

۱- اگر مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جمله اول آن باشد، جمله سوم این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

$$\begin{array}{cccc} & 9 (4) & 8 (3) & 4 (2) \checkmark & 3 (1) \end{array}$$

$$\frac{S_9}{S_3} = 73 \rightarrow \frac{\frac{a_1(q^9-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^3-1)}{q-1}} = \frac{q^9-1}{q^3-1} = \frac{(q^3-1)(q^6+q^3+1)}{q^3-1} = 73$$

$$\Rightarrow q^6 + q^3 = 72 \quad q^3 = t \rightarrow t^2 + t - 72 = 0 \rightarrow (t-8)(t+9) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} q^3 = -9 \rightarrow \text{X} \\ q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = 2^2 = \boxed{4}$$

@pst_mathclub



۲- اگر $x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9$ باشد، مقدار $(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2}$ کدام است؟

۸۰ (۴) ✓

۸۸ (۳)

۹۰ (۲)

۹۸ (۱)

$$x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9 \xrightarrow{+1} (x^2+1) + \frac{10}{x^2+1} = 10$$

$$\xrightarrow{\text{نشان ۲}} (x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} + 2(x^2+1) \left(\frac{10}{x^2+1} \right) = 100$$

$$\Rightarrow (x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} = \boxed{100}$$



۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۹ (۳) ✓

۲۰ (۲)

۲۱ (۱)

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{c}{a} \rightarrow \alpha\beta = 2 \\ S = -\frac{b}{a} = 5 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{2}{\alpha} \rightarrow \beta^2 = \frac{4}{\alpha^2} \quad (*)$$

$$\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{4\alpha}{5\beta^2} + \frac{\beta^3}{5} \quad (*) = \frac{4\alpha}{5 \times \frac{4}{\alpha^2}} + \frac{\beta^3}{5} = \frac{1}{5} (\alpha^3 + \beta^3)$$

$$= \frac{1}{5} (S^3 - 3Ps) = \frac{1}{5} (5^3 - 3(2)(5)) = \frac{95}{5} = \boxed{19}$$

@pst_mathclub



۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m ، بیشترین مقدار تابع

f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

$$\text{نقطهٔ منظر} \Rightarrow x = \frac{4}{m} \quad \text{فرض} \quad mx^2 - 8x + 39 = 0 \quad \text{منخرج}$$

$$\max f(x) = 1 \xrightarrow{x = \frac{4}{m}} f\left(\frac{4}{m}\right) = \frac{5}{\sqrt{m\left(\frac{16}{m^2}\right) - 8\left(\frac{4}{m}\right) + 39}} = 1 \Rightarrow \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + 39 = 25$$

$$\rightarrow \frac{-16}{m} = -14 \Rightarrow m = \frac{14}{14} \xrightarrow{[]} [m] = \left[\frac{14}{14}\right] = [1] \checkmark$$

@pst_mathclub



۸- اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x) = x^5 + ax^3$ و $q(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$ ، دو جمله‌ای $x^n + x^3$ باشد، مقدار na کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱) ✓

$$q(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + 3x + 2) = x^2(x+1)(x+2)$$

$$p(x) = x^5 + ax^3 = x^3(x^2 + a) = x^3(x^2 - 1) = x^3(x-1)(x+1)$$

← $a = -1$ سبب آن اتحاد بیس و با $q(x)$ عامل مشترک بوده

$$\Rightarrow \text{عامل مشترک} = x^2(x+1) = x^3 + x^2 \Rightarrow \underline{n=2}$$

$$\Rightarrow na = 2 \times (-1) = \underline{-2}$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f(f(x)) = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$f(f(x)) = 0$
 به چیزهای زیر توجه کنید:

۱- $0 \leq x \leq 2 \rightarrow f(x) = x-1$
 $f(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$
 $x-1 = 1 \rightarrow x = 2$ ✓
 $x+1 = 1 \rightarrow x = 0$ ✓

۲- $-2 \leq x < 0 \rightarrow f(x) = x+1$
 $f(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = -1$
 $x-1 = -1 \rightarrow x = 0$ ✗
 $x+1 = -1 \rightarrow x = -2$ ✓



۱۰- تابع پیوسته f یک به یک بوده و وارون خود را در نقطه $A(a, f(a))$ قطع می کند. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} \text{ کدام است؟}$$

