www.konkur.in

پاسخ تشریحی سوالات کنکور سراسری ۱۴۰۴ (نوبت اول)

سوال ۱: گزینه‌ی ۲

۱- اگر مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جملهٔ اول آن باشد، جملهٔ سوم این دنباله چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

$$S_۹ = ۷۳S_۳ \Rightarrow \frac{a_۳}{a_۱} = r^۲ = ?$$

$$\frac{S_۹}{S_۳} = \frac{\frac{a_۱(۱-r^۹)}{۱-r}}{\frac{a_۱(۱-r^۳)}{۱-r}} = \frac{۱-r^۹}{۱-r^۳} = \frac{۱-t^۳}{۱-t} = t^۲ + t + ۱ = ۷۳, \quad \boxed{r^۳ = t}$$

$$t^۲ + t + ۱ = ۷۳ \Rightarrow t^۲ + t - ۷۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = +۸ \\ t = -۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{r = ۲ \in \mathbb{Z}} \\ r = \sqrt[۳]{-۹} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_۳}{a_۱} = r^۲ = ۴$$

سوال ۲: گزینه‌ی ۴

۲- اگر $x^۲ + \frac{۱۰}{x^۲+۱} = ۹$ باشد، مقدار $(x^۲+۱)^۲ + \frac{۱۰۰}{(x^۲+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۰ ۳) ۸۸ ۴) ۸۰

$$x^۲ + \frac{۱۰}{x^۲+۱} = ۹ \overset{+۱}{\Rightarrow} x^۲ + ۱ + \frac{۱۰}{x^۲+۱} = ۹ + ۱ \Rightarrow (x^۲+۱) + \frac{۱۰}{(x^۲+۱)} = ۱۰ \overset{\text{به توان ۲}}{\Longrightarrow}$$

$$(x^۲+۱)^۲ + \left(\frac{۱۰}{(x^۲+۱)}\right)^۲ + ۲ \times (x^۲+۱) \times \frac{۱۰}{(x^۲+۱)} = ۱۰^۲ \Rightarrow$$

$$(x^۲+۱)^۲ + \frac{۱۰۰}{(x^۲+۱)^۲} + ۲۰ = ۱۰۰ \Rightarrow (x^۲+۱)^۲ + \frac{۱۰۰}{(x^۲+۱)^۲} = ۸۰$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۳: گزینه‌ی ۱

۳- A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟

۱) $B = U$ ۲) $A = U$ ۳) $B = A$ ۴) $A = \varnothing$

بررسی گزینه‌ها

۱) $A \cup B' \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cup \emptyset \subseteq A \cap U \Rightarrow A \subseteq A$ ✅

۲) $A \cup B' \subseteq A \cap B \Rightarrow U \cup B' \subseteq U \cap B \Rightarrow U \subseteq B$ ❌

۳) $A \cup B' \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cup A' \subseteq A \cap A \Rightarrow U \subseteq A$ ❌

۴) $A \cup B' \subseteq A \cap B \Rightarrow \emptyset \cup B' \subseteq \emptyset \cap B \Rightarrow B' \subseteq \emptyset$ ❌

سوال ۴: گزینه‌ی ۴

۴- گزارهٔ $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$ ۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ ۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$$
$$\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)]$$
$$\equiv \sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$$

سوال ۵: گزینه‌ی ۳

۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

$S = \alpha + \beta = 5 \Rightarrow \alpha = 5 - \beta$

$\beta^2 - 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta^2 = 5\beta - 2}$

$\beta^4 = (5\beta - 2)^2 = 25\beta^2 - 20\beta + 4 = 25(5\beta - 2) - 20\beta + 4 = 125\beta - 50 - 20\beta + 4$

$\beta^4 = 105\beta - 46 \Rightarrow \beta^5 = 105\beta^2 - 46\beta = 105(5\beta - 2) - 46\beta = \boxed{479\beta - 210}$

