$S_9 = 72 \cdot S_3 \rightarrow a\frac{1-q^9}{1-q} = 72a\frac{1-q^3}{1-q} \Rightarrow$ نرخ $= q^3 = t \neq 1$ ①

$q \in \mathbb{Z}$

گزینه ۲

$\Rightarrow 1-t^3 = (1-t)\times 72$

$\Rightarrow 1+t+t^2 = 72$

$\Rightarrow t^2+t-72 = 0$

$\Rightarrow t = -9$ غ ق ق ، $t = 8$

$q^3 = 8$

$\Rightarrow \boxed{q = 2}$

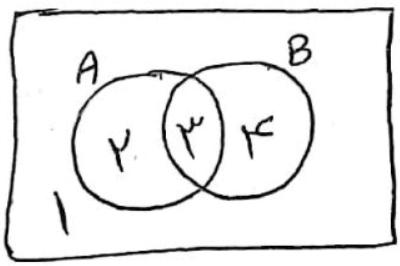
$\frac{a_4}{a_1} = r^3 = 2^3 = 8$

گزینه ۴ ②

$x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9 \rightarrow (x^2+1) + \frac{10}{x^2+1} = 10$

$\Rightarrow (x^2+1)^2 + \left(\frac{10}{x^2+1}\right)^2 = 10^2 - 20 = 100 - 252 \quad \boxed{80}$

گزینه ۱ ③



$A \cup B' \subseteq A \cap B$

$\rightarrow \{1,2,3\} \subseteq \{3\}$

$\Rightarrow \{1,2\} \subseteq \emptyset \Rightarrow U = \{3,4\} = B$

گزینه ۴ ④

p	q	
T	F	(۱
F	T	(۲

درستی $q \Leftrightarrow p \vee \sim p$ معادل مخالف بودن درستی گزاره‌ها.

گزینه ۱) در حالت (۱) نادرست است.

گزینه ۳) در حالت (۱) نادرست است. گزینه ۴) در حالت (۲) نادرست است.

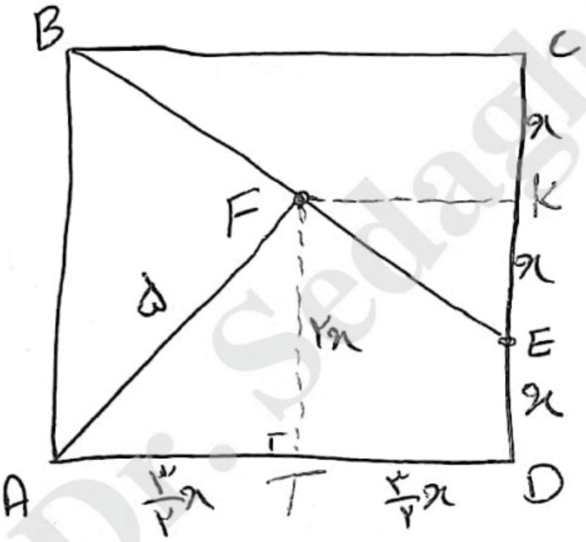
۵ — گزینه ۳

$$x^2-5x+2=0 \to \alpha\beta=2 \to \alpha=\frac{2}{\beta} \to \boxed{\alpha^2=\frac{4}{\beta^2}}\ (1)$$

$$\frac{4\alpha+\beta^5}{5\beta^2}=\frac{\alpha}{5}\times\frac{4}{\beta^2}+\frac{\beta^3}{5} \overset{(1)}{=} \frac{\alpha^3}{5}+\frac{\beta^3}{5}=\frac{1}{5}(S^3-3SP)$$

$$=\frac{1}{5}(125-3\times5\times2)=25-6=\boxed{19}$$

۶ — گزینه ۲



$$CD=3DE \Rightarrow CD=3x$$

$$\Rightarrow \boxed{CE=2x}$$

FK موازی BC رسم می‌کنیم، نسبت بر تالس تعمیم یافته

$$\frac{EK}{CE}=\frac{EF}{BE}\overset{\text{طبق فرض}}{=}\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{CK=EK=x}$$

