.

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \times 1 + 1 = \frac{1}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۱)

۳- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه $A = B$ است.

$$\left. \begin{aligned} A &= \{a-2, 6, 2b+1, c\} \\ B &= \{\sqrt{d}, 5, -1\} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{A=B} \sqrt{d}=6 \Rightarrow A=B=\{6, 5, -1\}$$

عضوهای $a-2$ ، $2b+1$ و c ، حالت دارند:

حالت اول: $-1, -1, 5$

$$(a-2) + (2b+1) + c = 5 - 1 - 1 \Rightarrow a + 2b + c - 1 = 3 \xrightarrow{a+b+c=9} b-1 = -6 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow 2b+1 = -9 \notin A \quad *$$

پس این حالت امکان پذیر نیست.

حالت دوم: $-1, 5, 5$

$$(a-2) + (2b+1) + c = 5 + 5 - 1 \Rightarrow a + 2b + c - 1 = 9 \xrightarrow{a+b+c=9} b-1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 2b+1 = 3 \notin A \quad *$$

پس این حالت نیز امکان پذیر نمی باشد.

حالت سوم: $-1, 6, 5$

$$(a-2) + (2b+1) + c = 5 + 6 - 1 \Rightarrow a + 2b + c - 1 = 10 \xrightarrow{a+b+c=9} b-1 = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b+1 = 5 \in A \quad \checkmark$$

پس یا $a-2 = -1$ و $a = 1$ یا $c = 6$ یا $a-2 = 6$ و $c = -1$ که هر دو حالت درست می باشد. پس ۲ دسته جواب خواهیم داشت:

$$1) a = 1, b = 2, c = 6$$

$$2) a = 8, b = 2, c = -1$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته: هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است که ارزش گزاره درست را با حرف «د» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» نمایش می دهیم.

سطرهای جدول ارزش درستی گزاره X را در گزینه ها جای گذاری می کنیم تا به مثال نقض برسیم:

گزینه ۲:

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r))$$

با توجه به سطر دوم داریم:

$$(n \Rightarrow (d \vee d)) \Rightarrow ((d \vee n) \wedge (d \wedge d)) \equiv (n \Rightarrow d) \Rightarrow (d \wedge d) \equiv d \Rightarrow d \equiv d$$

با توجه به سطر دوم جدول، گزاره X ، نادرست شده است، پس تناقض است.

گزینه ۳:

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

با توجه به سطر دوم داریم:

$$[d \Rightarrow ((d \vee n) \Rightarrow (d \wedge n))] \Rightarrow (\sim (d \vee n) \wedge d)$$

$$\equiv [d \Rightarrow (d \Rightarrow n)] \Rightarrow (n \wedge d)$$

$$\equiv (d \Rightarrow n) \Rightarrow n \equiv n \Rightarrow n \equiv d$$

با توجه به سطر دوم جدول، گزاره X ، نادرست شده است، پس تناقض است.

گزینه ۴:

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)] \wedge q$$

با توجه به سطر دوم داریم:

$$(n \Rightarrow (d \vee d)) \Rightarrow [(d \Rightarrow n) \Rightarrow (n \wedge n)] \wedge d$$

$$\equiv (n \Rightarrow d) \Rightarrow [(n \Rightarrow n) \wedge d]$$

$$\equiv d \Rightarrow (d \wedge d) \equiv d \Rightarrow d \equiv d$$

با توجه به سطر دوم جدول، گزاره X نادرست است، پس تناقض است.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$ax^2 - ax - b = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 - x - \frac{b}{a} = 0$$

اگر قرار دهیم $-\frac{b}{a} = c$ ، آنگاه:

$$x^2 - x + c = 0$$

با توجه به نکته، $S = -1$ و $P = c$ است و چون β ریشه معادله داده شده است، پس:

$$\beta^2 - \beta + c = 0 \Rightarrow \beta^2 - \beta = -c \quad (1)$$

حال با توجه به فرض سؤال داریم:

$$4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta = 17 \xrightarrow{\div 2} 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{2} \Rightarrow (\beta^2 + \alpha^2) + (\beta^2 - \beta) = \frac{17}{2}$$

$$\beta^2 + \alpha^2 = (\beta + \alpha)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2c = 1 - 2c \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} (\beta^2 + \alpha^2) + (\beta^2 - \beta) = 1 - 2c - c = 1 - 3c = \frac{17}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

بنابراین معادله به صورت $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ خواهد بود.

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۱)

۶- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کرده عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند.

نکته: اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} + \frac{x^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x + x^2}{[x(1-x)]^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2 - x) + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9}$$

حال اگر قرار دهیم $x^2 - x = t$ ، داریم:

$$\frac{2t+1}{t^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow 160t^2 - 18t - 9 = 0 \Rightarrow (16t+3)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{16} \\ t = \frac{3}{10} \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

$$x^2 - x = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha_1 + \beta_1 = S_1 = 1$$

$$x^2 - x = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha_2 + \beta_2 = S_2 = 1$$

بنابراین مقدار خواسته شده در سؤال برابر است با:

$$S_1 + S_2 = 1 + 1 = 2$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۷- پاسخ: گزینه ۱

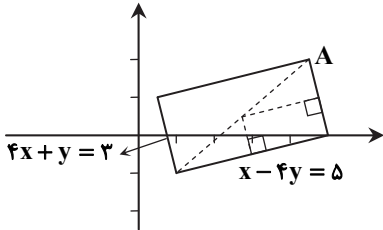
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

نکته: اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.نکته: اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، طول عمود AH برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دو خط داده شده را d و d' در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} d: 4x + y = 3 &\Rightarrow m_d = -4 \\ d': x - 4y = 5 &\Rightarrow m_{d'} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_d \cdot m_{d'} = -1$$

در نتیجه d و d' بر هم عمودند.حال اگر نقطه داده شده را A در نظر بگیریم: $A(4, 5)$ ، واضح است که نقطه A روی هیچ یک از خطوط داده شده قرار ندارد. پس فاصله نقطه A از دو خط داده شده برابر با طول و عرض مستطیل خواهد بود:

$$a = d \text{ فاصله } A \text{ از خط } d = \frac{|4 \times 4 + 5 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$b = d' \text{ فاصله } A \text{ از خط } d' = \frac{|4/5 - 4 \times 5 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

می‌دانیم که فاصله وسط قطر از اضلاع برابر با نصف اضلاع می‌باشد. چون بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع مدنظر است، پس:

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: اگر f یک تابع باشد، وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

ابتدا طول نقطه تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 12 - x \xrightarrow{y=10} 10 = 12 - x \Rightarrow x = 2$$

پس نقطه $(2, 10)$ در وارون تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$(2, 10) \in f^{-1}(x) \Rightarrow (10, 2) \in f(x)$$

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}} \Rightarrow 2 = \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 = 10 - 2\sqrt{10m - 1} \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 10m - 1 = 9 \Rightarrow m = 1$$

$$f(m+4) = f(1+4) = f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5-1}} = \sqrt{5-4} = 1$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس‌های ۱ تا ۳، فصل ۳)

نکته: هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ ، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.نکته: اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a x$ نشان داده می‌شود.

$$\text{نکته: } \log_a b^n = n \log_a b$$

$$\text{نکته: } \log_n ab = \log_n a + \log_n b$$

$$\text{نکته: } \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\text{نکته: } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

اگر جرم اولیه عنصر را m_0 در نظر بگیریم، آنگاه جرم آن عنصر بعد از گذشت n ساعت برابر است با:

$$m = m_0 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \xrightarrow{m = \frac{1}{6} m_0} \frac{1}{6} m_0 = m_0 \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{9}\right)^n \quad (1)$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{2/4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{1/4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

حال از طرفین رابطه (۱)، لگاریتم در مبنای ۵ می‌گیریم:

$$\log_5 \frac{1}{6} = \log_5 \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \log_5 6^{-1} = n \log_5 \left(\frac{1}{9}\right) \Rightarrow -(\log_5 2 + \log_5 3) = n(\log_5 8 - \log_5 9)$$

$$\Rightarrow -(\log_5 2 + \log_5 3) = n(3 \log_5 2 - 2 \log_5 3) \Rightarrow -\left(\frac{5}{12} + \frac{5}{7}\right) = n\left(\frac{5}{4} - \frac{10}{7}\right) \Rightarrow n = -\frac{\frac{95}{84}}{-\frac{5}{28}} = \frac{19}{3}$$

$$\frac{19}{3} \times 60 = 380$$

حال $\frac{19}{3}$ ساعت را به دقیقه تبدیل می‌کنیم:

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۲)

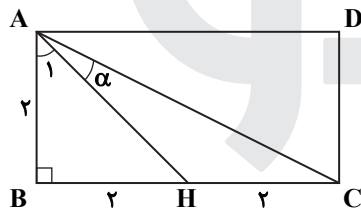
$$\text{نکته: } \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\hat{A}_1 = 45^\circ$$

$$\alpha = \beta - 45^\circ$$

چون مثلث ABH قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:

اگر قرار دهیم $\hat{\alpha} + \hat{A}_1 = \hat{\beta}$ ، آنگاه:



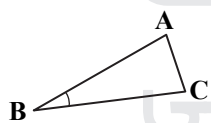
$$\triangle ABC: \tan \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\tan \alpha = \tan(\beta - 45^\circ) = \frac{\tan \beta - \tan 45^\circ}{1 + \tan \beta \cdot \tan 45^\circ} = \frac{2 - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

نکته: اگر ABC یک مثلث دلخواه باشد، آنگاه:

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sqrt{3} \times \sin \alpha = 4/5 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4/5}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{3}{6\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، پس:

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=0} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=0} \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

چون $0 < \alpha < 180^\circ$ ، پس تنها جواب‌های قابل قبول $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ هستند که به ترتیب 60° و 120° می‌باشند. مقدار خواسته شده در سؤال برابر

$$\frac{120^\circ}{60^\circ} = 2 \text{ است با:}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته: جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

نکته: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = a + \frac{1}{2}b \left[2 \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \right] \\ &= a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right) = a + \frac{b}{2} \left[-\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2cx\right) \right] = a - \frac{b}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2cx\right) \\ &= a - \frac{b}{2} \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2cx\right)\right] = a - \frac{b}{2} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2cx\right) \right] = a + \frac{b}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2cx\right) = a + \frac{b}{2} \cos(-2cx) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx) \end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = \pm 1$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر π است، پس:

چون $\cos(-x) = \cos(x)$ ، پس فرض می کنیم که $c = 1$ باشد.

با توجه به نمودار، مقدار ماکزیمم تابع برابر ۳ و مقدار مینیمم آن برابر -۱ است، پس:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{مقدار ماکزیمم: } \frac{b}{2} + a = 3 \\ \text{مقدار مینیمم: } -\frac{b}{2} + a = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ f(0) = a + \frac{b}{2} \cos(0) = a + \frac{b}{2} = -1 \xrightarrow{a=1} \frac{b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4 \\ f(x) = 1 - 2 \cos(2x) \end{aligned}$$

با توجه به نمودار، $f(0) = -1$ ، پس:

در نتیجه تابع $f(x)$ به صورت روبه رو خواهد بود:
حال صفرهای تابع را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos(2x) = 0 &\Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \alpha \xrightarrow{k=0} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \alpha \xrightarrow{k=1} 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{array} \right. \xrightarrow{-} \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

نکته: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\cos x - \sin x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (1)$$

حال طرفین رابطه (۱) را به توان ۲ می رسانیم:

$$(\cos x - \sin x)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3} \quad (2)$$

حال مقادیر به دست آمده از رابطه (۱) و رابطه (۲) را در فرض سؤال قرار می دهیم:

$$m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x) = \sqrt{6}$$

$$m \times \frac{\sqrt{6}}{3} - 3\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{m\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{m}{3} \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{m}{3} = 2 \Rightarrow m = 6$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) > f(b)$. چون دامنه تابع f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، پس:

$$m^2 - m - 5 < 0 \xrightarrow[m_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}]{m_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}} \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} -2 < m < 3 \quad (1)$$

$$-m^2 + 2m - 3 < 0 \xrightarrow{\Delta < 0}{a < 0} \text{ همواره برقرار است.}$$

با توجه به اینکه تابع f اکیداً نزولی است، پس:

$$m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \xrightarrow[m_2 = -\frac{1}{2}]{m_1 = 2} m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > 2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -1$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چندجمله‌ای باشند، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

نکته: تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ است، تابع هموگرافیک می‌نامیم.

