

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

(تیر ماه ۱۴۰۳)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته: به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

راه حل اول:

می‌دانیم قدرنسبت دنباله هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است، پس:

$$r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_8}{a_7} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow x(x+1) = (x-1)(2x+1) \Rightarrow x^2 + x = 2x^2 - x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

از حل معادله فوق دو مقدار برای x به دست می‌آید. قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r = \frac{a_8}{a_7} \Rightarrow r = \frac{x}{2x+1}$$

از آنجا که x در معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ صدق می‌کند، پس:

$$x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow x = r$$

یعنی قدرنسبت دنباله هندسی همان x است، پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت همان حاصل ضرب مقادیر x است.

در معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{c}{a} = -1$ است. پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت نیز برابر -1 است.

توجه: سؤال کنکور دارای ایراد عملی است؛ زیرا با حل معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ ، دو جواب به دست آمده یعنی $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ و $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ، دنباله‌ای را می‌سازند که جمله ششم آن از قاعده دنباله هندسی پیروی نمی‌کند. مثلاً به ازای $x = 1 + \sqrt{2}$ جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم به صورت زیر است:

$$a_4 = x + 1 = \sqrt{2} + 2$$

$$a_5 = x - 1 = \sqrt{2}$$

$$a_7 = 2x + 1 = 2\sqrt{2} + 3$$

$$a_8 = x = \sqrt{2} + 1$$

یعنی دنباله هندسی باید به صورت $\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 3, \sqrt{2}, \sqrt{2} + 2, \sqrt{2}$ باشد، برای به دست آوردن a_6 از دو روش مختلف به دو مقدار مختلف می‌رسیم.

$$a_6 = a_5 \times r = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2}$$

$$a_6 = \frac{a_7}{r} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$$

در مورد $x = 1 - \sqrt{2}$ نیز همین تناقض وجود دارد.

راه حل دوم:

می‌دانیم قدرنسبت دنباله هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است، پس:

$$r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_8}{a_7} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow x(x+1) = (x-1)(2x+1) \Rightarrow x^2 + x = 2x^2 - x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

اگر α و β ریشه‌های معادله فوق باشند، مجموع ریشه‌ها برابر $S = \alpha + \beta = 2$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = \alpha\beta = -1$ است، پس برای

مقادیر قدرنسبت یعنی $r = \frac{x-1}{x+1}$ خواهیم داشت:

$$r_1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad r_2 = \frac{\beta-1}{\beta+1}$$

$$r \text{ حاصل ضرب مقادیر قدرنسبت: } \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \times \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{\alpha\beta - \alpha - \beta + 1}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{P - S + 1}{P + S + 1} = \frac{-1 - 2 + 1}{-1 + 2 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۲- پاسخ: گزینه ۱

راه حل اول:

جدول ارزش گزاره $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ را تشکیل می دهیم.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

بنابراین گزاره $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ همواره درست است.

راه حل دوم:

نکته: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, $p \vee \sim p \equiv T$, $p \vee T \equiv T$ نکته: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

با استفاده از نکات فوق، داریم:

$$((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \equiv ((\sim p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee r) \equiv \sim((\sim p \vee q) \wedge r) \vee (\sim p \vee r) \equiv (\sim(\sim p \vee q) \vee \sim r) \vee (\sim p \vee r) \\ \equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim r) \vee (\sim p \vee r) \equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee (\sim r \vee r) \equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee T \equiv T$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آن گاه $f(a) < f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.می دانیم سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در بازه‌های $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ یا $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از یکی از این دو بازه اکیداً یکنواست:زیرا $-\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی است.بنابراین سهمی $y = -5x^2 + ax - 8$ که یک سهمی روبه پایین است، در بازه $\left(-\infty, \frac{-a}{-10}\right]$ اکیداً

$$\frac{-a}{-10} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

صعودی است و این بزرگ‌ترین بازه است، پس:

بنابراین عرض رأس سهمی $y = -5x^2 + 25x - 8$ برابر است با:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(25^2 - 4(-5)(-8))}{4 \times (-5)} = \frac{-(625 - 160)}{-20} = \frac{465}{20} = 23.25$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۴- پاسخ: گزینه ۴

نکته (قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها): اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن گاه چندجمله‌ای‌های منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.اگر $r(x)$ باقی‌مانده و $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم $2 - x^{14}$ بر $x^2 + x + 1$ باشند، داریم:

$$2 - x^{14} = (x^2 + x + 1)Q(x) + r(x) \xrightarrow{\times(x-1)} (x-1)(2 - x^{14}) = (x^3 - 1)Q(x) + r(x)(x-1)$$

اگر x^3 را برابر یک قرار دهیم، آن گاه:

$$(x-1)(2 - x^{14}) \equiv r(x)(x-1) \Rightarrow 2 - x^{14} \equiv r(x) \Rightarrow r(x) \equiv 2 - (x^3)^4 \times x^2 \Rightarrow r(x) \equiv 2 - (1)^4 \times x^2$$

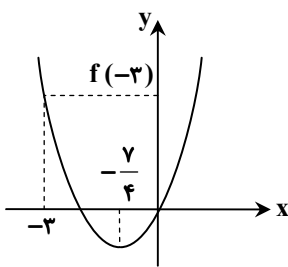
$$\xrightarrow{x^2 = -x-1} r(x) \equiv 2 - (-x-1) \Rightarrow r(x) = x+3$$

۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

اولاً باید شرط اینکه معادله ۲ ریشه داشته باشد را بنویسیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 7^2 - 4 \times 2 \times m > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8}$$



ثانیاً برای آنکه هر دو ریشه بزرگتر از ۳- باشد، می‌بایست مقدار عبارت $f(x) = 2x^2 + 7x + m$ به‌ازای ۳- مثبت باشد. (با توجه به اینکه طول رأس سهمی یعنی $-\frac{7}{4}$ از ۳- بزرگتر است، هر دو ریشه نمی‌تواند از ۳- کمتر باشد).

$$f(-3) > 0 \Rightarrow 2 \times 9 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3$$

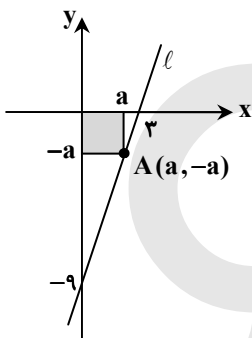
بنابراین اگر $3 < m < \frac{49}{8}$ معادله دارای دو ریشه بزرگتر از ۳- است. سه مقدار صحیح ۴، ۵ و ۶ در این بازه وجود دارد.

۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

راه‌حل اول:

برای آنکه چهارضلعی سایه زده شده مربع باشد، می‌بایست مختصات رأس A از مربع روی خط ℓ به‌صورت $A(a, -a)$ باشد. معادله خط ℓ گذرنده از دو نقطه $(3, 0)$ و $(0, -9)$ به‌صورت زیر است:



$$y = \left(\frac{0 - (-9)}{3 - 0} \right)x - 9 \Rightarrow y = 3x - 9$$

نقطه $A(a, -a)$ روی این خط است.

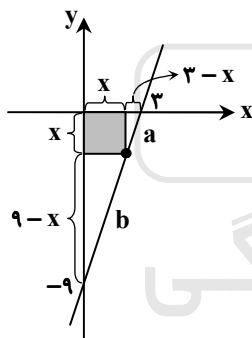
$$-a = 3a - 9 \Rightarrow 4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است، پس طول قطر برابر است با:

$$\sqrt{2}a = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

راه‌حل دوم:

می‌توان به‌صورت هندسی به مسئله نگاه کرد، با استفاده از قضیه تالس خواهیم داشت:



$$\left. \begin{aligned} \frac{3-x}{x} &= \frac{a}{b} \\ \frac{9-x}{x} &= \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3-x}{x} = \frac{x}{9-x} \Rightarrow (9-x)(3-x) = x^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 27 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است، پس طول قطر برابر است با:

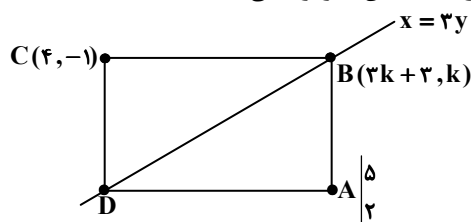
$$\sqrt{2}x = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

نکته: اگر خطوط d_1 و d_2 به‌ترتیب با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_1 m_2 = -1$ و برعکس.

نقطه B و D روی خط $x = 3y + 3$ هستند، پس مختصات آن‌ها به‌صورت $(3k + 3, k)$ است. با توجه به مستطیل بودن چهارضلعی ABCD، پاره‌خط‌های AB و BC، همچنین پاره‌خط‌های AD و DC بر یکدیگر عمود هستند. پس ضرب شیب آن‌ها برابر منفی یک است.



$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{k-2}{3k+3-5} \times \frac{k-(-1)}{3k+3-4} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k-2}{3k-2} = -\frac{3k-1}{k+1} \Rightarrow -(k-2)(k+1) = (3k-1)(3k-2)$$

$$\Rightarrow -k^2 + k + 2 = 9k^2 - 9k + 2 \Rightarrow 10k^2 - 10k = 0$$

$$\Rightarrow 10k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0, k = 1$$

یعنی مختصات نقاط B و D به‌صورت $B(3, 0)$ و $D(6, 1)$ بوده و اختلاف طول این دو نقطه برابر است با:

$$|x_B - x_D| = 6 - 3 = 3$$

۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۴)

نکته (ویژگی قدرمطلق):

$$|x| \geq 0$$

راه حل اول:

تابع f وقتی $x \geq 1$ و $x < 1$ دو ضابطه مختلف دارد. $|a|$ همواره عددی نامنفی است. پس $1 - |a| \leq 1$ و $2 + |a| > 1$ ؛ بنابراین برای حل معادله مورد نظر داریم: (در حالت $a = 0$ معادله دارای جواب نیست).

$$f(1 - |a|) = f(2 + |a|) \Rightarrow 2(1 - |a|) - 1 = (2 + |a|)^2 - (2 + |a|) - 2 \Rightarrow 2 - 2|a| - 1 = 4 + a^2 + 4|a| - 2 - |a| - 2$$

$$\Rightarrow a^2 + 5|a| - 6 = 0 \Rightarrow (|a| + 6)(|a| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = -6 & \text{غ ق} \\ |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

بنابراین دو مقدار برای a داریم.

راه حل دوم:

واضح است که $1 - |a| + 2 + |a| = 3$ ، پس اگر $2 + |a| = \alpha$ و $2 + |a| = \beta$ فرض کنیم، خواهیم داشت $f(\alpha) = f(\beta)$ با توجه به اینکه $|a|$ عددی نامنفی است، پس $\beta > 1$ و $\alpha \leq 1$ است؛ بنابراین برای حل معادله مورد نظر داریم:

$$f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow 2\alpha - 1 = \beta^2 - \beta - 2 \xrightarrow[\alpha = 3 - \beta]{\alpha + \beta = 3} 2(3 - \beta) - 1 = \beta^2 - \beta - 2$$

$$6 - 2\beta - 1 = \beta^2 - \beta - 2 \Rightarrow \beta^2 + \beta - 12 = 0 \Rightarrow (\beta + 4)(\beta - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = -4 & \text{غ ق } (\beta > 1) \\ \beta = 3 \end{cases}$$

در فرض داشتیم: $\beta = 2 + |a|$ ، بنابراین:

$$2 + |a| = 3 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

بنابراین دو مقدار برای a موجود است.

۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آن‌گاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

$$1 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$1 - \sqrt{1 + x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 + x} \leq 1 \Rightarrow 1 + x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

پس دامنه تابع f برابر $D_f = [-1, 0]$ است.تابع f اکیداً نزولی است، پس برد آن به صورت $R_f = [f(0), f(-1)] = [0, 1]$ است.