$f'(a)$ (۴)

a (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$f'(a)$ (۴) $\Rightarrow$ $\frac{f'(a)}{1}$ $\rightarrow$ محل برخورد روی $y=x$ $\rightarrow$ $f(a) = a$ (*)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} (*) = \boxed{1}$$



@pst_mathclub

۱۱- اگر $\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \log(3x+1) = \log_{\sqrt{2}} x$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}} x$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\log(3x+1) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)$$

$\log \frac{5}{2}$ $1 - \log 2$

$$\Rightarrow \log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x \quad (*) = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \log_{\sqrt{2}} 2^{-1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{2}} 2 = \boxed{-2}$$

۱۲- اگر $2\sin\alpha < \sin 2\alpha$ و $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

(۴) چهارم ✓

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

$$\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > 0 \rightarrow \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha} > 0 \rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} > 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \text{نیمه اول یا چهارم}^*$$

$$2\sin\alpha < \sin 2\alpha \rightarrow \cancel{2}\sin\alpha < \cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha \rightarrow \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha > 0$$

$$\rightarrow \sin\alpha(\cos\alpha - 1) > 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0 \Rightarrow \text{نیمه سوم یا چهارم}^*$$

$$\ominus \rightarrow 0 < \cos\alpha < 1$$

@pst_mathclub



۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)}$ کدام است؟

۰,۴√۳ (۴)

۰,۲√۳ (۳) ✓

۰,۴√۶ (۲)

۰,۲√۶ (۱)

$$\frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)} = \frac{-\sin(270^\circ + 15^\circ) + 2\cos(90^\circ + 15^\circ)}{2\sin(180^\circ - 15^\circ) + 3\sin(360^\circ + 15^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{2\sin 15^\circ + 3\sin 15^\circ}$$

$$= \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{5\sin 15^\circ} = \frac{1}{5} \cot 15^\circ - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} (2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{0,2\sqrt{3}}$$

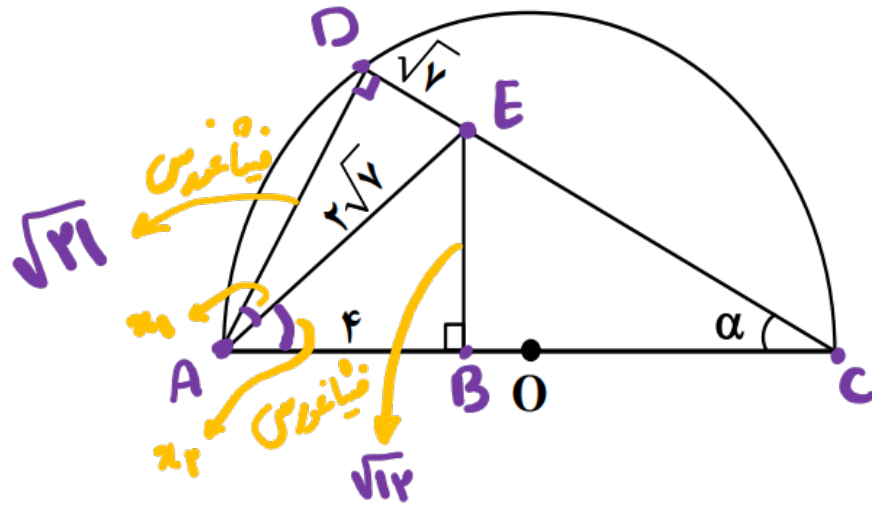
$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

@pst_mathclub



۱۴- در نیم‌دایره شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$\triangle ADC \rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha = 90$

$\tan \alpha = \cot(\alpha_1 + \alpha_2)$

$\tan \alpha = \frac{1}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}} + \frac{\sqrt{12}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{12}}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2+3}{2\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3} \times 2}{5 \times 2} = \boxed{0,2\sqrt{3}}$

- $2\sqrt{3}$ (۱) ✓
- $3\sqrt{3}$ (۲)
- $4\sqrt{3}$ (۳)
- $5\sqrt{3}$ (۴)



۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a} x)}{kx^2} = 3$ باشد، مقدار $\frac{a}{k}$ کدام است؟

۶ (۱) ✓

۳ (۲)

۳ (۳)

