

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

(اردیبهشت ماه ۱۴۰۳)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۴)

سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند، پس:

$$a, 1+2a, 5-a \Rightarrow 1+2a = \frac{a+(5-a)}{2} \Rightarrow 2+4a=5 \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$a_1 = a = \frac{3}{4} \quad a_2 = 1+2a = 1+2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{2}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = \frac{3}{4} + 3\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{21}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q, \quad p \vee F \equiv p, \quad p \vee p \equiv p$$

با استفاده از نکات فوق و با توجه به اینکه p، درست و q، نادرست است، داریم:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim r \vee q) \equiv (\sim T \vee r) \Rightarrow (\sim r \vee F) \equiv (F \vee r) \Rightarrow (\sim r) \\ \equiv r \Rightarrow (\sim r) \equiv \sim r \vee \sim r \equiv \sim r$$

۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

با توجه به اینکه عرض دو نقطه A(۳، -۴) و B(-۱/۵، -۴) یکسان است، پس میانگین طولشان، همان طول رأس را به ما می‌دهد:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + (-1/5)}{2} = \frac{1/5}{2} = \frac{1}{10}$$

مجموع صفرهای سهمی از رابطه $S = -\frac{b}{a}$ و طول رأس از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آیند، پس کافیت x_S به دست آمده را در ۲ ضرب

$$S = 2x_S = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

اختلاف ریشه‌های معادله $\frac{1}{a}x^2 + \frac{2k}{b}x + \frac{5}{c} = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(2k)^2 - 4(1/5)(5)}}{|1/5|} = \sqrt{4k^2 - 20} = \sqrt{4(k^2 - 5)} = 2\sqrt{k^2 - 5}$$

عبارت به دست آمده را با $\frac{4}{3}k$ برابر قرار می‌دهیم:

$$2\sqrt{k^2 - 5} = \frac{4}{3}k \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 - 5 = \frac{4}{9}k^2 \Rightarrow k^2 - \frac{4}{9}k^2 = 5 \Rightarrow \frac{5}{9}k^2 = 5 \Rightarrow k^2 = 9$$

$$\left[\frac{k^2}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}\right] = [4/5] = 4$$

پس:

۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۲)

راه حل اول:

زاویه‌ای که خط موردنظر با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، برابر 135° است. بنابراین شیب خط برابر است با:

$$m = \tan 135^\circ = -1$$

عرض از مبدأ این خط نیز برابر ۲ است. پس معادله خط به صورت

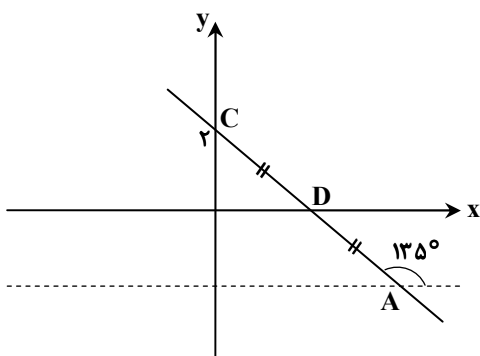
 $y = -x + 2$ است. بنابراین مختصات نقطه D محل تلاقی خط با محور

طول‌ها به صورت D(۲، ۰) است. پس با توجه به این که AD = DC، پس

طول نقطه A برابر ۴ است. پس مختصات A به صورت A(۴، -۲) است و

OA برابر است با:

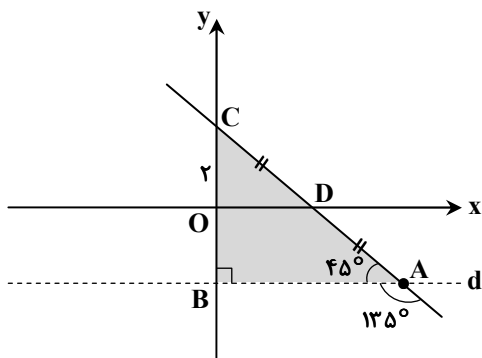
$$OA = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



راه حل دوم:

با توجه به موازی بودن محور x ها و خط d، در مثلث ABC تالس می نویسیم:

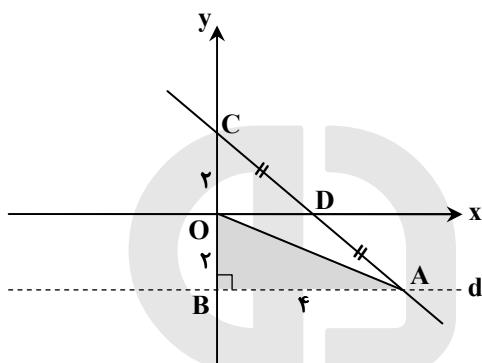
$$\frac{OC}{OB} = \frac{AD}{DA} \Rightarrow \frac{2}{OB} = 1 \Rightarrow OB = 2$$

از طرفی مثلث ABC، قائم الزاویه و متساوی الساقین است (چون زاویه حاده اش 45° است)، پس BC با AB برابر است؛ در نتیجه:

$$AB = BC = 2 + 2 = 4$$

برای به دست آوردن فاصله O تا A، کافیه در مثلث OAB، فیثاغورس بنویسیم:

$$OA^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow OA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

۶- پاسخ: گزینه ۲

اول $f(\sqrt{5})$ را حساب می کنیم:

$$f(x) = x^2 - [x] \Rightarrow f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3$$

پس تساوی $f(af(\sqrt{5})) = 2$ به شکل مقابل می شود:

$$f(3a) = 2 \Rightarrow (3a)^2 - [3a] = 2$$

گزینه ها را در $(3a)^2 - [3a]$ جای گذاری می کنیم؛ هر کدام حاصلش ۲ شد، جواب است:(۱) جای a، $\frac{1}{3}$ قرار می دهیم:

$$(3(\frac{1}{3}))^2 - [3(\frac{1}{3})] = (1)^2 - [1] = 1 - 1 = 0 \neq 2$$

(۲) جای a، $-\frac{1}{3}$ قرار می دهیم:

$$(3(-\frac{1}{3}))^2 - [3(-\frac{1}{3})] = (-1)^2 - [-1] = 1 - (-1) = 2 \quad \checkmark$$

(۳) جای a، $\frac{1}{5}$ قرار می دهیم:

$$(3(\frac{1}{5}))^2 - [3(\frac{1}{5})] = \frac{9}{25} - 0 = \frac{9}{25} \neq 2$$

(۴) جای a، $-\frac{1}{5}$ قرار می دهیم:

$$(3(-\frac{1}{5}))^2 - [3(-\frac{1}{5})] = \frac{9}{25} - (-1) = \frac{34}{25} \neq 2$$

۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)

با توجه به معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، به دو شرط دامنه باید حواسمان باشد:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ x-a \geq 0 \Rightarrow x \geq a \end{cases}$$

$\sqrt{x}$ را به سمت دیگر تساوی می‌بریم:

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x}$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x-a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \Rightarrow 2a\sqrt{x} = a^2 + a \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a^2+a}{2a} = \frac{a(a+1)}{2a}$$

قبل از اینکه a را از صورت و مخرج ساده کنیم، $a = 0$ را در معادله اولیه بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a \xrightarrow{a=0} \sqrt{x} + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

چون x عددی صحیح شد، پس $a = 0$ قبول است.

حالا a را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{x} = \frac{a(a+1)}{2a} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

برای آن که $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$ عددی صحیح باشد، a از بین مقادیر طبیعی، فقط اعداد فرد را می‌تواند بگیرد، یعنی a از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی می‌تواند ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ هم باشد.

$$\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$$

بنابراین a ، ۶ مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد:

۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

$$10(1) - x = -10 \Rightarrow x = 20$$

طول نقطه‌ای به عرض ۱، روی خط $10y - x = -10$ را پیدا می‌کنیم:

مختصات نقطه به صورت $A(20, 1)$ شد.

قرار است وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ از نقطه $(20, 1)$ عبور کند، پس تابع f از نقطه $(1, 20)$ عبور می‌کند؛ در نتیجه:

$$f(1) = 20 \Rightarrow 1 + 6 + a + 1 = 20 \Rightarrow a = 12$$

۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

به کمک خاصیت $\log_c A + \log_c B = \log_c AB$ ، سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x-2) = 3 \Rightarrow \log_2((x^2 + 2x + 4)(x-2)) = 3 \Rightarrow \log_2(x^3 - 8) = 3$$

تساوی لگاریتمی بالا را به نمایی تبدیل می‌کنیم:

$$2^3 = x^3 - 8 \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$$

حاصل $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} 2^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \log_{\sqrt[3]{2}} 2 = 4 \times 1 = 4$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

نقطه $(0, 2)$ روی تابع $y = c + \log_\Delta(ax + b)$ قرار دارد، پس:

$$2 = c + \log_\Delta b \Rightarrow -c = (\log_\Delta b) - 2$$

نقطه $(2/4, 0)$ روی تابع قرار دارد، پس:

$$0 = c + \log_\Delta(2/4a + b) \Rightarrow -c = \log_\Delta(2/4a + b) \Rightarrow$$

دو عبارتی که با $-c$ برابر شدند را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$(\log_\Delta b) - 2 = \log_\Delta(2/4a + b) \Rightarrow \log_\Delta b - \log_\Delta(2/4a + b) = 2$$

در سمت چپ از خاصیت $\log_c A - \log_c B = \log_c \frac{A}{B}$ استفاده می‌کنیم:

$$\log_\Delta \frac{b}{2/4a + b} = 2 \xrightarrow{\text{تبدیل لگاریتمی به نمایی}} \Delta^2 = \frac{b}{2/4a + b} \Rightarrow 2\Delta = \frac{b}{2/4a + b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 60a + 2\Delta b = b$$