با توجه به این دامنه و برد، نمودار تابع f در ربع دوم قرار دارد، پس نمودار f^{-1} در ربع چهارم قرار دارد، پس غیر از نقطه مبدأ مختصات $O(0, 0)$ این دو تابع نقطه تقاطع دیگری ندارند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

نکته: قانون توان لگاریتم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

ابتدا معادله مورد نظر را حل می‌کنیم (دامنه معادله به صورت $2 - x > 0$ یعنی $x < 2$ است).

$$\log(2 - x) - \log \frac{1}{(x - 2)^2} = 3 \Rightarrow \log(2 - x) + \log(x - 2)^2 = 3 \Rightarrow \log(2 - x) + 2 \log|x - 2| = 3$$

$$\xrightarrow{x < 2} \log(2 - x) + 2 \log(2 - x) = 3 \Rightarrow 3 \log(2 - x) = 3 \Rightarrow \log(2 - x) = 1 \Rightarrow 2 - x = 10 \Rightarrow x = -8$$

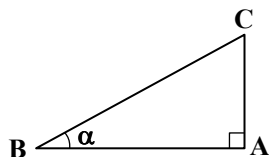
بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\log_{\sqrt{2}}(-x) = \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 2^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 6 \times 1 = 6$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته: مثلث قائم الزاویه‌ای که یکی از زوایای حاده آن α باشد را در نظر بگیرید. چهار نسبت مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت زاویه α به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad \text{سینوس}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} \quad \text{کسینوس}$$

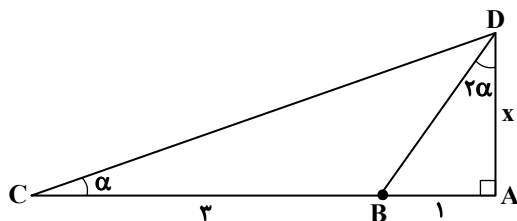
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB} \quad \text{تانژانت}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC} \quad \text{کتانژانت}$$

در دو مثلث قائم الزاویه شکل مقابل، نسبت مثلثاتی تانژانت را می‌نویسیم:

$$\tan \alpha = \frac{x}{3+1} = \frac{x}{4}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{1}{x}$$



مقدار x را به کمک رابطه $\tan 2\alpha$ پیدا می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2 \times \frac{x}{4}}{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{16 - x^2}{16}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{8x}{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{8x^2} \Rightarrow 8x^2 = 16 - x^2 \Rightarrow 9x^2 = 16 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABD$ داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow AB = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \Rightarrow AB = \frac{5}{3}$$

مقدار $\cos 2\alpha$ برابر است با:

$$\cos 2\alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

راه حل اول:

طرفین رابطه داده شده را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3 \sin^2 x + a \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 x} \Rightarrow 3 + a \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 4 \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \Rightarrow 3 + a \cot^2 x = 4(1 + \cot^2 x) \Rightarrow 3 + a \cot^2 x = 4 + 4 \cot^2 x \Rightarrow a \cot^2 x - 4 \cot^2 x = 1 \Rightarrow \cot^2 x (a - 4) = 1 \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{a - 4}$$

راه حل دوم:

سمت راست رابطه را به صورت $4 = 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$ بازنویسی می‌کنیم:

$$3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x \Rightarrow a \cos^2 x - 4 \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow (a - 4) \cos^2 x = \sin^2 x$$

طرفین عبارت فوق را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$(a - 4) \cot^2 x = 1 \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{a - 4}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

۱۳- پاسخ: گزینه ۴

نکته:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

نکته (نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

راه حل اول:

ابتدا مقدار $\cos(B-C)$ را پیدا می کنیم:

$$1 + \tan^2(B-C) = \frac{1}{\cos^2(B-C)} \Rightarrow 1 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\cos^2(B-C)} \Rightarrow \cos^2(B-C) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(B-C) = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه B و C دو زاویه مثلث هستند، زاویه $B-C$ در ربع ۱ یا ۴ بوده و کسینوس آن مثبت است، پس $\cos(B-C) = \frac{1}{2}$

$$\cos(B-C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos B \cos C + \sin B \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos B \cos C + 2 \sin B \sin C = 1$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cos B \cos C = 2 \sin B \sin C$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1 - 2 \cos(B+C)}{4 \sin B \cos C} = \frac{1 - 2 \cos B \cos C + 2 \sin B \sin C}{4 \sin B \cos C} = \frac{2 \sin B \sin C + 2 \sin B \sin C}{4 \sin B \cos C} = \frac{4 \sin B \sin C}{4 \sin B \cos C} = \frac{\sin C}{\cos C} = \tan C$$

راه حل دوم:

استفاده از حالت خالص: با توجه به اینکه $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ، B و C را زوایایی فرض کنیم که $B-C = 60^\circ$ باشد، مثلاً $C = 30^\circ$ و $B = 90^\circ$:
بنابراین برای محاسبه عبارت مورد نظر، داریم:

$$\frac{1 - 2 \cos(120^\circ)}{4 \sin 90^\circ \cos 30^\circ} = \frac{1 - 2 \times (-\frac{1}{2})}{4 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ = \tan C$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته: جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

ابتدا معادله را در حالت کلی حل می کنیم:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - (x + \frac{\pi}{4})) \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب های $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}$ از این معادله در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارند.

۱۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{\pi}{2}$ رادیکالی، ابتدا مزدوج رادیکال را در آن ضرب می کنیم، سپس با تبدیل به چندجمله ای، آن را تجزیه می کنیم.وقتی $x \rightarrow 0$ ، پس حد مخرج کسر $\frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x}$ برابر صفر است. پس برای آنکه حد تابع موجود باشد، می بایست حد صورت نیز برابر صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}) = 0 \xrightarrow{x=0} a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

اکنون به محاسبه حد می پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} \times \frac{\sqrt{(bx+1)(cx+1)} + 1}{\sqrt{(bx+1)(cx+1)} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bcx^2 + (b+c)x + 1 - 1}{x(1+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bcx + (b+c)}{2} = \frac{b+c}{2}$$

$$\frac{b+c}{2} = 2 \Rightarrow b+c = 4 \Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{4}{-1} \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -4$$

مقدار حد برابر ۲ است، پس:

۱۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)

برای آنکه تابع f فقط یک مجانب قائم داشته باشد، سه حالت زیر قابل تصور است.حالت اول: معادله مخرج درجه اول بوده و فقط یک ریشه داشته باشد: $x = -1 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow a=0$

حالت دوم: معادله مخرج درجه دوم بوده ولی فقط یک ریشه مضاعف داشته باشد: (ریشه مضاعف)

$$\Delta = 0 \Rightarrow (1-a)^2 - 4a(a+1) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 - 4a^2 - 4a = 0 \Rightarrow 3a^2 - 6a + 1 = 0$$

این معادله دو جواب دارد و به ازای هر کدام از آن ها تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

حالت سوم: معادلهٔ مخرج درجه دوم بوده و دو ریشه هم داشته باشد، اما یکی از ریشه‌های آن ریشه صورت کسر هم باشد، در این حالت فقط ریشه غیرمشترک صورت و مخرج مجانب قائم است. صورت کسر دو ریشه دارد و به‌ازای هر کدام از آن‌ها یک مقدار قابل قبول برای a به‌دست می‌آید:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow (3x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 9a + 3(1-a) + a + 1 = 0 \Rightarrow 7a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{7}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{9}a + (-\frac{1}{3})(1-a) + a + 1 = 0 \Rightarrow a - 3 + 3a + a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

بنابراین ۵ مقدار مختلف برای a وجود دارد که به‌ازای آن‌ها تابع یک مجانب قائم دارد.

۱۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

نکته (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

راه حل اول:

تابع باید در نقاط با طول $\pm c$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \sqrt{c^2 - 2c + 1} = ac^2 + bc + 2 \Rightarrow |c-1| = ac^2 + bc + 2 \xrightarrow{c \in \mathbb{N}} c-1 = ac^2 + bc + 2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -c^-} f(x) \Rightarrow \sqrt{c^2 + 2c + 1} = ac^2 - bc + 2 \Rightarrow |c+1| = ac^2 - bc + 2 \xrightarrow{c \in \mathbb{N}} c+1 = ac^2 - bc + 2 \quad (2)$$

اگر دو معادله ۱ و ۲ را از یکدیگر کم کنیم، داریم:

$$(1) - (2) = 0 \Rightarrow -2 = 2bc \Rightarrow bc = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{c}$$

اکنون a را نیز بر حسب c پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(1)} c-1 = ac^2 + (-\frac{1}{c}) \times c + 2 \Rightarrow c-1 = ac^2 + 1 \Rightarrow ac^2 = c-2 \Rightarrow a = \frac{c-2}{c^2}$$

بنابراین مقدار $\frac{a}{b}$ برابر است با:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{c-2}{c^2}}{-\frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2-c}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{c} - 1$$

می‌دانیم c عددی طبیعی است، پس سه حالت زیر متصور است:

$$c = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{1} - 1 \Rightarrow \left[\frac{a}{b} \right] = 1$$

$$c = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{2} - 1 \Rightarrow \left[\frac{a}{b} \right] = 0$$

$$c \geq 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{c} - 1 \Rightarrow -1 < \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left[\frac{a}{b} \right] = -1$$

بنابراین برای $\left[\frac{a}{b} \right]$ سه مقدار مختلف صفر، ۱ و -۱ قابل قبول است که تنها -۱ در گزینه‌ها آمده است.

راه حل دوم:

با توجه به اینکه مقدار c طبیعی است، $c = 3$ را جای گذاری می‌کنیم: (حالت خاص)

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & |x| \leq 3 \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > 3 \end{cases}$$

می‌دانیم تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس پیوستگی را در $x = 3$ بررسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی در } x=3} 2 = 9a + 3b + 2 \Rightarrow 9a + 3b = 0 \Rightarrow 3a = -b \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} \right] = -1$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم:

$$f'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad g'(x) = -\sin x$$

مقدار خواسته شده یعنی $f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6})$ همان مشتق تابع $f - 2g$ در $x = \frac{7\pi}{6}$ است. پس ابتدا تابع $f - 2g$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (f - 2g)(x) &= \frac{x^2 + \cos^2 x}{x^2 - \cos^2 x} - 2 \times \frac{x}{x - \cos x} = \frac{(x + \cos x)(x - \cos x) - 2x(x - \cos x)}{(x + \cos x)(x - \cos x)} = \frac{x - 2\cos x + \cos^2 x - 2x^2 + 2x\cos x}{(x + \cos x)(x - \cos x)} \\ &= \frac{-\cos x(x - \cos x)}{x - \cos x} = -\cos x \end{aligned}$$

اکنون به محاسبه مشتق خواسته شده می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} (f - 2g)(x) = -\cos x &\Rightarrow (f - 2g)'(x) = -(-\sin x) \Rightarrow (f - 2g)'(x) = \sin x \Rightarrow (f - 2g)'(\frac{7\pi}{6}) = \sin \frac{7\pi}{6} \\ &\Rightarrow (f - 2g)'(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: اگر f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

(الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

(ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

تابع f فقط می‌تواند در نقطه‌ای به طول a مشتق نابرابر (نقطه گوشه‌ای) داشته باشد.

$$f'_-(a) = 0 \Rightarrow f'_+(a) \neq 0$$

اگر $m > 1$ ، مشتق راست تابع f در a نیز برابر صفر است و تابع نقطه گوشه‌ای ندارد.اگر $m = 1$ ، آن‌گاه $f'_+(a) = m$ و تابع در $x = a$ نقطه گوشه‌ای دارد.اگر $m = 0$ ، آن‌گاه $f'_-(a) = f'_+(a) = 0$ و تابع نقطه گوشه‌ای ندارد.اگر $m < 0$ ، آن‌گاه تابع f در $x = a$ تعریف نشده است و $x = a$ نمی‌تواند نقطه گوشه‌ای باشد.پس فقط به‌ازای $m = 1$ تابع نقطه گوشه‌ای دارد.

