

۱- اگر مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جمله اول آن باشد، جمله سوم این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲) ✓

۳ (۱)

$$S_9 = \sqrt{3} S_3 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(q^9-1)}{\cancel{q-1}} = \sqrt{3} \times \frac{\cancel{a_1}(q^3-1)}{\cancel{q-1}} \Rightarrow q^9-1 = \sqrt{3}(q^3-1)$$

$$\Rightarrow (\cancel{q^3-1})(q^6+q^3+1) = \sqrt{3}(\cancel{q^3-1}) \quad \underline{q^3=t} \quad t^2+t-\sqrt{3}=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \end{array} \right.$$

$$q^3=-1 \quad \times, \quad q^3=1 \rightarrow q=1 \Rightarrow \frac{a_9}{a_1} = q^8 = \underline{1}$$

۲- اگر $x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9$ باشد، مقدار $(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2}$ کدام است؟

۸۰ (۴) ✓

۸۸ (۳)

۹۰ (۲)

۹۸ (۱)

$$x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9 \xrightarrow{+1} x^2+1 + \frac{10}{x^2+1} = 10 \quad \underline{x^2+1=t}$$

$$t + \frac{10}{t} = 10 \quad \xrightarrow{\text{تکثیر}} \quad t^2 + \frac{10}{t} + 10 = 10t \Rightarrow t^2 + \frac{10}{t} = 10t \quad \underline{101}$$

۳- A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟
 (۱) $B = U$ ✓ (۲) $A = U$ (۳) $B = A$ (۴) $A = \emptyset$

امتحان نزنید!

(۱) $B = U$ ✓ $B = U \rightarrow B' = \emptyset$

$A \cup B' = A \cup \emptyset = A$ (۱) $\Rightarrow (1) \subseteq (5)$ ✓
 $A \cap B = A \cap U = A$ (۵)

(۲) $A = U$ ✓ $A = U \Rightarrow \begin{cases} A \cup B' = U & (1) \\ A \cap B = B & (5) \end{cases} \rightarrow (1) \not\subseteq (2)$

(۳) $A = B$ ✓ $A = B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B' = A \cup A' = U & (1) \\ A \cap B = A \cap A = A & (5) \end{cases} \Rightarrow (1) \not\subseteq (3)$

(۴) $A = \emptyset$ ✓ $A = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \cup B' = \emptyset \cup B' = B' & (1) \\ A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset & (5) \end{cases} \Rightarrow (1) \not\subseteq (4)$

۴- گزاره $\sim p \Leftrightarrow q$ هم ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \quad (۲)$$

$$\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)] \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \quad (۱)$$

$$(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \quad (۳)$$

$$\overset{0}{\sim} p \Leftrightarrow \overset{0}{q} \rightarrow (>)$$

فرض کنیم $p: > , q: 0$

$$۱- (\overset{0}{\sim} p \wedge \overset{>}{q}) \wedge (\overset{0}{\sim} p \vee \overset{>}{q}) \Rightarrow 0$$

$$۲- \sim [\sim (\overset{0}{\sim} p \vee \overset{0}{q}) \vee (\overset{0}{\sim} p \wedge \overset{0}{q})] \Rightarrow \sim (>) = 0$$

$$۳- (\overset{0}{\sim} p \vee \overset{0}{q}) \vee (\overset{0}{\sim} p \wedge \overset{0}{q}) \Rightarrow 0$$

$$۴- \sim [\sim (\overset{0}{\sim} p \wedge \overset{0}{q}) \wedge (\overset{0}{\sim} p \vee \overset{0}{q})] \Rightarrow \sim (0) = > \quad \checkmark$$

۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۹ (۳) ✓

۲۰ (۲)

۲۱ (۱)