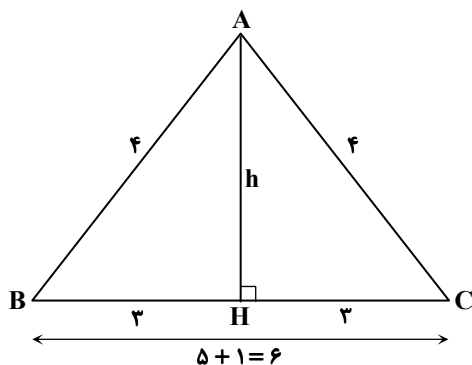
$$\Rightarrow 60a = -2\Delta b \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2\Delta}{60} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2}{5}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

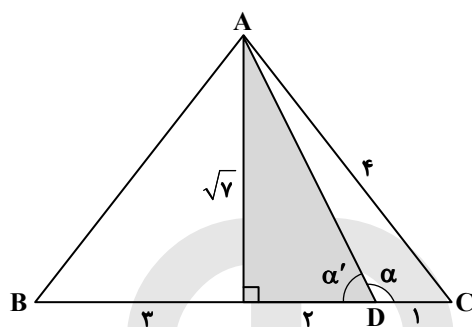
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

ارتفاع وارد بر قاعده را به کمک فیثاغورس در $\triangle ABH$ حساب می‌کنیم:

$$4^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{7}$$

حالا در مثلث AHD، برای زاویه α' (که مکمل α است)، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan \alpha' = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

زاویه α مکمل α' است. اگر دو زاویه مکمل باشند، تانژانت‌هایشان قرینه هم است، پس:

$$\tan \alpha = -\tan \alpha' = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

بین عبارت‌های دوم و سوم از $\sqrt{2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$3 \cos x + \sqrt{2} (\sin x - \cos x)$$

از اتحاد $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ استفاده می‌کنیم:

$$3 \cos x + \sqrt{2} (\sin x - \cos x) = 3 \cos x + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

حالا جای x ها، $\frac{\pi}{12}$ قرار می‌دهیم:

$$3 \cos(\frac{\pi}{12}) + 2 \sin(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = 3 \cos \frac{\pi}{12} + 2 \sin(-\frac{\pi}{6}) = 3(\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

در صورت و مخرج کسر اول به جای $\cos^2 \alpha$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 \alpha$ و در صورت و مخرج کسر دوم به جای $\sin^2 \alpha$ می‌نویسیم $1 - \cos^2 \alpha$.

$$\frac{\sin^4 \alpha + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{2}}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\cos^4 \alpha + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{2 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^4 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}}{2 - \cos^2 \alpha}$$

صورت هر دو کسر با اتحاد مربع، تجزیه می‌شود:

$$\frac{(2 - \sin^2 \alpha)^2}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{(2 - \cos^2 \alpha)^2}{2 - \cos^2 \alpha} = (2 - \sin^2 \alpha) - (2 - \cos^2 \alpha) = 2 - \sin^2 \alpha - 2 + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

راه حل دوم:

$$\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{1+0}{1+0} - \frac{0+4}{1+1} = 1-2 = -1$$

به جای α ، $\frac{\pi}{2}$ قرار می دهیم:

با جای گذاری $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، مقدار هر ۴ گزینه را حساب می کنیم:

$$\begin{array}{llll} \text{۱ (۱)} & \text{۲ (۲)} & \text{۳ (۳)} & \text{۴ (۴)} \\ \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos \pi = -1 & \sin \pi = 0 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array}$$

فقط مقدار گزینه ۳، برابر ۱- شد.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$$

به کمک اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ داریم:

$$1 - 2\sin^2 x$$

جاهایی که $\sin x$ برابر ۱ یا ۱- است، کسینوس حتماً صفر است، یعنی معادله $\sin x = \pm 1$ معادل با معادله $\cos x = 0$ است. جواب این

$$\text{معادله هم به صورت } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ است.}$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{2k\pi + \pi}{2} \xrightarrow{k=-3, -2, -1, 0} -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

جای k ، اعداد صحیح ۳- تا ۰ را می توانیم قرار دهیم:

$$-\frac{5\pi}{2} + \frac{-3\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -4\pi$$

مجموع این ۴ جواب برابر است با:

۱۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

$$[(2^+)^2] = [4^+] = 4$$

حد راست: ابتدا تکلیف براکت را مشخص می کنیم. اگر $x \rightarrow 2^+$ ، حاصل $[x^2]$ برابر است با: ۴

پس حدمان به شکل مقابل می شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - 4}$$

با یک حد صفر صفرم روبه رو هستیم که به راحتی رفع ابهام می شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$[(2^-)^2] = [4^-] = 3$$

حد چپ: ابتدا تکلیف براکت را مشخص می کنیم. اگر $x \rightarrow 2^-$ ، حاصل $[x^2]$ برابر است با: ۳

پس حدمان به شکل مقابل می شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - 3}$$

این حد مبهم نیست و کافیست جای x ها، ۲ قرار دهیم:

$$\text{حد چپ} = \frac{2-2}{4-3} = 0$$

پس:

$$\text{حد راست} + \text{حد چپ} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

تابع $f - g$ را تشکیل می دهیم:

$$f(x) - g(x) = \frac{4}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{4 - (x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{4-x-3}{(x+3)(x-1)} = \frac{-(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$(f-g)(x) = -\frac{1}{x+3}$$

برای به دست آوردن مجانب ها باید ضابطه را ساده کنیم، پس

$$x = -3$$

ریشه مخرج، مجانب قائم است:

حد این تابع در بی نهایت، مجانب افقی است:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x+3} = 0 \Rightarrow y = 0$$

نقطه تلاقی دو خط $x = -3$ و $y = 0$ ، نقطه $(-3, 0)$ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

نقطاتی که نیاز به بررسی دارند، نقاط با طول صحیح هستند.

 $x = k$ را نمایندۀ نقاط با طول صحیح می‌گیریم و حد راست و چپ تابع در این نقطه را حساب می‌کنیم. دقت کنید وقتی $x \rightarrow k^+$ یا $x \rightarrow k^-$ ، از ضابطه با دامنه $x \notin \mathbb{Z}$ ، خروجی می‌گیریم:

$$\text{حد راست: } (1-a) \underbrace{\left[k^+ \right]}_k + (3a^2 - 1) \underbrace{\left[-(k^+) \right]}_{-k-1} = k - ak - 3a^2k - 3a^2 + k + 1$$

$$\text{حد چپ: } (1-a) \underbrace{\left[k^- \right]}_{k-1} + (3a^2 - 1) \underbrace{\left[-(k^-) \right]}_{-k} = k - 1 - ak + a - 3a^2k + k$$

حد راست و چپ را برابر قرار می‌دهیم:

$$k - ak - 3a^2k - 3a^2 + k + 1 = k - 1 - ak + a - 3a^2k + k \Rightarrow -3a^2 + 1 = -1 + a \Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

به‌ازای $a = -1$ و $a = \frac{2}{3}$ ، مقدار حد (حد راست یا چپ) را حساب می‌کنیم:

$$\text{حد (حد راست)} = k - ak - 3a^2k - 3a^2 + k + 1 \begin{cases} a = -1 \rightarrow k + k - 3k - 3 + k + 1 = -2 \\ a = \frac{2}{3} \rightarrow k - \frac{2}{3}k - \frac{4}{3}k - \frac{4}{3} + k + 1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $a = -1$ باشد، برای پیوسته‌بودن باید مقدار تابع در نقاط صحیح که از $b \sin \frac{\pi}{a}$ به‌دست می‌آید، برابر با حد یعنی -2 باشد:

$$b \sin(-\pi) = -2 \Rightarrow 0 = -2 \quad *$$

اگر $a = \frac{2}{3}$ باشد، برای پیوسته‌بودن باید مقدار تابع در نقاط صحیح که از $b \sin \frac{\pi}{a}$ به‌دست می‌آید، برابر با حد یعنی $-\frac{1}{3}$ باشد:

$$b \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow -b = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ ما را یاد مشتق $\frac{f}{g}$ که $\frac{f'g - g'f}{g^2}$ می‌شود، می‌اندازد.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

مشتق $\frac{f}{g}$ در $x = 1$ به‌صورت مقابل است:

$$g^2(1) \times \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \underbrace{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}_{\text{خواسته سؤال}}$$

اگر طرفین وسطین کنیم، داریم:

پس کافیت $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ و $g^2(1)$ را حساب کنیم و در هم ضرب کنیم:اول $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}} = \frac{1}{1} = (\sqrt{x+8})^2 - (\sqrt{x})^2 = x+8 - x = 8$$

مشتق عدد ۸، برابر با صفر است، پس $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ صفر می‌شود و حاصل‌ضربش در $g^2(1)$ نیز همان صفر است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

۱۹- پاسخ: گزینه ۲

دو شرط لازم داریم:

(۱) ریشهٔ مخرج (یعنی $x = 1 - m$) در بازهٔ $(1, +\infty)$ نباشد، پس باید $1 - m$ کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد:

$$1 - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0$$

(۲) مشتق تابع، نامثبت باشد:

$$y = \frac{mx + 2}{x + (-1 + m)} \xrightarrow{\text{مشتق هموگرافیک}} y' = \frac{m(-1 + m) - 2(1)}{(x - 1 + m)^2} = \frac{m^2 - m - 2}{\underbrace{(x - 1 + m)^2}_{\text{نامنفی}}} \leq 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 1) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -1 \leq m \leq 2$$

با اشتراک بین دو شرط $m \geq 0$ و $-1 \leq m \leq 2$ داریم: $0 \leq m \leq 2$ و با توجه به $m \neq 2$ داریم $m < 2$.پس m دو مقدار صحیح دارد: $\{0, 1\}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۲۰- پاسخ: گزینه ۴

اولاً باید f در $x = a$ پیوسته باشد، پس حد راست، حد چپ و مقدارش در این نقطه برابرند.

$$\text{حد راست و مقدار: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (bx + c) = ab + c$$

این دو برابرند:

$$\frac{1}{a} = ab + c \xrightarrow{\times a} \frac{1}{a^2} = a^2b + ac$$

رابطه (۱)

ثانیاً باید مشتق راست و چپ در $x = a$ برابر باشند:

$$\text{مشتق راست: } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\text{مشتق چپ: } (bx + c)' = b$$

این دو نیز برابرند:

$$-\frac{1}{a^2} = b \Rightarrow a^2b = -1$$

در رابطه (۱)، به جای a^2b می‌نویسیم -1 :

$$1 = \underbrace{a^2b}_{-1} + ac \Rightarrow 1 = -1 + ac \Rightarrow ac = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

وقتی خط مماس بر منحنی، از منحنی عبور می‌کند، یعنی آن نقطه، نقطهٔ عطف است.