۶ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a} x)}{kx^2} = \frac{k+1}{0} = 3 \Rightarrow \underline{k = -1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos \sqrt{a} x}{-x^2} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{(\sqrt{a} x)^2}{2}}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow \underline{a = 6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{6}{-1} = \underline{-6}$$

@pst_mathclub



۱۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{a^2x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)}$ در همسایگی $x = -a$ به صورت شکل زیر است. اگر $y = -4$ مجانب افقی

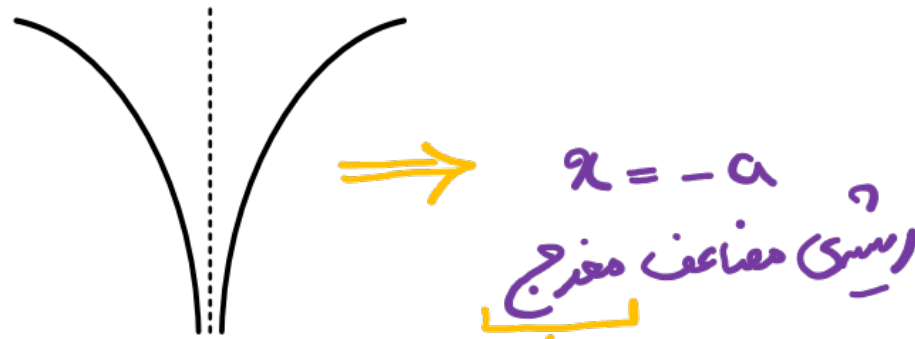
تابع f باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۴

(۳) ۲ ✓

(۴) ۴



$$(x+a)(mx-2) = 0$$

$x = -a$ (مجاانب عمودی)

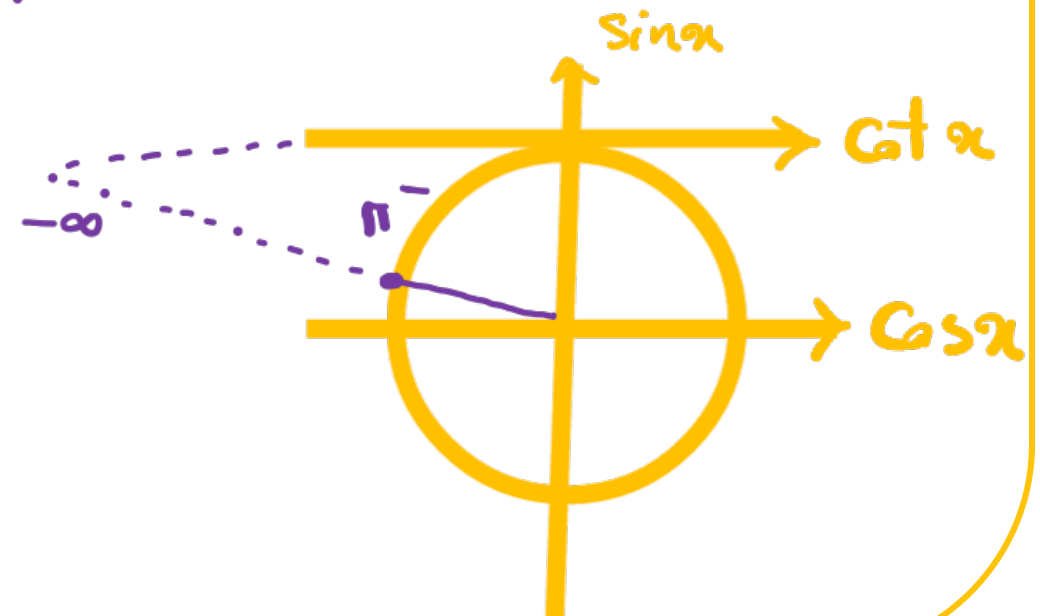
$$x = -a \rightarrow -am - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{a} *$$

$$\text{مجاانب افقی} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2x^2}{x(mx)} = -4 \rightarrow \frac{a^2}{m} = -4 \rightarrow \frac{a^2}{\frac{2}{a}} = -4 \rightarrow a^3 = -8 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$



۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ ✓ (۴) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \frac{\cot \pi^-}{[\pi^- - \pi]} = \frac{-\infty}{[0^-]} = \frac{-\infty}{-1} = \boxed{+\infty}$$