نکته: اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک تابع هموگرافیک باشد، آنگاه:

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

فرض می‌کنیم که $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، پس:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx+d}{ax-c}$$

حال حدهای زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(g)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} g^{-1}(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{cx+d}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-bx+d}{ax-c}} = \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{a^2}{bc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx+d}{ax-c}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx+d}{ax+b}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{ab}{ac} = -\frac{b}{c}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$-\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b} = b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$$

مقدار $-\frac{b}{a}$ با توجه به اینکه $a = \pm b$ است، می‌تواند ۱ یا -۱ باشد.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

۱۶- پاسخ: گزینه ۲

نکته: گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

با استفاده از عددگذاری خواهیم داشت:

(۱) n زوج باشد: $n = 2$ ، با توجه به فرض سؤال $f(x)$ باید در ۲ و -۲ پیوسته باشد:

$$[2] = 2 \Rightarrow f(2) = |2 - [-2]| = |2 - (-2)| = |4| = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = |2 - (-2)| = 4$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$ ، پس تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته نیست.(۲) n فرد باشد: $n = 1$ ، با توجه به فرض سؤال $f(x)$ باید ۱ و -۱ پیوسته باشد:

$$[1] = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - [1] + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 1 + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = |1 - (-1)| = 2$$

پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow k = k = 2 \Rightarrow k = 2$$

$$[-1] = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 - [-1] + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 - (-1) + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = |-1 - 1| = 2$$

پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow k = k = 2 \Rightarrow k = 2$$

در نتیجه به ازای $k = 2$ ، تابع $f(x)$ در ۱ و -۱ پیوسته است، پس n باید فرد باشد. بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۵)

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\text{نکته: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ابتدا $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = xg(x) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$$

$$g(x) = \frac{\left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2 - 1}{x} = \frac{1 + \sin^2 x - 2 \sin x - (1 + \sin^2 x + 2 \sin x)}{x(1 + \sin x)^2} = \frac{-4 \sin x}{x(1 + \sin x)^2}$$

حال، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x(1 + \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{(1 + \sin x)^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -4 \times 1 = -4$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۴)

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ برابر با مشتق تابع f در نقطه a است.ابتدا قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ را نسبت به محور x ها به دست می آوریم:

$$y = x^2 + 1 \xrightarrow[\text{به محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت}} y_1 = -(x^2 + 1) = -x^2 - 1$$

فرض می کنیم خط d ، سهمی y_1 را در نقاط A و B قطع کند. چون خط d موازی محور x ها است، پس نقاط A و B دارای عرض یکسان هستند و چون A و B روی سهمی y_1 قرار دارند و عرض یکسان دارند، پس طول این نقاط قرینه یکدیگرند، یعنی:

$$A(\alpha, B), B(-\alpha, \beta)$$

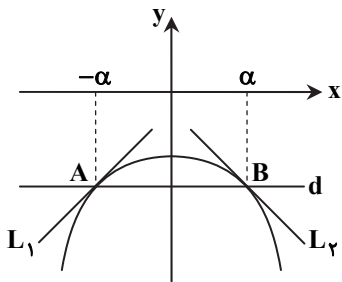
حال از تابع y_1 مشتق می گیریم:

$$y_1' = (-x^2 - 1)' = -2x$$

با توجه به نکته، شیب دو خط L_1 و L_2 را به دست می آوریم:

$$m_{L_1} = y_1'(-\alpha) = -2 \times (-\alpha) = 2\alpha$$

$$m_{L_2} = y_1'(\alpha) = -2\alpha$$

با توجه به فرض سؤال L_1 و L_2 عمودند، پس:

$$m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1 \Rightarrow -2\alpha \cdot 2\alpha = -1 \Rightarrow -4\alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$A(\frac{1}{2}, \beta), B(-\frac{1}{2}, \beta)$$

واضح است که فاصله خط از مبدأ مختصات برابر با $|\beta|$ است، پس:

$$\beta = y_1(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^2 - 1 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4} = -1/25 \Rightarrow |\beta| = 1/25$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۵)

نکته: مختصات نقطه عطف تابع $ax^3 + bx^2 + cx + d$ برابر است با: $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$.برای آنکه نقطه عطف در ناحیه دوم مختصات باشد، باید $x < 0$ و $y > 0$ باشد.

حال مختصات نقطه عطف را به دست می آوریم:

$$x_A = -\frac{b}{3a} = -\frac{k+1}{3k} \xrightarrow{k < 0} -\frac{k+1}{3k} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{3k} > 0 \Rightarrow k < -1 \text{ یا } k > 0 \quad (1)$$

$$y_A = f(-\frac{b}{3a}) = f(-\frac{k+1}{3k}) = k(-\frac{k+1}{3k})^3 + (k+1)(-\frac{k+1}{3k})^2 = -\frac{(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^3}{9k^2} = \frac{2(k+1)^3}{27k^2}$$

$$= \frac{2(k+1)^3}{27k^2} \xrightarrow{y > 0} 2(k+1)^3 > 0 \Rightarrow (k+1)^3 > 0 \Rightarrow k+1 > 0 \Rightarrow k > -1 \quad (2) \xrightarrow{(1) \cap (2)} k > 0$$

پس هیچ مقدار صحیح و منفی k وجود ندارد که نقطه عطف منحنی داده شده در ناحیه دوم مختصات قرار گیرد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۵)

نکته: اگر $x = c$ طول یک نقطه مینیم یا ماکزیمم تابع f باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. اگر $f'(c) > 0$ آنگاه $x = c$ مینیمم و اگر $f'(c) < 0$ آنگاه $x = c$ ماکزیمم است.نکته: فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا دامنه تابع y را به دست می آوریم:

$$y = \sqrt{x - [x^2]} ; D_y : x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow x \geq [x^2]$$

واضح است که اگر $x < 0$ ، آنگاه $x - [x^2] < 0$ و در دامنه قرار ندارد، پس:

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 \quad (1): [x^2] = 0 &\Rightarrow y = \sqrt{x} \\ \Rightarrow x \geq 0 \quad (1') ; (1) \cap (1') = 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \quad (2): [x^2] = 1 &\Rightarrow y = \sqrt{x-1} \\ \Rightarrow x \geq 1 \quad (2') ; (2) \cap (2') = 1 \leq x < \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq x: [x^2] > x &\Rightarrow x \notin D_y \end{aligned}$$

در نتیجه تابع y به شکل زیر خواهد بود:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1} & 1 \leq x < \sqrt{2} \end{cases}$$

نمودار تابع y و خط $2x - y + 2 = 0$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار مشخص است که نقطه دلخواه باید روی منحنی $\sqrt{x}$ باشد. نقطه $A(\alpha, \sqrt{\alpha})$ را در نظر می‌گیریم. فاصله این نقطه تا خط $2x - y + 2 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2|}{\sqrt{5}}$$

چون می‌خواهیم d مینیمم باشد، لذا باید $2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2$ مینیمم شود:

$$\begin{aligned} f = 2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2 &\Rightarrow f' = 2 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \xrightarrow{f'=0} 2 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = 2 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 4 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

دقت شود که چون $f'' = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}^3} > 0$ ، پس $\alpha = \frac{1}{16}$ مینیمم است. در نتیجه:

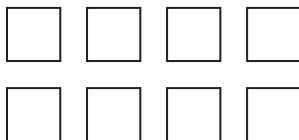
$$d = \frac{\left|2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{8\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{40} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۶)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با:

$n!$



اگر صندلی‌ها را مانند زیر در نظر بگیریم، ۴ وزیر می‌تواند به ۴! حالت در یک ردیف کنار هم بنشینند. معاونان آن‌ها نیز باید روبه‌روی آن‌ها قرار بگیرند. حال باید دقت شود که وزیر و معاون اول می‌توانند جای خود را عوض کنند، پس به ۲ حالت می‌توانند روبه‌روی هم بنشینند. وزیر و معاون دوم نیز به ۲ حالت روبه‌روی هم می‌نشینند و برای ۲ وزیر سوم و چهارم و معاونان آن‌ها نیز همین روند تکرار می‌شود. پس جواب برابر است با:

$$4! \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 4! = 16 \times 24 = 384$$

این سؤال نادرست بوده است.

با توجه به کلید که گزینه ۳ را انتخاب کرده است، ممکن است فرض این باشد که وزیران باید در یک ردیف باشند و معاونان هم در یک ردیف که در این صورت جواب برابر است با:

$$4! \times 2 = 24 \times 2 = 48$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

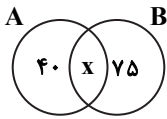
▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۱، فصل ۷)

نکته: اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال تعداد پیشامد A یعنی $P(A)$

به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

پیشامد A : خریداری بلیط فیلم «الف»

پیشامد B : خریداری بلیط فیلم «ب»



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40+x}{150}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{75+x}{150}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{40+x}{150}}{\frac{75+x}{150}} = \frac{40+x}{75+x}$$

برای آنکه بیشترین مقدار $\frac{40+x}{75+x}$ را به دست آوریم، باید حداکثر مقدار x را جایگزین کنیم:

$$\max x = 150 - (40 + 75) = 35$$

پس بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر است با:

$$\max \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{40+35}{75+35} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۳)

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر n داده از جامعه به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، انحراف آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

نکته: اگر داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، آنگاه: (n) تعداد داده‌ها و d قدرنسبت دنباله حسابی است.

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \cdot d^2$$

برای آنکه بیشترین میانگین ممکن را داشته باشیم، باید داده‌های جدید بیشترین مقدار ممکن را داشته باشند. برای آنکه اعداد جدید مجموعه زوج باشند، باید اختلاف دو عدد زوج را جایگزین کنیم و یا اختلاف دو عدد فرد را جایگزین کنیم. ماکسیمم اختلاف دو عدد فرد برابر است با: $10 - 9 = 1$. چون ۱۰ جزء داده‌های اولیه ما است، پس باید داده‌های زوج ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶ و ۱۸ را نگه داریم. حال باید داده‌های فرد ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ را دوباره دو انتخاب کرده و اختلاف آن‌ها را جایگزین کنیم. چون داده‌های جدید نباید تکراری باشند، پس اعداد جدید باید ۸، ۶ و ۴ باشند:

$$17 - 9 = 8$$

$$19 - 13 = 6$$

$$15 - 11 = 4$$

بنابراین داده‌های جدید به صورت زیر خواهند بود:

$$4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$$

راه حل اول:

$$\bar{x} = 11 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(4-11)^2 + (6-11)^2 + (8-11)^2 + (10-11)^2 + (12-11)^2 + (14-11)^2 + (16-11)^2 + (18-11)^2}{8}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{49+25+9+1+1+9+25+49}{8} = \frac{168}{8} = 21 \Rightarrow \sigma = \sqrt{21}$$

راه حل دوم:

چون داده‌های جدید تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، پس:

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \cdot d^2 = \frac{8^2 - 1}{12} \times 2^2 = \frac{63}{12} \times 4 = 21 \Rightarrow \sigma = \sqrt{21}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۲۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

نکته: فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

ابتدا احتمال عوض شدن یا عوض نشدن حرف ورودی را به دست می‌آوریم. اگر حرف ورودی را A در نظر بگیریم، در ۴ حالت زیر حرف خروجی همان A است:

$$1) A \xrightarrow{\frac{1}{4}} A \xrightarrow{\frac{1}{4}} A \xrightarrow{\frac{1}{4}} A : \text{احتمال} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$2) A \xrightarrow{\frac{1}{4}} A \xrightarrow{\frac{3}{4}} B \xrightarrow{\frac{3}{4}} A : \text{احتمال} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$3) A \xrightarrow{\frac{3}{4}} B \xrightarrow{\frac{3}{4}} A \xrightarrow{\frac{1}{4}} A : \text{احتمال} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$4) A \xrightarrow{\frac{3}{4}} B \xrightarrow{\frac{1}{4}} B \xrightarrow{\frac{3}{4}} A : \text{احتمال} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \left[\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] = \frac{1}{64} + \frac{27}{64} = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$$

$$1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

در نتیجه احتمال آنکه حرف خروجی با حرف ورودی یکسان باشد، برابر است با:

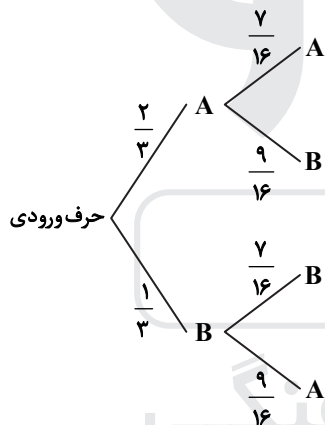
پس احتمال آنکه حرف خروجی با حرف ورودی یکسان نباشد، برابر است با:

(دقت شود که اگر حرف ورودی را B فرض کنیم، جواب یکسان خواهد بود.)