و

$$\frac{FK}{BC}=\frac{1}{2} \to \boxed{FK=\frac{3}{2}x}$$

$$\to TD=AT=\frac{3}{2}x$$

فیثاغورس $\triangle AFT \to \left(\frac{3}{2}x\right)^2+(2x)^2=5^2 \to \boxed{x=2}$

$$S_{AFED}=S_{AFT}+S_{FTDE}=\frac{3\times4}{2}+\frac{6\times3}{2}=6+9=\boxed{15}$$

۷

$f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$

$D_f = \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \rightarrow 16 - 39m < 0 \\ m > 0 \end{cases}$

گزینه ۳

$16 < 39m$

$\dfrac{16}{39} < m$

$\max f = 1 \Rightarrow mx^2 - 8x + 39 = 25$

در رأس سهمی

[illegible]

$\rightarrow -\dfrac{\Delta}{4a} = 25 \rightarrow -\dfrac{\Delta'}{a} = 25 \rightarrow 39m - 16 = 25m$

$\rightarrow m = \dfrac{16}{14} \rightarrow [m] = 1$

۸

$P(x) = x^5 + ax^3 = x^3(x^2 + a)$

$q(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x+1)(x+2)$

گزینه ۱

ب.م.م $= x^n + x^3$

طبق گزینه ها دیده می شود

ب.م.م $= x^2(x+1) = x^3 + x^2$

$n = 2$

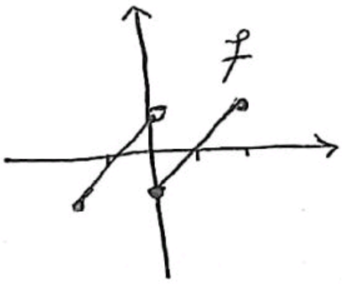
بنابراین $x^2 + a$ بر $x+1$ بخش پذیر است $\leftarrow$ $a = -1$

$an = -2$

۹

گزینه ۳

$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$



$f \circ f = 0 \rightarrow f(x) = 0$ (اولاً) $\Rightarrow x = 1, -1 \Rightarrow$

$f(x) = 1 \rightarrow$ جواب

(ثانیاً) $f(x) = -1 \rightarrow$ دو جواب

۱۰

گزینه ۱

$f(x) = 2x + 2$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{2} = 4x + 2$

$x - 2 = 8x + 4$

$-6 = 3x \rightarrow x = -2 \rightarrow a = -2$

با یک مثال بررسی می کنیم

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

(۱۱)

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2)$$

$$= (\log 10)(\log \frac{5}{2}) = 1 \times \log \frac{5}{2}$$ گزینه ۲

$$\rightarrow \log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2}$$

$$3x = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

---

(۱۲)

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \rightarrow \boxed{\cos \alpha > 0}$$ ناحیه ۱ و ۴

گزینه ۴

$$2\sin \alpha < \sin 2\alpha \rightarrow 2\sin \alpha < 2\sin \alpha \cos \alpha$$

اگر $\boxed{\sin \alpha > 0}$ ← $1 < \cos \alpha$

بنابراین $\boxed{\sin \alpha < 0}$ ناحیه ۳ و ۴

$\rightarrow$ $\boxed{\alpha$ در ناحیه ۴ $}$

---

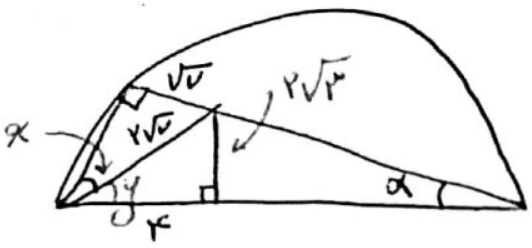
(۱۳)