@pst_mathclub

۱۸- تابع ناصفر f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3} |ax + a|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|}$ روی $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۲) ✓ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{x=a}{\text{رسمی حد}} \rightarrow a^2 + a = 0 \rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{غلط} \\ a=-1 & \text{درست} \end{cases}$

$\frac{x=a}{\text{رسمی مخرج}} \rightarrow a^3 + a(m-2) + a^2 = 0 \xrightarrow{a=-1} -1 - m + 2 + 1 = 0 \Rightarrow m = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3} |-x-1|}{|x^3+1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3} \left| \frac{x+1}{x^3+1} \right| = \frac{0}{0} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3} \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

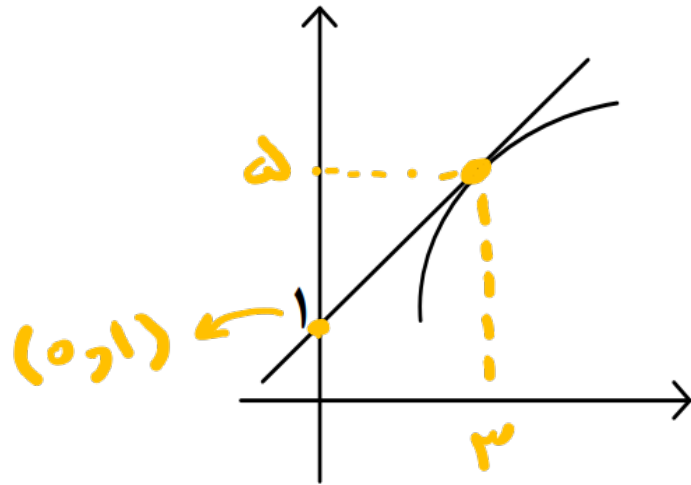
$$(f(x) - 2g(x))'_{x=1} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$f(x) - 2g(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \left(\frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = -2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow (f(x) - 2g(x))' = \frac{\sqrt{3}}{3} x^{-\frac{1}{6}} \xrightarrow{x=1} \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$



۲۰- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$ ✓

مشتق در نقطه تماس = شیب خط مماس

$$\Rightarrow f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{3 - 0} = \boxed{\frac{4}{3}}$$



@pst_mathclub

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار $a^3 + b - c$ کدام است؟

(۱) $(a+1)^3 - 1$ (۲) $(a+1)^3 + 1$ (۳) $(a-1)^3 - 1$ (۴) $(a-1)^3 + 1$

بررسی $\rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2ab + c \\ f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \underline{2ab + c = 3a^2} \quad (*)$

مشتق $\rightarrow \begin{cases} f'_+(a) = 2b \\ f'_-(a) = 6a \end{cases} \Rightarrow \underline{2b = 6a} \quad (*) \rightarrow 6a^2 + c = 3a^2 \Rightarrow \underline{c = -3a^2}$

$\Rightarrow a^3 + b - c = a^3 + (3a) - (-3a^2) = \underline{(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - 1} = \underline{(a+1)^3 - 1}$

@pst_mathclub

کتاب (و جوابهای)



۲۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x-a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

۱ (۴)

۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۲/۵ (۱) ✓

$$x \in [0, a] \Rightarrow |x-a| = -(x-a) \Rightarrow f(x) = -\sqrt[3]{x^2}(x-a) = -x^{\frac{2}{3}}(x-a) = -x^{\frac{5}{3}} + ax^{\frac{2}{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = -\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}a x^{-\frac{1}{3}} = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(-5x+2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{5}a \end{cases}$$

$$f(x_{\max}) = 1/5 \rightarrow f\left(\frac{2}{5}a\right) = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{چون}} -\sqrt[3]{\frac{4}{125}a^2}\left(\frac{2}{5}a-a\right) = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow -\sqrt[3]{\frac{4}{125}a^2}\left(-\frac{1}{5}a\right) = \frac{1}{5} \rightarrow a\sqrt[3]{\frac{4}{125}a^2} = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{رَایان}} a^3 \times \frac{4}{125}a^2 = \frac{125}{1}$$

$$\Rightarrow a^5 = \frac{125}{1} \times \frac{125}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^5 \Rightarrow \boxed{a = \frac{5}{2} = 2,5}$$