طول نقطهٔ عطف تابع درجهٔ سوم $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ را به دست می‌آوریم:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 6x + 2a$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{3}$$

 $-\frac{a}{3}$ باید -1 باشد:

$$-\frac{a}{3} = -1 \Rightarrow a = 3$$

ضابطهٔ تابع به صورت $y = x^3 + 3x^2 + bx - 1$ شد. نقطهٔ $(-1, -4)$ روی این تابع است، پس:

$$-4 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + b(-1) - 1 \Rightarrow -4 = -1 + 3 - b - 1 \Rightarrow -4 = -b + 1 \Rightarrow b = 5$$

پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0.6$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۱)

با توجه به این که این ستون می تواند شامل ۱ یا ۲ یا ۳ مکعب مستطیل باشد، داریم:

۳ = تعداد حالات ستون شامل ۱ مکعب مستطیل

۶ = ۳ × ۲ = تعداد حالات ستون شامل ۲ مکعب مستطیل

۶ = ۳ × ۲ × ۱ = تعداد حالات ستون شامل ۳ مکعب مستطیل

۱۵ = ۳ + ۶ + ۶ = تعداد کل حالات

۲۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۷، درس ۱)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

با توجه به این که یکی از تاس ها اول بوده و مجموع آن ها حداقل ۶ است، حالات مطلوب به صورت زیر است:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (4,2), (6,2), (4,3), (6,3), (1,5), (4,5), (6,5) \end{array} \right\}$$

$$n(A) = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس های ۲ و ۳)

۲۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته (میانگین یا متوسط داده ها): میانگین یا متوسط n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با نماد $\bar{x}$ نشان می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

داده های دسته اول را x_1, x_2, x_3, x_4 و داده های دسته دوم را y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 در نظر می گیریم. میانگین هر دو دسته برابر و مساوی با عدد a در نظر می گیریم.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = a \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4a \quad (1)$$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} = a \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5a \quad (2)$$

طرفین روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9a \quad (I)$$

فرض می کنیم داده x_1 از دسته اول را با داده y_1 از دسته دوم جابه جا کرده ایم.

$$\frac{y_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = b \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4b \quad (3)$$

$$\frac{x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} = b \Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5b \quad (4)$$

طرفین روابط (۳) و (۴) را با هم جمع می کنیم.

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9b \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) نتیجه می شود که $a = b$. بنابراین اگر طرفین روابط (۱) و (۳) را از هم کم کنیم، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - y_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4a - 4b = 0 \Rightarrow x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1$$

بنابراین دسته اول بعد از جابه جایی داده ها تغییری نمی کند و داده ها، همان داده های اول هستند و بنابراین واریانس آن ها نیز تغییری نکرده و واریانس داده های دسته اول بعد از جابه جایی داده ها، همان $1/25$ است.

۲۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

نکته ۱: فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

نکته ۲: فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

احتمال آنکه این دانش آموز از مدرسه A یا B باشد به صورت زیر است.

$$n(A) = \frac{3}{5}n(B) \Rightarrow n(S) = n(A) + n(B) = \frac{3}{5}n(B) + n(B) = \frac{8}{5}n(B)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{3}{5}n(B)}{\frac{8}{5}n(B)} = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{n(B)}{\frac{8}{5}n(B)} = \frac{5}{8}$$

حال با در نظر گرفتن نمودار درختی زیر و نکات فوق داریم:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \Rightarrow \text{احتمال قبول شدن} &= \frac{60}{100} = \frac{6}{10} \\ \frac{2}{5} \Rightarrow \text{احتمال قبول شدن} &= \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$P(\text{قبول شدن}) = \frac{3}{5} \times \frac{6}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{18 + 14}{50} = \frac{32}{50}$$

$$P(A|\text{قبول شدن}) = \frac{P(A \text{ از مدرسه } A) \cdot P(\text{قبول شدن} | A \text{ از مدرسه } A)}{P(\text{قبول شدن})} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{6}{10}}{\frac{32}{50}} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

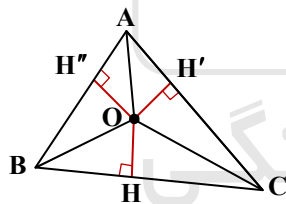
۲۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

در هر مثلث، نقطه تلاقی سه نیمساز داخلی، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$$OH = OH' = OH''$$



۲۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

دو مثلث ADE و AEC به دلیل داشتن دو زاویه برابر، متشابه هستند.

$$\begin{cases} \hat{DAE} = \hat{CAE} \\ \hat{ADE} = \hat{ACE} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{CE} = \frac{ED}{AE}$$

با فرض $BE = DC = x$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{CE} &= \frac{ED}{AE} \Rightarrow AE^2 = ED \cdot CE = 10(10+x) = 100 + 10x \\ \Rightarrow AE^2 &= 100 + 10x \quad (1) \end{aligned}$$

در مثلث قائم الزاویه ABE رابطه فیثاغورس را می نویسیم:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 \Rightarrow AE^2 = 11^2 + x^2 \xrightarrow{(1)} 121 + x^2 = 100 + 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=7 \Rightarrow DC=7 \end{cases}$$

۲۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

راه حل اول: دو مثلث AFM و BCM متشابه‌اند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{B}\hat{C}M = \hat{A}\hat{M}F \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle AMF$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AF} = \frac{BC}{AM} \Rightarrow \frac{3}{AF} = \frac{6}{3} \Rightarrow AF = \frac{3}{2}$$

اندازه ضلع MF را می‌یابیم.

$$MF^2 = AM^2 + AF^2 \Rightarrow MF^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} = 9 \times \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

از E بر BC و BM ارتفاع رسم می‌کنیم. در مربع، قطر نیمساز است، بنابراین با توجه به شکل، چهارضلعی $EKBH$ مربعی به ضلع x است و داریم:

$$EK \parallel MB \Rightarrow \frac{CK}{BC} = \frac{EK}{MB} \Rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{3} \Rightarrow 6-x=2x \Rightarrow 6=3x \Rightarrow x=2 \Rightarrow MH=3-x=3-2=1$$

در مثلث EMH داریم:

$$ME^2 = EH^2 + MH^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow ME = \sqrt{5}$$

$$S_{\triangle EFM} = \frac{1}{2} MF \cdot ME = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

راه حل دوم: برای به دست آوردن اندازه ME ، می‌توان از تشابه دو مثلث CDE و EMB استفاده کرد.

$$CD \parallel MB \Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle EMB \Rightarrow \frac{CE}{ME} = \frac{CD}{MB} \Rightarrow \frac{CE}{ME} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow CE = 2ME$$

$$CM = CE + ME = 2ME + ME \Rightarrow CM = 3ME$$

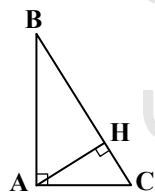
با استفاده از فیثاغورس در مثلث CMB داریم:

$$CM^2 = CB^2 + BM^2 \Rightarrow 9ME^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow ME^2 = 5 \Rightarrow ME = \sqrt{5}$$

ادامه راه حل مانند راه حل اول است.

۲۹- پاسخ: گزینه ۴

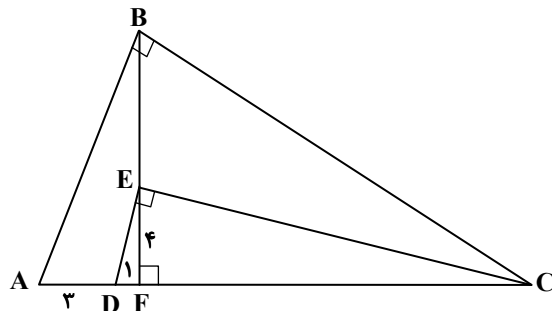
▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:

$$\begin{cases} AH^2 = BH \cdot CH \\ AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{cases}$$

در مثلث قائم‌الزاویه DEC ، EF ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$EF^2 = DF \cdot FC \Rightarrow 4^2 = 1 \times FC \Rightarrow FC = 16$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، BF ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

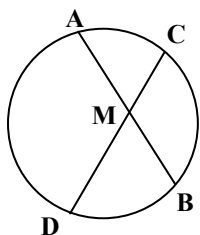
$$BC^2 = CF \cdot CA = 16 \times (16 + 4) = 16 \times 20 \Rightarrow BC = 4\sqrt{20} = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

۳۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



با فرض $AM = x$ و $BN = y$ و استفاده از نکته فوق داریم:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow x(y + 7) = 6 \times 10 = 60 \quad (1)$$

$$NB \cdot NA = NE \cdot NF \Rightarrow y(x + 7) = 5 \times 12 = 60 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x(y + 7) = y(x + 7) \Rightarrow xy + 7x = xy + 7y \Rightarrow 7x = 7y \Rightarrow x = y$$

با جای‌گذاری رابطه فوق در (۱) داریم:

$$x(x + 7) = 60 \Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -12 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$AB = x + 7 + y = x + 7 + x = 5 + 7 + 5 = 17$$

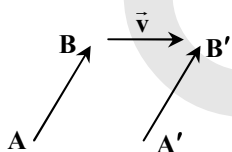
▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۳۱- پاسخ: گزینه‌های ۲، ۳ و ۴

در تبدیل‌های دوران، انتقال و تجانس همواره جهت شکل حفظ می‌شود.

بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ صحیح هستند.

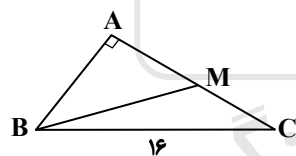
توجه: احتمالاً هدف طراح از «جهت»، راستای نوک پیکان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ بوده که در انتقال تحت بردار $\vec{v}$ تغییر نمی‌کند که در این صورت جواب گزینه ۳ است.



▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳ و فصل ۳، درس ۲)

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم اگر در مثلثی، میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین مثلث موردنظر، متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است که اندازه وتر آن برابر ۱۶ است و طبق شکل مقابل داریم:



$$AB = AC, AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 2AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow AC\sqrt{2} = BC = 16 \Rightarrow AC = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB = 8\sqrt{2}, AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABM، رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم.

$$BM^2 = AB^2 + AM^2$$

$$\Rightarrow BM^2 = (8\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 64 \times 2 + 16 \times 2 = 160$$

$$\Rightarrow BM = 4\sqrt{10}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۳

در خواسته سؤال، A را از سمت چپ و B را از سمت راست فاکتور می‌گیریم.

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} B &= A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \right) B = A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B \\ &= A(-3I)B = -3AIB = -3AB = -3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{حاصل ضرب درایه‌های غیر قطر اصلی} = -6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 9$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

برای یافتن سطر سوم ماتریس A^3 ، طبق رابطه $A^3 = A \cdot A^2$ کافی است سطر سوم A را در ماتریس A^2 ضرب کنیم.

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۳۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: خروج از مرکز هر بیضی با طول قطر بزرگ $2a$ و اندازه فاصله کانونی $2c$ برابر $\frac{c}{a}$ است.نکته: در بیضی همواره رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.نقاط $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ کانون‌های بیضی هستند، پس داریم:

$$FF' = \sqrt{(3+3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9$$

حال مقدار b را محاسبه می‌کنیم.

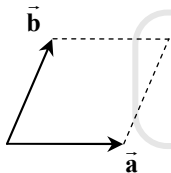
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

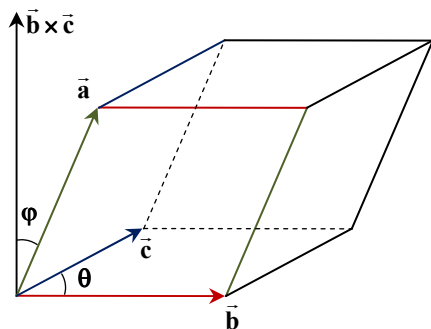
نکته ۱: مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با اندازه حاصل ضرب خارجی آن‌ها، یعنی:



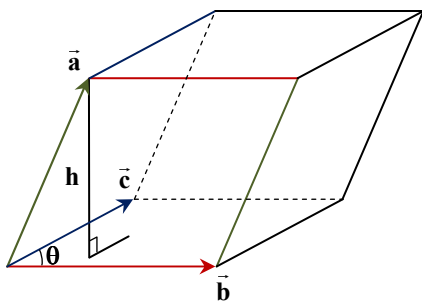
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

نکته ۲: حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{V}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{V}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ را می‌توان از دترمینان زیر به دست آورد.

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

نکته ۳: حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده بر روی ۳ بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$k = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \Rightarrow \text{حجم} : V = |k|$$



طبق شکل مقابل، ابتدا $\vec{b} \times \vec{c}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{b} = (-1, 2, 3), \quad \vec{c} = (3, -2, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$S = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{64 + 100 + 16} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}. \quad \text{است. } |\vec{b} \times \vec{c}|$$

حال حجم متوازی السطوح را به دست می‌آوریم.

$$\vec{a} = (2, -3, 4) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2, -3, 4) \cdot (8, 10, -4) = 16 - 30 - 16 = -30.$$

$$\Rightarrow V = |-30| = 30 \Rightarrow S \cdot h = 30 \Rightarrow h = \frac{30}{S} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

۳۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۲) و ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

مجموع ارقام به صورت $23n + 1$ است. برای $n = 0$ ، مجموع ارقام برابر ۱ است و دو عدد متوالی ۰ و ۰ هستند و عدد ۵ رقمی مورد نظر، عدد ۱۰۰۰۰ است.

حال اگر دو عدد متوالی کمتر از ۱۰ را x و $x + 1$ در نظر بگیریم، حالات زیر را داریم:

$$1) x, x + 1, x + 1, x + 1, x + 1 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5x + 4 = 23n + 1$$

$$n = 1 \Rightarrow 5x + 4 = 24 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{ارقام: } 4, 5, 5, 5, 5 \Rightarrow \frac{5!}{4!} = 5$$

$$2) x, x, x + 1, x + 1, x + 1 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5x + 3 = 23n + 1$$

$$n = 1 \Rightarrow 5x + 3 = 24 \Rightarrow 5x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{5} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

با توجه به این که حداکثر x برابر ۸ است، برای $n \geq 2$ ، رابطه $5x + 3 = 23n + 1$ غیرممکن است.

$$3) x, x, x, x + 1, x + 1 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5x + 2 = 23n + 1$$

$$n = 1 \Rightarrow 5x + 2 = 24 \Rightarrow x = \frac{22}{5} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

برای $n \geq 2$ ، رابطه $5x + 2 = 23n + 1$ غیرممکن است.

$$4) x, x, x, x, x + 1 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5x + 1 = 23n + 1 \Rightarrow 5x = 23n$$

با توجه به این که $1 \leq x \leq 8$ و $n \geq 1$ ، رابطه فوق غیرممکن است.

بنابراین در مجموع، $5 + 1 = 6$ عدد با ویژگی خواسته شده وجود دارد.

۳۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

با توجه به این که $407 = 37 \times 11$ و $592 = 37 \times 16$ است. اگر اعضای مجموعه را با a نشان دهیم، داریم:

$$a = 407r + 592s = 37 \times 11r + 37 \times 16s = 37(11r + 16s)$$

بنابراین کوچک ترین عضو مثبت این مجموعه زمانی به وجود می‌آید که $11r + 16s = 1$ و چون این معادله سیاله جواب دارد $(11, 16) = 1$ ،

پس کوچک ترین عضو مثبت، عدد $m = 37$ است و داریم:

$$m = 37 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 3 + 7 = 10$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

$$\boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}, \boxed{9}, \boxed{12}, \boxed{13}, \boxed{14}, \boxed{15}, \boxed{16}, \boxed{17}, \boxed{18}, \boxed{19}, \boxed{20}.$$

در بدترین حالت اگر تمام اعداد مشخص شده فوق را انتخاب کنیم، در بین آن‌ها هیچ دو عدد متمایز دارای مقسوم علیه مشترک غیر یک وجود ندارد،

حال اگر یک عدد دیگر انتخاب کنیم، قطعاً با یکی از ۷ عدد قبلی، دارای مقسوم علیه مشترک غیر یک است، پس حداقل باید ۸ عدد انتخاب کنیم.

۴۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

نکته: گراف کامل مرتبه p گرافی است که درجه همه رأس‌های آن $p - 1$ و تعداد یال‌های آن برابر $\frac{p(p-1)}{2}$ است.

در گراف داده شده، تعداد رؤوس $p = 8$ و تعداد یال‌ها $q = 24$ است. در گراف کامل با ۸ رأس یعنی

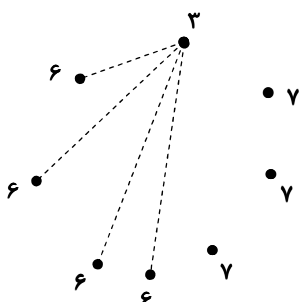
$$\text{در } K_8 \text{ داریم: } q(K_8) = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

گراف داده شده، ۴ یال کمتر از گراف کامل K_8 دارد. برای این که مقدار δ کمترین مقدار ممکن باشد،

این ۴ یال را از یک رأس حذف می‌کنیم. یعنی گراف به صورت مقابل است. توجه کنید که در شکل

مقابل درجه هر رأس را کنار آن نوشته و یال‌های حذف شده را به صورت نقطه چین نشان داده ایم. پس

کمترین مقدار δ برابر $7 - 4 = 3$ است.

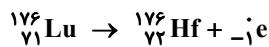
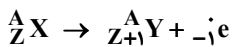


فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

در فرایند واپاشی بتای منفی داریم:



۴۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

در مرحله ضربه تراکم سوپاپ‌های ورودی و خروجی هر دو بسته هستند.

۴۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

از قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

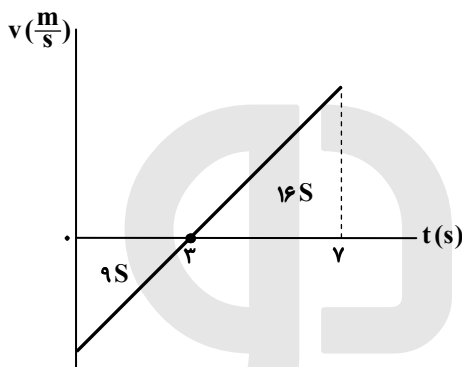
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \times \frac{450}{1000} \times (16^2 - 20^2) = \frac{1}{2} \times \frac{90}{1000} \times (16 + 20)(16 - 20)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{100} \times (36)(-4) = -32/4 \text{ J}$$

۴۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا نمودار سرعت-زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

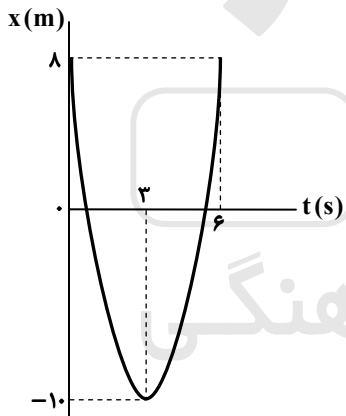


$$\frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{25S}{7S} = \frac{25}{7}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا نمودار x-t متحرک را رسم می‌کنیم:



$$2t^2 - 12t + 8 = -8 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t-4) = 0$$

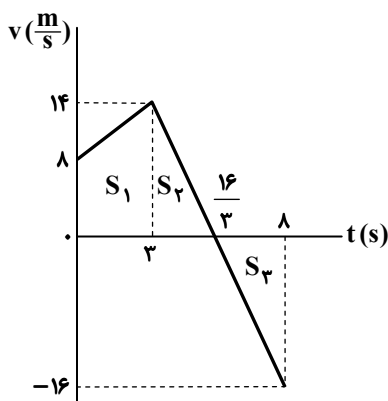
$$\Rightarrow t_1 = 2s, t_2 = 4s$$

در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۴s تا ۶s یعنی در کل به مدت ۴ ثانیه، فاصله متحرک تا مبدأ کمتر از ۸ متر است.