C : پیشامد اینکه حرف A چاپ شود.

D_1 : پیشامد اینکه حرف ورودی A باشد.

D_2 : پیشامد اینکه حرف ورودی B باشد.



$$P(D_1 | A) = \frac{P(D_1)P(A | D_1)}{P(D_1)P(A | D_1) + P(D_2)P(A | D_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{16}} = \frac{\frac{14}{48}}{\frac{23}{48}} = \frac{14}{23}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

۲۵- پاسخ: گزینه ۲

نکته: مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر.

نکته: اگر طول یک ضلع لوزی برابر a باشد و اندازه زاویه بین ۲ ضلع آن لوزی برابر α باشد، آنگاه مساحت لوزی برابر است با:

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha$$

طبق فرض سؤال هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است، پس:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= d_1 \cdot d_2 \\ S &= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2} a^2 \quad (1)$$

با توجه به نکته داریم:

$$S = a^2 \sin \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1):(2)} \frac{1}{2} a^2 = a^2 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

چون قطر لوزی زاویه لوزی را نصف می‌کند، پس اندازه کوچک‌تر در هر مثلث حاصل از رسم قطرهای این لوزی برابر است با:

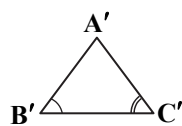
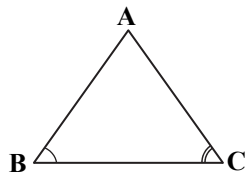
$$\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.



$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

با توجه به فرض سؤال، $\hat{ABF} = \hat{CAF} = \hat{BCD} = \alpha$.چون زاویه $\hat{F}_1$ ، زاویه خارجی مثلث BFC است، پس:

$$\hat{F}_1 = \alpha + \hat{\beta}_1 = \hat{B} \quad (1)$$

چون زاویه $\hat{E}_1$ ، زاویه خارجی مثلث ABE است، پس:

$$\hat{E}_1 = \hat{A}_1 + \alpha = \hat{A} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{(1)} \hat{F}_1 = \hat{B} \\ \xrightarrow{(2)} \hat{E}_1 = \hat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{BC}{DF} = \frac{AB}{EF}$$

با توجه به اینکه $DF = \frac{2}{5}$ و $EF = 3$ است، داریم:

$$\Rightarrow \frac{8}{\frac{2}{5}} = \frac{AB}{3} \Rightarrow AB = \frac{24}{\frac{2}{5}} = \frac{96}{10} = 9.6$$

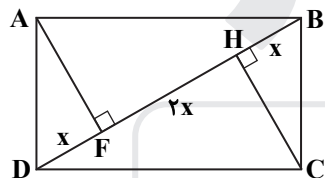
بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۲۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آن‌هاست.

با توجه به فرض سؤال داریم:



$$BH = DF = \frac{1}{2} FH$$

$$DF = x, FH = 2x$$

پس اگر قرار دهیم $BH = x$ ، آنگاه:

با توجه به نکته داریم:

$$\frac{S_{\triangle HBC}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{BH}{BD} = \frac{1}{4}$$

می‌دانیم که مساحت مثلث BCD، نصف مساحت مستطیل ABCD است، پس:

$$\frac{S_{\triangle HBC}}{S_{\triangle BCD}} \times \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle HBC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle HBC}} = 8$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(در کلید به اشتباه گزینه ۱ انتخاب شده است.)

۲۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

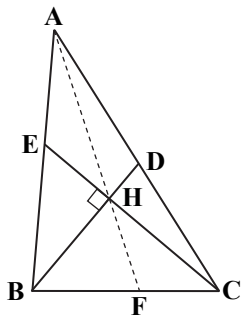
نکته: سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رأس هستند. به‌طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیراین ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

نکته: سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند.

چون سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند، پس:

$$S_{\triangle BHF} = S_{\triangle FHC} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow S_{\triangle BHC} = 2 \times 3 = 6$$

با توجه به نکته داریم:



$$BH = \frac{2}{3} \times 4/5 = 3$$

$$S_{\triangle BHC} = \frac{BH \times HC}{2} \Rightarrow 6 = \frac{3 \times HC}{2} \Rightarrow HC = 4$$

$$\frac{HC}{EC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{EC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EC = 6$$

پس مقدار خواسته شده در سؤال برابر است با:

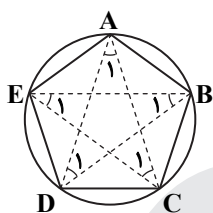
$$\frac{EC}{BD} = \frac{6}{4/5} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۲۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

با توجه به نکته داریم:



$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2}, \hat{B}_1 = \frac{\widehat{ED}}{2}$$

$$\hat{C}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2}, \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \hat{E}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

بنابراین مقدار خواسته شده در سؤال برابر است با:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{E}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{DC} + \widehat{ED} + \widehat{AE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}) = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(در کلید به اشتباه گزینه ۳ خورده است.)

۳۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۴، فصل ۳)

نکته: در مثلث ABC، ضلع روبه‌رو به زاویه A را با α نمایش داده و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A را با r_a نمایش می‌دهیم و داریم: (P برابر با نصف محیط مثلث است.)

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

نکته: در مثلث ABC که $BC = a$ ، $AB = c$ و $AC = b$ است، مساحت آن برابر با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

که در آن $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است.

ابتدا مثلث، ABC را به دست می‌آوریم:

$$2P = 7 + 8 + 9 = 24 \Rightarrow P = 12$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)} = \sqrt{12 \times 3 \times 4 \times 5} = 12\sqrt{5}$$

حال با توجه به نکته داریم:

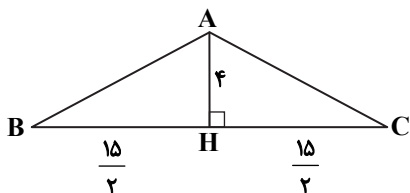
$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{12\sqrt{5}}{12-7} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2/4\sqrt{5}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۳۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: از میان مثلث‌هایی که یک ضلع مشترک و مساحت برابر دارند، مثلث متساوی‌الساقین کمترین محیط را دارد.

با توجه به نکته، مثلث مدنظر یک مثلث قائم‌الزاویه است.



$$S_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} \Rightarrow 30 = \frac{15 \times AH}{2} \Rightarrow AH = 4$$

چون در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم است، پس:

$$BH = HC = \frac{15}{2}$$

$$\triangle AHC : AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 16 + \frac{225}{4} = \frac{289}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2} \Rightarrow AC = AB = \frac{17}{2}$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر است با:

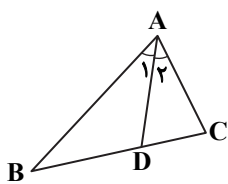
$$\frac{15}{2} + \frac{15}{2} + \frac{17}{2} + \frac{17}{2} = 32$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۳)

۳۲- پاسخ: گزینه ۱

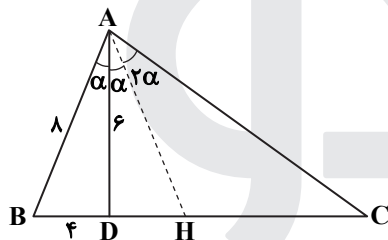
نکته: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$\text{فرض: } \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

نکته: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



با توجه به فرض سؤال اگر قرار دهیم $\hat{BAD} = \alpha$ ، آنگاه $\hat{DAC} = 3\alpha$. حال از نقطه A خطی رسم می‌کنیم که DC را در H قطع کند به‌طوری که $\hat{DAH} = \alpha$ و در نتیجه $\hat{HAC} = 2\alpha$.

حال مشاهده می‌شود که AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ در مثلث ABH است، پس:

$$\frac{AH}{AH} = \frac{4}{DH} \Rightarrow AH = 2DH \quad (1)$$

$$6^2 = 8 \times AH - 4 \times DH \xrightarrow{(1)} 36 = 8 \times 2DH - 4 \times DH = 12DH \Rightarrow DH = 3 \Rightarrow AH = 6$$

حال AH نیز در مثلث ABC نیمساز می‌باشد، پس:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{8}{AC} = \frac{4}{CH} \Rightarrow CH = \frac{4}{8} AC \quad (2)$$

$$AH^2 = AB \cdot AC - BH \cdot CH$$

$$6^2 = 8 \times AC - 4 \times CH \xrightarrow{(2)} 36 = 8 \times AC - 4 \times \frac{4}{8} AC$$

$$\Rightarrow 36 = \frac{15}{8} AC \Rightarrow AC = \frac{36 \times 8}{15} = \frac{27 \times 8}{5} = 2 \frac{4}{5} \times 8 = 19 \frac{2}{5}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$|A| = ad - bc$$

$$|A| = (\log_6 3)^2 - (\log_6 2)^2 = (\log_6 3 + \log_6 2)(\log_6 3 - \log_6 2) = (\log_6 6)(\log_6 \frac{3}{2}) = 1 \times \log_6 \frac{3}{2} = \log_6 \frac{3}{2}$$

$$|A| = \log_6 \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{تعریف log}} 6^{|A|} = \frac{3}{2}$$

$$|B| = 6^3 |A| - 6^6 |A| = (6^3 |A|)^3 - 6^6 |A| = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} = \frac{27}{8} - \frac{12}{8} = \frac{15}{8}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: معادله سهمی که از رأس $S(h, k)$ عبور می‌کند و دهانه آن رو به راست است، به صورت زیر می‌باشد:

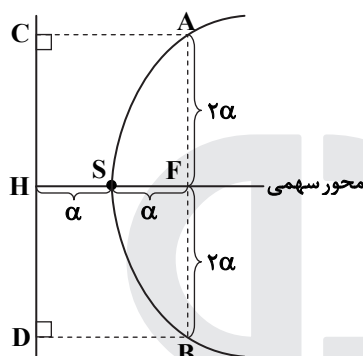
با توجه به فرض‌های سؤال هم می‌توان دهانه سهمی را روبه بالا و هم روبه راست در نظر گرفت و خللی در انجام محاسبات انجام نمی‌شود. لذا دهانه سهمی را روبه راست در نظر می‌گیریم.

$$(y + 1)^r = fa(x + 1)$$

چون نقطه $(1, 1)$ روی سهمی قرار دارد، پس:

$$(1 + \lambda)^r = \mathfrak{r} \mathbf{a} (1 + \lambda) \Rightarrow \mathfrak{r} = \lambda \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{1}{\mathfrak{r}}$$

حال چون $a = \frac{1}{2}$ ، پس $.SF = SH = \frac{1}{2}$



$$DB = AC = SF + SH = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

چون نقطه A روی سهمی قرار دارد، پس با توجه به تعریف سهمی داریم:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AF} \Rightarrow \mathbf{AF} = 1 \quad (1)$$

و چون نقطه B نیز روی سهمی قرار دارد، با توجه به تعریف سهمی داریم:

$$\mathbf{FB} = \mathbf{DB} \Rightarrow \mathbf{FB} = \mathbf{I} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AB = 2$$

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

۳۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند، آنگاه:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه بین آنها باشد، آنگاه:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

نکته: مساحت مثلثی که با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S = \frac{1}{r} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