$\boxed{5\beta^2 = 25\beta - 10}$

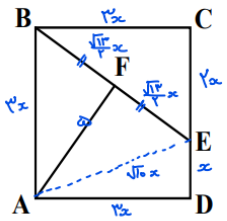
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

$$\frac{۴\alpha+\beta^{۵}}{۵\beta^{۲}}=\frac{(۲۰-۴\beta)+(۴۷۹\beta-۲۱۰)}{۲۵\beta-۱۰}=\frac{۴۷۵\beta-۱۹۰}{۲۵\beta-۱۰}=\frac{۱۹(۲۵\beta-۱۰)}{۲۵\beta-۱۰}=۱۹$$

سوال ۶: گزینه‌ی ۲

۶- در مربع شکل زیر، $CD=۳ED$ و نقطه F، وسط پاره‌خط BE قرار دارد. اگر $AF=۵$ باشد، مساحت چهارضلعی ADEF کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

$$BE=\sqrt{(۲x)^{۲}+(۳x)^{۲}}=\sqrt{۱۳}x$$

$$AE=\sqrt{x^{۲}+(۳x)^{۲}}=\sqrt{۱۰}x$$

AF میانه در مثلث ABE است:

$$۵^{۲}=\frac{(۳x)^{۲}+\left(\sqrt{۱۰}x\right)^{۲}}{۲}-\left(\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}x\right)^{۲}=\frac{۱۹x^{۲}}{۲}-\frac{۱۳x^{۲}}{۴}=\frac{۲۵x^{۲}}{۴}\Rightarrow x=۲$$

$$P_{ABF}=\frac{۵+\sqrt{۱۳}+۶}{۲}=\frac{۱۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$S_{ABF}=\sqrt{\frac{۱۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\left(\frac{۱۱+\sqrt{۱۳}}{۲}-۵\right)\left(\frac{۱۱+\sqrt{۱۳}}{۲}-۶\right)\left(\frac{۱۱+\sqrt{۱۳}}{۲}-\sqrt{۱۳}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{۱۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\left(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)\left(\frac{-۱+\sqrt{۱۳}}{۲}-۶\right)\left(\frac{۱۱-\sqrt{۱۳}}{۲}-\sqrt{۱۳}\right)}=\sqrt{\frac{۱۰۸}{۴}\times\frac{۱۲}{۴}}$$

$$=\sqrt{۲۷\times۳}=۹$$

$$S_{AFED}=S_{ABCD}-(S_{ABF}+S_{BCE})=۳۶-(۹+۱۲)=۳۶-۲۱=۱۵$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۷: گزینه‌ی ۳

۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۵}{\sqrt{mx^۲-۸x+۳۹}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m، بیشترین مقدار تابع f برابر ۱ باشد، مقدار [m] کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

نقطه‌ی $x_۰$ را در نظر می‌گیریم که در آن بیشترین مقدار تابع رخ می‌دهد:

$$f(x_۰)=۱,\quad f'(x_۰)=۰$$

$$f'(x)=\frac{-۵(۲mx-۸)}{۲\sqrt[۲]{(mx^۲-۸x+۳۹)^۳}}$$

$$f'(x_۰)=-\frac{۵(۲mx_۰-۸)}{۲\sqrt[۲]{(mx_۰^۲-۸x_۰+۳۹)^۳}}=۰ \Rightarrow (۲mx_۰-۸)=۰ \Rightarrow \boxed{mx_۰=۴}$$

$$f(x_۰)=\frac{۵}{\sqrt{mx_۰^۲-۸x_۰+۳۹}}=۱ \Rightarrow ۵=\sqrt{۴x_۰-۸x_۰+۳۹}=\sqrt{۳۹-۴x_۰} \Rightarrow x_۰=\frac{۱۴}{۴}$$

$$\Rightarrow m=\frac{۴}{x_۰}=\frac{۴}{\frac{۱۴}{۴}}=\frac{۱۶}{۱۴} \Rightarrow [m]=۱$$

