

۱- اگر مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جمله اول آن باشد، جمله سوم این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲) ✓

۳ (۱)

$$S_9 = 73 S_3$$

$$a_1 \times \frac{r^9 - 1}{r - 1} = 73 a_1 \times \frac{r^3 - 1}{r - 1}$$

$$(r^3 - 1)(r^6 + r^3 + 1) = 73(r^3 - 1)$$

$$r^6 + r^3 - 72 = 0 \quad \begin{cases} r^3 = -9 \Rightarrow r = \sqrt[3]{-9} \\ r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 r^2}{a_1} = r^2 = 4$$

۲- اگر $x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9$ باشد، مقدار $(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2}$ کدام است؟ **ساده**

۸۰ (۴) ✓

۸۸ (۳)

۹۰ (۲)

۹۸ (۱)

$$x^2 + 1 + \frac{10}{x^2+1} = 9$$

طرفین را ۲ ضرب کن

$$(x^2+1)^2 + 2(x^2+1)\left(\frac{10}{x^2+1}\right) + \frac{100}{(x^2+1)^2} = 100$$

$$(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} = 80$$

۳- A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟ **ساده**

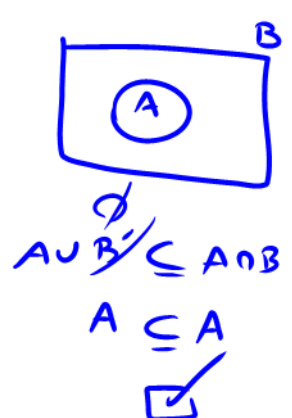
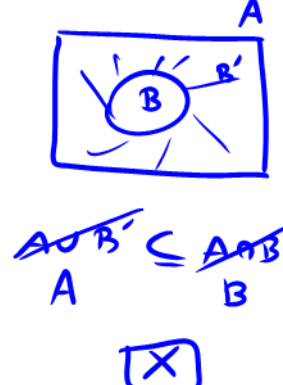
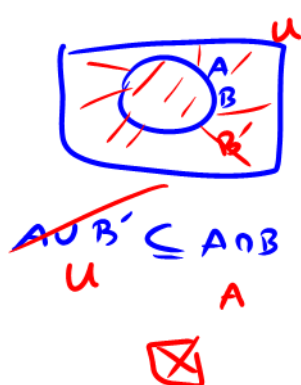
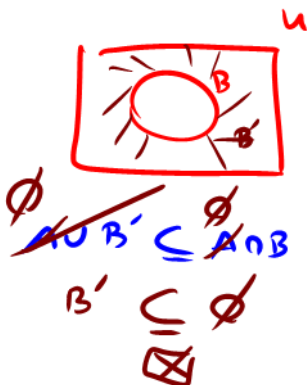
۵ (۴)

A = ∅ (۴)

B = A (۳) ✓

A = U (۱) ✓

B = U (۲) ✓



۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^4}{5\beta^2}$ کدام است؟
 ۱۸ (۴) ۱۹ (۳) ۲۰ (۲) ۲۱ (۱)

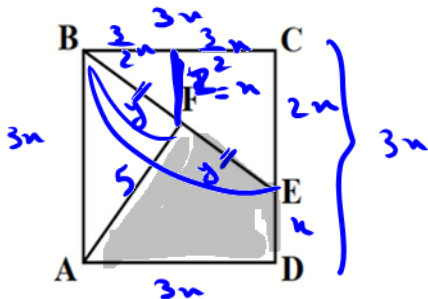
$$+ \begin{cases} A = \frac{4}{5} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{5} \beta^3 \\ A = \frac{4}{5} \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{1}{5} \alpha^3 \end{cases}$$

$$2A = \frac{4}{5} \left(\frac{\alpha^{\cancel{2}} \alpha^2}{\beta^{\cancel{2}} \beta^2} + \frac{\beta^{\cancel{2}} \beta^2}{\alpha^{\cancel{2}} \alpha^2} \right) + \frac{1}{5} (\beta^3 + \alpha^3)$$

$$2A = \frac{4}{5} \left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^2} \right) + \frac{1}{5} (\beta^3 + \alpha^3) = \frac{1}{5} (\alpha^3 + \beta^3) + \frac{1}{5} (\alpha^3 + \beta^3)$$