نکته: بردار $\vec{a}$ را با $\vec{c}_a$ نمایش داده و برابر است با:

$$\mathbf{c}_{\vec{\mathbf{a}}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|}$$

نکته: $|c_{\vec{g}}|$ همواره برابر یک است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال مساحت مثلث خواسته شده را به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{r} \left| \left(\frac{r\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{r\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{r\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right| = \frac{1}{r} \left| (r\vec{c}_a + r\vec{c}_b) \times (\vec{c}_a - r\vec{c}_b) \right| = \frac{1}{r} \left| \underbrace{r\vec{c}_a \times \vec{c}_a}_{\cdot} - \cancel{r\vec{c}_c \times \vec{c}_b} + r\vec{c}_b \times \vec{c}_a - \underbrace{r\vec{c}_b \times \vec{c}_b}_{\cdot} \right|$$

$$= \frac{1}{r} | -\cancel{r} \mathbf{c}_{\bar{a}} \times \mathbf{c}_{\bar{b}} + \cancel{r} \mathbf{c}_{\bar{b}} \times \mathbf{c}_{\bar{a}} | = \frac{1}{r} | -\cancel{r} \mathbf{c}_{\bar{a}} \times \mathbf{c}_{\bar{b}} - \cancel{r} \mathbf{c}_{\bar{a}} \times \mathbf{c}_{\bar{b}} | = \frac{1}{r} | -\lambda \mathbf{c}_{\bar{a}} \times \mathbf{c}_{\bar{b}} | = r | \mathbf{c}_{\bar{a}} \times \mathbf{c}_{\bar{b}} | = r | \mathbf{c}_{\bar{a}} | | \mathbf{c}_{\bar{b}} | \sin \theta$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{4}{1} = \frac{16}{1} = 16$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

۳۶- پاسخ: گزینه ۱

نکته: معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

نکته: معادله خطی یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است که در آن مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است و شعاع آن

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ برابر با } r \text{ است.}$$

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره کوچک تر را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = r \Rightarrow O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-3, 1)$$

$$\text{شعاع دایره کوچک تر} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4r}}{2} = \frac{2\sqrt{1+r}}{2} = \sqrt{1+r} \quad (1)$$

خط $y = x$ عمودمنصف خطالمرکزین دو دایره می باشد، پس معادله خطالمرکزین دو دایره به صورت روبه رو است:

$$y = -x + a$$

مرکز دایره کوچک تر $O(-3, 1)$ روی خطالمرکزین دو دایره قرار دارد، پس:

$$1 = -3 + a \Rightarrow a = -2$$

در نتیجه معادله خطالمرکزین دو دایره به صورت $y = -x - 2$ می باشد.چون خط $y = x$ بر دایره کوچک تر مماس است، پس شعاع دایره کوچک تر برابر است با فاصله مرکز آن از خط d ، پس:

$$\text{شعاع دایره کوچک تر} = \frac{|1 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \xrightarrow{(1)} \sqrt{1+r} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 1+r=8 \Rightarrow r=7$$

با توجه به فرض سؤال، شعاع دایره بزرگ تر برابر است با:

$$\text{شعاع دایره بزرگ تر} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

چون خط $y = x$ عمودمنصف خطالمرکزین است، پس مرکز دایره بزرگ تر،قرینه مرکز دایره کوچک تر نسبت به خط $y = x$ است، پس:

$$O(-3, 1) \Rightarrow O'(1, -3)$$

حال معادله دو دایره را به دست می آوریم:

$$\text{معادله دایره کوچک تر: } (x+3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

$$\text{معادله دایره بزرگ تر: } (x-1)^2 + (y+3)^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

حال این دو معادله را باز کرده و از هم کم می کنیم:

$$\begin{cases} (x^2 + 9 + 6x) + (y^2 + 1 - 2y) = 8 \\ (x^2 + 1 - 2x) + (y^2 + 9 + 6y) = 32 \end{cases} \xrightarrow{-} 8 + 8x - 8 - 8y = -24 \Rightarrow x - y = -3 \Rightarrow y = x + 3$$

حال برای به دست آوردن طول نقاط برخورد دایره ها، باید $y = x + 3$ را در معادله یکی از دایره ها قرار دهیم:

$$\text{معادله دایره کوچک تر: } x^2 + y^2 + 6x - 2y = -2 \xrightarrow{y=x+3} x^2 + (x+3)^2 + 6x - 2(x+3) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 9 + 6x + 6x - 2x - 6 + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0$$

ریشه های این معادله برابر با طول نقاط برخورد دو دایره هستند. چون سؤال حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره را خواسته است، پس

مقدار آن برابر است با:

$$x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * گسسته (درس ۲، فصل ۱)

۳۷- پاسخ: گزینه ۲

نکته: عدد صحیح a شمارنده عدد b است. هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری $b = aq$.چون طبق فرض سؤال، عدد $(a \cdot a)$ سه رقمی است، پس a می تواند مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ را اختیار کند. حال با گذاشتن دو رقم مشابه عدد a

در دو طرف این عدد نیز یک عدد ۵ رقمی ساخته می شود که جدید است. پس ۳ حالت زیر را در نظر می گیریم:

۱) $a = 1 \Rightarrow$ شمارنده اول ندارد.۲) $a = 2 \Rightarrow$ یک شمارنده اول دارد.۳) $a = 3 \Rightarrow$ یک شمارنده اول دارد.پس حداکثر a می تواند یک شمارنده اول داشته باشد.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(سؤال به درستی بیان نشده است و تنها برداشتی که از آن می توان کرد همین راه حل می باشد.)

۳۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: معادله سیاله $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می تواند به یک معادله هم نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b | ax - c \Rightarrow b | ax - c \Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (b > 0), \quad ax \equiv (b < 0) \pmod{b} \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{|b|}$$

$$by \equiv c \pmod{a} \quad \text{و به طریق مشابه می توان نوشت:}$$

نکته: می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد، یعنی:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

$$\text{نکته: } ac \equiv bc \pmod{m}, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$63x + 77y = 273 \xrightarrow{+7} 9x + 11y = 39$$

ابتدا معادله سیاله داده شده را ساده می کنیم:

حال معادله سیاله به دست آمده را به یک معادله هم نهشتی تبدیل می کنیم:

$$9x \equiv 39 \pmod{11} \Rightarrow 9x - 11x \equiv 39 - 11 \pmod{11} \Rightarrow -2x \equiv 28 \pmod{11} \xrightarrow{(2,11)=1} -x \equiv 14 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv -14 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv -14 + 2 \times 11 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 8 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow x = 11k + 8 \xrightarrow{k=9} x = 107 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 1 + 0 + 7 = 8$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۳۹- پاسخ: گزینه ۴۴۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * گسسته (درس ۲، فصل ۳)

نکته (اصل لانه کبوتری): اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه ها قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

می دانیم که باقی مانده اعداد بر ۵ برابر با ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ است. اعدادی را که باقی مانده آن ها بر ۵ برابر ۲ است را در نظر می گیریم. این اعداد به صورت $5k + 2$ هستند. اگر زوج های مرتب، همگی به صورت $(5k + 2, 5k' + 2)$ باشند، هر دو زوج مرتبی که انتخاب کنیم، مجموع مؤلفه های اول و مجموع مؤلفه های دوم آن به صورت $(5t + 4, 5t' + 4)$ خواهند بود که مضرب ۵ نیستند. می دانیم که در مجموعه اعداد طبیعی بی نهایت عدد به صورت $5k + 2$ وجود دارد. لذا بی نهایت زوج مرتب به این صورت می توان ساخت که در خواسته سؤال صدق نکنند. در نتیجه سؤال نادرست است.

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * گسسته (درس ۱، فصل ۲)

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 26 \quad \text{نکته: اگر } G \text{ یک گراف با مرتبه } p \text{ و اندازه } q \text{ و } V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \text{ مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه:}$$

نکته: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q باشد، آنگاه:

$$\Delta = (\bar{G}) = (p-1) - \delta(G)$$

$$q(\bar{G}) = \binom{p}{2} - q(G)$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

می دانیم که گرافی با درجه رئوس ۳، ۴ و ۴ وجود ندارد، لذا درجه رئوس را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$4, 3, 2, 2, 2 \quad \text{یا} \quad 3, 2, 2, 2, 2$$

چون می خواهیم تعداد رئوس با درجه رأس یک حداقل باشد و نیز تعداد رئوس با درجه فرد باید زوج باشد، لذا درجه رئوس گراف دلخواه ما به صورت زیر خواهند بود:

$$1) \quad 4, 3, 2, 2, 1 \Rightarrow q(G) = \frac{4+3+2+2+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\Delta(\bar{G}) = (p-1) - \delta(G) = (5-1) - 1 = 3$$

$$q(\bar{G}) = \binom{p}{2} - q(G) = \frac{5 \times 4}{2} - 6 = 4$$

$$\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 4 + 3 = 7 \quad \text{در گزینه ها نیست.}$$

$$2) \quad 3, 2, 2, 2, 1 \Rightarrow q(G) = \frac{3+4 \times 2+1}{2} = 6$$

$$\Delta(\bar{G}) = (p-1) - \delta(G) = (6-1) - 1 = 4$$

$$q(\bar{G}) = \binom{p}{2} - q(G) = \frac{6 \times 5}{2} - 6 = 9$$

$$\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 4 + 9 = 13$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

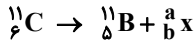
(چون ۲ جواب ممکن برای سؤال وجود دارد، لذا بهتر است که گفته شود «کدام می تواند باشد؟»)

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

برای پیدا کردن ذره x لازم است عدد جرمی و عدد اتمی آن را به دست آوریم؛ بنابراین به مقایسه عدد جرمی و اتمی در دو طرف فرایند می پردازیم:



$$\begin{cases} 11 = 11 + a \Rightarrow a = 0 \\ 6 = 5 + b \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow {}_1^0x = \beta^+$$

۴۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی می توان نوشت:

$$(3) \quad v_3 = 0$$

$$(2)$$

$$(1) \quad h_1 = 0$$

$$E_1 = E_3 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_3 + U_3$$

$$\frac{K_3 = 0.7K_1}{U_1 = 0} \rightarrow K_1 = 0.7K_1 + U_3 \Rightarrow K_1 = 0.7K_1 + mgh_3$$

$$\Rightarrow 0.3\left(\frac{1}{2} \times m \times v_1^2\right) = m \times 10 \times 42 \Rightarrow v_1^2 = 2800$$

برای به دست آوردن حداکثر ارتفاع لازم است اصل پایستگی انرژی مکانیکی را برای نقطه شروع و زمانی که گلوله در بیشترین ارتفاع است بنویسیم:

$$E_1 = E_3 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_3 + U_3 \Rightarrow \frac{1}{2} \times m \times v_1^2 + 0 = 0 + mgh_3 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2800 = 10 \times h_3 \Rightarrow h_3 = 140 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۴۳- پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از رابطه انبساط طولی داریم:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow 0.9 = 900 \times 1/25 \times 10^{-5} \times \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{9 \times 10^{-1}}{9 \times 1/25 \times 10^{-3}} \Rightarrow \Delta \theta = 8.0^\circ \text{C}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۴۴- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به مثبت بودن کار انجام شده روی گاز متوجه می شویم که تراکم صورت گرفته است. بنابراین گزینه های ۳ و ۴ حذف می شوند. در تراکم بی درروی گاز آرمانی، انرژی درونی گاز افزایش می یابد بنابراین گزینه ۲ نیز حذف می شود و گزینه ۱ پاسخ سؤال است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۵- پاسخ: گزینه ۲

دو متحرک A و B از یک نقطه حرکت خود را آغاز کرده اند بنابراین وقتی به هم می رسند جابه جایی یکسانی داشته اند و باید در نظر داشت که متحرک B دو ثانیه دیرتر از متحرک A حرکت خود را آغاز کرده است.