۴۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

نمودار سرعت-زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار سرعت-زمان می‌توان مسافت طی‌شده توسط متحرک را محاسبه کرد:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2 + |S_3|}{\Delta t} = \frac{33 + \frac{49}{2} + \frac{64}{2}}{8} = \frac{212}{8} = \frac{53}{2} \text{ m/s}$$

۴۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا معادله مکان - زمان متحرک را در زمان‌های مختلف می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = n \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}an^2 \\ t_2 = 2n \Rightarrow x_2 = 4 \times \frac{1}{2}an^2 = 4x_1 \\ t_3 = 3n \Rightarrow x_3 = 9 \times \frac{1}{2}an^2 = 9x_1 \end{cases}$$

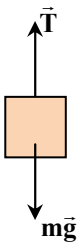
$$\begin{cases} \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 3x_1 \\ \Delta x_3 = x_3 - x_2 = 5x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x''}{\Delta x'} = \frac{5}{3}$$

جابه‌جایی در n ثانیه دوم: $\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 3x_1$
 جابه‌جایی در n ثانیه سوم: $\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 5x_1$

۴۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم را روی شکل مشخص می‌کنیم:



جهت شتاب جسم رو به پایین است، بنابراین نیروی وزن از نیروی کشش بزرگ‌تر است:

$$F = ma \Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow mg - 0.8mg = T \Rightarrow \frac{T}{mg} = \frac{1}{5}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} T_A = T_B \\ m_A = m_B \Rightarrow F_B > F_A \\ F = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} \end{cases}$$

نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همان نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است.

$$F > f_{s,max} \Rightarrow F > \mu_s mg \xrightarrow{F_B > F_A} \text{جسم B زودتر می‌لغزد.}$$

شرط زودتر لغزیدن جسم

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۳

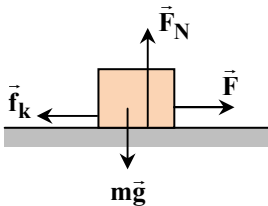
$$f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s mg \Rightarrow f_{s,max} = \frac{1}{4} \times 100 = 25 \text{ N}$$

$$f_{s,max} < F \Rightarrow \text{جسم حرکت می‌کند.}$$

$$f_k = \mu_k F_N = \frac{1}{4} \times 100 = 25 \text{ N}$$

بنابراین نیروی خالص وارد بر جسم برابر است با:

$$F_t = F - f_k = 55 - 25 = 30 \text{ N}$$



▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۵۱- پاسخ: گزینه ۴

از قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{W_t = W_f} W_f = \Delta K$$

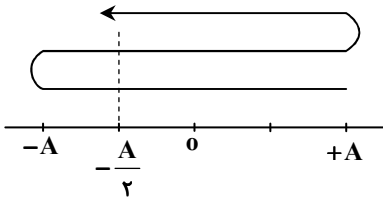
$$\Rightarrow fd = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow f \times 10 = \frac{1}{2} \times 1600 \times 10^2 \Rightarrow f = 8000 \text{ N}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{16\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{3}{8}s \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{4}{3} \Rightarrow \Delta t = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{12}$$

مسیر حرکت نوسانگر را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} \ell = \frac{11A}{2} \\ |\Delta x| = \frac{3A}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{11}{3}$$

۵۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{k, A = \text{ثابت}} E_2 = E_1 = 8J$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow 90 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 9 = \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^9 \Rightarrow I = 10^{-3} \frac{W}{m^2}$$

اکنون می‌توان آهنگ انتقال انرژی را محاسبه کرد:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow P = IA = 10^{-3} \times 10^{-4} = 10^{-7} W = 10^{-1} \mu W$$

۵۵- پاسخ: گزینه ۳

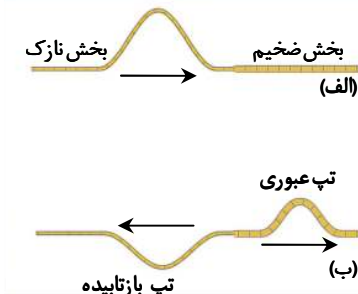
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

$$\begin{cases} f = \frac{nv}{2L} \\ v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{FL}{m}} = \frac{4}{2 \times \frac{6}{10}} \sqrt{\frac{324 \times \frac{6}{10}}{\frac{6}{1000}}} \Rightarrow f = \frac{40}{12} \times 18 \times 10 = 600 Hz$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

مطابق شکل گزینه ۴ درست است.



۵۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

از فرمول ریذبرگ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

اولین و دومین خط طیفی رشته پاشن به ترتیب دارای $n = 4$ و $n = 5$ است.

$$\begin{cases} n = 4 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = R \left(\frac{7}{144} \right) \\ n = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) = R \left(\frac{16}{225} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{16}{25} = \frac{256}{175}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

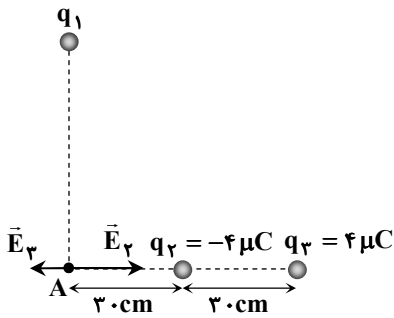
ابتدا انرژی فوتونی که به فلز می‌تابد را محاسبه می‌کنیم:

$$hf = E_2 - E_1 = E_R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \Rightarrow hf = -0.85 + 13.6 = 12.75 eV$$

$$K_{max} = hf - W_0 \Rightarrow K_{max} = 12.75 - 5.2 = 7.55 eV$$

۵۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)



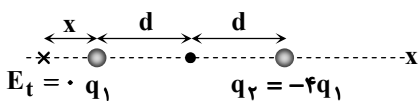
$$E = k \frac{q}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_r = 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^5 \frac{N}{C} \\ E_r = \frac{1}{4} E_r = 10^5 \frac{N}{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{t,x} = 3 \times 10^5 \frac{N}{C} \\ E_t = 5 \times 10^5 \frac{N}{C} \end{cases} \Rightarrow E_{t,y} = 4 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

$$4 \times 10^5 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_1|}{36 \times 10^{-2}} \Rightarrow |q_1| = 16 \times 10^{-6} C = 16 \mu C$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۰- پاسخ: گزینه ۴

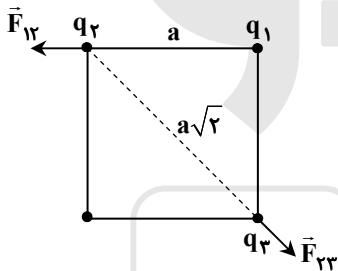
با توجه به ناهمنام بودن بار ذرات q_1 و q_2 میدان الکتریکی خالص در خارج از حد فاصل دو بار و نزدیک به بار کوچک تر صفر است.

$$E_t = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow k \frac{q_1}{x^2} = \frac{k|q_2|}{(x+2d)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{4q_1}{(x+2d)^2} \Rightarrow (x+2d)^2 = 4x^2 \Rightarrow x+2d = \pm 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2d = 2x \Rightarrow x = 2d \checkmark \\ x+2d = -2x \Rightarrow -3x = 2d \Rightarrow x = -\frac{2}{3}d \times \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۱- پاسخ: گزینه ۲



$$F = \frac{kqq'}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} F_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} = \frac{kq^2}{a^2} \\ F_{23} = \frac{kq_2q_3}{r_{23}^2} = \frac{kq^2}{2a^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{12}}{F_{23}} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۲- پاسخ: گزینه ۳

قبل از بستن کلید مقاومت‌های ۵ و ۲۰ اهمی با هم موازی و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت ۲ اهمی متوالی است.

$$R_{20,5} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = 4 \Omega$$

$$R_{eq,1} = 4 + 2 = 6 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} \Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E}}{2 + 6} = \frac{\mathcal{E}}{8}$$

$$P = VI = \mathcal{E}I - rI^2 \Rightarrow P_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{8} - 2 \frac{\mathcal{E}^2}{64} = \frac{\mathcal{E}^2}{8} - \frac{\mathcal{E}^2}{32} = \frac{3}{32} \mathcal{E}^2$$

پس از بستن کلید:

$$R_{eq,2} = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = 3 \Omega$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2 + 3} = \frac{\mathcal{E}}{5}$$

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{5} - 2 \left(\frac{\mathcal{E}^2}{25} \right) = \frac{3}{25} \mathcal{E}^2$$

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} \times 100 = \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \times 100 = \left(\frac{\frac{3}{25}}{\frac{3}{32}} - 1 \right) \times 100 = 28\%$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۳- پاسخ: گزینه ۱

در حالت اول داریم:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \begin{cases} P_A = \frac{V^2}{R_A} \\ P_B = \frac{V^2}{R_B} \end{cases} \xrightarrow{P_A = 2P_B} R_B = 2R_A$$