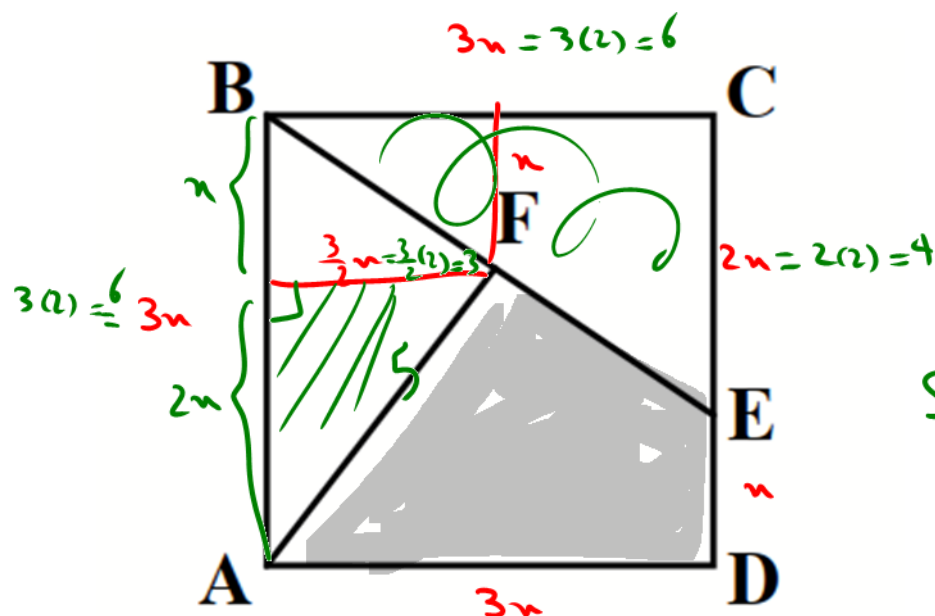
$$2A = \frac{2}{5} (\alpha^3 + \beta^3) \rightarrow A = \frac{1}{5} (S^3 - 3SP) = \frac{1}{5} (125 - 3(5)(2)) = \frac{1}{5} (125 - 30) = \frac{1}{5} (95) = 19$$

۶- در مربع شکل زیر، $CD = 2ED$ و نقطه F وسط پاره خط BE قرار دارد. اگر $AF = 5$ باشد، مساحت چهارضلعی $ADEF$ کدام است؟ (دشوار)



$$\frac{4}{2y} = \frac{2}{2n} \Rightarrow 2 = n$$

- ۱۰ (۱)
 ۱۵ (۲) ✓
 ۲۰ (۳)
 ۲۵ (۴)



$$\text{میان: } \frac{4n^2 \times 4}{1 \times 4} + \frac{9}{4} n^2 = 25$$

$$\frac{28}{4} n^2 = 25$$

$$n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$$

$$S_{\text{شکل}} - S_{BCE} - S_{BFA}$$

$$6^2 - \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 6 \right) - \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3 \right)$$

$$36 - \frac{24}{2} - \frac{18}{2} = 15$$

۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m ، بیشترین مقدار تابع

f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟
 ۱ (۳) ✓ ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (۴) صفر

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 64 - 4(-)(39) < 0$$

$$-39m < -16 \Rightarrow m > \frac{16}{39}$$

$$a > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$\frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}} = 1$$

$$mx^2 - 8x + 39 = 25$$

$$mx^2 - 8x + 14 = 0$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2m} = \frac{4}{m}$$

$$m \left(\frac{4}{m} \right)^2 - 8 \left(\frac{4}{m} \right) + 14 = 0$$

$$16 - 32 + 14m = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

$$[m] = \left[\frac{8}{7} \right] = [1, -] = 1$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{و}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} f(x)=1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 \quad \text{و} \\ x+1=1 \Rightarrow x=0 \quad \text{و} \end{cases} \\ f(x)=-1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \Rightarrow x=0 \quad \text{و} \\ x+1=-1 \Rightarrow x=-2 \quad \text{و} \end{cases} \end{cases}$$

۱۰- تابع پیوسته f یک به یک بوده و وارون خود را در نقطه $A(a, f(a))$ قطع می کند. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار

برگاری

$f'(a)$ (۴)

$$y = x$$

$$f(a) = a$$

a (۳)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$$

کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲) ✓

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$\log_2(3n+1) = (\log_2 5)^2 - (\log_2 2)^2$$

$$\log_2(3n+1) = (\log_2 5 - \log_2 2)(\log_2 5 + \log_2 2)$$

$$\log_2(3n+1) = \log_2 5$$

$$3n+1 = 5 \Rightarrow 3n = 5 - 1$$

$$3n = 4 \Rightarrow n = \frac{4}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = \left(\frac{-1}{\frac{1}{2}} \right) = -2$$

۱۲- اگر $2 \sin \alpha < \sin 2\alpha$ و $\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