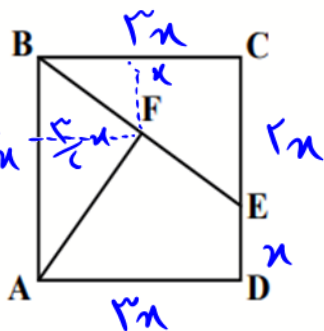
$$\text{اولاً : } S=0, P=2 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 2 \rightarrow \beta = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \beta^2 = \frac{4}{\alpha^2}$$

$$\therefore \frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{4}{5} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{5} \beta^3 = \frac{4}{5} \frac{\alpha}{\frac{4}{\alpha^2}} + \frac{1}{5} \beta^3$$

$$= \frac{1}{5} \alpha^3 + \frac{1}{5} \beta^3 = \frac{1}{5} (\alpha^3 + \beta^3) = \frac{1}{5} (S^3 - 3SP)$$

$$= \frac{1}{5} (125 - 3 \cdot 0) = \frac{125}{5} = 25$$

۶- در مربع شکل زیر، $CD = 2ED$ و نقطه F ، وسط پاره خط BE قرار دارد. اگر $AF = 5$ باشد، مساحت چهارضلعی $ADEF$ کدام است؟



$$8n^2 + \frac{9}{8}n^2 = 25$$

$$\rightarrow 25n^2 = 1 \sim \rightarrow n^2 = 2 \rightarrow n = 2$$

۱۰ (۱)

۱۵ (۲) ✓

۲۰ (۳)

۲۵ (۴)

$$S_{\text{چهارضلعی}} = S_{ABCD} - S_{BCE} - S_{ABF}$$

$$= 24 - \left(\frac{7 \times 4}{2}\right) - \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) = 24 - 14 - 6 = 4$$

۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m ، بیشترین مقدار تابع

f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱ ✓

(۲) ۲

(۱) ۳

$$mx^2 - 8x + 39 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \rightarrow m > \frac{16}{9} \\ a > 0 \rightarrow m > 0 \end{cases}$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2m} = \frac{4}{m} \rightarrow y_{\min} = \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + 39$$

$$= \frac{-16}{m} + 39 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{\frac{-16}{m} + 39}} = 1 \Rightarrow m = \frac{16}{16} = 1$$

$$\Rightarrow [m] = 1$$

۸- اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x) = x^5 + ax^3$ و $q(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2$ ، دوجمله‌ای $x^n + x^2$ باشد، مقدار na کدام است؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) -۲ ✓

$$q(x) = x^2(x^4 + 3x^2 + 2) = x^2(x+1)(x+2)$$

$$p(x) = x^3(x^2 + a)$$

$$\hookrightarrow \underline{n(a+1)} \therefore p(x) = x^3(x^2-1) = x \cdot \underline{x^2(x+1)(x-1)}$$

$$\therefore q, p \text{ هم‌فکری کنند} : x^2(x+1) = x^3 + x^2 \Rightarrow \boxed{n=2} \Rightarrow \underline{an=-2}$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = 0$$

$$۱) : f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$۲) : f(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow \boxed{x=2} & 0 \leq x \leq 2 \quad \checkmark \\ x+1=1 \rightarrow x=0 & -2 \leq x < 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$۳) : f(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \rightarrow \boxed{x=0} & 0 \leq x \leq 2 \quad \checkmark \\ x+1=-1 \rightarrow \boxed{x=-2} & -2 \leq x < 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

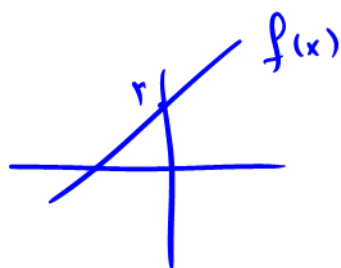
۱۰- تابع پیوسته f یک به یک بوده و وارون خود را در نقطه $A(a, f(a))$ قطع می کند. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} \text{ کدام است؟}$$

۴ (۴) $f'(a)$ ۳ (۳) a

۲ (۲)