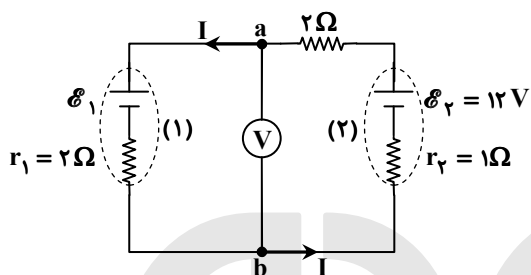
در حالت دوم داریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow \begin{cases} P'_A = R_A I'^2 \\ P'_B = R_B I'^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{P'_A}{P'_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۴- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به اطلاعات سؤال باتری ۲ تولیدکننده و باتری ۱ مصرف کننده است؛ بنابراین جریان مدار پادساعتگرد است.



$$V_a + 2I - 12 + I = V_b \Rightarrow V_a - V_b = 12 - 3I$$

$$\xrightarrow{V_a - V_b = 8/4V} 8/4 = 12 - 3I \Rightarrow I = 1/2 A$$

$$V_2 = E_2 - r_2 I \Rightarrow V_2 = 12 - 1(1/2) = 11/2 V$$

$$V_1 = 8/4 V$$

$$P = VI \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{11/2}{8/4} = \frac{9}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۵- پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اینکه جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرات q_1 و q_2 به سمت مرکز دایره هاست و از قاعده دست راست نتیجه می گیریم که $q_1 < 0$ و $q_2 > 0$ است.

$$\begin{cases} F_c = m \frac{v^2}{r} \\ F_B = |q| vB \end{cases} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B} \xrightarrow{r_2 > r_1} |q_1| > |q_2|$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۶- پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از قاعده دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم به سمت پایین است.

$$F = I l B \sin \theta = 2 \times 2 \times \frac{45}{100} \times 10^{-4} \times 1 = 1/8 \times 10^{-4} N$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۷- پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از اندازه شیب نمودار $\Phi - t$ در بازه های زمانی مختلف می توان بزرگی نیروی محرکه القایی را در پیچه محاسبه کرد.

$$\begin{cases} t_1 \text{ تا } t_2: \mathcal{E}_1 = \frac{2\Phi_{\max}}{t_1} \\ t_2 \text{ تا } t_3: \mathcal{E}_2 = 0 \\ t_3 \text{ تا } t_4: \mathcal{E}_3 = \frac{\Phi_{\max}}{t_1} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \xrightarrow{\substack{U=U_{\max} \\ I=I_{\max}}} 5 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} L \times 5^2 \Rightarrow L = 4 \times 10^{-4} H$$

$$L = \frac{\mu_0 AN^2}{\ell} \Rightarrow 4 \times 10^{-4} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 10^{-4} \times N^2}{6/28 \times 10^{-2}} \Rightarrow N = 100$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۹- پاسخ: گزینه ۱

$$F = |q| vB \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{|q|B \sin \theta} \xrightarrow{B \text{ و } v \text{ ثابت}} \left(\frac{m}{|q|}\right)_\beta < \left(\frac{m}{|q|}\right)_\alpha$$

در این سؤال بهتر بود نسبت جرم به بار دو ذره مورد مقایسه قرار می گرفت.

۷۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

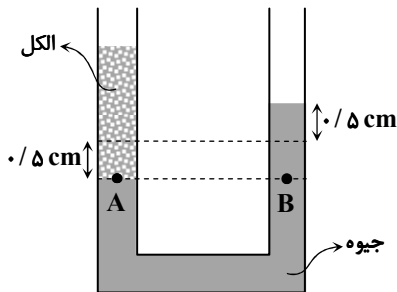
چگالی مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho' = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} = \frac{12 + 12}{10 + 5} = 1.6 \frac{g}{cm^3}$$

۷۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

سطح جیوه در شاخه سمت راست به اندازه 0.5 cm بالا رفته، بنابراین در شاخه سمت چپ به اندازه 0.5 cm پایین می‌آید و اختلاف سطح جیوه در دو شاخه به 1 cm می‌رسد.



نقاط A و B هم‌تراز می‌باشند و فشار در این نقاط برابر است؛ بنابراین داریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{\text{الکل}} h_{\text{الکل}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 0.8 \times h_{\text{الکل}} = 13.6 \times 1 \Rightarrow h_{\text{الکل}} = 17 \text{ cm} \Rightarrow V_{\text{Al}} = 17 \times 2 = 34 \text{ cm}^3$$

۷۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

با توجه به اینکه پیستون‌ها دوباره به حالت تعادل می‌رسند، داریم:

$$P_a = P_b = P_c \Rightarrow \frac{mg}{A_A} + \rho gh_A = \frac{mg}{A_B} + \rho gh_B = \frac{mg}{A_C} + \rho gh_C$$

$$A_C > A_B > A_A \Rightarrow h_C > h_B > h_A$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۷۳- پاسخ: گزینه ۴

$$W_f = E_f - E_i$$

$$\begin{cases} E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times 4^2 + \frac{1}{10} \times 10 \times 10 = 10.8 \text{ J} \\ E_f = K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times 10^2 = 5 \text{ J} \end{cases} \Rightarrow W_f = 5 - 10.8 = -5.8 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۴- پاسخ: گزینه ۲

حداقل مقدار بخار آب وارد شده زمانی است که بخار و یخ به آب صفر درجه تبدیل شوند.

$$m_{\text{بخ}} L_F + Q_{\text{ظرف}} = m_{\text{آب}} L_V + m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta \theta_{\text{آب}} \Rightarrow 100 \times 336 + 6540 = 2256 m_{\text{آب}} + 100 \times 4 / 2 m_{\text{آب}} \Rightarrow m_{\text{آب}} = 15 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۵- پاسخ: گزینه ۲

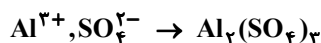
$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow (1.5 + \frac{40}{A}) \times 26A = (1.5 + \frac{120}{A}) \times 22A \Rightarrow 4 \times 1.5 A = 40 \times 40 \Rightarrow A = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 40 \text{ cm}^2$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

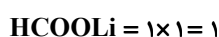
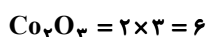
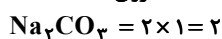
ابتدا فرمول شیمیایی آلومینیم سولفات را می‌نویسیم:



$$\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{3}$$

پس ترکیبی را می‌یابیم که در آن $2 = 3 \times \frac{2}{3}$ الکترون مبادله شده باشد:

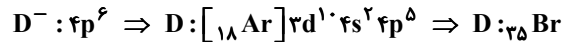
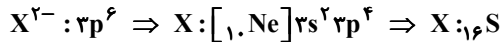
بار آنیون × تعداد آنیون = بار کاتیون × تعداد کاتیون = تعداد الکترون مبادله شده



۷۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

ابتدا عنصرهای فرضی داده شده را بشناسیم:



(الف) درست؛ بین عنصرهای $19K$ و $26Fe$ شش عنصر وجود دارد و عنصر X (S) که در گروه ۱۶ قرار دارد، نیز دارای ۶ الکترون ظرفیت می باشد.
(ب) نادرست؛ ترکیب حاصل دارای فرمول A_2X است و هر مول از آن با مبادله ۲ مول الکترون شکل می گیرد.

$$\frac{2 \text{ mole } A_2X}{1 \text{ mole } A_2X} \times \frac{2 \text{ mole } e^-}{1 \text{ mole } A_2X} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mole } e^-} = 2/40.8 \times 10^{23} e^-$$

(پ) درست؛ به طور کلی نافلزها با گرفتن الکترون به آرایش گاز نجیب پس از خود که در همان دوره است می رسند، اما کاتیونهای پایدار فلزی یا به آرایش گاز نجیب نمی رسند یا به آرایش گاز نجیب قبل از خود می رسند.

(ت) نادرست؛ E فلز آهن است و دارای دو ظرفیت $2+$ و $3+$ است. پس با اتم D (برم) دو ترکیب با فرمولهای ED_2 و ED_3 می سازد.

ترکیب حاصل از A^+ (پتاسیم) و X^{2-} (گوگرد) نیز به صورت A_2X است. پس نسبت شمار اتمهای سازنده و به یکی از دو صورت زیر است:

$$\frac{ED_3}{A_2X} = \frac{4}{3} \quad \frac{ED_2}{A_2X} = 1$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۸- پاسخ: گزینه ۴

(الف) نادرست؛ عنصر از یک نوع اتم (نه لزوماً یک ایزوتوپ) تشکیل شده است.

(ب) درست؛ از ۱۱۸ عنصر شناخته شده تنها ۹۲ عنصر در طبیعت وجود دارد.

$$\frac{92}{118} \times 100 \approx 77.8\%$$

(پ) درست؛ لیتیم دارای دو ایزوتوپ 6Li و 7Li است که فراوانی آنها به ترتیب ۶٪ و ۹۴٪ است.

(ت) نادرست؛ در عبارت جای کلمههای نوترون و پروتون جابه جا نوشته شده است. ضمناً این قاعده همیشگی نیست و اغلب اتمهایی که $n \geq 1/\Delta p$ باشد، ناپایدار هستند.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

۷۹- پاسخ: گزینه ۳

شکل صفحه ۶۹ کتاب درسی سال دهم را ببینید.



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل های ۲ و ۳)

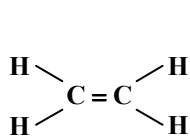
۸۰- پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱: درست؛ اتم هیدروژن به گاز نجیب هلیوم، اتمهای کربن و فلوئور به آرایش گاز نجیب نئون رسیده اند.

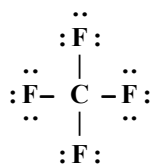
گزینه ۲: نادرست؛ باید به جای کلمه بار از کلمه عدد اکسایش استفاده شود. C_2H_4 و CF_4 ترکیبهای مولکولی هستند و اتمهای سازنده آنها باردار نیستند.

گزینه ۳: نادرست؛ از بین دو فراورده HF قطبی و CF_4 ناقطبی است، پس فراورده های قطبی نادرست است.