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

نکته (تعریف): اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) باشد که(الف) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.(ب) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.نکته (تعریف): فرض کنیم $c \in D_f$. نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

راه‌حل اول:

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم:

$$x(1-|x|) \geq 0$$

x	-1	0	1
x	-	-	+
1- x	-	+	+
x(1- x)	+	-	-

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

تابع در نقاط مرزی دامنه مشتق ناپذیر است، پس $x = -1, 0, 1$ نقاط بحرانی تابع هستند. از طرفی از آنجا که تابع در همسایگی محذوف این

نقاط مرزی تعریف نشده است، پس این نقاط اکسترمم نسبی محسوب نمی‌شوند.

برای یافتن سایر نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی، ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x(1-|x|)} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+x^2} & x \leq -1 \\ \sqrt{x-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} & x < -1 \\ \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{غ ق} & x < -1 \\ x = \frac{1}{2} & & 0 < x < 1 \end{cases}$$

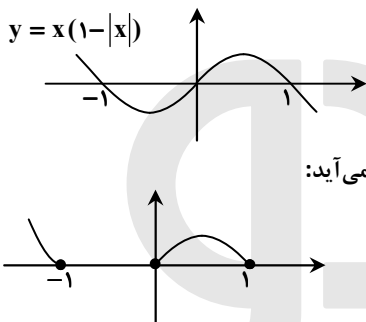
تنها ریشه مشتق، $x = \frac{1}{2}$ است، پس این نقطه نیز بحرانی است. ضمناً علامت مشتق در اطراف $x = \frac{1}{2}$ تغییر می‌کند. پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

بنابراین تابع ۴ نقطه بحرانی و یک اکسترمم نسبی دارد، یعنی:

$$m + n + k = 1 + 0 + 4 = 5$$

راه حل دوم:

سعی می‌کنیم شمای کلی نمودار را رسم کنیم. ابتدا نمودار $y = x(1-|x|)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل فوق، پس از اعمال رادیکال $(f(x) = \sqrt{x(1-|x|)})$ نمودار به صورت حدودی به دست می‌آید:

بنابراین مطابق شکل، ۴ نقطه بحرانی، صفر مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی داریم.
($m = 1, n = 0, k = 4$)
پس:

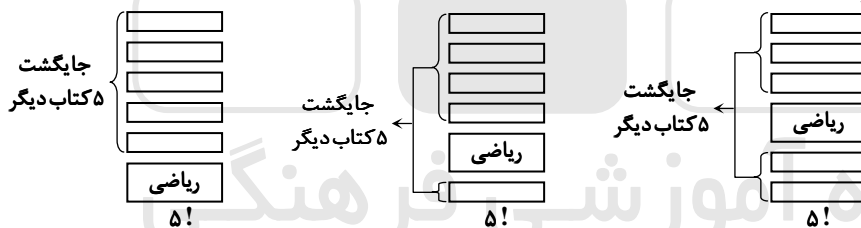
$$m + n + k = 5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۲)

۲۱- پاسخ: گزینه ۱

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

طبق فرض سؤال، حالات مطلوب به صورت زیر است:



$$\text{تعداد کل حالات} = 3 \times 5! = 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$$

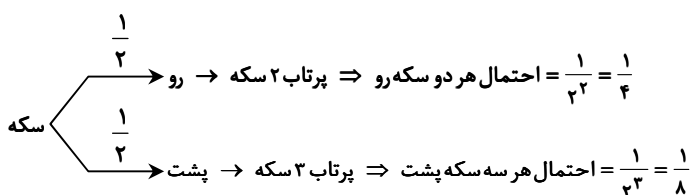
▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

۲۲- پاسخ: گزینه ۲

نکته: فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

نمودار درختی زیر را در نظر می‌گیریم:



طبق قانون احتمال کل، داریم:

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

نکته ۱ (انحراف معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i - \bar{x}$ را انحراف داده i از میانگین داده‌ها می‌گویند.

نکته ۲ (واریانس داده‌ها): توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

طبق مفروضات سؤال، داده‌های دسته اول را b, c, d, e, f و داده‌های دسته دوم را a, b, c, d, e, f در نظر می‌گیریم. میانگین هر دو دسته برابر با $\bar{x}$ است و داریم:

$$\frac{b+c+d+e+f}{5} = \bar{x} \Rightarrow b+c+d+e+f = 5\bar{x} \quad (۱)$$

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = \bar{x} \Rightarrow a+b+c+d+e+f = 6\bar{x} \xrightarrow{(۱)} a+5\bar{x} = 6\bar{x} \Rightarrow a = \bar{x}$$

واریانس دسته اول را σ_1^2 و واریانس دسته دوم را σ_2^2 در نظر می‌گیریم و طبق فرض سؤال داریم:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2 + (f-a)^2}{5} = \frac{2}{3} + \frac{(a-a)^2 + (b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2 + (f-a)^2}{6}$$

فرض می‌کنیم $A = (b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2 + (f-a)^2$ ، پس:

$$\frac{A}{5} = \frac{2}{3} + \frac{0+A}{6} \Rightarrow \frac{A}{5} - \frac{A}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A}{30} = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 20.$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\sigma_1^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2 + (f-a)^2}{5} = \frac{A}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

۲۴- پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

نکته: برای پیشامدهای A و B داریم:

الف) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

ب) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

احتمال گل کردن پنالتی اول را با $P(A_1)$ و احتمال گل کردن پنالتی دوم را با $P(A_2)$ نشان می‌دهیم. طبق مفروضات سؤال داریم:

$$P(A_1) = \frac{60}{100} = 0.6, \quad P(A_2|A_1) = \frac{80}{100} = 0.8, \quad P(A_2|A_1') = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \Rightarrow 0.8 = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{0.6} \Rightarrow P(A_2 \cap A_1) = 0.48$$

$$P(A_2|A_1') = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{P(A_1')} \Rightarrow 0.3 = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{1 - P(A_1)} \Rightarrow 0.3 = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{1 - 0.6} \Rightarrow P(A_2 \cap A_1') = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

خواسته سؤال $P(A_2 \cap A_1') + P(A_1' \cap A_2)$ است که داریم:

$$P(A_2 \cap A_1') + P(A_1 \cap A_2') = 0.12 + P(A_1 - A_2) = 0.12 + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) = 0.12 + 0.6 - 0.48$$

$$= 0.24$$

راه حل دوم:

نکته: اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) > 0$ ، آن‌گاه $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$.

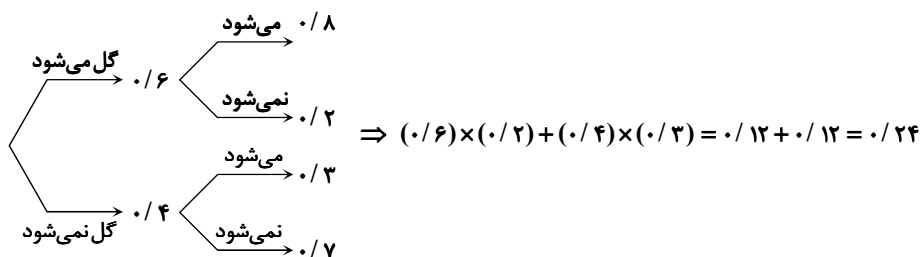
نکته: $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

با استفاده از نکات فوق، داریم:

$$P(A_1 \cap A_2') + P(A_1' \cap A_2) = P(A_1)P(A_2'|A_1) + P(A_1') \cdot P(A_2|A_1') = 0.6(1 - 0.8) + (1 - 0.6) \times 0.3$$

$$= 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.3 = 0.12 + 0.12 = 0.24$$

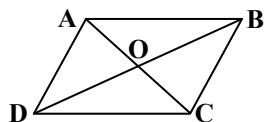
راه حل سوم:



۲۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۳، درس های ۱ و ۲)

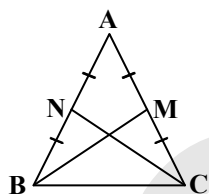
گزینه ها را بررسی می کنیم:

(۱) درست؛ هر چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند، متوازی الاضلاع است.



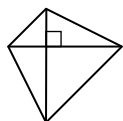
$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع است. } ABCD$$

(۲) درست؛ میانه های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث برابرند.

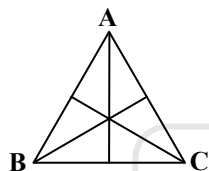


$$AB = AC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BN = CM \\ BC = BC \\ \hat{ABC} = \hat{ACB} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle MBN \cong \triangle MCN \Rightarrow BM = CN$$

(۳) نادرست؛ در چهارضلعی مقابل، قطرهای برابر و عمود بر هم هستند ولی چهارضلعی، مربع نمی باشد.

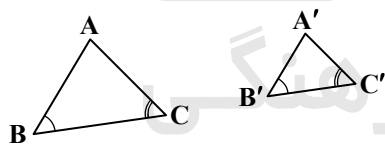


(۴) درست؛ نیمسازهای زاویه های داخلی هر مثلث در یک نقطه هم رس هستند.



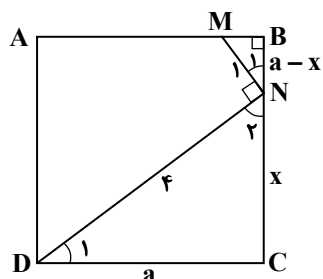
۲۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.



$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}') \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

فرض می کنیم اندازه ضلع مربع برابر a و NC = x باشد:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \\ \hat{D}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{D}_1 + \hat{N}_2 \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{D}_1$$

دو مثلث MBN و DCN متشابه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{N}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle DCN \Rightarrow \frac{DN}{MN} = \frac{NC}{MB} = \frac{DC}{BN} \Rightarrow \frac{DN}{MN} = \frac{DC}{BN}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{1} = \frac{a}{a-x} \Rightarrow a = fa - fx \Rightarrow fx = 3a \Rightarrow x = \frac{3}{4}a \quad (1)$$

در مثلث DCN طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$DC^2 + CN^2 = DN^2 \Rightarrow a^2 + x^2 = f^2 \xrightarrow{(1)} a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 16 \Rightarrow \frac{25}{16}a^2 = 16$$

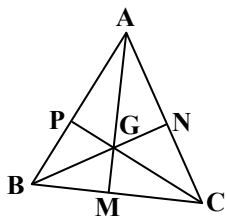
$$\Rightarrow a^2 = \frac{16 \times 16}{25}, S_{\text{مربع}} = a^2 = \frac{16 \times 16}{25} = 10.24$$

۲۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: سه میانه هر مثلث در یک نقطه درون آن مثلث هم‌رس‌اند، به طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع

برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است و فاصله اش تا هر رأس، $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

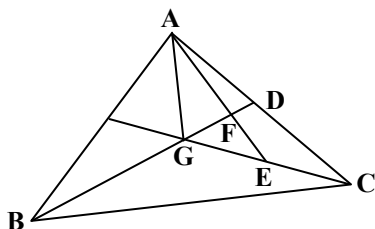


$$AG = \gamma GM = \frac{\gamma}{\gamma} AM$$

$$\text{GM} = \frac{1}{2} \text{AG} = \frac{1}{3} \text{AM}$$

مشابه روابط فوق برای میانه‌های دیگر نیز برقرار است.