$$\frac{\sin(-28) + 2\cos(-10)}{2\sin(14) + 3\sin 28} = \frac{-\sin(270+10) + 2\cos(90+10)}{2\sin(180-10) + 3\sin(240+10)} = \frac{+\cos 10 - 2\sin 10}{2\sin 10 + 3\sin 10}$$

$$= \frac{\cos 10 - 2\sin 10}{5\sin 10} = \frac{1}{5}\cot 10^\circ - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(2+\sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{3} = 0/2\sqrt{3}$$

$$\cot 10 = \tan 80 = \tan(45+35) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6}$$

۱۴



$\sin x = \frac{\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}} = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = ۳۰^\circ$

گزینه ۱

$\tan y = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

با توجه به رابطه α ، مجموع $(x+y)$ متمم است

$$\rightarrow \tan\alpha = \cot(x+y) = \frac{۱ - \tan ۳۰^\circ \times \tan y}{\tan ۳۰^\circ + \tan y}$$

$$= \frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴ - ۳}{۵\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۵\sqrt{۳}}$$

$$= ۰/۲\sqrt{۳}$$

۱۵

$$\lim_{x \to ۰} \frac{k + \cos(\sqrt{a}x)}{kx^۲} = ۳ \xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{دوبار}} \frac{-\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}x)}{۲kx}$$

گزینه ۴

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \frac{-a\cos(\sqrt{a}x)}{۲k} = ۳$$

$$\rightarrow -\frac{a}{۲k} = ۳ \rightarrow \frac{a}{k} = -۶$$

۱۶

$$f(x) = \frac{a^۲x^۲ - ۲x + ۱}{(x+a)(mx-۲)}$$

$y = -۴$ مجانب افقی $\rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{a^۲}{m} = -۴$

$\rightarrow a^۲ = -۴m$

گزینه ۳

$x = -a$ ریشه مخرج کسر $\rightarrow m(-a) - ۲ = ۰ \rightarrow m = -\frac{۲}{a}$

$$a^۲ = \frac{۸}{a} \rightarrow a = ۲$$

(17)

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cot x}{[x-\pi]}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{\sin x\,[x-\pi]}=\frac{-1}{-\sin(\pi^-)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$[0^-]=-1$ ، ناحیه ۲

گزینه ۳

---

(18)

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}\,|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|}$$

$x=a$ ریشه مخرج، ریشه صورت

$\to a^2+a=0 \to a=0$ ✗ ، $a=-1$ ✓

$$\to f(x)=\frac{+\sqrt{3}(x+1)}{|x^3+(m-2)x+1|}\xrightarrow[\text{ریشه مخرج}]{x=-1} -1-(m-2)+1=0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{+\sqrt{3}(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

گزینه ۲

---

(19)

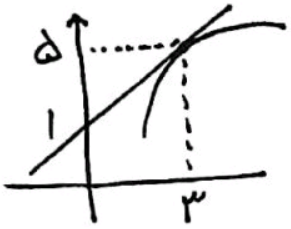
$$f(x)=\frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2-x+\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Big\}\to f(x)-2g(x)=\frac{-2\sqrt{3}x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\to \left(f(x)-2g(x)\right)'=\left(\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt[6]{x}}\right)'=\frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt[6]{x^5}}\Bigg|_{x=1}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

گزینه ۲



$f'(۳) = \frac{\text{شیب خط}}{} = \frac{۵-۱}{۳-۰} = \frac{۴}{۳}$ گزینه ۴ (۲۰)