سوال ۸: گزینه‌ی ۱

۸- اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x)=x^۵+ax^۳$ و $q(x)=x^۴+۳x^۳+۲x^۲$، دوجمله‌ای $x^n+x^۳$ باشد، مقدار na کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۱

$$p(x)=x^۵+ax^۳=x^۳(x^۲+a)$$

$$q(x)=x^۴+۳x^۳+۲x^۲=x^۲(x^۲+۳x+۲)=x^۲(x+۱)(x+۲)$$

$$\big(p(x),q(x)\big)=x^۳+x^n=\begin{cases}x^۲(x+۱)=x^۳+x^۲ \checkmark \\ \text{یا} \\ x^۲(x+۲)=x^۳+۲x^۲\end{cases} \Rightarrow a=-۱,n=۲ \Rightarrow na=-۲$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۹: گزینه‌ی ۳

۹- اگر $f(x)=\begin{cases} x-1 & 0\le x\le 2 \\ x+1 & -2\le x<0 \end{cases}$ باشد، معادله $fof(x)=0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$f\big(f(x)\big)=0$

$f(x)$ درونی را A می‌نامیم:

$f(A)=0 \Rightarrow A=1, A=-1$

$f(x)=A=1 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$f(x)=A=-1 \Rightarrow \boxed{x=0}, \boxed{x=-2}$

سوال ۱۰: گزینه‌ی ۱

۱۰- تابع پیوسته f یک‌به‌یک بوده و وارون خود را در نقطه $A(a,f(a))$ قطع می‌کند. اگر $f(0)=2$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) a ۴) $f'(a)$

یک تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می کند، پس

$A\big(a,f(a)\big)=A(a,a) \Rightarrow f(a)=a$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{a}{a}=1$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۱۱: گزینه‌ی ۲

۱۱- اگر $\log(۳x+۱)=\begin{vmatrix}\log ۵ & \log ۲\\ \log ۲ & \log ۵\end{vmatrix}$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{۲}} x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

$$\log(۳x+۱)=(\log ۵)^۲-(\log ۲)^۲=(\log ۵+\log ۲)(\log ۵-\log ۲)=(\log ۱۰)\left(\log\frac{۵}{۲}\right)$$

$$۳x+۱=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \log_{\sqrt{۲}}\frac{۱}{۲}=\log_{۲^{(\frac{۱}{۲})}}۲^{(-۱)}=(-۱)\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\right)\log_۲ ۲=-۲$$

سوال ۱۲: گزینه‌ی ۴

۱۲- اگر $\sin ۲\alpha < ۲\sin\alpha$ و $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}>۰$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

$$\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}>۰\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin^۲\alpha}>۰\Rightarrow ۰<\cos\alpha<۱\Rightarrow ۱-\cos\alpha>۰$$

ناحیه‌ی اول یا چهارم

$$۲\sin\alpha-\sin ۲\alpha<۰\Rightarrow ۲\sin\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha<۰\Rightarrow ۲\sin\alpha\,(۱-\cos\alpha)<۰$$

$$\Rightarrow \sin\alpha<۰$$

ناحیه‌ی چهارم

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۱۳: گزینه‌ی ۳

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin(-۲۸۵^\circ)+۲\cos(-۱۰۵^\circ)}{۲\sin(۱۶۵^\circ)+۳\sin(۳۷۵^\circ)}$ کدام است؟

۱) $۰/۲\sqrt{۶}$ ۲) $۰/۴\sqrt{۶}$ ۳) $۰/۲\sqrt{۳}$ ۴) $۰/۴\sqrt{۳}$

$$\frac{\sin(-۲۸۵^\circ)+۲\cos(-۱۰۵^\circ)}{۲\sin(۱۶۵^\circ)+۳\sin(۳۷۵^\circ)}=\frac{-\sin(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)+۲\cos(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}{۲\sin(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)+۳\sin(۳۶۰^\circ+۱۵^\circ)}=$$

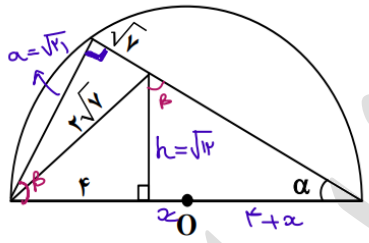
$$\frac{\cos ۱۵^\circ-۲\sin ۱۵^\circ}{۲\sin ۱۵^\circ+۳\sin ۱۵^\circ}=\frac{\cos ۱۵^\circ-۲\sin ۱۵^\circ}{۵\sin ۱۵^\circ}=\frac{\cot ۱۵^\circ}{۵}-\frac{۲}{۵}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۵}-\frac{۲}{۵}=\frac{\sqrt{۳}}{۵}=۰/۲\sqrt{۳}$$

$$*\ \tan ۳۰^\circ=\frac{۲\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan^۲ ۱۵^\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \tan ۱۵^\circ=-\sqrt{۳}+۲\Rightarrow \cot ۱۵^\circ=۲+\sqrt{۳}$$

