



سوال ۱: گزینه ۲

$$\frac{S_9}{S_3} = 7^3 \rightarrow \frac{\frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}} = \frac{q^9 - 1}{q^3 - 1} = \frac{(q^3 - 1)(q^6 + q^3 + 1)}{q^3 - 1} = 7^3 \rightarrow q^6 + q^3 + 1 = 7^3$$

$$q^6 + q^3 = 7^3 \xrightarrow{t^3=u} u^2 + u - 7^3 = 0 \rightarrow (u - 8)(u + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} q^3 = -9 \\ q^3 = 8 \rightarrow q = 2 \end{cases}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = 4$$

سوال ۲: گزینه ۴

$$x^2 + \frac{10}{x^2 + 1} = 9 \xrightarrow{+1} (x^2 + 1) + \frac{10}{(x^2 + 1)} = 10 \xrightarrow{\text{توان دو}} (x^2 + 1)^2 + \frac{100}{(x^2 + 1)^2} + 2(x^2 + 1)\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) = 100$$

$$\xrightarrow{\text{در نتیجه داریم}} (x^2 + 1)^2 + \frac{100}{(x^2 + 1)^2} + 20 = 100 \rightarrow (x^2 + 1)^2 + \frac{100}{(x^2 + 1)^2} = 80$$

سوال ۵: گزینه ۳

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 2 \rightarrow \beta = \frac{2}{\alpha} \\ S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5 \end{cases} \rightarrow \frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{4\alpha}{5\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} + \frac{\beta^3}{5} = \frac{1}{5}(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$\frac{1}{5}(S^3 - 3PS) = \frac{1}{5}(5^3 - 3(2)(5)) = \frac{1}{5}(125 - 30) = \frac{1}{5}(95) = 19$$

سوال ۷: گزینه ۳

از مخرج مشتق می گیریم:

$$2mx - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{m}$$

گفته شد $\max f = 1$ پس داریم:

$$f\left(\frac{4}{m}\right) = 1 \rightarrow \frac{5}{\sqrt{m\left(\frac{16}{m^2}\right) - 8\left(\frac{4}{m}\right) + 39}} = 1 \rightarrow \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + 39 = 25 \rightarrow -\frac{16}{m} = -14$$

$$\rightarrow m = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \rightarrow [m] = \left[\frac{8}{7}\right] = 1$$

سوال ۸: گزینه ۱

$$q(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + 3x + 2) = x^2(x + 1)(x + 2)$$

$$p(x) = x^5 + ax^3 = x^3(x^2 + a)$$

برای اینکه $p(x)$ با $q(x)$ عامل مشترک پیدا کند $a = -1$ در نظر می گیریم:

$$p(x) = x^3(x - 1)(x + 1)$$

$$x^2(x + 1) = x^3 + x^2 \rightarrow n = 1$$
 عامل مشترک

$$\rightarrow na = 2 \times (-1) = -2$$

سوال ۹: گزینه ۳

$$f(f(x)) = \cdot$$

باید ببینیم f داخل چه خروجی باید بدهد تا از f بیرونی صفر خارج شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \leq x \leq 2 \rightarrow f(u) = \cdot \rightarrow u = f(x) = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \text{ ق ق} \\ x + 1 = 1 \rightarrow x = 0 \text{ ق ق} \end{cases} \\ -2 \leq x < \cdot \rightarrow f(u) = \cdot \rightarrow u = f(x) = -1 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \rightarrow x = 0 \text{ غ ق} \\ x + 1 = -1 \rightarrow x = -2 \text{ ق ق} \end{cases} \end{array} \right.$$

سوال ۱۰: گزینه ۱

f یک به یک است پس اکیدا یکنوا است. پس محل برخورد با وارونش روی خط $y = x$ خواهد بود

$$f(a) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} = 1$$

سوال ۱۱: گزینه ۲

دترمینان ماتریس سمت راست به صورت $(\log 5)^2 - (\log 2)^2$ خواهد بود:

$$\log(3x + 1) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = \log \frac{5}{2} \times (\log 10) = \log \frac{5}{2} \times 1$$

$$\rightarrow \log(3x + 1) = \log \frac{5}{2} \rightarrow 3x + 1 = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt{e}} x = \log_{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2} \right) = -2$$

سوال ۱۲: گزینه ۴

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \rightarrow \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\sin \alpha} > 0 \rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \rightarrow \cos \alpha > 0$$

پس α در ناحیه اول یا چهارم است.

$$2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \rightarrow 2 \sin \alpha < 2 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha < 0 \rightarrow \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < 0$$

چون $0 < \cos \alpha < 1$ است پس $1 - \cos \alpha$ مثبت است.