طبق نکته فوق، در مثلث ABC ، نقطه G محل هم‌رسمی سه میانه مثلث است و داریم:



$$GD = \frac{1}{\kappa} BD \quad (1)$$

در مثلث AGC، GD و AE میانه‌ها هستند و نقطه F محل هم‌رسم میانه‌ها است و داریم:

$$FD = \frac{1}{3}GD \xrightarrow{(1)} FD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}BD \Rightarrow 9FD = BD \Rightarrow \frac{BD}{FD} = 9$$

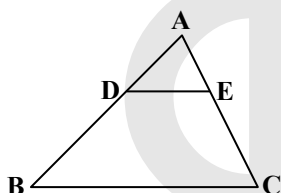
۲۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۲)

نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی

$$\mathbf{DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}}$$

متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

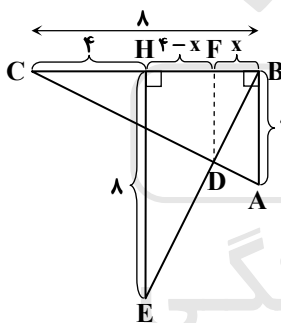


با توجه به اینکه مثلث‌های ABC و BEH هم‌نهشت هستند، داریم:

$$\mathbf{BH} = \mathbf{AB} = \mathfrak{f} \text{ , } \mathbf{BC} = \mathbf{EH} = \lambda$$

$$CH = BC - BH = \lambda - \varphi = \varphi$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{BF} = \mathbf{x}$ ، داریم:



$$\mathbf{FH} = \mathbf{BH} - \mathbf{BF} = \pounds - x$$

در مثلث ABC با نوشتن تالس، داریم

$$\overset{\Delta}{ABC} : DF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow \frac{f + f - x}{\lambda} = \frac{DF}{f} \Rightarrow \frac{\lambda - x}{2} = DF \quad (1)$$

در مثلث BEH نیز رابطهٔ تالس را می‌نویسیم:

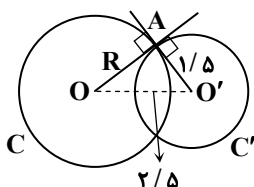
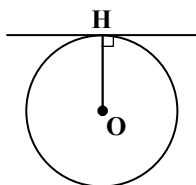
$$\text{BEH} : \text{DF} \parallel \text{EH} \Rightarrow \frac{\text{BF}}{\text{BH}} = \frac{\text{DF}}{\text{EH}} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\text{DF}}{1} \Rightarrow \text{DF} = 4x \quad (v)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\lambda - x}{r} = rx \Rightarrow \lambda - x = rx \Rightarrow \lambda = \Delta x \Rightarrow x = \frac{\lambda}{\Delta} = 1/6$$

۲۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند. اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.



طبق شکل مقابل، در نقطه A مماس‌های مرسوم بر دو دایره، بر هم عمودند و طبق نکته فوق، این خط‌های مماس از مرکز دایره‌ها گذشته و مثلث $OA'O$ قائم‌الزاویه است و داریم:

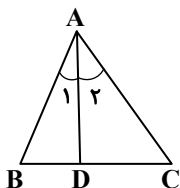
$$\begin{aligned} \mathbf{OA}^{\mathbf{r}} + \mathbf{O}'\mathbf{A}^{\mathbf{r}} &= \mathbf{OO}'^{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{r}} + \mathbf{1}/\Delta^{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\Delta^{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\Delta^{\mathbf{r}} - \mathbf{1}/\Delta^{\mathbf{r}} \\ &\Rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}/\Delta - \mathbf{1}/\Delta)(\mathbf{r}/\Delta + \mathbf{1}/\Delta) = \mathbf{1} \times \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{r}} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{r} \end{aligned}$$

۳۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۳، درس ۳)

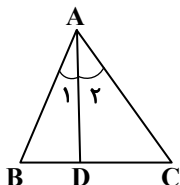
نکته: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

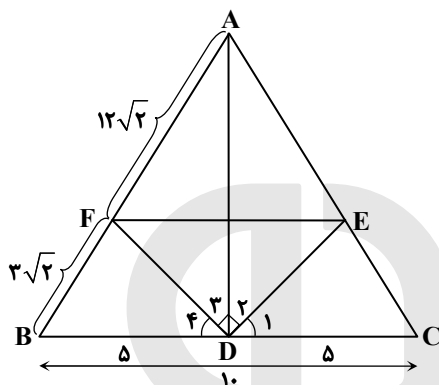


نکته: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$



طبق نکات فوق، داریم:



$$\triangle ADB: \text{نیمساز } DF \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{20}{DB} \Rightarrow DB = 80$$

$$\Rightarrow AD = 20$$

$$DF^2 = AD \cdot DB - AF \cdot FB = 20 \times 80 - 3 \times 12 = 1600 - 36 = 1564$$

$$\Rightarrow DF^2 = 1564 - 36 = 1528 \Rightarrow DF = 2\sqrt{967}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD: \text{نیمساز } DF \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AD}{DB} \\ \triangle ADC: \text{نیمساز } DE \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} \end{array} \right\} \xrightarrow{DC=DB} \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{15} = \frac{EF}{10} \Rightarrow EF = 2$$

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 + \hat{D}_4 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{D}_1 = \hat{D}_2, \hat{D}_3 = \hat{D}_4} 2(\hat{D}_2 + \hat{D}_3) = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = 90^\circ$$

حال طبق رابطه فیثاغورس در مثلث DEF داریم:

$$DE^2 + DF^2 = EF^2 \Rightarrow DE^2 + (2\sqrt{967})^2 = 2^2$$

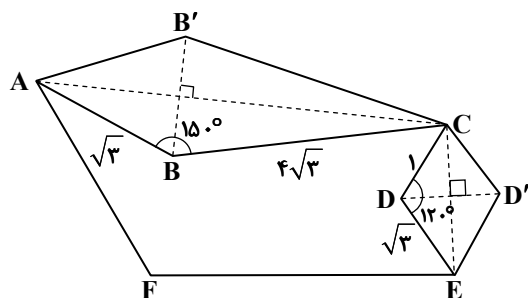
$$\Rightarrow DE^2 = 4 - 3868 = -3864 \Rightarrow DE = 6$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۳۱- پاسخ: گزینه ۳

نکته: یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی معروف است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون این که محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

طبق نکته فوق، بازتاب B را نسبت به AC یافته و B' می‌نامیم. همچنین بازتاب D را نسبت به CE یافته و D' می‌نامیم. میزان افزایش مساحت برابر است با:



$$S = 2S_{ABC} + 2S_{CDE}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 150^\circ + 2 \times \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin 120^\circ$$

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ + CD \cdot DE \cdot \sin 60^\circ$$

$$= 4 \times 3 \times \frac{1}{2} + 1 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 6 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 7/5$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۳۲- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
ابتدا ماتریس A را محاسبه می کنیم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = 4(-\frac{1}{2}) - 1 \times (-1) = -2 + 1 = -1 \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

حال طرفین رابطه $2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ را از سمت چپ در A ضرب می کنیم:

$$A(2I - 3A^{-1}B^{-1}) = A \times \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2AI - 3 \underbrace{AA^{-1}}_I B^{-1} = A \times \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه های قطر اصلی} = -2 + 0 = -2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا A^2 را محاسبه می کنیم:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \text{ مجموع درایه های } = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ مجموع درایه های } = 1 + 1 + 1 - 1 - 2 - 1 + 1 + 1 + 1 = 2$$

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ خواسته سؤال برابر است با: } 3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته: معادله سهمی افقی یا قائم با رأس $S(h, k)$ به صورت زیر است.

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$(a + h, k)$	$x = -a + h$	خط $y = k$	روبه راست
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	$(-a + h, k)$	$x = a + h$	خط $y = k$	روبه چپ
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	$(h, a + k)$	$y = -a + k$	خط $x = h$	روبه بالا
$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	$(h, -a + k)$	$y = a + k$	خط $x = h$	روبه پایین

معادله سهمی را به صورت متعارف می نویسیم:

$$3y^2 - 3x - ay = 0 \Rightarrow 3y^2 - ay = 3x \xrightarrow{\div 3} y^2 - \frac{a}{3}y = x \Rightarrow y^2 - \frac{a}{3}y + \frac{a^2}{36} = x + \frac{a^2}{36} \Rightarrow (y - \frac{a}{6})^2 = (x + \frac{a^2}{36})$$

سهمی افقی روبه راست است و اگر فاصله کانونی سهمی را با a' نشان دهیم، داریم:

$$S(-\frac{a^2}{36}, \frac{a}{6}), 4a' = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{4}$$

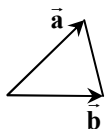
$$\text{خط هادی: } x = -\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{a^2}{36} = -1 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$6 - (-6) = 12$$

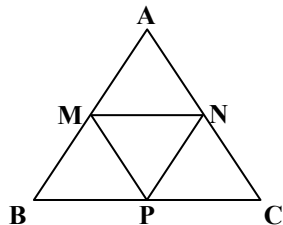
۳۵- پاسخ: گزینه ۲ و ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

نکته ۱: مساحت مثلث ساخته شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطه زیر به دست می آید.



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

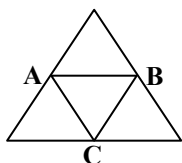
نکته ۲: اگر وسط های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم نهشت و در نتیجه با مساحت های برابر پدید می آید.



$$\triangle AMN \cong \triangle BMP \cong \triangle PCN \cong \triangle MNP$$

$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle BMP} = S_{\triangle PCN} = S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

طبق نکات فوق، مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S_{ABC} = \frac{1}{4} \times 64 = 16$$

حال بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را تشکیل داده و داریم:

$$A(3, a, b), B(-1, -a, b), C(5, -4, b)$$

$$\vec{AB} = B - A = (-4, -2a, 0), \vec{AC} = C - A = (2, -4-a, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2a & 0 \\ 2 & -4-a & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & -2a \\ 2 & -4-a \end{vmatrix} = \vec{k} (-4(-4-a) - 2(-2a))$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{k} (16 + 4a + 4a) = (8a + 16)\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |8a + 16| = |4a + 8| \Rightarrow |4a + 8| = 16 \Rightarrow 4a + 8 = \pm 16 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -6 \end{cases}$$

$$a = 2 \Rightarrow \vec{AB} = (-4, -4, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{16 + 16 + 0} = 4\sqrt{2}$$

$$a = -6 \Rightarrow \vec{AB} = (-4, 12, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{16 + 144 + 0} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * گسسته (فصل ۱، درس های ۲ و ۳)

نکته: می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر ضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

نکته: قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

$a \equiv 0$ ، پس a مضرب ۸ است، از طرفی باقی مانده تقسیم a بر ۲۳ برابر ۵ است، داریم:

$$a = 23q + 5, a \equiv 0 \Rightarrow 23q + 5 \equiv 0 \Rightarrow 23q \equiv -5 \Rightarrow (23 - 3 \times 8)q \equiv -5 \Rightarrow -q \equiv -5 \Rightarrow q \equiv 5 \Rightarrow q = 8k + 5$$

حال در رابطه $a = 23q + 5$ ، داریم:

$$a = 23(8k + 5) + 5 = 8 \times 23k + 115 + 5 = 8 \times 23k + 120 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{8 \times 23k}{4} + \frac{120}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} = 23(2k) + 30 = 23(2k) + 23 + 7$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = 23(\underbrace{2k+1}_{q'}) + 7 \Rightarrow \frac{a}{4} = 23q' + 7$$

بنابراین باقی مانده $\frac{a}{4}$ بر ۲۳ برابر ۷ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)

۳۷- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به خواسته سؤال، کوچکترین و بزرگترین عضو زیرمجموعه، باید یکی زوج و دیگری مضرب ۵ باشد، پس حالات زیر را داریم:

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 12, 13, 15 \\ \downarrow & \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 15, 18 \end{array} \rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 15, 18, 23, 24, 25, 26 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 24, 25 \end{array} \rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 12, 13, 15, 18, 23, 24, 25 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 15, 18, 23, 24 \\ \downarrow \downarrow & \\ 2 \times 2 = 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 18, 23, 24, 25 \\ \downarrow \downarrow & \\ 2 \times 2 = 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \min & \max \\ 25, 26 \end{array} \rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$61 = 2 + 32 + 1 + 4 + 16 + 4 + 1 + 1 = \text{تعداد کل حالات}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۳۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a, b) | c$

نکته: می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهستی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

طبق نکته فوق، شرط آنکه معادله سیاله $57x + 133y = 22n - 1$ دارای جواب باشد، آن است که داشته باشیم:

$$(57, 133) | 22n - 1, (57, 133) = (19 \times 3, 19 \times 7) = 19 \Rightarrow 19 | 22n - 1 \Rightarrow 22n - 1 \equiv 0 \Rightarrow 22n \equiv 1 \Rightarrow (22 - 19)n \equiv 1$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 1 - 19 \Rightarrow 3n \equiv -18 \xrightarrow{+3} n \equiv -6 \Rightarrow n = 19k - 6$$

چون کوچکترین عدد دورقمی n را باید بیابیم، داریم:

$$k = 1 \Rightarrow n = 19 - 6 = 13 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1 + 3 = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۳۹- پاسخ: گزینه ۲

$$14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28$$

بدترین حالت زمانی است که اعداد مشخص شده در فوق انتخاب شوند، که تعداد آن‌ها برابر ۱۰ عدد است. با انتخاب یک عدد دیگر، لاقبل سه

عضو انتخاب شده، اعداد متوالی خواهند بود، پس حداقل تعداد اعضا برابر ۱۱ = ۱۰ + ۱ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * گسسته (فصل ۲، درس ۱)

۴۰- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر است با:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

نکته: اگر G یک گراف با n رأس و u یک رأس آن باشد و $d_G(u)$ و $d_{\bar{G}}(u)$ به ترتیب درجه رأس u در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، داریم:

$$d_G(u) + d_{\bar{G}}(u) = n - 1$$

فرض می‌کنیم تعداد رئوس گراف G برابر P باشد، با توجه به اینکه رأس با درجه مینیمم در G ، رأس با درجه ماکزیمم در $\bar{G}$ است و بالعکس،

طبق نکته فوق، داریم:

$$\begin{cases} \Delta(G) + \delta(\bar{G}) = P - 1 \Rightarrow \delta(\bar{G}) = P - 1 - \Delta(G) \\ \delta(G) + \Delta(\bar{G}) = P - 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = P - 1 - \delta(G) \end{cases} \Rightarrow \Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = P - 1 - \delta(G) - (P - 1 - \Delta(G)) = \Delta(G) - \delta(G)$$

حال طبق مفروضات سؤال داریم:

$$\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2 \Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) = 2$$

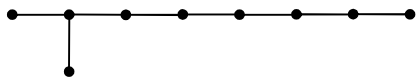
$$\begin{cases} \Delta(G) - \delta(G) = 2 \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2\Delta(G) - 2\delta(G) = 4 \\ \Delta(G) + 2\delta(G) = 17 \end{cases} \Rightarrow 3\Delta(G) = 21 \Rightarrow \Delta(G) = 7 \Rightarrow 7 - \delta(G) = 2 \Rightarrow \delta(G) = 5 \end{cases}$$

چون $\Delta(G) = 7$ است، اگر حداقل تعداد رئوس برابر $P = 8$ باشد، به دلیل $\Delta(G) = 7$ در گراف $\bar{G}$ حتماً رأس منفرد خواهیم داشت و $\bar{G}$ ناهمبند است، پس حداقل تعداد رئوس برابر $P = 9$ است و داریم:

$$\Delta(G) = 7 \Rightarrow \delta(\bar{G}) = P - 1 - \Delta(G) = 9 - 1 - 7 = 1$$

$$\delta(G) = 5 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = P - 1 - \delta(G) = 9 - 1 - 5 = 3$$

چون در گراف G می‌خواهیم بیشترین تعداد یال‌ها را داشته باشیم، پس در $\bar{G}$ باید کمترین تعداد یال‌ها را داشته باشیم. گراف $\bar{G}$ با $\delta(\bar{G}) = 1$ و $\Delta(\bar{G}) = 3$ و همبند زمانی دارای کمترین یال است که به صورت زیر باشد.



$$\Rightarrow q_{\min}(\bar{G}) = 8$$

بنابراین، بیشترین تعداد یال‌های گراف G برابر است با:

$$q_{\max}(G) + q_{\min}(\bar{G}) = \binom{P}{2} \Rightarrow q_{\max}(G) + 8 = \binom{9}{2} \Rightarrow q_{\max}(G) + 8 = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \Rightarrow q_{\max}(G) = 36 - 8 = 28$$

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

بیشترین قدرت نفوذ مربوط به گاما و کمترین قدرت نفوذ مربوط به آلفا است.

۴۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

با رسیدن دو تپ در شکل «الف» تداخل ویرانگر و در شکل «ب» تداخل سازنده رخ می‌دهد و بعد از همپوشانی همواره دو موج در جهت حرکت اولیه خود به مسیر ادامه می‌دهند.

۴۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

انرژی مکانیکی سامانه طبق رابطه $E = \frac{1}{2} k A^2$ (چون دامنه ثابت است و به جرم هم بستگی ندارد) ثابت می‌ماند.

۴۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

موارد «الف» و «ت» درست است.

بررسی موارد نادرست:

(ب) در دماهای معمولی بیشتر تابش گسیل شده در ناحیه فروسرخ است.

(پ) همه اجسام در هر دمایی باشند از خود تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند.

۴۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

ابتدا به کمک قانون کولن نسبت $\frac{k}{r^2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \frac{6/4 \times 10^{-2}}{r^2} = \frac{k \times 5 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{r^2} \Rightarrow \frac{k}{r^2} = \frac{6/4 \times 10^{-2}}{4 \times 5 \times 10^{-12}} \quad (1) \text{ رابطه}$$

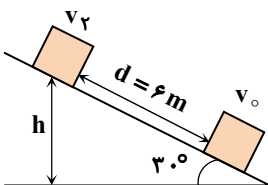
حال از رابطه $E = \frac{kq}{r^2}$ داریم:

$$E = \frac{kq}{r^2} \xrightarrow{r_2 = 2r} \xrightarrow{(1)} E = \frac{6/4 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-6}}{4 \times 5 \times 10^{-12} \times 4} = 0/4 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۴۶- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا h را محاسبه می‌کنیم:



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow h = 3 \text{ m}$$

حال از پایستگی انرژی مکانیکی در طول مسیر داریم:

$$E_f - E_i = W_f \Rightarrow (U_f + K_f) - (U_i + K_i) = W_f \Rightarrow mgh - \frac{1}{2} m v_i^2 = W_f$$

$$\Rightarrow m(10)(3) - \frac{1}{2} m(10)^2 = W_f \Rightarrow W_f = -20 \text{ m J}$$

$$\frac{W_f}{K_i} \times 100 = \frac{-20 \text{ m}}{50 \text{ m}} \times 100 = -40\%$$

سؤال از ما درصد انرژی تلف شده به تغییرات انرژی جنبشی اولیه را خواسته:

۴۷- پاسخ: گزینه ۴

مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

فقط مورد «الف» نادرست است. جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده هسته اندکی کمتر است. بقیه موارد عیناً جملات کتاب درسی است.

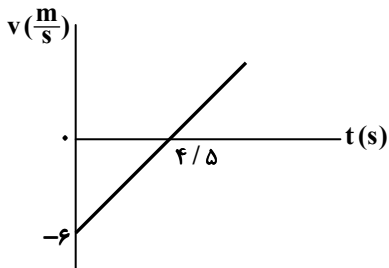
۴۸- پاسخ: گزینه ۱

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

با مقایسه معادله صورت سؤال با معادله مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x &= \frac{2}{3}t^2 - 6t + 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -6 \frac{m}{s}, x_0 = 15 m \end{cases}$$

معادله سرعت- زمان را نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



$$v = at + v_0 = \frac{4}{3}t - 6$$

$$\frac{4}{3}t - 6 = 0 \Rightarrow t = 4/5 s$$

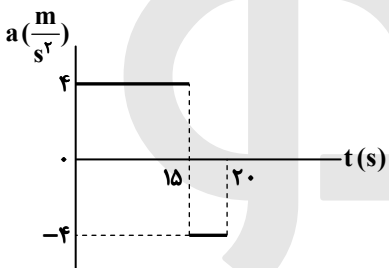
همان‌طور که از نمودار مشخص است از لحظه $t = 4/5 s$ به بعد متحرک در جهت محور x حرکت کرده و در حال دور شدن از مبدأ است. پس در لحظه $t = 4/5 s$ متحرک کمترین

$$\text{فاصله را از مبدأ دارد. پس: } x = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{5} \right)^2 - 6 \left(\frac{4}{5} \right) + 15 = 1/5 m$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۹- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار شتاب- زمان را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم سطح زیر نمودار شتاب- زمان برابر تغییرات سرعت است پس:

$$\Delta v = S = (15 \times 4) - (5 \times 4) = 60 - 20 = 40 \frac{m}{s}$$

حال شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40}{20} = 2 \frac{m}{s^2}$$

۵۰- پاسخ: گزینه ۴

مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا به کمک مثلث NOM شتاب حرکت متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$a_B = \frac{0 - (-20)}{10} = 2 \frac{m}{s^2}$$

چون متحرک B با شتاب ثابت حرکت می‌کند پس در تمام مدت حرکت شتاب

$$2 \frac{m}{s^2} \text{ دارد.}$$

$$a_B = \frac{v_A - 0}{15 - 10} \Rightarrow v_A = 10 \frac{m}{s}$$

در لحظه $t = 5 s$ دو متحرک در یک مکان قرار دارند، پس:

$$x_A = x_B \Rightarrow v_A t + x_{0A} = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0B} t + x_{0B}$$

$$\Rightarrow |x_{0A} - x_{0B}| = \left| \frac{1}{2} (2) (5)^2 + (-20 \times 5) - (10 \times 5) \right| = |25 - 100 - 50| = 125 m$$

پس در لحظه $t = 0 s$ فاصله دو متحرک از هم ۱۲۵ متر بوده است.

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 12.5 = 5t^2 \Rightarrow t = 5s$$

پس سؤال سرعت متوسط را در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 5s$ می‌خواهد.