گزینه ۱ (۲۱)

$$f(x) = \begin{cases} ۲bx+c & x<a \\ ۳x^۲ & x \geq a \end{cases}$$

اولاً پیوسته است $x=a$

$$\rightarrow ۲ba+c = ۳a^۲ \quad (۱)$$

ثانیاً مشتق پذیر است $x=a$

$$\rightarrow ۲b = ۶a \rightarrow b = ۳a \xrightarrow{(۱)} ۶a^۲ + c = ۳a^۲$$

$$\rightarrow ۳a^۲ + c = ۰$$

$$\rightarrow a^۳ + b - c = a^۳ + ۳a + ۳a^۲ + ۱ - ۱ = (a+۱)^۳ - ۱$$

---

(۲۲)

$$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}\,|x-a| = \sqrt[۳]{x^۲}(a-x) \rightarrow f'(x) = -\sqrt[۳]{x^۲} + (a-x)\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

نقطه بحرانی

$$f'(x) = ۰ \rightarrow -\sqrt[۳]{x^۲} + (a-x)\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = ۰ \rightarrow -۳x + ۲a - ۲x = ۰$$

$$\rightarrow x = \frac{۲}{۵}a$$

$$\rightarrow f\left(\frac{۲}{۵}a\right) = \frac{۳}{۲} \rightarrow \sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۵}a^۲}\left(a - \frac{۲}{۵}a\right) = \frac{۳}{۲}$$

$$\rightarrow \sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۵}a^۲} = \frac{۵}{۲a} \rightarrow a^۵ = \left(\frac{۵}{۲}\right)^۵ \rightarrow a = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

گزینه ۱

$\bar{x}=-3$ ← جمع و تفریق تأثیری در واریانس ندارد پس

$$Var=\frac{7^2+4^2+3^2+2^2+2^2}{5}=\frac{82}{5}=16/4$$

گزینه ۲

---

۲۴)

$$P(A-B)=P(A)\cdot P(B') \rightarrow P(A\cap B')=P(A)\cdot P(B')$$

پس A و B نیز مستقل هستند.

$$P(A'\cap B')=0/25 \rightarrow P(A\cup B)'=0/25 \rightarrow P(A\cup B)=0/75$$

$$\rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/75$$

$$1/6P(B)^2+P(B)-P(B)\times 1/6P(B)=0/75$$

حل معادله درجه ۲

$$\longrightarrow P(B)=\frac{3}{8} \rightarrow P(A)=0/6$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A)\cdot P(B')$$

مستقل هستند

$$=\frac{6}{10}+\frac{5}{8}-\frac{30}{80}=\frac{68}{80}=\frac{17}{20}$$

گزینه ۲

---

۲۵)

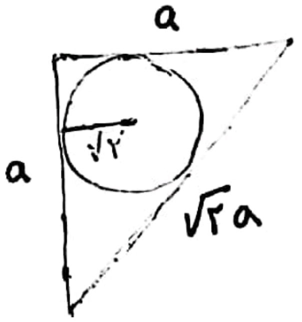
$$6+(2\times 4)\times 4=38$$

دو لایه کامل حذف

گزینه ۳

---

۲۶)

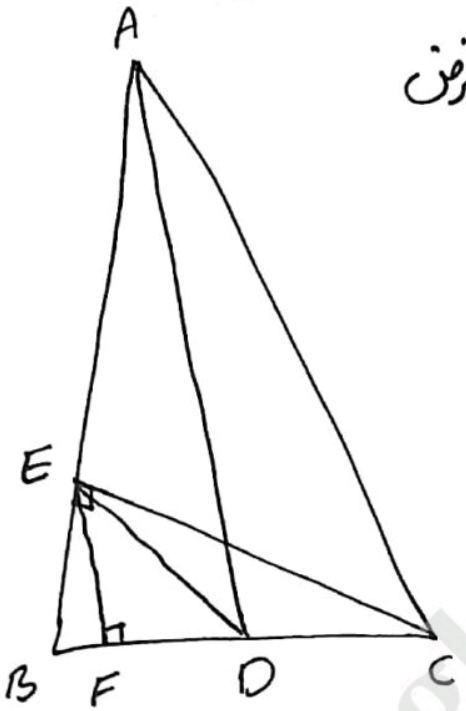


$$r=\frac{S}{P} \rightarrow \sqrt{2}=\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{1}{2}(2a+\sqrt{2}a)}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow a=2\sqrt{2}+2 \longrightarrow$$ دهانه پرگار $$> \sqrt{2}+1$$