$\sin \alpha < 0 \rightarrow$ ناحیه چهارم

سوال ۱۳: گزینه ۳

$$\frac{-\sin(270^\circ + 15^\circ) + 2 \cos(90^\circ + 15^\circ)}{2 \sin(180^\circ - 15^\circ) + 3 \sin(360^\circ + 15^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{2 \sin 15^\circ + 3 \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{5 \sin 15^\circ}$$

$$= \frac{1}{5} \cot 15^\circ - \frac{2}{5}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{5} (2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0.2\sqrt{3}$$

سوال ۱۵: گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{ax})}{kx^2} = \frac{k+1}{0} = \infty \rightarrow k = -1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos(\sqrt{ax})}{-x^2} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-(\sqrt{ax})^2}{2}}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{2} = \infty \rightarrow a = \infty \rightarrow \frac{a}{k} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

سوال ۱۶: گزینه ۳

با توجه به نمودار $x = -a$ ریشه مضاعف است. پس $mx - 2$ باید با $-a$ صفر شود:

$$m(-a) - 2 = 0 \rightarrow m = -\frac{2}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f = -4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2}{x(mx)} = -4 \rightarrow \frac{a^2}{m} = 4 \rightarrow \frac{a^2}{-\frac{2}{a}} = -4 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = 2$$

سوال ۱۷: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \frac{\cot \pi^-}{[\cdot^-]} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

سوال ۱۸: گزینه ۲

$x = a$ ریشه ی صورت است پس:

$$a^r + a = 0 \rightarrow a(a + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ق ق} \\ a = -1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$x = a$ ریشه ی مخرج نیز است

$$a^r + a(m - 2) + a^r = 0 \xrightarrow{a=-1} -1 - m + 2 + 1 = 0 \rightarrow m = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}| -x - 1 |}{|x^3 + 1|} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3} \left| \frac{-1}{3x^2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

سوال ۱۹: گزینه ۲

$$f'(1) - 2g'(1) = (f(1) - 2g(1))'$$

$$f(x) - 2g(x) = \frac{2|x - 2|}{\sqrt[3]{x}} - 2 \left(\frac{|x - 2| + \sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x}} \right) = \frac{-2\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\rightarrow (f(x) - 2g(x))' = -2\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{6}\right) x^{-\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} (1)^{-\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۲۰: گزینه ۴

مشتق در نقطه تماس برابر با شیب خط مماس است

$$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

سوال ۲۱: گزینه ۱

از پیوستگی در $x = a$ داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2ab + c \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 3a^2 \end{cases} \rightarrow 2ab + c = 3a^2$$

از مشتق پذیری در $x = a$ داریم:

$$\begin{cases} f'_+(a) = 2b \\ f'_-(a) = 6a \end{cases} \rightarrow 2b = 6a \rightarrow 6a^2 + c = 3a^2 \rightarrow c = -3a^2$$

$$a^2 + b - c = a^2 + (3a) - (-3a^2) = (a^2 + 3a^2 + 3a + 1) - 1 = (a + 1)^3 - 1$$

سوال ۲۲: گزینه ۱

$$x \in [0, a] \rightarrow |x - a| = -(x - a) \rightarrow f(x) = -\sqrt[3]{x^2}(x - a) = -x^{\frac{2}{3}}(x - a) = -x^{\frac{5}{3}} + ax^{\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow f'(x) = -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(-5x + 2a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{5}a \text{ (max)} \end{cases}$$

$$f(x_{\max}) = 1/5 \rightarrow f\left(\frac{2}{5}a\right) = \frac{3}{2} \rightarrow -\sqrt[3]{\frac{4}{25}}a^2 \left(\frac{2}{5}a - a\right) = \frac{3}{2} \rightarrow a \times \sqrt[3]{\frac{4}{25}}a^2 = \frac{5}{2}$$

دو طرف به توان ۳ می رسانیم:

$$a^3 \times \frac{4}{25}a^2 = \frac{125}{8} \rightarrow a^5 = \frac{125}{8} \times \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^5 \rightarrow a = \frac{5}{2} = 2.5$$