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{1}{2} a_A t_A^2 = \frac{1}{2} a_B t_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2} a t_A^2 = \frac{1}{2} (a + 0.5)(t_A - 2)^2 \Rightarrow a(6)^2 = (a + 0.5)(6 - 2)^2$$

$$\Rightarrow 36a = 16a + 8 \Rightarrow a = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

حال مکان دو متحرک را در لحظه $t = 10 \text{ s}$ به دست آورده و فاصله آن ها را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} t_A = 10 \text{ s} : x_A = \frac{1}{2} (0.4)(10)^2 = 20 \text{ m} \\ t_B = 8 \text{ s} , a_B = a + 0.5 = 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} : x_B = \frac{1}{2} (0.9)(8)^2 = 28.8 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 28.8 - 20 = 8.8 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۴

گلوله اول یک ثانیه قبل از گلوله دوم رها می شود بنابراین ابتدا جابه جایی گلوله اول را در مدت ۱ ثانیه به دست می آوریم:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times (1)^2 + 0 \Rightarrow \Delta y_1 = 5 \text{ m}$$

پس در لحظه رها شدن گلوله دوم، گلوله اول ۵ متر عقب تر است اما یک ثانیه پس از آن گلوله B عقب تر می افتد چون گلوله A سرعت بیشتری دارد. پس ابتدا فاصله دو گلوله کاهش می یابد و سپس افزایش می یابد.

۴۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

نمودار « $v-t$ » دو متحرک را برای زمانی که فاصله آن‌ها ۴۶ متر است تا زمانی که سرعت آن‌ها صفر می‌شود، رسم می‌کنیم:

$$v_A = a_A t_A + v_{0,A} \Rightarrow 0 = -2t_A + 8 \Rightarrow t_A = 4s$$

$$v_B = a_B t_B + v_{0,B} \Rightarrow 0 = -4t_B + 20 \Rightarrow t_B = 5s$$

باید در نظر داشت که خودروی B یک ثانیه پس از خودروی A سرعت خود را کم می‌کند.

$$\Delta x_B = S = 20 \times 1 = 20m$$

مسافت پیموده‌شده توسط خودروی B در مدت ۱s:

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0,A} t = \frac{1}{2} (-2)(1)^2 + (8)(1)$$

$$\Rightarrow \Delta x_A = -1 + 8 = 7m$$

$$a_A = \frac{0 - v_1}{4 - 1} \Rightarrow -2 = \frac{-v_1}{3} \Rightarrow v_1 = 6 \frac{m}{s}$$

بعد از گذشت ۱s فاصله بین دو متحرک ۳۳m می‌شود و معادلات دو متحرک به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2} (-2)(t^2) + 8t + 33 \\ x_B = \frac{1}{2} (-4)t^2 + 20t \end{cases} \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0$$

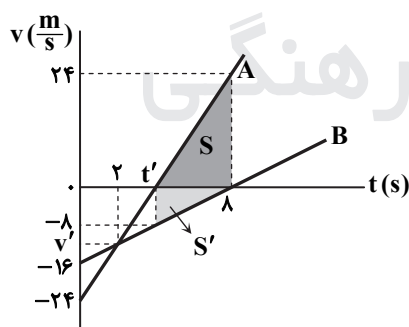
$$(t-11)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 11s \\ t = 3s \end{cases} \quad \checkmark$$

$$v_B = -4t + 20 \xrightarrow{t=3s} v_B = 8 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۳

طبق شکل در بازه زمانی t_1 تا $8s$ دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت کرده‌اند؛ زیرا $v_A > 0$ و $v_B < 0$ است. مجموع سطح زیر دو نمودار در این بازه نشان‌دهنده فاصله بین دو متحرک است که برای پیدا کردن آن باید t' و v' و همچنین سرعت متحرک A در لحظه $t = 8s$ و سرعت متحرک B در t مشخص شود.



$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} = \frac{0 - (-16)}{8 - 0} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$v_B = a_B t + v_{0,B} = 2t + (-16) \xrightarrow{t=8s} v' = 2(8) - 16 = -12 \frac{m}{s}$$

در بازه $t = 0$ تا $8s$ برای متحرک A داریم:

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} = \frac{-12 - (24)}{8} = 6 \frac{m}{s^2}$$

$$v_A = 6t' - 24 \xrightarrow{v_A=0} t' = 4s$$

حال v_A را در لحظه $t = 8s$ و v_B را در لحظه $t' = 4s$ به دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{v_A - v_0}{\Delta t} \Rightarrow 6 = \frac{v_A - (-24)}{8 - 0} \Rightarrow v_A = 24 \frac{m}{s}$$

$$a_B = \frac{v_{B,t'} - v_0}{t' - 0} \Rightarrow 2 = \frac{v_{B,t'} - (-16)}{4 - 0} \Rightarrow v_{B,t'} = -8 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = S + S' = \frac{24 \times 4}{2} + \frac{4 \times 8}{2} \Rightarrow \Delta x = 48 + 16 = 64m$$

متحرک‌های A و B در لحظه $t' = 4s$ به هم می‌رسند و بعد از آن تا لحظه $t = 8s$ از هم دور می‌شوند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست؛ تندی مداری ماهواره در گردش به دور زمین، متناسب با عکس جذر فاصله ماهواره از مرکز زمین است.

$$v = \sqrt{\frac{R_e^2 g}{r}} \Rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_e}\right)r^3 \Rightarrow T^2 \propto r^3$$

گزینه ۲: درست

گزینه ۳: نادرست؛ شتاب حرکت ماهواره متناسب با عکس مربع فاصله از مرکز زمین است.

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow g \propto \frac{1}{r^2}$$

گزینه ۴: نادرست؛ وزن یک ماهواره با مربع فاصله ماهواره از مرکز زمین رابطه عکس دارد.

$$W = G \frac{M_e m}{r^2} \Rightarrow W \propto \frac{1}{r^2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} \vec{p}(3s) = ((3 \times 3) - 6)\vec{i} = 3\vec{i} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\ \vec{p}(1s) = ((3 \times 1) - 6)\vec{i} = -3\vec{i} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}(3s) - \vec{p}(1s)}{3 - 1} = \frac{3\vec{i} - (-3\vec{i})}{2} = 3\vec{i} \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را روی شکل مشخص می‌کنیم:

چون جسم در حال حرکت است نیروی اصطکاک جنبشی به آن وارد می‌شود.

$$F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow F_N - W = 0 \Rightarrow F_N = W = mg = 50 \text{ N}$$

$$F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k F_N = ma$$

$$\Rightarrow 26 - 0.4(50) = 5(a) \Rightarrow a = 1/2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{50^2 + 20^2} = 10\sqrt{29} \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} m = 2 \text{ ton} = 2000 \text{ kg} \\ v = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18 \times \frac{1}{3.6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{(2000 \text{ kg})(5)^2}{(20)} = 2500 \text{ N}$$

نیروی اصطکاک ایستایی نیروی مرکزگرا است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۳- پاسخ: گزینه ۳

از رابطه بسامدهای تشدید تار استفاده می‌کنیم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow 300 = \frac{3 \times v}{2 \times 0.6} \Rightarrow v = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f_n = nf_1 \Rightarrow 300 = 3f_1 \Rightarrow f_1 = 100 \text{ Hz}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۴- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا از رابطه $I = \frac{P}{A}$ کمک می‌گیریم و نسبت $\frac{I_2}{I_1}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} I = \frac{P}{A} \\ A = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 2 \times (2)^2 = 8 \quad (*)$$

برای بررسی تغییرات تراز شدت صوت از رابطه زیر کمک می‌گیریم:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \xrightarrow{(*)} \beta_2 - \beta_1 = 10 \log 2^3 = 30 \log 2 = 9 \text{ dB}$$

بنابراین تراز شدت صوت ۹ دسی‌بل افزایش یافته است.

۵۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ درمی یابیم که دوره تناوب آونگ با مجذور طول آونگ نسبت مستقیم دارد.

$$T_2 - T_1 = 0.125 T_1 \Rightarrow T_2 = 1.125 T_1 = \frac{9}{8} T_1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} \Rightarrow L_2 = \frac{81}{64} L_1 \quad (*)$$

$$L_2 - L_1 = 0.17 \xrightarrow{(*)} \frac{81}{64} L_1 - L_1 = 0.17 \Rightarrow L_1 = 0.64 \text{ m}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.64}{9.8}} = 1.6 \text{ s}$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

در حالت کلی معادله حرکت هماهنگ ساده به صورت $x = A \cos(\omega t)$ است که از مقایسه آن با معادله صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} x = A \cos \delta \cdot \pi t \\ x = A \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \omega = \delta \cdot \pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \delta \cdot \pi \Rightarrow T = \frac{4}{100} \text{ s}$$

بازه داده شده در صورت سؤال یعنی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 0.2 \text{ s}$ نصف دوره تناوب یعنی $\frac{T}{2}$ است و نوسانگر در این بازه مسافت $2A$ را

می پیماید؛ پس داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 1/5 = \frac{2A}{0.2} \Rightarrow A = 1/5 \times 10^{-2} \text{ m} = 1/5 \text{ cm}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

با استفاده از رابطه بسامدهای تشدید تار داریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{f_1=f} f = \frac{1 \times 250}{2 \times 0.5} = 250 \text{ Hz}$$

هر ذره از تار در مدت زمان T یک نوسان کامل انجام می دهد.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{250} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{1}{250} \times 10^3 \text{ ms} = 4 \text{ ms}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

از رابطه مقابل کمک می گیریم و n و n' را به دست می آوریم:

$$E_n - E'_n = E_R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$12/75 = 13/6 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow 0.937 = \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

با چک کردن گزینه ها در رابطه (*) $n = 4$ و $n' = 1$ به دست می آید.

۵۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۵)

بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون های گسیل شده از رابطه مقابل به دست می آید:

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

λ را بر حسب نانومتر می خواهد، پس hc را بر حسب $\text{eV} \cdot \text{nm}$ می نویسیم:

$$\begin{cases} K_{\max,1} = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0 \Rightarrow K_{\max,1} = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8 \times 10^9}{\lambda_1} - 4 \\ K_{\max,2} = \frac{hc}{\lambda_2} - W_0 \Rightarrow K_{\max,2} = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8 \times 10^9}{\lambda_2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{\max,1} = \frac{1200}{\lambda_1} - 4 \\ K_{\max,2} = \frac{1200}{\lambda_2} - 4 \end{cases}$$

$$\frac{K_{\max,2} = 6K_{\max,1}}{\lambda_1 = 2\lambda_2} \rightarrow \frac{K_{\max,1}}{K_{\max,2}} = \frac{K_{\max,1}}{6K_{\max,1}} = \frac{\lambda_1}{2400 - 4\lambda_1} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1200 - 4\lambda_1}{2400 - 4\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = 240 \text{ nm}$$

۶۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

به فرایند افزایش درصد یا غلظت ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونه، غنی سازی گفته می شود.

۶۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

با توجه به صورت سؤال: $V_2 = \frac{3}{4} V_1$ طبق رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ داریم:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow U_2 = \frac{9}{16} U_1 \Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{9}{16} U_1 - U_1 = -\frac{7}{16} U_1$$

۶۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{2 \times 10^{-3}}{-2.0 \times 10^{-9}} = 10^{-5} \text{ V}$$

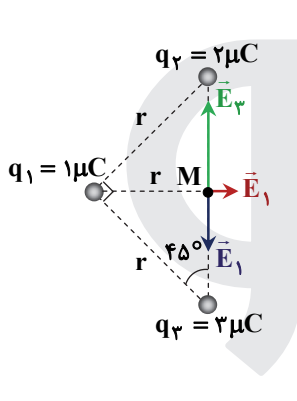
با توجه به افزایش انرژی پتانسیل الکتریکی مشخص می شود که بار الکتریکی منفی در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است.

۶۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین روبه رو فاصله نقطه M از هر سه بار به یک اندازه است.