۱ (۱) ✓



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

۱۱- اگر $\log(3x+1) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}} x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 ✓ (۳) 2 (۴) $\frac{1}{2}$

$$f(r_{n+1}) = (f_0)^2 - (f_r)^2 = \underbrace{(f_0 - f_r)}_{= f_0} \underbrace{(f_0 + f_r)}_{= 1}$$

$$= f(r_{n+1}) = f_0 \Rightarrow r_{n+1} = \frac{0}{c} \rightarrow r_n = \frac{c}{2} \rightarrow n = \frac{1}{c}$$

$$\therefore f_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = f_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = f_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\frac{1}{c}} = -2$$

۱۲- اگر $2\sin\alpha < \sin 2\alpha$ و $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) ✓ چهارم

$$2\sin\alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow 2\sin\alpha < 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$$

$$= \sin\alpha (1 - \cos\alpha) < 0 \rightarrow \boxed{\sin\alpha < 0} < \frac{1}{\epsilon}$$

^ (ع)

$$\frac{\cot}{\sin} = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} > 0 \rightarrow \cos\alpha > 0 < \frac{1}{\epsilon}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)}$ کدام است؟

○ $4\sqrt{3}$ (۴)

○ $2\sqrt{3}$ (۳) ✓

○ $4\sqrt{6}$ (۲)

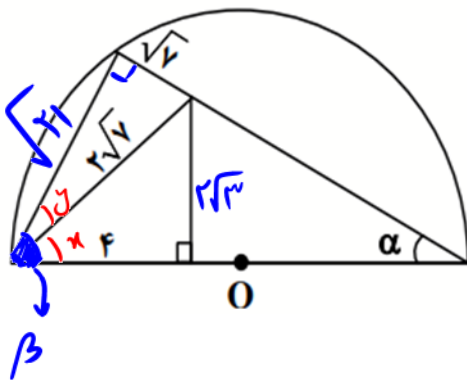
○ $2\sqrt{6}$ (۱)

$$\frac{-8 \cdot (170 + 10) + 2 \cos(90 + 10)}{28 \cdot (110 - 10) + 3 \sin(270 + 10)} = \frac{\cos 10 - 2 \sin 10}{2 \sin 10 + 3 \sin 10} \div \cos 10$$

$$\frac{1 - 2 \tan 10}{8 \tan 10} \quad \text{①}$$

پس: $\tan 10 = \tan(90 - 80) = \frac{\tan 90 - \tan 80}{1 + \tan 90 \cdot \tan 80} = 2 - \sqrt{c} \xrightarrow{\text{①}} \frac{\sqrt{c}}{8} = 2 - \sqrt{c}$

۱۴- در نیم دایره شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \tan \alpha = \cot \beta$

$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\epsilon} = \frac{\sqrt{c}}{2}$

$\tan \gamma = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{c}$

$\tan \beta = \tan(n + \gamma) = \frac{\tan n + \tan \gamma}{1 - \tan n \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{\sqrt{c}}{c} + \frac{\sqrt{c}}{c}}{1 - \frac{\sqrt{c}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c}}{c}} = \frac{2\sqrt{c}}{c}$

$\Rightarrow \cot \beta = \frac{c}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{2} = \tan \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{c}}{2}$

○ $2\sqrt{3}$ (۱) ✓

○ $3\sqrt{3}$ (۲)

○ $4\sqrt{3}$ (۳)

○ $5\sqrt{3}$ (۴)

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a} x)}{kx^2} = 3$ باشد، مقدار $\frac{a}{k}$ کدام است؟

۶ (۴) ✓

۳ (۳)

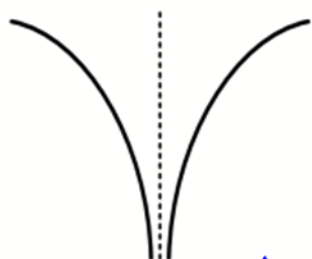
۳ (۲)

۶ (۱)

$$x \rightarrow 0 \rightarrow k + 1 = 0 \rightarrow \boxed{k = -1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos \sqrt{a} x}{-x^2} = 3$$

$$\rightarrow \frac{-1 + 1 - \frac{ax^2}{2}}{-x^2} = 3 \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 \rightarrow \boxed{a = 6} \Rightarrow \frac{a}{k} = -6$$