سوال ۱۴: گزینه‌ی ۱

۱۴- در نیم‌دایرهٔ شکل زیر، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $۰/۲\sqrt{۳}$
۲) $۰/۳\sqrt{۳}$
۳) $۰/۴\sqrt{۳}$
۴) $۰/۵\sqrt{۳}$



$$a=\sqrt{(۲\sqrt{۷})^۲-(\sqrt{۷})^۲}=\sqrt{۲۸-۷}=\sqrt{۲۱}$$

$$h=\sqrt{(۲\sqrt{۷})^۲-(۴)^۲}=\sqrt{۲۸-۱۶}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$\sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۳}}{y}=\frac{\sqrt{۲۱}}{۲x+۸}\Rightarrow \boxed{۴\sqrt{۳}x+۱۶\sqrt{۳}=\sqrt{۲۱}y}$$

$$\tan\alpha=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲x+۴}=\frac{\sqrt{۲۱}}{\sqrt{۷}+y}\Rightarrow ۲\sqrt{۲۱}+۲\sqrt{۳}y=۲\sqrt{۲۱}x+۴\sqrt{۲۱}$$

$$۲\sqrt{۲۱}=۲\sqrt{۳}y-۲\sqrt{۲۱}x\xrightarrow{\times\sqrt{۷}}۱۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۲۱}y-۱۴\sqrt{۳}x\Rightarrow$$

$$۱۴\sqrt{۳}=۲(۴\sqrt{۳}x+۱۶\sqrt{۳})-۱۴\sqrt{۳}x=۸\sqrt{۳}x+۳۲\sqrt{۳}-۱۴\sqrt{۳}x=۳۲\sqrt{۳}-۶\sqrt{۳}x$$

$$۶\sqrt{۳}x=۳۲\sqrt{۳}-۱۴\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}\Rightarrow x=۳\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲x+۴}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۶+۴}=۰/۲\sqrt{۳}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۱۵: گزینه‌ی ۴

۱۵- اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{k+\cos(\sqrt{a}\,x)}{kx^2}=3$ باشد، مقدار $\frac{a}{k}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -6

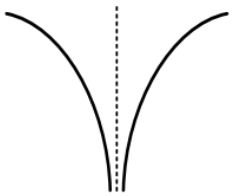
$$\lim_{x\to 0}\frac{k+\cos(\sqrt{a}x)}{kx^2}=\frac{k+1}{0}\Rightarrow k=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos(\sqrt{a}x)}{-x^2}\overset{HOP}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}x)}{-2x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{-a\cos(\sqrt{a}x)}{-2}=\frac{-a}{-2}=3$$

$$a=6\Rightarrow\frac{a}{k}=\frac{6}{-1}=-6$$

سوال ۱۶: گزینه‌ی ۳

۱۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{a^2x^2-2x+1}{(x+a)(mx-2)}$ در همسایگی $x=-a$ به صورت شکل زیر است. اگر $y=-4$ مجانب افقی تابع f باشد، مقدار a کدام است؟



۱) -2
۲) -4
۳) ۲
۴) ۴

a^2x^2-2x+1 عبارت هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، زیرا $f(x)<-4$ است. a^2 همواره مثبت است، پس عبارت صورت همواره مثبت و عبارت مخرج همواره منفی است، پس $m<0$ است یک ریشه‌ی مضاعف $x=-a$ دارد. پس $x=-a$ ریشه‌ی عبارت $(mx-2)$ نیز هست.