گزینه ۴: نادرست؛ تعداد پیوندهای C_2H_4 از CF_4 بیشتر است:



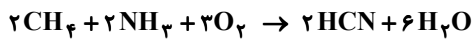
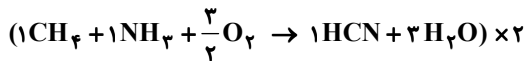
۶ پیوند



۴ پیوند

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)



$$2 + 2 + 3 + 2 + 6 = 15$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

بنابر صورت سؤال به دنبال ترکیب یونی هستیم که دارای یون چند اتمی باشد چرا که در یون‌های چند اتمی، اتم‌ها با پیوند کووالانسی به هم متصل هستند. پس پاسخ یا گزینه ۱ است یا گزینه ۳.

همچنین براساس صورت سؤال ترکیب باید محلول در آب باشد. می‌دانیم که BaSO_4 یک رسوب سفیدرنگ با انحلال‌پذیری کمتر از $\frac{0.1\text{g}}{100\text{g H}_2\text{O}}$ است. پس پاسخ Na_2SO_4 خواهد بود.

به‌طور کلی شرط انحلال ماده A در B این است: میانگین $A - B \geq (A - A, B - B)$

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا جرم Cl^- را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{g Cl}^- : 200\text{g محلول} \times \frac{2/22\text{g CaCl}_2}{100\text{g محلول}} \times \frac{1\text{mol CaCl}_2}{111\text{g CaCl}_2} \times \frac{2\text{mol Cl}^-}{1\text{mol CaCl}_2} \times \frac{35.5\text{g Cl}^-}{1\text{mol Cl}^-} = 2/84\text{g Cl}^-$$

جرم محلول:

$$200\text{g} + (100\text{mL} \times \frac{1\text{g}}{1\text{mL}}) = 300\text{g}$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{2/84}{300} \times 10^6 = 1420$$

البته از جرم Na_3PO_4 افزوده‌شده به محلول صرف‌نظر شده است:

$$? \text{g Na}_3\text{PO}_4 : 200\text{g محلول} \times \frac{2/22\text{g CaCl}_2}{100\text{g محلول}} \times \frac{1\text{mol CaCl}_2}{111\text{g CaCl}_2} \times \frac{2\text{mol Na}_3\text{PO}_4}{3\text{mol CaCl}_2} \times \frac{164\text{g Na}_3\text{PO}_4}{1\text{mol Na}_3\text{PO}_4} = 4/37\text{g Na}_3\text{PO}_4$$

۴g در مقابل ۲۰۰ گرم واقعاً قابل صرف‌نظر است.

۸۴- پاسخ: گزینه ۳

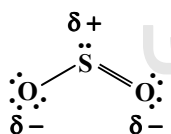
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۳)

گزینه ۱: درست؛ A و HI هر دو مولکول دو اتمی ناجور هسته، D و SiH_4 هر دو مولکول‌های ناقطبی و متقارن با ۴ اتم جانبی، E و H_2S هر دو مولکول‌های قطبی با ساختار خمیده هستند.

گزینه ۲: درست؛ در مولکول H_2O ، به دلیل قدرت نافلزی کمتر H نسبت به O، دارای بار جزئی مثبت (δ^+) است و به سمت صفحه با بار منفی جهت‌گیری می‌کند، پس صفحه X دارای بار منفی است. ضمناً مولکول D ساختار متقارن دارد و ناقطبی است.

گزینه ۳: نادرست

پس صفحه X بار مثبت و صفحه Y بار منفی دارد.

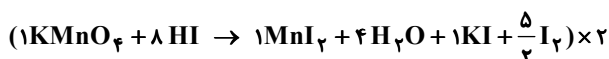


گزینه ۴: درست؛ Cl در HCl بار جزئی منفی (δ^-) دارد. در مولکول D کافی است اتم‌ها جانبی، نافلز قوی‌تری نسبت به اتم مرکزی باشند تا آن‌ها نیز بار جزئی منفی داشته باشند. (مثلاً CF_4)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۵- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



در نتیجه داریم:

$$3/95\text{g KMnO}_4 \times \frac{1\text{mol KMnO}_4}{158\text{g KMnO}_4} \times \frac{5\text{mol I}_2}{2\text{mol KMnO}_4} \times \frac{254\text{g I}_2}{1\text{mol I}_2} \times \frac{x}{100} = 12/7\text{g I}_2 \Rightarrow x = 8\%$$

برای سهولت محاسبه:

$$\frac{3/95}{158} = \frac{1}{40}, \quad \frac{12/7}{254} = \frac{1}{20}$$

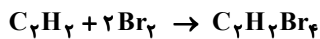
▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۶- پاسخ: گزینه ۳

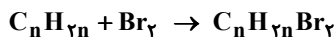
منابع اقیانوسی آن‌ها غنی‌تر است.

۸۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)



$$x \text{ mol } C_7H_7 \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_7Br_2}{1 \text{ mol } C_7H_7} \times \frac{346 \text{ g}}{1 \text{ mol } C_7H_7Br_2} = x \times 346 \text{ g}$$



$$x \text{ mol } C_nH_{2n} \times \frac{1 \text{ mol } C_nH_{2n}Br_2}{1 \text{ mol } C_nH_{2n}} \times \frac{14n + 160}{1 \text{ mol } C_nH_{2n}Br_2} = x \times (14n + 160)$$

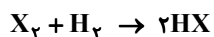
$$\frac{x \times 346}{x \times (14n + 160)} = 1/71$$

$$346 = 171 \times 2 \Rightarrow 346 = 200 \times 1/71 \Rightarrow 14n + 160 = 200 \Rightarrow n = 3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۸- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا جدول زیر را در نظر بگیرید:



I	Br	Cl	F	X
۴۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	اتاق

$$-100 \leq \theta \leq +100 \Rightarrow \theta < 200 \Rightarrow F, Cl$$

$$-200 \leq \theta \leq -50 \Rightarrow \theta < 25 \Rightarrow F$$

$$-200 \leq \theta \leq 250 \Rightarrow \theta < 400 \Rightarrow F, Cl, Br$$

$$-200 \leq \theta \leq 400 \Rightarrow \theta \leq 400 \Rightarrow F, Cl, Br, I$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۸۹- پاسخ: گزینه ۲

با بررسی NH_3 : معادله اول در $\frac{1}{2}$ ضرب شود.با بررسی N_2O : معادله دوم در ۳ ضرب شود.با بررسی حذف O_2 : معادله سوم برعکس و $\frac{3}{2}$ برابر شود:

$$\Delta H = \frac{1}{2} \times (-1530) + 3 \times (-376) - \frac{3}{2} \times (-572) = -765 - 1128 + 858 = -1035 \text{ kJ}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۰- پاسخ: گزینه ۴

ترکیب‌های «الف» و «ب» اسید و استر هم‌کربن با فرمول $C_7H_8O_2$ هستند و ایزومر یکدیگرند.ترکیب‌های «پ» و «ت» کتون و آلدهید هم‌کربن با فرمول C_7H_8O هستند و ایزومر یکدیگرند.

ضمناً ترکیب «الف» امکان برقراری پیوند هیدروژنی دارد و هیچ ترکیبی جرم مولی بیشتری نسبت به آن ندارد، پس بیشترین نقطه جوش را دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۱- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا از حجم CO به گرمای تولیدشده می‌رسیم و با کسر مقدار آن از کل گرمای آزادشده، گرمای تولیدشده را در واکنش دوم محاسبه می‌کنیم.

سپس می‌توانیم به جرم کربن برسیم:

$$\Delta / \text{mol } CO \times \frac{1 \text{ mol } CO}{22 / \text{mol } CO} \times \frac{564 \text{ kJ}}{2 \text{ mol } CO} = 70 / \text{mol } CO$$

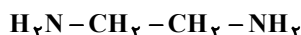
$$201 / 5 - 70 / 5 = 131 \text{ kJ}$$

$$131 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol } C}{393 \text{ kJ}} \times \frac{12 \text{ g } C}{1 \text{ mol } C} = 4 \text{ g } C$$

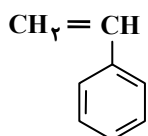
▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۲- پاسخ: گزینه ۴

دی آمین سازنده پلیمر A:



مونومر سازنده پلیمر B:



$$C_7H_8N_2 = 24 + 8 + 28 = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

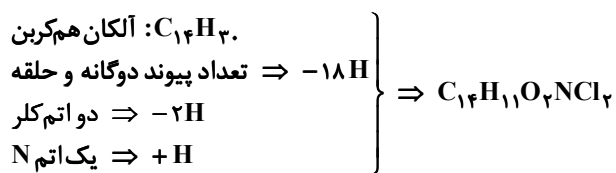
$$C_8H_8 = 96 + 8 = 104 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\frac{60}{104} < \frac{60}{100} \Rightarrow \frac{60}{104} \approx 0.58$$

۹۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۲)

قبل از بررسی گزینه‌ها فرمول ترکیب را به دست می‌آوریم:



عبارت «اول»: نادرست؛ ۱۱ اتم هیدروژن داریم که یکی به N و یکی به O متصل است، پس ۹ پیوند C-H وجود دارد. همچنین در شکل، ۲

پیوند C-N وجود دارد. $\frac{9}{2} \neq 5$

عبارت «دوم»: نادرست

$$296 = 71 + 14 + 32 + 11 + (12 \times 14) = \text{جرم مولی ترکیب}$$

$$\% \text{O} = \frac{2 \times 16}{296} \times 100 = \frac{32}{296} \times 100 = \frac{30}{300} \times 100 = \%10$$

عبارت «سوم»: درست

$$\left. \begin{array}{l} 6(\text{C}=\text{C}) + 1(\text{C}=\text{O}) = 7 \\ \Rightarrow 9 - 7 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد پیوند (C-H): ۹}$$