حالت اول:



$$\begin{cases} E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{k \times 10^{-6}}{r^2} \\ E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{k \times 2 \times 10^{-6}}{r^2} = 2E_1 \\ E_3 = \frac{kq_3}{r_3^2} = \frac{k \times 3 \times 10^{-6}}{r^2} = 3E_1 \end{cases}$$

$$E_{\text{net}(x)} = E_1, \quad E_{\text{net}(y)} = E_3 - E_2 = 3E_1 - 2E_1 = E_1$$

$$E_{T,1} = \sqrt{E_{\text{net}(x)}^2 + E_{\text{net}(y)}^2} = E_1 \sqrt{2}$$

حالت دوم:

در حالت دوم و پس از حذف بار q_2 دو میدان E_1 و E_3 را داریم که برهم عمودند:

$$E_{T,2} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{E_1^2 + (3E_1)^2} = E_1 \sqrt{10} \Rightarrow \frac{E_{T,2}}{E_{T,1}} = \frac{\sqrt{10} E_1}{\sqrt{2} E_1} = \sqrt{5}$$

۶۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

ابتدا مدار را ساده می کنیم. مقاومت های 6Ω و 12Ω موازی هستند،همچنین مقاومت های 15Ω و R هم موازی اند و مقاومت معادل آنها

نیز با هم سری می باشد. از طرفی ولتاژ دو سر این مقاومت های معادل برابر

است؛ چون در صورت سؤال داریم:

$$V_{6\Omega} = V_{8\Omega}$$

و به دلیل سری بسته شدن آنها جریان یکسانی هم از آنها می گذرد، پس

مقاومت معادل آنها نیز با هم برابر است.

$$R_1 = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\Omega, \quad R_2 = 4\Omega$$

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 = 8\Omega$$

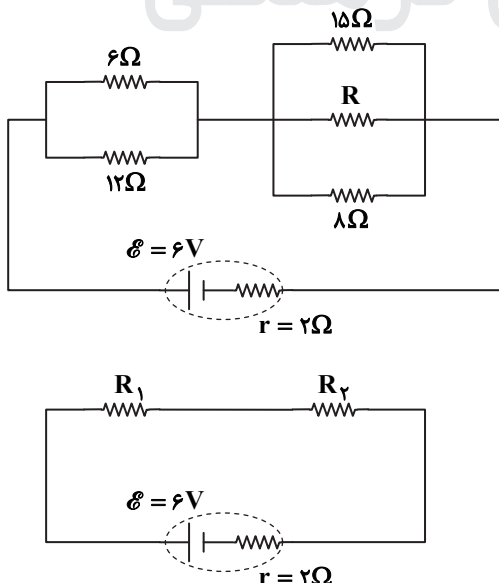
$$I = \frac{6}{R_{\text{eq}} + 2} = \frac{6}{8 + 2} = 0.6 \text{ A}$$

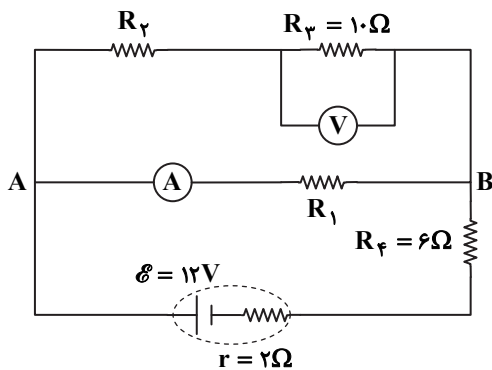
دو مقاومت ۶ و ۱۲ اهمی موازی هستند، پس جریان به نسبت عکس

مقاومت ها بین آنها تقسیم می شود.

$$I_{12\Omega} = 0.2 \text{ A}, \quad I_{6\Omega} = 0.4 \text{ A}$$

$$V_{6\Omega} = V_{8\Omega} \Rightarrow 6 \times 0.4 = 8 \times I_{8\Omega} \Rightarrow I_{8\Omega} = 0.3 \text{ A}$$





۶۵- پاسخ: گزینه ۴
ولت سنج آرمانی عدد ۵ ولت را نشان می‌دهد که این عدد نشان‌دهنده ولتاژ دو سر مقاومت R_3 است.

$$V = V_3 = R_3 I_3 \Rightarrow 5 = 10 \times I_3 \Rightarrow I_3 = 0.5 \text{ A}$$

طبق صورت سؤال آمپرسنج آرمانی ۰/۲۵ آمپر را نشان می‌دهد که جریان عبوری از شاخه وسط و مقاومت R_1 است؛ بنابراین طبق قاعده انشعاب در گره A داریم:

$$I = I_3 + I_1 \Rightarrow I = 0.75 \text{ A}$$

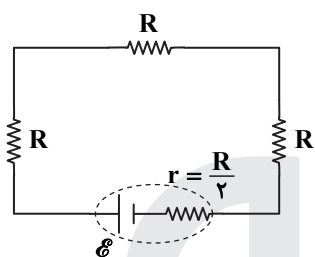
$$V_B - IR_f - Ir + E = V_A$$

$$\Rightarrow V_A - V_B = -0.75 \times 6 - 0.75 \times 2 + 12 \Rightarrow V_A - V_B = 6 \text{ V}$$

$$V_1 = R_1 I_1 \Rightarrow 6 = R_1 \times 0.25 \Rightarrow R_1 = 24 \Omega$$

$V_B - V_A$ با ولتاژ دو سر مقاومت R_1 برابر است:

۶۶- پاسخ: گزینه ۳
مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)
در حالتی که کلید باز است داریم:



$$I_{eq,1} = \frac{E}{R_{eq,1} + r} \Rightarrow I_{eq,1} = \frac{E}{3R + \frac{R}{2}}$$

$$\Rightarrow I_{eq,1} = \frac{E}{\frac{7}{2}R} = \frac{2E}{7R}$$

$$V_{\text{باتری},1} = E - r I_{eq,1} = E - \frac{R}{2} \times \frac{2E}{7R} = \frac{6}{7}E$$

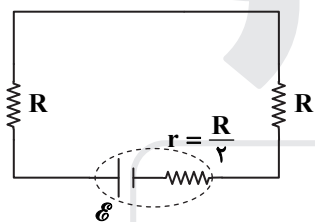
در حالتی که کلید بسته است:

با بسته شدن کلید k مقاومت R در شاخه بالایی اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.

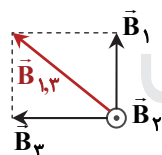
$$I_{eq,2} = \frac{E}{R_{eq,2} + r} \Rightarrow I_{eq,2} = \frac{E}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2E}{5R}$$

$$V_{\text{باتری},2} = E - r I_{eq,2} = E - \frac{R}{2} \times \left(\frac{2E}{5R}\right) = \frac{4}{5}E$$

$$\frac{V_{\text{باتری},2}}{V_{\text{باتری},1}} = \frac{\frac{4}{5}E}{\frac{6}{7}E} = \frac{14}{15}$$



۶۷- پاسخ: گزینه ۱
مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)



از قاعده دست راست کمک می‌گیریم و جهت میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه در نقطه O را به دست می‌آوریم:
جهت میدان $\vec{B}_1$ به سمت بالا و جهت میدان $\vec{B}_2$ به سمت چپ است بنابراین برهم عمودند و بر این دو $\vec{B}_3$ عمود است.

$$B = B_1 = B_2 = B_3 = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1 \times 0.5}{2 \times 0.15} = 2 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$\vec{B}_3$ و $\vec{B}_1$ برهم عمودند:

$$B_{1,3} = \sqrt{B_1^2 + B_3^2} = \sqrt{B^2 + B^2} = \sqrt{2}B$$

$\vec{B}_{1,3}$ و $\vec{B}_2$ برهم عمودند و بر این دو $\vec{B}_T$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_T = \sqrt{B_{1,3}^2 + B_2^2} \Rightarrow B_T = \sqrt{(\sqrt{2}B)^2 + B^2} = B\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times 10^{-6} \text{ T}$$

۶۸- پاسخ: گزینه ۴
مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

با توجه به اینکه اندازه و جهت سرعت الکترون ثابت است پس شتاب حرکت الکترون صفر است؛ بنابراین بر ایند نیروهای وارد بر آن صفر است. لذا داریم:

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_B \quad (1)$$

از رابطه (۱) متوجه می‌شویم که نیروی الکتریکی هم مانند نیروی مغناطیسی بر مسیر حرکت الکترون عمود است بنابراین میدان الکتریکی حتماً بر مسیر حرکت الکترون عمود است. اما طبق رابطه $F_B = qvB \sin \theta$ ، سرعت ذره v و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ هر زاویه‌ای می‌توانند با هم داشته باشند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۹- پاسخ: گزینه ۱

ضریب القاوری سیم‌لوله از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

$$\Rightarrow L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (1000)^2 \times \pi \times 10^{-4}}{15/7 \times 10^{-2}} = \frac{4 \times 3/14 \times \pi \times 10^{-5}}{157 \times 10^{-3}} = 64 \times 10^{-4} \text{ H} = 6/4 \text{ mH}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۷۰- پاسخ: گزینه ۲

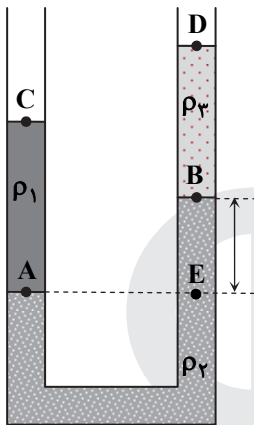
با توجه به اطلاعات مسئله θ (زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه) 60° درجه است و تنها میدان مغناطیسی با زمان تغییر می‌کند.

$$\mathcal{E}_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{E}_{av} = -N A \cos \theta \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -1 \times \pi \times (10^{-1})^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{-6000 \times 10^{-4}}{15/7 \times 10^{-3}} = 0/6 \text{ V}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۱- پاسخ: گزینه ۱

فشار در نقاط C و D با فشار هوا برابر است؛ زیرا این نقاط در سطح آزاد مایع هستند.



$$P_C = P_D = P_0$$

$$P_E = P_B + \rho g h \xrightarrow{P_A = P_E} P_A = P_B + \rho g h$$

$$\Rightarrow P_A > P_B > P_C = P_D$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۲- پاسخ: گزینه ۴

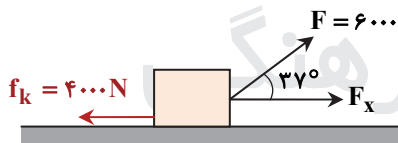
فشار پیمانه‌ای، اختلاف فشار بخار داخل زودپز و فشار هوا است که این اختلاف فشار ناشی از وزنه است.

$$P_g = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} \Rightarrow m = \frac{P_g A}{g} = \frac{1.5 \times 5 \times 10^{-6}}{10} = 50 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۷۳- پاسخ: گزینه ۱

جابه‌جایی سورتمه فقط در راستای افقی است؛ بنابراین فقط نیروهای افقی کار انجام می‌دهند. برابند نیروهای افقی را به دست می‌آوریم:



$$F_{net,x} = F \cos 37^\circ - f_k = 600 \times 0.8 - 400 = 800 \text{ N}$$

$$W_t = F_{net,x} d = 800 \times 5 = 4000 \text{ J}$$

از قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \Delta K = 4000 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۴- پاسخ: گزینه ۴

 Q_1 : گرمای مبادله‌شده آب با دمای اولیه 20°C Q_2 : گرمای مبادله‌شده آب با دمای اولیه 80°C Q_3 : گرمای مبادله‌شده ظرف θ_e : دمای تعادل

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 c_{\text{آب}} \Delta \theta_1 + m_2 c_{\text{آب}} \Delta \theta_2 + m_3 c_{\text{ظرف}} \Delta \theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow 0.8 \times 4200 \times (\theta_e - 20) + 0.2 \times 4200 \times (\theta_e - 80) + 0.3 \times 400 \times (\theta_e - 32) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۱۰۰}} 3/36 \theta_e - 67/2 + 0.84 \theta_e - 67/2 + 1/2 \theta_e - 38/4 = 0$$

$$\Rightarrow 5/4 \theta_e = 172/8 \Rightarrow \theta_e = 32^\circ\text{C}$$

۷۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

برای حل این سؤال از قانون گازهای کامل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{T_1=T_2} P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} V_1 = 40 \times 50 = 2000 \text{ cm}^3 \\ V_2 = 30 \times 50 = 1500 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

فشار کف پیستون را در دو حالت (۱) و (۲) محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \frac{F_1}{A} = P_0 + \frac{mg}{A} \\ P_2 = P_0 + \frac{F_1 + F_2}{A} = P_0 + \frac{mg + 9mg}{A} = P_0 + \frac{10mg}{A} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} (P_0 + \frac{mg}{A}) 2000 = (P_0 + \frac{10mg}{A}) 1500 \Rightarrow 4P_0 + \frac{4mg}{A} = 3P_0 + \frac{30mg}{A}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{26mg}{A} = \frac{26 \times 17 / 5 \times 10}{50 \times 10^{-4}} = 9 / 1 \times 10^4 \text{ Pa}$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)



x عدد اتمی = ۲۴ + ۱۸ = ۴۲ یا x عدد اتمی = ۳۶ + ۵ + ۱ = ۴۲

$$n = 96 - 42 = 54$$

۷۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

جمله کتاب درسی: «کاربرد طیف‌های نشری خطی از برخی جنبه‌ها مانند کاربرد خط نماد (بار کد) روی جعبه یا بسته مواد غذایی و بسیاری از کالاها است.»