$$m(-a)-2=0\Rightarrow ma=-2\Rightarrow\boxed{m=-\frac{2}{a}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^2x^2-2x+1}{(x+a)(mx-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2x-2}{2mx+(ma-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2}{2m}=\frac{a^2}{m}=-4\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{-\frac{2}{a}}=-4\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۱۷: گزینه‌ی ۳

۱۷- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\cot x}{[x-\pi]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

$$\lim_{x\to\pi^-}[x-\pi]=[\pi-\varepsilon-\pi]=[-\varepsilon]=-1$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cot x}{[x-\pi]}=\lim_{x\to\pi^-}-\cot x$$

در ناحیه‌ی دوم هستیم و به سمت π می‌رویم و کتانژانت منفی است:

$$\lim_{x\to\pi^-}-\cot x=-(-\cot\pi^-)=+\infty$$

سوال ۱۸: گزینه‌ی ۲

۱۸- تابع ناصفر f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\,|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|}$ روی $\mathbb{R}-\{a\}$ تعریف شده و برای هر $x\neq a$ پیوسته است.

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ۳) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ موجود و تابع روی $\mathbb{R}-\{a\}$ پیوسته باشد، پس $x=a$ ریشه‌ی صورت و مخرج است:

$$\sqrt{3}|a^2+a|=0\implies \boxed{a=-1},a=0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+(m-2)x+1|}$$

$$x=-1\implies|(-1)^3-(m-2)+1|=0\implies m=2$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+1|}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+1|}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3}}{|x^2-x+1|}=\frac{\sqrt{3}}{|1+1+1|}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۱۹: گزینه‌ی ۲

۱۹- اگر $f(x)=\frac{|۲x-۴|}{\sqrt[۳]{x^۲}}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$ باشد، مقدار $f'(۱)-۲g'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

$$f'(x)=\left(\frac{-۲x+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}}\right)'=\frac{-۲\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right)-\left(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\right)(-۲x+۴)}{\sqrt[۳]{x^۴}};\ x\le ۲$$

$$f'(۱)=\frac{-۲-\left(\frac{۲}{۳}\right)(-۲+۴)}{۱}=-۲-\frac{۴}{۳}=\frac{-۱۰}{۳}$$

$$g(x)=\frac{|x-۲|+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۲-x+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}};\ x\le ۲$$

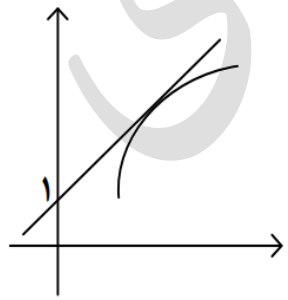
$$g'(x)=\frac{\left(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right)-\left(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\right)(۲-x+\sqrt{۳x})}{\sqrt[۳]{x^۴}}$$

$$g'(۱)=\frac{\left(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\right)-\left(\frac{۲}{۳}\right)(۲-۱+\sqrt{۳})}{۱}=-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}-\frac{۲}{۳}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

$$f'(۱)-۲g'^{(۱)}=\frac{-۱۰}{۳}-۲\left(-\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

سوال ۲۰: گزینه‌ی ۴

۲۰- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه (۳,۵) در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(۳)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

$$(۰,۱),(۳,۵)\Rightarrow m_d=f'(۳)=\frac{۵-۱}{۳-۰}=\frac{۴}{۳}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۲۱: گزینه‌ی ۱

۲۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۲bx+c & x>a\\ ۳x^۲ & x\le a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a^۳+b-c$ کدام است؟