بیشتر از نصف طول ضلع

گزینه ۱



فرض $CE = 2x \rightarrow AB = 2y$

$DE = 2\sqrt{3}+4 = y$ (راحتی می‌شه)

DE میانه وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه است

$\rightarrow DE = CD = BD = y$

$\rightarrow BC = 2y$

$\triangle ABD \sim \triangle BEC \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{CE}$

$\rightarrow \frac{2x}{2y} = \frac{y}{BE} = \frac{\sqrt{4x^2-y^2}}{x}$

$\Rightarrow \frac{4x^2-y^2}{x^2} = (\frac{2x}{y})^2 \rightarrow 4-(\frac{2y}{2x})^2 = (\frac{2x}{y})^2$

با فرض $t = (\frac{2x}{y})^2$

$\Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \rightarrow t = (\frac{2x}{y})^2 = \sqrt{3}+2$ یا $2-\sqrt{3}$

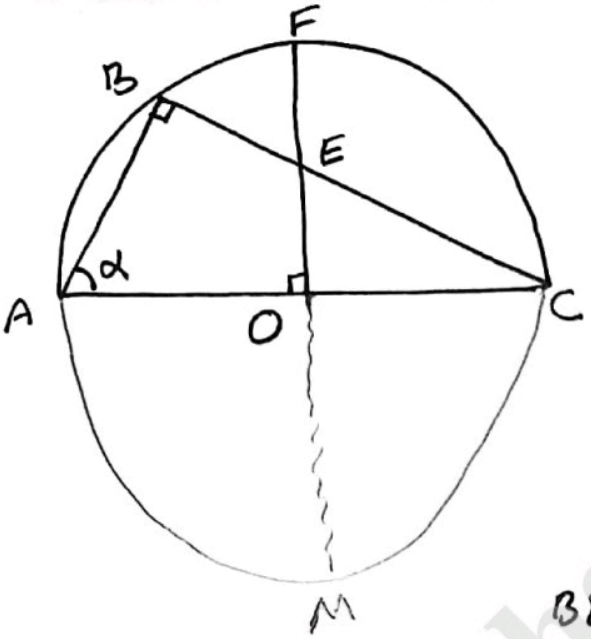
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

$BE^2 = BF \times BC \rightarrow BF = \frac{BE^2}{2y} = \frac{y}{2}(\frac{BE}{y})^2 = \frac{y}{2}(\frac{2y}{2x})^2$

$\Rightarrow BF = \frac{y}{2}(t) = \frac{2\sqrt{3}+4}{2}(2\sqrt{3}+4) = 1$

$\frac{1}{t} = \sqrt{3}-1$

۲۸



$\sin\alpha = 0/8 \rightarrow \begin{cases} AC = 10k \\ BC = 8k \\ AB = 6k \end{cases}$

$\rightarrow MO = CO = 5k$

طبق روابط طولی

$BE \times CE = EF \times EM$

$\rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{EM}{CE} = \frac{5k + OE}{CE}$ ☆

$\triangle ABC \sim \triangle OCE \rightarrow \frac{10k}{CE} = \frac{8k}{5k} = \frac{6k}{OE} \rightarrow$