پس طیف نشری خطی در آن کاربرد ندارد.

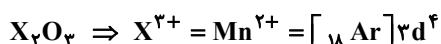
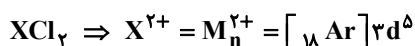
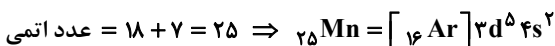
۷۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

نخستین صفر ساخته شده در واکنشگاه هسته‌ای ${}^{99}_{43}\text{Tc}$ است. پس Tc در گروه ۷ است.

Ni ۲۸ در دوره چهارم است. ($19 \leq 28 \leq 36$)

پس عنصر مورد نظر در دوره چهارم و گروه ۷ است.



۷۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

جمله کتاب: بخش عمده پرتوهای فرابنفش جذب می‌شود.

قسمت نگران‌کننده این است که شاید طراح تصویر صفحه ۷۳ کتاب درسی باشد. در تصویر از ۵ پرتو یکی جذب نشده است. (۸۰٪)

بررسی سایر گزینه‌ها:

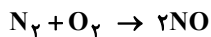
(۲) دما باید بین نقطه جوش N_2 و NH_3 (بین -33°C و 196°C) باشد.

$$(3) \quad \frac{0.78}{0.95} \neq \frac{0.95}{0.95}$$

(۴) نیتروژن به رغم واکنش‌پذیری اندک، کاربردهای صنعتی فراوانی دارد.

۸۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

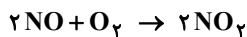


$$O_2 = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}, N_2 = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$32 - 28 = 4 \text{ g} \text{ اختلاف}$$

$$4 \text{ g} \text{ اختلاف جرم} \equiv 2 \text{ mol NO}$$

$$0.125 \text{ g} \text{ اختلاف جرم} \times \frac{2 \text{ mol NO}}{4 \text{ g} \text{ اختلاف جرم}} \times \frac{30 \text{ g NO}}{1 \text{ mol NO}} = \frac{30}{16} = 1.875 \text{ g NO}$$



$$\frac{30}{16} \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} \times \frac{2 \text{ mol NO}_2}{2 \text{ mol NO}} \times \frac{46 \text{ g NO}_2}{1 \text{ mol NO}_2} = \frac{46}{16} = 2.875 \text{ g NO}_2$$

۸۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

(۱) نادرست؛ مایع‌ها حجم معین دارند اما شکل معین ندارند.

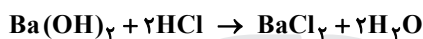
(۲) نادرست؛ حجم مولکول‌ها تغییر نمی‌کند، بلکه فاصله بین آن‌ها کم می‌شود.

(۳) درست؛ با افزایش فشار حجم کم می‌شود.

(۴) نادرست؛ جرم مولی یکسان ندارند، پس ۱ گرم از آن‌ها مول برابر و حجم برابر ندارند.

۸۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)



$$\frac{100}{100} \text{ mL Ba(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ mL}} \times \frac{213.75 \text{ g Ba(OH)}_2}{10.6 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}{171 \text{ g Ba(OH)}_2} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \times \frac{1 \text{ L HCl}}{4 \times 10^{-1} \text{ mol HCl}} \times \frac{10^3 \text{ mL HCl}}{1 \text{ L HCl}}$$

$$= \frac{213.75}{171} = 125 \text{ mL HCl}$$

نکته محاسبه‌ای:

$$213.75 = 213.75 \times 10^3 = \frac{213.75 \times 10^3}{1000} = \frac{213.75}{1} = 213.75$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: توسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

 H_2O پیوند هیدروژنی و H_2S نیروی واندروالسی دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۳) H_2S جرم مولی بیشتری دارد، ولی نقطه جوش کمتری دارد.(۴) CO_2 و CS_2 هر دو ناطبی هستند. اختلاف نیروی واندروالسی آن‌ها فقط تابع جرم مولی است، اما در مقایسه H_2S و H_2O اختلاف قطبیت به طور جدی قابل مقایسه است.

$$\mu_{H_2O} = 1.85 \text{ D}$$

$$\mu_{H_2S} = 0.97 \text{ D}$$

۸۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱) و شیمی ۳ (فصل‌های ۲ و ۳)

(الف) درست

$$1 \text{ گروه } X: ns^1 \Rightarrow X^+ = [\text{گاز نجیب}]$$

$$2 \text{ گروه } Y: ns^2 \Rightarrow Y^{2+} = [\text{گاز نجیب}]$$

$$13 \text{ گروه } Z: ns^2 np^1 \Rightarrow Z^{3+} = [(n-1)d^1] \text{ یا } [\text{گاز نجیب}]$$

در هر سه حالت فوق زیرلایه دارای الکترون به تعداد زوج است.

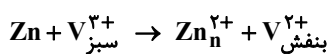
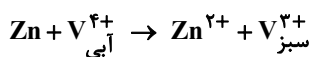
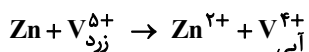
(ب) درست

$$30. \text{Zn} = [\text{Ar}] 3d^10 4s^2$$

$$31. \text{Ga} = [\text{Ar}] 3d^10 4s^2 4p^1$$

$$\text{Zn}^{2+} = \text{Ga}^{3+} = [\text{Ar}] 3d^10$$

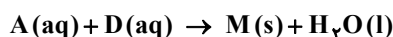
پ) نادرست



نمک وانادیم (V) با گرد روی دچار کاهش می‌شود، نه اکسایش.

(ت) نادرست؛ برای نیکل و روی صرفه اقتصادی ندارد.

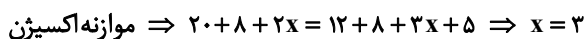
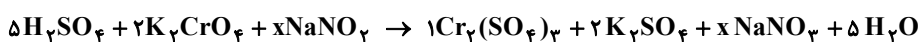
۸۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)



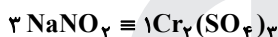
پس انحلال پذیری M از A و D کمتر است. اما مقایسه‌ای بین A و D نمی‌توان داشت.

۸۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲) و شیمی ۲ (فصل ۱)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



$$5 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 5 = 21$$



$$\text{NaNO}_2 = 23 + 14 + 32 = 69 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 = 2 \times 52 + 3 \times 96 = 104 + 288 = 392 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{عملی } 141 / 12 \text{ g Cr}_2(\text{SO}_4)_3}{82 / 8 \text{ g NaNO}_2 \times \frac{1 \text{ mol NaNO}_2}{69 \text{ g NaNO}_2} \times \frac{1 \text{ mol Cr}_2(\text{SO}_4)_3}{3 \text{ mol NaNO}_2} \times \frac{392 \text{ g Cr}_2(\text{SO}_4)_3}{1 \text{ mol Cr}_2(\text{SO}_4)_3}} \times 100 = \frac{141 / 2}{0.4 \times 392} = 90\%$$

۸۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

نقطه جوش نفت کوره از نفت سفید بیشتر است. پس اگر در دمایی معین نفت کوره به حالت گاز باشد، حتماً نفت سفید نیز گاز خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

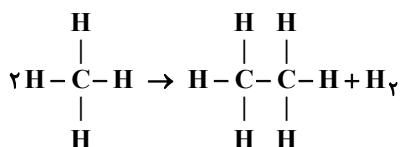
(۱) کاتالیزگر واکنش، سولفوریک اسید است. پس محیط اسیدی لازم است.

(۲) همه آلکن‌ها با برم واکنش می‌دهند.

(۴) هرچه در برج تقطیر بالاتر می‌رویم دما کاهش می‌یابد و جرم مولی ترکیب‌های خارج شده نیز کمتر می‌شود.



۸۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)



$$2\Delta \text{H}_{(\text{C}-\text{H})} - \Delta \text{H}_{(\text{C}-\text{C})} - \Delta \text{H}_{(\text{H}-\text{H})} = \Delta \text{H}_{\text{واکنش}}$$

$$2x - 348 - 435 = 65 \Rightarrow x = 424 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

۸۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

عبارت اول: درست؛ همه شبه فلزها در دسته p قرار دارند.

عبارت دوم: درست؛ در یک گروه از بالا به پایین خصلت فلزی افزایش می‌یابد. بنابراین عدد اتمی فلز از نافلز هم‌گروه آن بیشتر است.

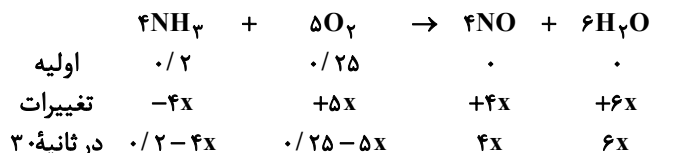
عبارت سوم: درست؛ تنها نافلز مایع برم ($\text{Br}_2(\text{l})$) است. تنها عنصر گاز هم‌دوره آن گاز نجیب کریپتون است که فعالیت شیمیایی چندانی ندارد.

عبارت چهارم: درست؛ سمت چپ یک عنصر نافلز یا فلز است و یا یک شبه فلز دیگر، پس در هر دو حالت برخی خواص فیزیکی فلزها را دارند.

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم و سپس جدول تغییرات مولی را می‌نویسیم:

مول‌های موجود در ظرف: $0/2 - 4x + 0/25 - 5x + 4x + 6x = 0/45 + x$

$$R_{\text{واکنش}} = \frac{x \text{ mol}}{2L} \times 0/5 \text{ min} = 0/2 \frac{\text{mol}}{L \text{ min}} \Rightarrow x = 0/2 \text{ mol} \Rightarrow \text{تعداد مول‌ها} = 0/45 + 0/2 = 0/47 \text{ mol}$$

سرعت در ۳۰ ثانیه نخست با سرعت از ثانیه ۳۰ تا پایان برابر است:

$$\text{NH}_3 : \frac{4x}{30s} = \frac{0/2 - 4x}{\Delta t} \xrightarrow{x=0/2} \frac{0/8}{30} = \frac{0/12}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 45s$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۱- پاسخ: گزینه ۴

عبارت اول: درست

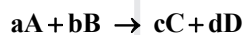
عبارت دوم: درست

$$R = \frac{R_A}{a}$$

$$a = 1 \Rightarrow R = R_A$$

عبارت سوم: درست؛ هر چه ضریب مولی بیشتر باشد، تغییرات مولی در واحد زمان بیشتر و سرعت تولید یا مصرف ماده بیشتر است.

عبارت چهارم: درست؛ برای یک واکنش کلی داریم:



$$R_{\text{واکنش}} = \frac{R_A}{a} = \frac{R_B}{b} = \frac{R_C}{c} = \frac{R_D}{d}$$

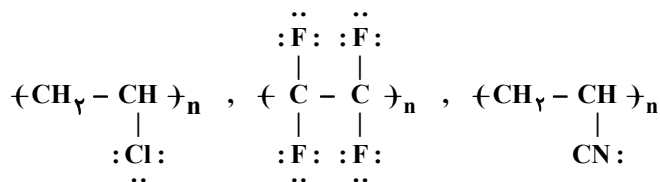
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۲- پاسخ: گزینه ۳

(۱) نادرست؛ در پلیمرها طول زنجیرها با هم برابر نیست.

(۲) نادرست؛ مطلب خارج از کتاب است. اما چون گزینه ۳ قطعاً درست است، عیبی ندارد.