چهارم (۴) ✓

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0$$

(۴) ✓



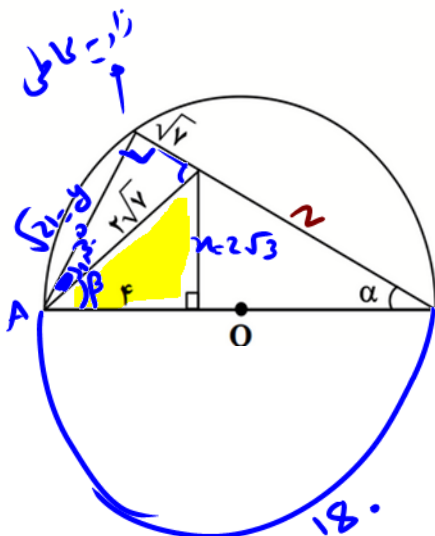
$$2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha < 0$$

$$2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < 0$$

(۴) ✓

$$\sin \alpha < 0$$

۴-۸



$$\tan(\beta + 30^\circ) = \frac{\tan \beta + \tan 30^\circ}{1 - \tan \beta \tan 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{3})}$$

$$= \frac{\frac{5\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cot(\beta + 30^\circ) = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$



در مثل $\beta + 30^\circ$ ، α

$$\tan \alpha = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a}x)}{kx^2} = 3$ باشد، مقدار $\frac{a}{k}$ کدام است؟

۶ (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۶ (۴)

$k+1=0$
 $k=-1$

$$\frac{k+1 - \frac{a x^2}{2}}{k x^2} = 3$$

$u \rightarrow$

$$\begin{cases} \sin u = u \\ \tan u = u \end{cases}$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2}$$

$$\frac{-\frac{a x^2}{2}}{k x^2} = 3$$

$$\frac{-a}{2k} = 3$$

$$\frac{a}{k} = -6$$

۱۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)}$ در همسایگی $x = -a$ به صورت شکل زیر است. اگر $y = -4$ مجانب افقی

تابع f باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) -۲
(۲) -۴
(۳) ۲ ✓
(۴) ۴

برای $x = -a$: $\frac{a^2 x^2}{x(mx)} = -4 \Rightarrow \frac{a^2}{m} = -4$

مجاذب عمودی $x = -a \Rightarrow mx - 2 = 0 \Rightarrow -ma - 2 = 0 \Rightarrow -ma = 2 \Rightarrow m = -\frac{2}{a}$

$\frac{a^2}{-\frac{2}{a}} = -4 \Rightarrow \frac{a^3}{-2} = -4 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]}$ کدام است؟

(۱) صفر
(۲) ۱
(۳) $+\infty$ ✓
(۴) $-\infty$

$\frac{0 + \pi}{[\pi - \pi]} = \frac{-\infty}{[-]} = \frac{-\infty}{-} = +\infty$

۱۸- تابع ناصفر f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3}|ax+a|}{|x^2 + (m-2)x + a^2|}$ روی $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$
(۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓
(۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$

$a^3 + (m-2)a + a^2 = 0$
 $-1 + (m-2)(-1) + 1 = 0$
 $-m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

مخرج $x^2 + (m-2)x + a^2 = x^2 + 0x + 1 = x^2 + 1$
صورت $\sqrt{3}|ax+a| = \sqrt{3}|x+1|$
پس $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot 0}{1 + 1} = 0$ (اینجا محاسبه اشتباه شده، باید به صورت $\frac{0}{0}$ نگاه کرد و با ل'Hopital یا فاکتورگیری حل کرد)

در واقع با $a = -1$ و $m = 2$ داریم:
 $f(x) = \frac{\sqrt{3}|x-1|}{|x^2|} = \frac{\sqrt{3}}{|x|}$
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ (این هم اشتباه است، باید دوباره بررسی کرد)

پس پاسخ صحیح $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است.

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3} | -n - 1 |}{|n^3 + 1|} = \frac{\sqrt{3} |n + 1|}{|n^3 + 1|} = \sqrt{3} \frac{(n+1)}{n^3+1} \stackrel{\text{L'Hop}}{=} \frac{\sqrt{3} \times 1}{3n^2}$$

$$\sqrt{3} \times \frac{1}{3n^2} \xrightarrow{n=-1} \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{3 \times \sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1) \checkmark$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$g(n) = \frac{2-n+\sqrt{3n}}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$f(n) = \frac{4-2n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