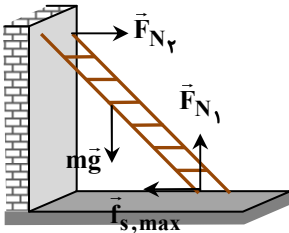
$$v_1 = 10 \times 3 + 0 = 30 \frac{m}{s}, \quad v_2 = 10 \times 5 = 50 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{30 + 50}{2} = 40 \frac{m}{s}$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

در راستای قائم و افقی حرکت نداریم. پس:



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{N_y} = mg = 480N$$

$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = F_{N_x}$$

$$R = \sqrt{F_{N_y}^2 + f_{s,max}^2} = \sqrt{F_{N_y}^2 + (F_{N_x} \cdot \mu_s)^2}$$

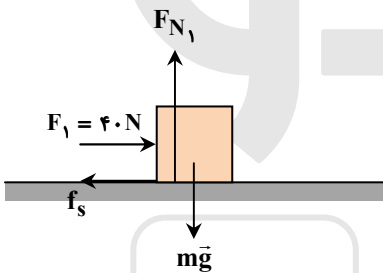
$$\Rightarrow 120\sqrt{17} = F_{N_y} \sqrt{1 + \mu_s^2} = 480 \sqrt{1 + \mu_s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(120)^2 \times 17}{(480)^2} = 1 + \mu_s^2 \Rightarrow \frac{120 \times 120 \times 17}{480 \times 480} - 1 = \mu_s^2 \Rightarrow \mu_s^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \mu_s = \frac{1}{4} = 0.25$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۳- پاسخ: گزینه ۲

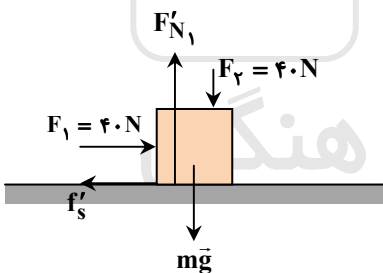
در هر دو حالت جعبه ساکن است، یعنی:



$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_1 = f_s \Rightarrow f_s = 40N$$

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{N_y} = mg = 80N$$

$$R_1 = \sqrt{f_s^2 + F_{N_y}^2} \Rightarrow R_1 = \sqrt{40^2 + 80^2} = 40\sqrt{5}N$$



$$F'_{net,x} = 0 \Rightarrow F_1 = f'_s = 40N$$

$$F'_{net,y} = 0 \Rightarrow F'_{N_y} = F_y + mg = 40 + 80 = 120N$$

$$R_2 = \sqrt{f'_s{}^2 + F'_{N_y}{}^2} = \sqrt{(40)^2 + (120)^2} = 40\sqrt{10}N$$

بنابراین نیروی اصطکاک در هر دو حالت برابر $40N$ است و نسبت R_2 به R_1 برابر است با:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{40\sqrt{10}}{40\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۴- پاسخ: گزینه ۱

به کمک نمودار، شیب خط که برابر با $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ است را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-18}{5} = -3.6 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

می‌دانیم $F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ است، پس:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma \Rightarrow |-3.6| = 0.45a \Rightarrow a = 8 \frac{m}{s^2}$$

۵۵- پاسخ: گزینه ۳

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}} T \propto \frac{1}{v^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{v_B}{v_A}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۴

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

ابتدا مکان نوسانگر را در $t = 0.07\pi$ s به دست می آوریم:

$$x = 0.04 \cos \left(\frac{v}{1.0} \pi \right) = 0$$

در $x = 0$ نوسانگر در نقطه تعادل قرار دارد و دارای سرعت ماکزیمم است. پس:

$$v_{\max} = A\omega = 0.04 \times 50 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۳

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

ابتدا سرعت نوسانگر را حساب می کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{m}} = \sqrt{\frac{10 \times 0.05}{0.2}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال طبق رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5}{20} = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۲

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow 600 = \frac{n \times 180}{2 \times 0.6} \Rightarrow n = 4 \text{ هماهنگ چهارم است.}$$

$$\lambda = \frac{\text{صوت}}{f} = \frac{336}{600} = 0.56 \text{ m} = 56 \text{ cm}$$

۵۹- پاسخ: گزینه ۴

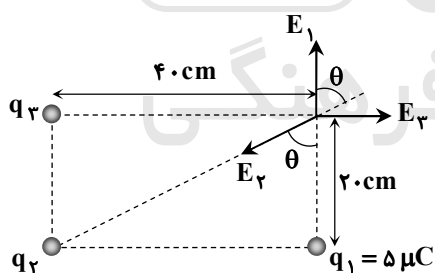
مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow 5/175 = \frac{4/14 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = 2/4 \times 10^{-7} \text{ m} = 240 \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{400}{3} \text{ nm}$$

۶۰- پاسخ: گزینه ۲

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

چون میدان E_2 در راستای قطر مستطیل است، پس حتماً E_2 باید به سمت راست باشد چون E_1 به سمت بالا است.

$$\tan \theta = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \tan \theta = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow E_2 = 2E_1$$

حال روابط E_1 و E_2 را می نویسیم:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{k \times 5}{2^2}, E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{kq_2}{4^2}$$

$$\Rightarrow \frac{kq_2}{4^2} = 2 \left(\frac{k \times 5}{2^2} \right) \Rightarrow q_2 = 4 \mu\text{C}$$

۶۱- پاسخ: گزینه ۱

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در حالت اول داریم:

$$F = \frac{kq_1(6q_1)}{r^2} = \frac{6kq_1^2}{r^2}$$

در حالت دوم که بارها با هم تماس پیدا می کنند:

$$\begin{cases} q'_1 = q_1 - 3q_1 = -2q_1 \\ q'_2 = -6q_1 - (-3q_1) = -3q_1 \end{cases} \Rightarrow \text{چون هر دو بار منفی می شود، نیروی بین آن ها دافعه است.}$$

$$F' = \frac{k|q'_1||q'_2|}{r^2} = \frac{k(2q_1)(3q_1)}{r^2} = \frac{6kq_1^2}{r^2}$$

پس F و F' برابر هستند و نسبت آن ها برابر ۱ است.

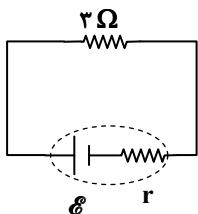
۶۲- پاسخ: گزینه ۳

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

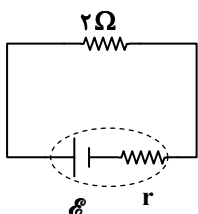
با بستن کلید مقاومت 6Ω به مدار اضافه می‌شود. در حالت کلید باز و کلید بسته داریم:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3+r} \text{ (کلید باز)}, I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2+r} \text{ (کلید بسته)}$$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری در هر دو حالت با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل برابر است، پس:



$$\Rightarrow V_1 = I_1 R_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{3+r} (3) = \frac{3\mathcal{E}}{r+3}$$



$$\Rightarrow V_2 = I_2 R_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{2+r} (2) = \frac{2\mathcal{E}}{r+2}$$

طبق صورت سؤال با بستن کلید، اختلاف پتانسیل باتری ۲۰٪ کاهش می‌یابد. پس:

$$V_2 = 0.8 V_1 \Rightarrow \frac{2\mathcal{E}}{r+2} = 0.8 \frac{3\mathcal{E}}{3+r} \Rightarrow 2/4(r+2) = 2(r+3) \Rightarrow r = 3\Omega$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۳- پاسخ: گزینه ۲

طبق صورت سؤال $P_{3\Omega} = P_{12\Omega}$ ، پس:

$$\left. \begin{aligned} P_{3\Omega} &= RI^2 = 3I^2 \\ P_{12\Omega} &= R'I'^2 = 12I'^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12I'^2 = 3I^2 \Rightarrow I = 2I' \Rightarrow I' = \frac{I}{2}$$

جریان از مقاومت 12Ω برابر $\frac{I}{2}$ است پس در شاخه R هم جریان برابر $\frac{I}{2}$ است، پس $R = 12\Omega$ می‌شود. حال مقاومت معادل را به دستمی‌آوریم و به کمک رابطه $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$ جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{eq} = 6 + \frac{12 \times 12}{12 + 12} + 3 = 6 + 6 + 3 = 15\Omega$$

$$I = \frac{12}{15 + 3} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} A$$

در نهایت برای محاسبه اختلاف پتانسیل باتری داریم:

$$V = \mathcal{E} - Ir = 12 - \left(\frac{2}{3} \times 3\right) = 10V$$

۶۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۲)

طبق متن کتاب درسی گزینه ۴ درست است.

۶۵- پاسخ: گزینه ۱

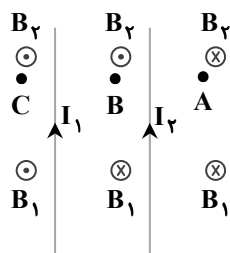
مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

طبق قاعده دست راست در سیم مستقیم حامل جریان، جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم‌ها را

مشخص می‌کنیم:

همان‌طور که در شکل می‌بینید چون نقطه B به سیم ۲ نزدیک‌تر است، پس میدان مغناطیسی سیم ۲

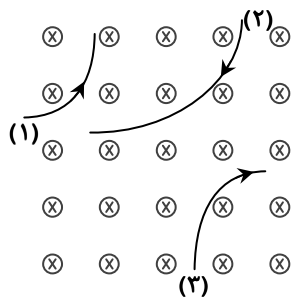
قوی‌تر است پس:



$$A \rightarrow \otimes$$

$$B \rightarrow \odot$$

$$C \rightarrow \odot$$



مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۶- پاسخ: گزینه ۴

به کمک قانون دست راست، جهت حرکت هر ذره را بررسی می‌کنیم، اگر جهت حرکت مطابق قانون دست راست باشد، ذره مثبت و اگر جهت برعکس بود ذره منفی است. همان‌طور که از شکل مشخص است ذره (۱) مثبت و ذره‌های (۲) و (۳) منفی هستند (درستی «ت» و رد عبارتهای «الف» و «پ»)

اما درستی عبارت «ب»: با توجه به اینکه مسیر حرکت ذره (۲) بیشتر منحرف شده است، یعنی جرم بیشتری دارد.

مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۷- پاسخ: گزینه ۴

طبق متن صفحه ۱۲۱ کتاب درسی گزینه ۴ صحیح است.

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۸- پاسخ: گزینه ۳

طبق قانون القای فاراده داریم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow 1/2 = -500 \times A \times 1 \times (-0/6) \Rightarrow A = \frac{1/2}{500 \times 0/6} = \frac{2}{500} \text{ m}^2 = 4 \cdot \text{cm}^2$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

۶۹- پاسخ: گزینه ۲

از رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} r_A &= 0.75 r_B \\ m_A &= \frac{1}{2} m_B \\ \rho &= \frac{m}{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} = \frac{m_A}{2m_A} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{22}{27} \Rightarrow \rho_A = \frac{22}{27} \rho_B$$

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{\rho_A - \rho_B}{\rho_B} \times 100 = \frac{\frac{22}{27} \rho_B - \rho_B}{\rho_B} \times 100 = \frac{5}{27} \times 100 = 18.5\%$$

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۰- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار $P_0 = 1.0^5 P_a$ می‌باشد.

فشار در عمق ۱۶۰ سانتی‌متری را داریم، پس:

$$P = P_0 + \rho gh \Rightarrow 1/2 \times 1.0^5 = 1.0^5 + \rho(10)(1/6) \Rightarrow \rho = 1250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1/25 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

فشار پیمانه‌ای $P = P_0$ است که برابر ρgh است:

$$P - P_0 = P_g = 1250 \times 10 \times 1 = 12500 \text{ Pa}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

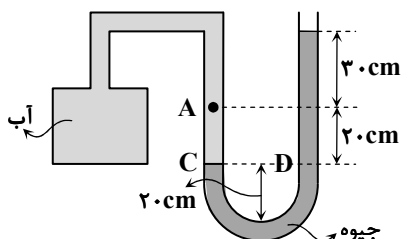
۷۱- پاسخ: گزینه ۱

دو نقطه هم‌تراز D و C را در نظر می‌گیریم:

$$P_C = P_D \Rightarrow P_A + (\rho gh)_{\text{آب}} = (\rho gh)_{\text{جیوه}} + P_0$$

$$\Rightarrow P_A + 10^3 \times 10 \times 0/2 = 13600 \times 10 \times 0/5 + P_0$$

$$\Rightarrow P_A - P_0 = 13600 \times 5 - 2 \times 10^3 = 66 \times 10^3 \text{ Pa} = 66 \text{ kPa}$$



مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۷۲- پاسخ: گزینه ۴

تک تک موارد را بررسی می‌کنیم:

(الف) درست؛ انرژی پتانسیل گرانشی به مسیر حرکت بستگی ندارد.