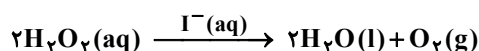
(۳) درست؛ اتم‌های F، N و Cl دارای جفت الکترون ناپیوندی هستند.



(۴) نادرست؛ مثلاً در پلی ساکاریدها بین واحدهای تکرارشونده و اتم اکسیژن وجود دارد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

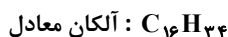
۹۳- پاسخ: گزینه ۴

I⁻: کاتالیزگرمحفظه اکسیژن نسبت به هوا، غلظت O_۲ بیشتری دارد. در اثر پاشیدن گرد آهن، ذرات اکسیژن بین ذرات آهن نفوذ کرده و سطح تماس بیشتر می‌شود.

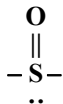
۹۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا فرمول شیمیایی می نویسیم:



ساختار دارای ۸ پیوند دوگانه و سه حلقه است، اما دقت کنیم که پیوند دوگانه $S=O$ ، باعث کاهش تعداد هیدروژن نمی شود. متأسفانه در این ساختار گوگرد دارای آرایش غیرهشتایی و برانگیخته است. که کمی خارج از کتاب است.



پس در مجموع 10×2 هیدروژن باید از فرمول کم کنیم. سه اتم نیتروژن نیز داریم که باید ۳ اتم H به فرمول اضافه کنیم.



حالا می توانیم به بررسی گزاره ها بپردازیم:

(الف) درست: از ۱۷ اتم H، یکی به N متصل است، پس ۱۶ پیوند $C-H$ داریم.

(ب) نادرست: یکی از حلقه ها که دارای ۲ اتم نیتروژن است، حتی با جایگزینی N با C به حلقه بنزن تبدیل نمی شود.

(پ) نادرست: ۲ شاخه اتیل و زنجیر نونان در مجموع دارای ۱۳ کربن است، اما ساختار مورد نظر ۱۶ کربن دارند.

(ت) درست: ۸ پیوند دوگانه و ۲ جفت الکترون ناپیوندی روی هر اتم اکسیژن است، پس $\frac{8}{4} = 2$

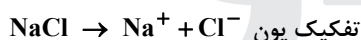
متأسفانه جمله این عبارت که گفته اکسندترین اتم (نه اکسندترین اتم ها) محل ابهام است، که یک اتم O یا دو اتم O مورد نظر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۴



(۲) نادرست: برای یک ترکیب مولکولی یونیده شدن به کار می رود و برای ترکیب یونی از اصطلاح تفکیک یونی استفاده می شود.

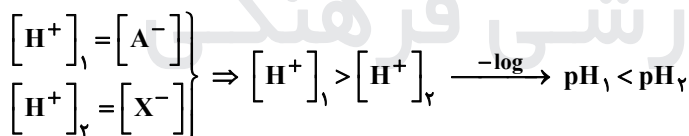
(۳) نادرست: در دما و غلظت یکسان اگر $[H^+]_1 > [H^+]_2 \Rightarrow K_{a1} > K_{a2}$ ، پس فرمیک اسید از استیک اسید قوی تر است. پس به

خاطر غلظت یون هیدرونیوم بیشتر، محلول آن خاصیت اسیدی بیشتری دارد.

دقت کنیم که:

 K_a : ملاک قدرت اسیدی یک ماده $[H^+]$: ملاک اسیدی بودن یک محلول

(۴) درست: HA را با زیروند ۱ و HX را با زیروند ۲ نشان می دهیم:



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۶- پاسخ: گزینه ۴

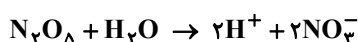
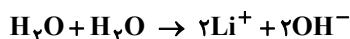
(الف) درست

$$M = 0.1$$

$$\alpha = 16 \times 10^{-2} \Rightarrow [OH^-] = M\alpha = 16 \times 10^{-3} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{16 \times 10^{-3}} = \frac{1}{16} \times 10^{-11} = 6.25 \times 10^{-13}$$

(ب) نادرست: هرچه کربن بیشتر باشد، بخش ناقطبی بزرگ تر و انحلال در آب کمتر می شود.

(پ) درست

تعداد مول H^+ و OH^- تولیدشده برابر است، پس محلول خنثی خواهد بود.(ت) نادرست: K_a فقط تابع دما است و با تغییر غلظت تغییر نمی کند، اما با افزایش غلظت، $[H^+]$ افزایش و pH کاهش می یابد.

۹۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$[HA] = [HD] = 5 \times 10^{-2}$$

$$K_{a1} = \frac{[H^+]_1}{[HA]}$$

$$K_{a2} = \frac{[H^+]_2}{[HD]}$$

$$\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2} = \sqrt{\frac{K_{a1}}{K_{a2}}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} = \sqrt{10^6} = 10^3 \xrightarrow{-\log} pH_1 - pH_2 = -\log 10^3 = -3$$

pH محلول HA از محلول HD ۳ واحد کوچک تر است.

۹۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

عبارت اول: درست؛ در یک فرایند خودبه خود، $E > 0$ است.

عبارت دوم: نادرست؛ هم عبارت تنها و هم آنیون نادرست هستند.



عبارت سوم: درست

O₂(g): اکسنده ، Fe(s): کاهنده

عبارت چهارم: درست



عدد اکسایش آهن از صفر به ۳ رسیده است، پس ۳ الکترون مبادله شده است.

۹۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

(۱) درست؛ اسید ضعیف است، پس $K_a \approx M\alpha^2$

$$K_a = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = \sqrt{4} = 2$$

(۲) نادرست؛ جرم دو برابر $\Leftarrow$ غلظت دو برابرنصف کردن حجم $\Leftarrow$ دو برابر غلظت

در مجموع غلظت ۴ برابر شده است.

$$K_a \approx \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow \frac{[H^+]_2}{[H^+]_1} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = 2 \Rightarrow \Delta pH = -\log 2 = -0.3$$

(۳) نادرست

$$M = \frac{1g \times \frac{1mol}{50g}}{0.4L} = 0.5 \frac{mol}{L}$$

$$K_a = 10^{-5} \Rightarrow 10^{-5} = \frac{[H^+]^2}{4 \times 10^{-1}} \Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-3}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{\sqrt{2} \times 10^{-3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 10^{-11} = 5 \times 10^{-12}$$

(۴) نادرست

$$pH = -\log(2 \times 10^{-3}) = 3 - \log 2 = 2.7$$

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۱

عبارت اول: درست

راه حل اول:

جایگاه در سری الکتروشیمیایی

$$E^\circ(\text{AuI}_4^- / \text{Au} + 4\text{I}^-) = 0.56\text{V}$$

$$E^\circ(\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}) = 0.34\text{V}$$

چون Cu کاهنده قوی تری است، واکنش به طور طبیعی پیش می‌رود.

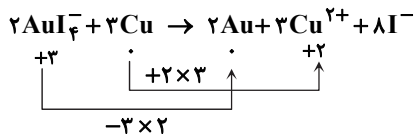
راه حل دوم:

$$\text{emf} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$$

$$\text{emf} = 0.56 - 0.34 > 0$$

Cu آند و Au کاتد است:

عبارت دوم: درست



پس ۶ الکترون مبادله شده است.

عبارت سوم: درست؛ Au دچار کاهش عدد اکسایش شده، پس AuI_4^- اکسند است.

$$2 + 3 + 2 + 3 + 8 = 18$$

عبارت چهارم: درست

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴

$$\Delta H_{\text{فروپاشی}}: \text{MgCl}_2 > \text{NaCl}$$

(۱) نادرست؛ مثلاً c، MgCl_2 باشد و a، NaCl باشد:(۲) نادرست؛ a: K_2O و b: KF

ظاهراً دو ترکیب کاتیون یکسان دارند، O و F هر دو در یک دوره هستند. البته به لحاظ عددی در بین ۴ دوره اول هیچ ترکیب دوتایی وجود ندارد که بار کاتیون و آنیون آن بیشتر از ۱ باشد و مقدار آنتالپی فروپاشی آن حدود ۱۰۰۰ کیلوژول بر مول باشد. مثلاً همین K_2O دارای آنتالپی فروپاشی ۲۲۴۰ کیلوژول بر مول است. پس با فرض اینکه باید در گستره چنین عدد مقداری از فروپاشی ΔH کاتیون و آنیون هر دو دارای بار +۱ و -۱ باشند، عبارت نادرست است.

(۳) نادرست؛ ممکن است بار یکی از یون‌ها یکسان باشد. مثلاً e، MgO باشد ($\Delta H_{\text{فروپاشی}} = 3798$) و c ترکیبی مانند Na_2O یا MgF_2 باشد.

(۴) درست

باید نسبت بار به شعاع کاتیون در d بیشتر از b باشد. $\left. \begin{array}{l} b > d : \text{نسبت بار به شعاع آنیون} \\ \Delta H_{\text{فروپاشی}}: d > b \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\frac{\text{شعاع کاتیون } b}{\text{شعاع آنیون } b} < \frac{\text{شعاع کاتیون } d}{\text{شعاع آنیون } d}$$

ضمناً در گستره $\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$ و کمتر از آن یون‌ها +۱ و -۱ هستند. پس:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲

$$\text{NOBr} = 14 + 16 + 80 = 110 \cdot \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{NO} = 14 + 16 = 30 \cdot \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{Br}_2 = 2 \times 80 = 160 \cdot \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$66 \text{ g NOBr} \times \frac{1 \text{ mol NOBr}}{110 \text{ g NOBr}} = 0.6 \text{ mol NOBr}$$

$$18 \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} = 0.6 \text{ mol NO}$$

$$24 \text{ g Br}_2 \times \frac{1 \text{ mol Br}_2}{160 \text{ g Br}_2} = 0.15 \text{ mol Br}_2$$



اولیه	x	y	·	
تغییرات	-۱/۲y	-۰/۶y	+۱/۲y	$V = 3L$
تعداد	x - ۱/۲y	۰/۴y	۱/۲y	

$$0.4y = 0.15 = y = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$$

$$K = \frac{[\text{NOBr}]^2}{[\text{NO}]^2 [\text{Br}_2]} = \frac{\left(\frac{0.6}{V}\right)^2}{\left(\frac{0.6}{V}\right)^2 \times \frac{0.15}{V}} = \frac{V}{0.15} = \frac{3}{0.15} = 20 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot L$$

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

- (۱) درست: $\lambda > 700\text{nm}$ یعنی ناحیه فرورسرخ، پس منظور طیفسنگ فرورسرخ است.
- (۲) درست: N_2 و H_2 بر دمای 450°C و فشار ۲۰۰ اتمسفر واکنش می‌دهد و N_2 و O_2 در دماهای بسیار بالا (داخل موتور خودرو) واکنش می‌دهند.
- (۳) نادرست: انرژی فعال‌سازی واکنش H_2 و O_2 بسیار زیاد است. بر دمای اتاق با جرقه یا کاتالیزگر واکنش می‌دهد. اما انرژی فعال‌سازی سوختن فسفر سفید کم است.

(۴) درست

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲

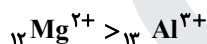
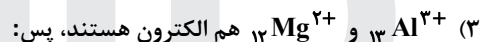
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

- انرژی فشار $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل به سمت مول گاز کمتر $\leftarrow$ رفت
- کاهش دما $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل به سمت تولید گرما $\leftarrow$ رفت
- افزایش $[\text{CO}]$ $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف CO $\leftarrow$ رفت
- کاهش $[\text{CH}_3\text{OH}]$ $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل در جهت تولید CH_3OH $\leftarrow$ رفت
- کاهش $[\text{CO}]$ و $[\text{H}_2]$ $\leftarrow$ جابه‌جایی تعادل در جهت تولید CO و H_2 $\leftarrow$ برگشت

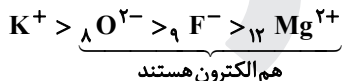
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۱

- (۱) ذرات Ca^{2+} , K^+ , Cl^- , S^{2-} همگی دارای ۱۸ الکترون هستند. پس هرچه عدد اتمی بیشتر، تعداد پروتون بیشتر، جاذبه هسته بیشتر، شعاع کمتر است:



(۴)



مؤسسه آموزشی فرهنگی