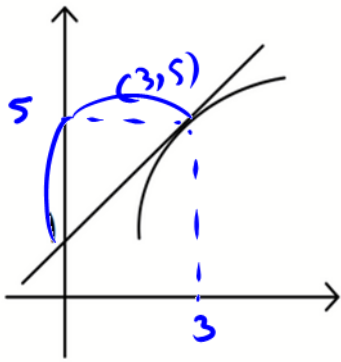
$$(f-2g)' = \left(\frac{4-2n}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{4-2n+2\sqrt{3n}}{\sqrt[3]{n^2}} \right)'$$

$$= \left(\frac{-2\sqrt{3n}}{\sqrt[3]{n^2}} \right)'$$

$$= \left(\frac{-2\sqrt{3} \times n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}} \right)' = \left(-2\sqrt{3} n^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} \right)'$$

$$= \left(-2\sqrt{3} n^{-\frac{1}{6}} \right)' = -2\sqrt{3} \times -\frac{1}{6} n^{-\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۰- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



$$m = \frac{4}{3}$$

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$ ✓

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار $a^3 + b - c$ کدام است؟

(۴) $(a-1)^2 + 1$

(۳) $(a-1)^2 - 1$

(۲) $(a+1)^2 + 1$

(۱) ✓ $(a+1)^2 - 1$

پس: $2a + c = 3a^2 \Rightarrow 6a^2 + c = 3a^2 \Rightarrow c = -3a^2$

$f'_- = f'_+ \Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow b = 3a$

$a^3 + b - c = \underbrace{a^3 + 3a + 3a^2 + 1}_{(a+1)^3 - 1} - 1$

$x^3 + bx^2 + cx + ?$

$(\frac{c}{b})^3 = (\frac{c}{b})^3$

$\underbrace{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}_{(a+1)^3} - 1$
 $(\frac{3}{3})^3 = 1^3 = 1$

۲۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x-a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱) ✓

در نقطه $x=a$: $x-a=0 \Rightarrow x=a$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} (x-a) = x^{\frac{5}{3}} - ax^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} a x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (5x - 2a) = 0$$

$x=0$

$$5x - 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=a \Rightarrow y=0$

$x = \frac{2a}{5} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}} \left| \frac{2a}{5} - a \right| = \frac{3}{2}$

$$\sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}} \times \frac{3a}{5} = \frac{3}{2}$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\frac{4a^2}{25} \times \frac{a^3}{125} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{4a^5}{3125} = \frac{1}{8} \Rightarrow a^5 = \frac{3125}{32}$$

$$a = \frac{5}{2} = 2.5$$

۲۳- اگر انحراف ۵ داده آماری از $\bar{y}$ به ترتیب برابر ۱-، ۵-، ۶-، ۷- و ۴ باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

۲۵٫۴ (۴)

۲۴٫۶ (۳)

۱۶٫۴ (۲) ✓

۱۵٫۶ (۱)

$$\bar{x} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\sigma^2 = \frac{49 + 16 + 9 + 4 + 4}{5} = \frac{82 \times 2}{5 \times 2} = \frac{164}{10} = 16,4$$

$$\begin{matrix} & -2 \\ \text{2, 5, 1.} & \text{0, 3, 8} \\ \sigma & = \sigma \end{matrix}$$

مثلاً $P(A \cap B') = P(A)P(B')$

۲۴- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S، روابط $P(A - B) = P(A)P(B')$ و $P(A) = \frac{1}{6}P(B)$ برقرار است. اگر

$P(A) = \frac{8}{5}P(B)$

$P(A' \cap B') = 0,25$ باشد، مقدار $P(A \cup B')$ کدام است؟

$\frac{31}{40}$ (۴)

$\frac{17}{20}$ (۳) ✓

$\frac{13}{20}$ (۲)

$\frac{27}{40}$ (۱)

$$P(A') \times P(B') = \frac{1}{4}$$

$$(1 - P(A)) (1 - P(B)) = \frac{1}{4}$$

$$\left(1 - \frac{8}{5}P(B)\right) (1 - P(B)) = \frac{1}{4}$$

$$1 - P(B) - \frac{8}{5}P(B) + \frac{8}{5}P(B)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 15 \\ \hline 160 \\ + 320 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \times 20 \quad 20 - 20P(B) - 32P(B) + 32P(B)^2 = 5 \\ & 32P(B)^2 - 52P(B) + 15 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta' = b^2 - ac = 676 - 480 = 196$$

$$P(B) = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{26 \pm 14}{32}$$

$P(B) = \frac{40}{32} \quad \times$

$P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

$$P(A) = \frac{8}{5}P(B) = \frac{8}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \frac{3}{5} + \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{\cancel{8}_4} = \frac{12+5}{20} = \frac{17}{20}$$

بہ امید و ترسہ

Faraz

طوبہ ہے