$CE = \frac{50}{8}k$

$OE = \frac{30}{8}k$

☆ $= \frac{5k + \frac{30}{8}k}{\frac{50}{8}k} = \frac{V_0}{5_0} = 1/6$

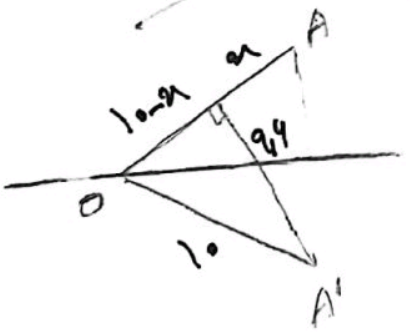
۲۹

$6^2 = 3(V+y) \rightarrow 12 = V+y \rightarrow y = 5$

$\frac{y}{V} = 0/4$

$5y = 2(3x+1) \rightarrow 3x+1 = 10 \rightarrow x = 3$

۳۰



$9/6^2 + (10-x)^2 = 10^2 \rightarrow 9/6^2 + x^2 - 20x = 0$ ☆

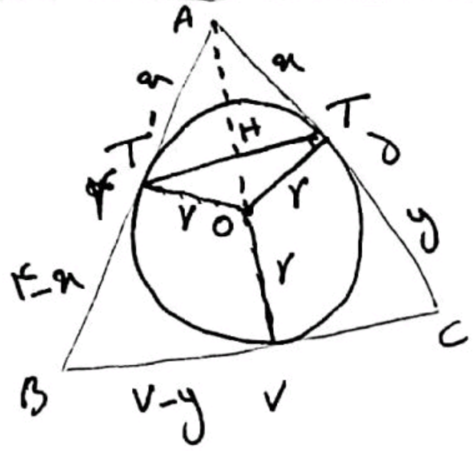
$\rightarrow AA'^2 = x^2 + 9/6^2 = 20x \rightarrow$

$AA' = \sqrt{20x} \rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \sqrt{20}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{20}(5 + 2\sqrt{P})$

$= \sqrt{20}\sqrt{29/2} = \sqrt{576} = 28$

20 9/6

(۳۱



$p = \frac{16}{2} = 8$

$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{8\times1\times3\times4}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

گزینه ۲

$4 - x = 7 - y \Rightarrow \begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 5 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 1}$

$TT' = 2TH = 2\times\frac{TA\times OT}{OA} = 2\times\frac{1\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = 0/4\sqrt{15}$

(۳۲

چون a و b دارای زاویه ۶۰° است بردار واحدها $\frac{a}{|a|}$ و $\frac{b}{|b|}$

نیز همینطورند پس هر دو را می‌توان یکه در نظر گرفت

گزینه ۳

$\Rightarrow$ تصویر $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

(۳۳

$|A|\,|A+(k-1)I| = 125$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 1(1-4) - 2(2-4) + 2(4-2) = -3 + 4 + 4 = \boxed{5}$

$\rightarrow |A + (k-1)I| = 25$

$A + (k-1)I = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix} \rightarrow |A+(k-1)I| = k(k^2-4) + 2(4-2k) + 2(4-2k) = 25$

$k^3 - 4k + 16 - 8k = 25$

$k^3 - 12k - 9 = 0 \rightarrow \boxed{k = -3}$

گزینه ۳

$|(k+1)I_3| = (k+1)^3 = (-2)^3 = -8$

(۳۴)

$|A|=۲ \rightarrow ad-bc=۲$

$B^۲=\begin{bmatrix} ۱+ac=۲ & ۰ & a+ad=۰ \\ ۰ & ۲b^۲=۲ & ۰ \\ c+dc=۵ & ۰ & ac+d^۲=۲ \end{bmatrix}$