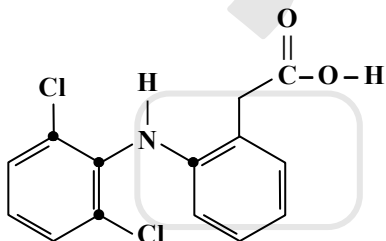
عبارت «چهارم»: درست

$$1 \times \ddot{\text{N}} + 2 \times \ddot{\text{O}} + 2 \times \ddot{\text{Cl}}:$$

$$= 1 + 4 + 6 = 11$$

کربن با عدد اکسایش +۱، یعنی کربنی که به یک نافلز قوی‌تر از خود متصل است و فاقد هیدروژن باشد. در شکل زیر این اتم‌ها مشخص شده‌اند.

$$\frac{11}{4} = 2/75 \Rightarrow \text{نسبت خواسته شده}$$



۹۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



گزینه ۱: نادرست؛ باید نسبت مول مواد داده شده را بر ضریب مولی تقسیم کنیم. اگر مقادیر ترکیب یکسان باشد، درست است:

$$\frac{21\text{g CO} \times \frac{1\text{mol CO}}{28\text{g CO}}}{10} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{9/3\text{g P}_4 \times \frac{1\text{mol P}_4}{4 \times 31\text{g P}_4}}{1} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{10\text{g C} \times \frac{1\text{mol C}}{12\text{g C}}}{10} = \frac{1}{12}$$

گزینه ۲: نادرست؛ چون ضریب Si و SiO_2 برابر عدد یک نیست و سرعت متوسط آن‌ها با سرعت واکنش یکسان نمی‌باشد.

گزینه ۳: نادرست؛ با توجه به کاهش تدریجی سرعت واکنش لزوماً این عبارت درست نیست.

گزینه ۴: درست

$$\frac{0/4\text{mol Ca}_3(\text{PO}_4)_2}{2} = \frac{0/2\text{mol P}_4}{1}$$

۹۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

کاهش $[OH^-]$ یعنی افزایش $[H^+]$ ، پس با یک اسید مواجه هستیم. شمار مولکول‌های موجود در محلول بیشتر است، یعنی یونش اسید کمتر است. پس در بین گزینه‌ها ضعیف‌ترین اسید را باید بیابیم: HCN

۹۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

می‌دانیم که فوریک اسید از استیک اسید قوی‌تر است، یعنی در دمای یکسان $K_{a1} > K_{a2}$ است.

گزینه ۱: نادرست

$$\left. \begin{array}{l} M_1 < M_2 \\ K_{a1} > K_{a2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{لغو نمی‌توان بین } [H^+] \text{ و pH دو محلول مقایسه کرد.}$$

گزینه ۲: نادرست

$$\left. \begin{array}{l} pH_1 = pH_2 \Rightarrow [H^+]_1 = [H^+]_2 \\ K_{a1} > K_{a2} \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 < M_2 \Rightarrow M_1 - [H^+] < M_2 - [H^+]$$

در غلظت یون هیدرونیوم برابر، اسید ضعیف‌تر غلظت بیشتری خواهد داشت.

گزینه ۳: نادرست

اگر دما ثابت بماند، رابطه مقابل برقرار است:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \approx M\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

پس هر دو به یک نسبت تغییر غلظت دارند و به یک نسبت تغییر در درجه یونش ایجاد می‌کند.

گزینه ۴: درست؛ می‌توان با تغییر غلظت (البته در حجم یکسان که به نظر باید در سؤال مطرح شود) مول‌های متفاوت ایجاد کرد.

۹۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$pH_1 = 1/4 = 2 - \log 4 \Rightarrow [H^+]_1 = 4 \times 10^{-2} \stackrel{\alpha=1}{=} M_1$$

$$pH_2 = 1/2 = 2 - \log 2 \Rightarrow [H^+]_2 = 2 \times 10^{-2} \stackrel{\alpha=1}{=} M_2$$

در کل عبارت‌های میلی‌لیتر در صورت سؤال با هم ساده می‌شوند.

$$(a \text{ mL} \times \frac{0.04 \text{ mol HA}}{1 \text{ L}} + b \text{ mL} \times \frac{0.02 \text{ mol HA}}{1 \text{ L}}) \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol HA}} \times \frac{1 \text{ L}}{0.03 \text{ mol NaOH}} = 200 \text{ mL} \Rightarrow 2a + b = 300$$

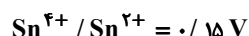
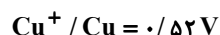
$$a + (a + b) = 300$$

براساس گزینه‌ها فقط گزینه ۴ با جای‌گذاری مقدار درستی برای a ایجاد می‌کند.

۹۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا یک سری الکتروشیمیایی از نیم‌واکنش‌ها را می‌نویسیم:



گزینه ۱: نادرست؛ Cl^- ضعیف‌ترین کاهنده و Sn^{2+} قوی‌ترین کاهنده است.

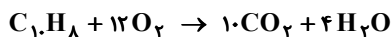
گزینه ۲: نادرست؛ واکنش $(Cu + Sn^{4+} \rightarrow)$ غیرخودبه‌خود است و emf آن منفی می‌شود.

گزینه ۳: درست؛ وقتی X با Sn^{4+} به‌طور طبیعی واکنش می‌دهد یعنی پتانسیل آن از ۰/۱۵ کمتر است، پس با Cl_2 نیز واکنش می‌دهد.

گزینه ۴: نادرست؛ در سری الکتروشیمی کاهنده پایین‌تر با اکسندۀ بالاتر واکنش می‌دهد، یعنی این واکنش به‌طور طبیعی انجام نمی‌شود و emf آن منفی است.

۹۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)



$$C_{10}H_8 : C_{10} : x \Rightarrow x + 8 \times 1 = 0 \Rightarrow x = -8$$

$$CO_2 : x + 2 \times (-2) = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 10CO_2 \Rightarrow 10 \times 4 = 40$$

$$\text{تغییر عدد اکسایش} = 40 - (-8) = 48$$

$$\text{نسبت خواسته شده} : \frac{48}{-8} = -6$$

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

کاتیون فلز M را به صورت M^{n+} در نظر می گیریم:

$$M^{n+} + ne^- \rightleftharpoons M \quad 2 \text{ mol } M \times \frac{n \text{ mole}^-}{1 \text{ mol } M} \times \frac{6.02 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mole}^-} = 3 / 612 \times 10^{24} e^- \Rightarrow n = 3$$

از ظاهر سؤال معلوم نیست که M یا Cu کدام یک آند یا کاتد است، بنابراین واکنش را دو طرفه می نویسیم:



$$\frac{3 \times 64}{x \times M} = 1/84 \Rightarrow M = \frac{3 \times 32}{1/84} = 52$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱

جدول با هم بیندیشیم صفحه ۸۷ کتاب درسی شیمی ۳:

ویژگی	ماده	تیتانیوم	فولاد
نقطه ذوب ($^{\circ}C$)	۱۶۶۷	۱۵۳۵	
چگالی ($g \cdot mL^{-1}$)	۴/۵۱	۷/۹۰	
واکنش با ذره های موجود در آب دریا	متوسط	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی	عالی

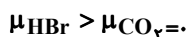
۱۰۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۳)

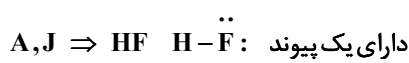
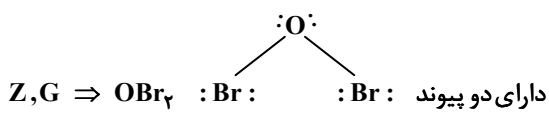
بررسی موارد:

الف) نادرست؛ ترکیب D و J، LiF و ترکیب G و D، $LiBr$ است.شعاع Br^- از F^- بیشتر و چگالی بار آن کمتر است، پس آنتالپی فروپاشی LiF بیشتر است.ب) نادرست؛ ترکیب حاصل از Z و E در شرایط مناسب CO_2 و ترکیب حاصل A و E در شرایط مناسب CH_4 است. هر دو ترکیب ناقطبیهستند، اما جرم مولی CO_2 از CH_4 بیشتر است؛ پس نیروی واندروالسی قوی تر و نقطه جوش بالاتری دارد.

پ) درست



ت) درست



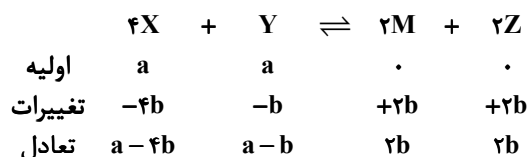
۱۰۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

شرایط انجام واکنش ها در فرایند هابر: دمای $450^{\circ}C$ ، فشار ۲۰۰ اتمسفر و استفاده از کاتالیزگر ورقه آهنیضمناً در حین انجام فرایند از طریق میعان NH_3 ، آن را پیوسته جداسازی می کنند تا بنابر اصل لوشاتلیه واکنش در جهت تولید بیشتر فراورده جابه جا شود.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)



$$\left. \begin{array}{l} a-4b = 0/0.2 \\ a-b = 0/0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 0/0.2, a = 0/1$$

$$K = \frac{[M]^2[Z]^2}{[X]^4[Y]^1} = 25 = \frac{(0/0.4)^2 \times (0/0.4)^2}{(0/0.2)^4 \times 0/0.8} \times \frac{1}{V^4} \times \frac{1}{V^5}$$

$$25 = \frac{16}{0/0.8} \times V \Rightarrow V = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} L = 125 \text{ mL}$$

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

با افزایش (کاهش حجم) فشار تعادل به سمت تولید مول گاز کمتر، یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و $[AD]$ افزایش می‌یابد. بنابراین $P_2 > P_1$ است. ضمناً افزایش دما باعث جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما و کاهش $[AD]$ شده است. پس تعادل گرماده است. در تعادل گرماده، دما و ثابت تعادل با هم رابطه عکس دارند.

گزینه ۱



مؤسسه آموزشی فرهنگی