ب و پ) همان‌طور که مشخص است ارتفاع B کاهش یافته و ارتفاع A افزایش یافته؛ پس طبق رابطه $W = -mg\Delta h$ کار نیروی وزن B مثبت و کار نیروی وزن A منفی است. («ب» نادرست و «پ» درست)

(ت) نادرست؛ کار نیروی وزن A و B وابسته به تغییر ارتفاع آن‌هاست و چون هر دو یک طبقه جابه‌جا شده‌اند پس $|W_A| = |W_B|$

۷۳- پاسخ: گزینه ۱

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

وقتی بنزین از ظرف سرریز می‌شود که افزایش حجم بیشتر از فضای خالی باشد، پس:

$$V_{\text{قسمت خالی}} = Ah = A(0.25) \quad , \quad \Delta V > V_{\text{قسمت خالی}}$$

$$\Delta V = V_f \beta \Delta T \Rightarrow A(0.25) = \Delta(A)(10^{-3}) \Delta T \Rightarrow \Delta T = 50 \text{ K}$$

$$\Delta T = T_f - T_i \Rightarrow 50 = T_f - 263 \Rightarrow T_f = 313 \text{ K}$$

$$T_f = \theta_f + 273 \Rightarrow \theta_f = 40^\circ \text{C}$$

$$F = \frac{1}{5} \theta + 32 = \frac{1}{5} (40) + 32 = 104^\circ \text{F}$$

۷۴- پاسخ: گزینه ۳

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{\frac{1}{4} P_i (\Delta V_i)}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{5}{4} T_i \Rightarrow T_f > T_i$$

چون $\Delta T > 0$ است، پس $\Delta U > 0$ است:

$$\Delta U = Q + W > 0$$

۷۵- پاسخ: گزینه ۲

مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

در فرایند هم‌دما $\Delta U = 0$ است، پس $Q = -W$ است. (گزینه ۱ نادرست است.)در فرایند انبساط بی‌دررو $Q = 0$ است، پس $\Delta U = W$ است. (گزینه ۲ درست است.)در چرخه کامل $\Delta U = 0$ است، پس $Q = -W$ است. (گزینه ۳ نادرست است.)در فرایند هم‌فشار $\Delta U = Q + W$ است. (گزینه ۴ نادرست است.)

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

عنصر مد نظر ${}_{31}\text{Ga}$ است: $[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^1$ (۱) نادرست: آرایش الکترونی $\text{Ga}^{3+} \rightarrow 3d^{10}$ هم مشابه Zn^{2+} و هم Cu^+ است.

(۲) درست: در گروه ۱۳ شمار الکترون‌های عنصر قبلی و بعدی: ۱۳ و ۴۹ بوده که شمار الکترون‌های اتم A میانگین شمار الکترون‌های آنها است.

(۳) نادرست: اگر عنصر X از عناصر واسطه باشد $([\text{Ar}] 3d^1 4s^2)$ با عنصر A $([\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^1)$ تعداد الکترون ظرفیتی برابر دارد ولی به یقین هم‌گروه نیستند.

(۴) نادرست: گالیم اشتراک نمی‌گذارد و فلز است.

۷۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱) و شیمی ۲ (فصل ۱)

نکته: مستلزم تسلط نسبی بر جدول و عدد اتمی است.

(۱) نادرست: کلسیم

$${}_{20}\text{Ca}: [\text{Ar}] 4s^2 : 2 \times (4+0) = 8 \quad *$$

(۲) نادرست: Si و Ge هر دو شبه‌فلزهای گروه ۱۴ جدول تناوبی هستند که رسانایی الکتریکی کمی دارند.

$${}_{14}\text{Si}: [\text{Ne}] 3s^2 3p^2 : 2(3+0) + 2(3+1) = 14 \quad *$$

$${}_{32}\text{Ge}: [\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^2 : 2(4+0) + 2(4+1) = 18 \quad *$$

(۳) درست: هالوژنی که تنها در دمای بالاتر از 200°C (473 K) واکنش می‌دهد برم است:

$${}_{35}\text{Br}: [\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^5 : 2(4+0) + 5(4+1) = 33 \quad \checkmark$$

(۴) نادرست: در دوره چهارم دو عنصر Cr و Cu از قاعده آفبا پیروی نمی‌کنند:

$${}_{24}\text{Cr}: [\text{Ar}] 3d^5 4s^1 : 5(3+2) + 1(4+0) = 29 \quad *$$

$${}_{29}\text{Cu}: [\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1 : 10(3+2) + 1(4+0) = 54 \quad *$$

۷۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱) و شیمی ۲ (فصل ۲)

۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲
Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge
۴s ²	۳d ¹ ۴s ²	۳d ² ۴s ²	۳d ³ ۴s ²	۳d ⁵ ۴s ¹	۳d ⁵ ۴s ²	۳d ⁶ ۴s ²	۳d ⁷ ۴s ²	۳d ⁸ ۴s ²	۳d ¹⁰ ۴s ¹	۳d ¹⁰ ۴s ²	۳d ¹⁰ ۴s ² ۴p ¹	۳d ¹⁰ ۴s ² ۴p ²
✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	×	✓	×	✓

(الف) نادرست؛ ۱۰ عنصر در بیرونی ترین زیر لایه خود، دو الکترون دارند.

(ب) درست؛ با افزایش عدد اتمی در دوره، خصلت نافلزلی افزایش و خصلت فلزی کاهش می یابد. با افزایش عدد اتمی در گروه، خصلت نافلزلی کاهش و خصلت فلزی افزایش می یابد.

(پ) نادرست؛ عنصرهای هر گروه می توانند حالت فیزیکی متفاوت داشته باشند اما لزوماً خواص شیمیایی کاملاً یکسان ندارند.

(ت) درست؛ Si (سیلیسیم) در دوره سوم فقط الکترون به اشتراک می گذارد

۷۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

برای توصیف یک نمونه گاز باید مقدار، دما و فشار آن گاز مشخص شده باشد. تنها در گزینه ۱ همه این مقادیر آمده است.

۸۰- پاسخ: گزینه ۱ و ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

«الف»، «ب» و «ت» با هم ساختار یکسان دارند.

اولین عضو خانواده آلکنها: C₂H₄ اتن است.(ب) ۴- اتیل، ۳ و ۵ دی متیل هپتان: C₁₁H₂₄(الف) ۴- اتیل، ۳ و ۵ دی متیل هپتان: C₁₁H₂₄(ت) ۵- اتیل، ۲ و ۴ دی متیل هپتان: C₁₁H₂₄(پ) ۴- اتیل، ۲- متیل هگزان: C₉H₂₀

۸۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

(الف) درست؛ O₃ (-۱۸۳) و Ar (-۱۸۶) نقطه جوش بالاتر از -۱۹۲°C دارند و در این دما به حالت مایع هستند ولی N₂ (-۱۹۶) به حالت گاز قرار دارد.

(ب) نادرست؛ هلیوم از گاز طبیعی آسان تر جدا می شود و در کشور ما تولید نمی شود اما آرگون در پتروشیمی شیراز با خلوص بسیار زیاد از طریق تقطیر جزء به جزء هوای مایع تهیه می شود.

(پ) درست؛ درصد هلیوم در هوا ۰/۰۰۵ درصد است در حالی که حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را هلیوم تشکیل می دهد.

(ت) نادرست؛ نقطه جوش هلیوم -۲۶۹°C است و در دمای -۲۰۰°C به حالت گاز است.

۸۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)



راه حل اول:

$$? \text{ g Fe} : 200 \text{ g محلول} \times \frac{4/9 \text{ g H}_2\text{SO}_4}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{98 \text{ g H}_2\text{SO}_4} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{2 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} \times \frac{56 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol Fe}} = 2/8 \text{ g Fe}$$

راه حل دوم:

$$\frac{200 \times 4/9 \times 10^{-2}}{2 \times 98} = \frac{m_{\text{Fe}}}{56 \times 1} \Rightarrow m_{\text{Fe}} = 2/8 \text{ g}$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

(الف) نادرست؛ میله شیشه ای بار منفی پیدا می کند، پس مولکول آب از سر مثبت جذب می شود.

(ب) نادرست؛ HCl قطبی است و نقطه جوش آن از F₂ بالاتر است، پس آسان تر مایع می شود.(پ) درست؛ زیرا CO₂ بر اثر انحلال با آب واکنش می دهد.

(ت) درست؛ گشتاور دوقطبی آب ۱/۸۵ D و هیدروژن سولفید ۰/۹۷ D است.

۸۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

$$8/64 \text{ g SO}_4^{2-} \times \frac{1 \text{ mol SO}_4^{2-}}{96 \text{ g SO}_4^{2-}} \times \frac{1 \text{ mol Fe}_2(\text{SO}_4)_3}{3 \text{ mol SO}_4^{2-}} = 0/03 \text{ mol Fe}_2(\text{SO}_4)_3 \Rightarrow \text{FeBr}_3 = 2 \times 0/03 = 0/06 \text{ mol FeBr}_3$$

$$\left. \begin{aligned} 0/03 \text{ mol Fe}_2(\text{SO}_4)_3 \times \frac{2 \text{ mol Fe}^{3+}}{1 \text{ mol Fe}_2(\text{SO}_4)_3} \times \frac{56 \text{ g Fe}^{3+}}{1 \text{ mol Fe}^{3+}} &= 3/36 \text{ g Fe}^{3+} \\ 0/06 \text{ mol FeBr}_3 \times \frac{1 \text{ mol Fe}^{3+}}{1 \text{ mol FeBr}_3} \times \frac{56 \text{ g Fe}^{3+}}{1 \text{ mol Fe}^{3+}} &= 3/36 \text{ g Fe}^{3+} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6/72 \text{ g Fe}^{3+}$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم ماده حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{6/72}{400} \times 10^6 = 16800$$

۸۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

اگر محلول سیر نشده‌ای از $K_2Cr_2O_7$ داشته باشیم، به این معناست که در دمای $m^\circ C$ ، زیر منحنی انحلال پذیری این ماده قرار داریم.
(۱) نادرست؛ مثلاً در دمای $25^\circ C$ ، اگر نقطه مربوط به $K_2Cr_2O_7$ را $10g$ در نظر بگیریم (سیر نشده) می‌توان برای $CaCl_2$ نقطه $90g$ را در نظر گرفت (سیر شده).

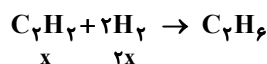
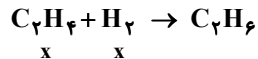
(۲) نادرست؛ در هر دمایی در محدوده $0^\circ C$ تا $35^\circ C$ می‌توان محلولی از $NaNO_3$ در نظر گرفت.

(۳) نادرست؛ عبارت برای محدوده دمای $m > 73^\circ C$ درست است.

(۴) درست؛ از آنجا که منحنی سرب (II) نیترات بالاتر از پتاسیم دی کرومات قرار دارد، هر محلول سیر نشده از $K_2Cr_2O_7$ پایین‌تر از منحنی $Pb(NO_3)_2$ قرار می‌گیرد.

۸۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



$$3x \text{ mol } H_2 \times \frac{2g H_2}{1 \text{ mol } H_2} = 0.6g H_2 \Rightarrow x = 0.1 \text{ mol } C_2H_4 \times \frac{28g C_2H_4}{1 \text{ mol } C_2H_4} = 2.8g C_2H_4$$

۸۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

عنصر A یا در گروه ۱۵ (As یا Sb) یا آرسنیک و آنتیموان است و یا در گروه ۱۶ (Te یا PO) یا تلوریم و پلونیوم است.

(الف) درست؛ مثلاً As

(ب) نادرست؛ اگر با S هم‌گروه باشد، عدد اتمی آن ۵۲ است.