$ac=۱ \rightarrow a=c=\pm ۱$

$d^۲=۱ \rightarrow d=-۱$

$a+ad=۰$

$b^۲=۱ \rightarrow -a-ab=۲$

$a(۱+b)=-۲$

$\rightarrow a=-۱,\ b=۱$

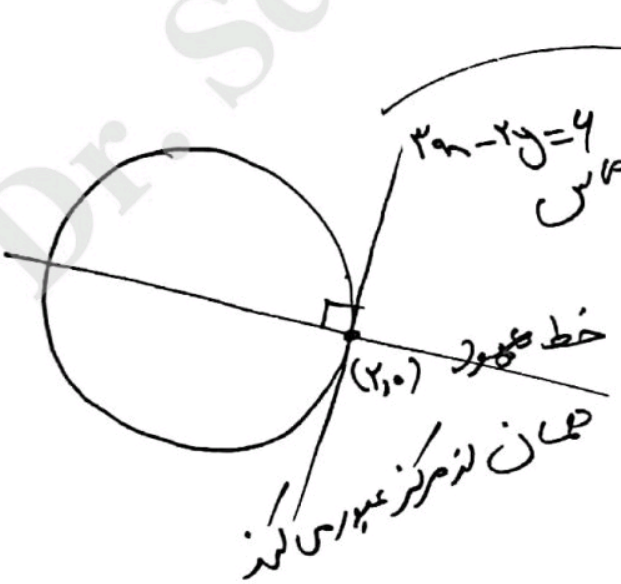
$a=-۱ \mid =c$

$B^۳=۲I\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ ضرب $=-۳۲\sqrt{۲}$

گزینه ۱

(۳۵)

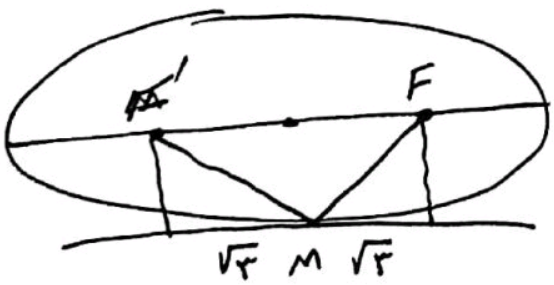


با یک گزینه‌ی دلخواه معادله صدق کند.

فقط گزینه‌ی ۲ صدق می‌کند.

گزینه ۲

(۳۶)



می‌توان حالت خاص در نظر گرفت

$MF\times MF'=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\sqrt{۳}=۲$

قطر بزرگ $=MF+MF'=۴$

گزینه ۲

(۳۷)

$$۸x^۲+۹xy+۳x-y=۰$$

$$۸x^۲+۳x=y-۹xy \rightarrow y=\frac{۸x^۲+۳x}{۱-۹x}=\frac{x(۸x+۳)}{}$$

$$=\frac{۸x^۲-۸x+۱۱x}{۱-x}$$

$$=-۸(۱+x)+\frac{۱۱x}{۱-x} \in \mathbb{Z}$$

تمرین ۱

چون $(x,۱-x)=۱$ بنابراین

$$۱-x \mid ۱۱ \Rightarrow ۱-x=\pm۱ \ , \ \pm۱۱$$

$x=۰$ $x=۱۲$

$x=۲$ $x=-۱۰$

چهار جواب دارد.

(۳۸)

تمرین ۳

$x_۳=۰,۱,۴,۹,۱۴$

$x_۲=۰,۵,۱۰$

$x_۳$ / $x_۴$ →	۰	۱	۴	۹	۱۴
۰	۵	۴	۳	۲	۱
۵	۳	۲	۱		
۱۰	۱				

تعداد کل $= ۱+۹+۱۵ \rightarrow ۲۲$

۳۹

گزینه ۲

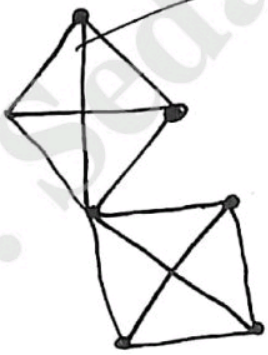
اگر مجموع مقادیر عددی فرد باشد، باید تعداد ۱ ها در برد عددی فرد باشد

سه مورد ۱ یا یک مورد ۱

$\binom{4}{1}\times 2^3 + \binom{4}{3}\times 2 = 4\times 8 + 4\times 2 = 40$

۴۰

گزینه ۴



چون تعداد رأس ۴ است بنابراین دوتا گراف K_4 را به هم می‌چسبانیم.

$8-1=7$