۱۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)}$ در همسایگی $x = -a$ به صورت شکل زیر است. اگر $y = -4$ مجانب افقی



تابع f باشد، مقدار a کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳) ✓

۴ (۴)

$x = -a$ $\xrightarrow[\text{در خنج}]{\text{مماسه}} -ma - 2 = 0 \rightarrow m = -\frac{2}{a}$

$$y = -4 \rightarrow \frac{a^2}{m} = -4 \rightarrow \frac{a^2}{-\frac{2}{a}} = -4 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]}$ کدام است؟

(۴) $-\infty$

(۳) $+\infty$ ✓

(۲) ۱

(۱) صفر

$$\frac{\cot \pi^-}{[\pi - \pi]} = \frac{-\infty}{[0^-]} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

۱۸- تابع ناصفر f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3} |ax + a|}{|x^2 + (m-2)x + a^2|}$ روی $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓

(۱) $\sqrt{3}$

$$x=a \text{ رُفْع} \rightarrow a^m + (m-2)a + a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a + m-2 = 0 \quad (5) \\ a=0 \text{ - } x \text{ (} f \neq 0 \text{)} \end{cases}$$

$$x=a \xrightarrow{\text{comp}} \sqrt{c} |a^2 + a| = 0 \rightarrow a^2 + a = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$(1), (5) \quad \boxed{m=2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3} |x+1|}{|x^2+1|} = \frac{\sqrt{3}}{|x^2-x+1|} = \frac{\sqrt{3}}{c}$$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) ✓ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) (نقطه $x=1$)

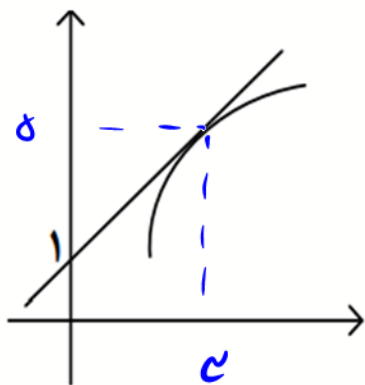
$$f = \frac{-2x+4}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g = \frac{-x+2+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f - 2g = \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = -2\sqrt{3} x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -2\sqrt{3} x^{-\frac{1}{6}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} x^{-\frac{7}{6}} \xrightarrow{x=1} \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۲۰- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



$$f'(c) = \text{شیب}$$

$$\frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

۲ (۱)

۱ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۴) ✓

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx+c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار $a^2 + b - c$ کدام است؟

- (۱) $(a+1)^2 - 1$ ✓ (۲) $(a+1)^2 + 1$ (۳) $(a-1)^2 - 1$ (۴) $(a-1)^2 + 1$

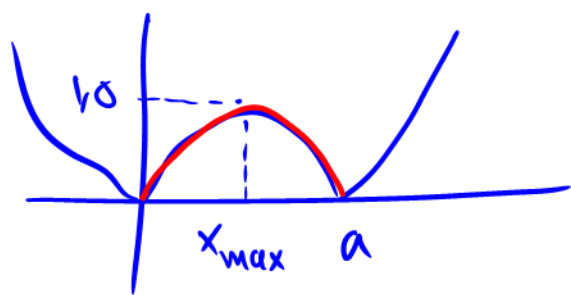
برای $x > a$: $2ab+c = 3a^2 \Rightarrow 9a^2 + c = 3a^2 \rightarrow \boxed{c = -3a^2}$

برای $x \leq a$: $2b = 6a \rightarrow \boxed{b = 3a}$

$$\therefore a^2 + b - c = a^2 + 3a + 3a^2 + 1 - 1 = (a+1)^2 - 1$$

۲۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x-a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $2/5$ ✓ (۲) 2 (۳) $1/5$ (۴) 1



$$f = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x-a)$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-a) + \sqrt[3]{x^2} = 0$$

$$\rightarrow 2x - 2a + 3x = 0 \rightarrow x = \frac{2}{5}a$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{25}a^2} \times \frac{2a}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow a = \frac{5}{2} = 2.5$$