(پ) نادرست؛ نخستین نافلز جامد جدول کربن است و با هیچ کدام هم‌گروه نیست.

(ت) درست؛ هالوژن جامد جدول I است، دومین فلز گروه ۱۴، Pb است.

۸۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

ابتدا معادله را موازنه می‌کنیم:



راه حل اول:

$$\frac{m(g) \text{ خالص}}{2 \times 136} = \frac{13/44}{22/4 \times 2} \Rightarrow m = 54/4g$$

راه حل دوم:

$$?g CaSO_4 \text{ خالص} \times \frac{13/44 LG}{22/4 LG} \times \frac{2 \text{ mol } CaSO_4}{2 \text{ mol } G} \times \frac{136g CaSO_4}{1 \text{ mol } CaSO_4} = 54/4g CaSO_4 \text{ خالص}$$

$$P = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 = \frac{54/4}{68} \times 100 = 79.4\%$$

۸۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

فرایند میعان، گرماده است در حالی که فرایندهای فرازش، ذوب و تبخیر گرماگیر هستند.

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$(\Delta H_{H-H} + \Delta H_{Cl-Cl}) - (2\Delta H_{H-Cl}) = -186 kJ$$

$$(\Delta H_{H-H} + \Delta H_{F-F}) - (2\Delta H_{H-F}) = -544 kJ$$

$$\frac{a : \Delta H_{Cl-Cl}}{b : \Delta H_{F-F}} = 1/5 \Rightarrow a = \frac{3}{2} b$$

$$\underbrace{\Delta H_{H-Cl}}_c + \underbrace{\Delta H_{H-F}}_d = 1000 kJ \Rightarrow d = 1000 - c$$

$$\left. \begin{aligned} 435 + a - 2c &= -186 \Rightarrow \frac{3}{2}b - 2c = -621 \\ 435 + b - 2d &= -544 \Rightarrow b - 2(1000 - c) = -979 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 160$$

۹۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

(۱) از آنجا که سرعت متوسط تغییر مولهای ماده A، ۳ برابر سرعت متوسط تغییر مولهای ماده D است، ضریب نیز به همین نسبت است.

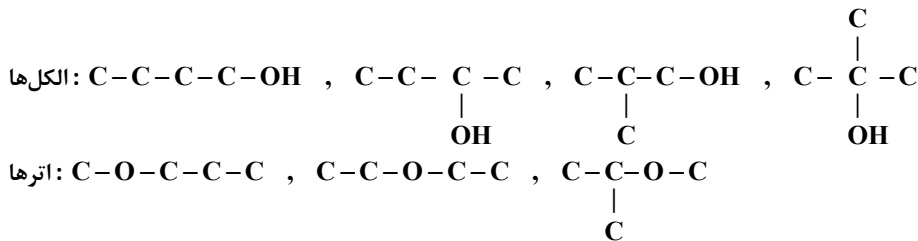
(۲) نادرست؛ کاتالیزگر به یک نسبت سرعت را افزایش می‌دهد.

(۳) نادرست؛ به شرطی این عبارت درست است که ضریب D، ۱ و ضریب A، ۳ باشد.

(۴) نادرست؛ از سرعت متوسط تغییرات مول نمی‌توان نتیجه گرفت که هر دو واکنش دهنده یا فرآورده هستند.

۹۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)



۹۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۲)

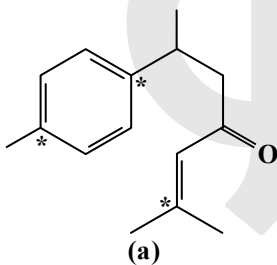


الف) درست

$$\frac{a \text{ مولکول} = 15 \times 12}{a \text{ مولکول} = 20 + 16} = 5$$

(ب) درست؛ در مولکول a، ۴ گروه CH_3 وجود دارد و در مولکول b هم ۴ گروه OH وجود دارد.

(پ) نادرست؛ در مولکول a، ۳ اتم کربن عدد اکسایش صفر دارند (*دارها) در حالی که در مولکول b، کربن با عدد اکسایش صفر وجود ندارد.



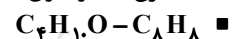
(ت) نادرست

$$C_9H_{12}O_5 \Rightarrow \text{اختلاف دو فرمول} = (36 + 12) - (30) = 18$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

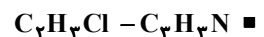
۹۴- پاسخ: گزینه ۱

استیرین بوتانول



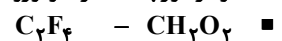
۱۵ ۱۶

سیانواتن وینیل کلرید



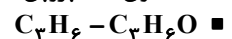
۶ ۷

جوهر مورچه تترافلوئورواتن



۶ ۵

استون پروپن



۹ ۱۰

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۴

(۱) نادرست؛ واکنش لوله‌بازکن گرماده است.

(۲) نادرست؛ هرچه خاصیت آب‌گریزی پارچه بیشتر باشد، ناقطبی‌تر است و چسبندگی لکه چربی به آن بیشتر است. در نتیجه پاک کردن آن به وسیله صابون دشوارتر است.

(۳) نادرست؛ سر آب‌گریز صابون هم جزو بخش آنیونی صابون است.

(۴) درست؛ صابون از حذف یک H از اسید چرب و اضافه شدن Na^+ یا K^+ یا NH_4^+ پدید می‌آید، در نتیجه جرم مولی آن افزایش می‌یابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۹۶- پاسخ: گزینه ۱

(۱) نادرست: TiO_2 و Fe_2O_3 به عنوان رنگ دانه استفاده می شوند.

(۲) درست

(۳) درست

(۴) درست

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۷- پاسخ: گزینه ۲

$$1) \text{DOH} : M_{\text{DOH}} \times \frac{0.12}{100} = [\text{OH}^-]$$

$$2) \text{AOH} : M_{\text{AOH}} \times \frac{0.12}{100} = [\text{OH}^-]$$

$$\text{pH}_{\text{DOH}} + 1 = \text{pH}_{\text{AOH}} \Rightarrow \frac{[\text{OH}^-]_{\text{AOH}}}{[\text{OH}^-]_{\text{DOH}}} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{M_{\text{AOH}} \times 0.12}{M_{\text{DOH}} \times 0.12} = 10 \Rightarrow \frac{M_{\text{AOH}}}{M_{\text{DOH}}} = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۸- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا پتانسیل های کاهش را مرتب می کنیم:

$$E^\circ(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) = +0.8 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) = -0.76 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{V}^{2+} / \text{V}) = -1.2 \text{ V}$$

(۱) نادرست: اگر X الکتروود Ag باشد، Ag نقش کاتد دارد و معادله کلی سلول به صورت زیر است:



$$0.12 \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{65 \text{ g Zn}}{1 \text{ mol Zn}} = 0.65 \text{ g}$$
 کاهش جرم تیغه روی

(۲) نادرست: اگر X الکتروود V باشد، وانادیم نقش آند دارد و جهت حرکت الکترون ها از راست به چپ (از آند به کاتد) است در حالی که جهت حرکت آنیون های محلول مقابل (محلول روی) به سمت آند (چپ به راست) است و آنیون های محلول وانادیم جابه جا نمی شوند (کاتیون های محلول وانادیم جذب کاتد می شوند).

(۳) نادرست: اگر X الکتروود Ag باشد، نقره کاتد است و کاتیون های روی را جذب می کند در حالی که کاتیون های محلول کاتد جابه جا نمی شوند.

(۴) درست: اگر X الکتروود V باشد، آند است. معادله کلی سلول به صورت $\text{V} + \text{Zn}^{2+} \rightarrow \text{V}^{2+} + \text{Zn}$ است. کاهش یافته، پس اکسند است و E° سلول برابر است با:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = \text{emf} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -0.76 - (-1.2) = +0.44 \text{ V}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۹- پاسخ: گزینه ۱

(۱) نادرست: کاتد، الکتروود نقره است نه محلول نقره.

(۲) درست

(۳) درست

(۴) درست: تولید قوطی های آلومینیومی از قوطی های کهنه فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا پتانسیل های کاهش را مرتب می کنیم:

$$E^\circ(\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}) = -0.4 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{V}^{3+} / \text{V}^{2+}) = -0.26 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) = -1.18 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{V}^{2+} / \text{V}) = -1.2 \text{ V}$$

واکنشی در جهت طبیعی انجام نمی شود که از اتصال دو واکنش دهنده خط با شیب مثبت شکل گیرد؛ در این صورت emf سلول منفی می شود.

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$\text{HCl : mol} = \text{اسید} = 0.025 \text{ L} \times \frac{0.2 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.005 \text{ mol}$$

$$\text{KOH : mol} = \text{باز} = 0.01 \text{ L} \times \frac{0.1 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.001 \text{ mol KOH}$$

$$\text{NaOH : mol} = \text{باز} = \frac{4 \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}}}{1 \text{ L}} \times 0.015 \text{ L} = 0.0015 \text{ mol NaOH}$$

$$\text{H}^+ \text{ مول} = (\text{مول اسید}) - (\text{مول بازها}) = 0.005 - (0.001 + 0.0015) = 0.0025 \text{ mol}$$

$$\text{pH} = 1/7 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/7} = 10^{-2} \times 10^{1/7} = 2 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$2 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times V_{\text{نهایی}} = 0.0025 \text{ mol} \Rightarrow V_{\text{نهایی}} = 1/25 \text{ L}$$

$$\text{حجم آب} = \text{حجم نهایی} - (\text{مجموع حجم اسید و بازها}) = 125 \text{ mL} - (\underbrace{25 \text{ mL}}_{\text{اسید}} + \underbrace{10 \text{ mL}}_{\text{KOH}} + \underbrace{15 \text{ mL}}_{\text{NaOH}}) = 75 \text{ mL}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳

(آ) می تواند SO_2 باشد.(ب) می تواند CO_2 باشد.(الف) درست؛ برای مثال اگر مولکول های (آ) و (ب)، SO_2 و CO_2 باشند، اتم مرکزی $\delta +$ است.(ب) نادرست؛ Li_2O یونی است.(پ) نادرست؛ اگر CO_2 را به SCO تبدیل کنیم اتم مرکزی باز هم $\delta +$ خواهد شد.(ت) درست؛ اگر به ساختار SO_2 به SO_3 تبدیل شود، مولکول ناطیلی خواهد شد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۲

$$\text{CO درصد کاهش} = \frac{5/99 - 0/61}{5/99} \times 100 \approx 89/8 \%$$

$$\text{CO کاهش مولی} = \frac{5/99 - 0/61}{28} = 0/19$$

$$\text{C}_8\text{H}_{18} \text{ کاهش مولی} = \frac{1/67 - 0/07}{114} = 0/014$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳) و شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۳

(۱) درست

(۲) درست؛ حلال چسب (اتیل استات) از واکنش اتانول با اتانویک اسید تولید می شود.

(۳) نادرست؛ اتن یکی از مهم ترین خوراک در صنایع پتروشیمی است نه پلی اتن

(۴) درست

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲

(۱) نادرست؛ افزایش دما در واکنش (I) که گرماگیر است باعث پیشرفت واکنش در جهت رفت و افزایش غلظت فراورده ها می شود.

(۲) درست؛ کاهش حجم ظرف غلظت همه گازها را (مستقل از جهت پیشرفت واکنش) افزایش می دهد. کاهش دما در واکنش (II) که گرماده است باعث پیشرفت واکنش در جهت رفت می شود.

(۳) نادرست؛ تغییر غلظت سبب تغییر K نمی شود. (K برای یک واکنش تعادلی در دمای معین، مقداری ثابت است).

(۴) نادرست؛ تغییر فشار (تغییر حجم) در واکنش (I) سبب جابه جایی تعادل نمی شود؛ زیرا شمار مول گازی در طرفین واکنش برابر است.