۱) $(a+۱)^۳-۱$ ۲) $(a+۱)^۳+۱$ ۳) $(a-۱)^۳-۱$ ۴) $(a-۱)^۳+۱$

$$f'(x)=\begin{cases}۲b & x>a\\ ۶x & x<a\end{cases}$$

$$f'(a^+)=f'(a^-)=۲b=۶a \Rightarrow \boxed{b=۳a}$$

$$f(a^+)=f(a^-)=۲ab+c=۳a^۲ \Rightarrow c=۳a^۲-۲ab=۳a^۲-۶a^۲=-۳a^۲$$

$$a^۳+b-c=a^۳+۳a+۳a^۲=a^۳+۳a^۲+۳a+۱-۱=(a+۱)^۳-۱$$

سوال ۲۲: گزینه‌ی ۱

۲۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}\,|x-a|$ روی بازهٔ $[۰,a]$ برابر ۱٫۵ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲٫۵ ۲) ۲ ۳) ۱٫۵ ۴) ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x^۲}(x-a) & x\ge a\\ -\sqrt[۳]{x^۲}(x-a) & x\le a\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۲(x-a)}{۳\sqrt[۳]{x}}+\sqrt[۳]{x^۲} & x\ge a\\ -\left(\dfrac{۲(x-a)}{۳\sqrt[۳]{x}}+\sqrt[۳]{x^۲}\right) & x\le a\end{cases}$$

$$-\left(\frac{۲(x-a)}{۳\sqrt[۳]{x}}+\sqrt[۳]{x^۲}\right)=۰ \Rightarrow -\frac{۲(x-a)}{۳\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow x-a=\frac{۳}{-۲}x \Rightarrow \boxed{x=\frac{۲a}{۵}}$$

$$-\sqrt[۲]{\left(\frac{۲a}{۵}\right)^۲}\left(\frac{۲a}{۵}-a\right)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow -\sqrt[۲]{\left(\frac{۲a}{۵}\right)^۲}\left(\frac{-۳a}{۵}\right)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt[۲]{\left(\frac{۲a}{۵}\right)^۲}\times a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow$$

$$\sqrt[۲]{\left(\frac{۲a}{۵}\right)^۲}\times\sqrt[۳]{a^۳}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow \sqrt[۲]{\frac{۴a^۵}{۲۵}}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۴a^۵}{۲۵}=\frac{۱۲۵}{۸} \Rightarrow a^۵=\frac{۵^۲}{۲^۲} \Rightarrow a=۲/۵$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۲۳: گزینه‌ی ۲

۲۳- اگر انحراف ۵ داده آماری از y، به‌ترتیب برابر ۱-، ۵-، ۶-، ۷- و ۴ باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

۱) ۱۵٫۶ ۲) ۱۶٫۴ ۳) ۲۴٫۶ ۴) ۲۵٫۴

$$\bar{x} = \frac{۴ - ۷ - ۵ - ۶ - ۱}{۵} = -۳$$

$$\sigma^۲ = \frac{۴۹ + ۱۶ + ۹ + ۴ + ۴}{۵} = \frac{۸۲}{۵} = ۱۶/۲$$

سوال ۲۴: گزینه‌ی ۳

۲۴- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S، روابط $P(A-B)=P(A)P(B')$ و $P(A)=۱/۶\,P(B)$ برقرار است. اگر $P(A'\cap B')=۰/۲۵$ باشد، مقدار $P(A\cup B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۴۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۳۱}{۴۰}$

دو پیشامد A' و B پیشامدهای مستقل هستند.

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A' \cap B')' = ۱ - P(A \cup B) = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow P(A \cup B) = \frac{۳}{۴}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= \frac{۸}{۵}P(B) + P(B) - \frac{۸}{۵}P(B)P(B) = -\frac{۸}{۵}P^۲(B) + \frac{۱۳}{۵}P(B) = \frac{۳}{۴}$$

$$-\frac{۸}{۵}P^۲(B) + \frac{۱۳}{۵}P(B) - \frac{۳}{۴} = ۰ \Longrightarrow P(B) = \frac{۳}{۸} \Longrightarrow P(A) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۸}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

$$P(A \cup B') = ۱ - P(A \cup B')' = ۱ - P(A' \cap B) = ۱ - P(A')P(B) = ۱ - \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۸} = ۱ - \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۷}{۲۰}$$

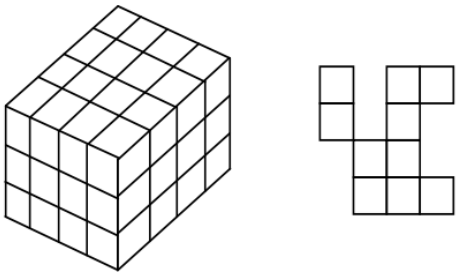
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۲۵: گزینه‌ی ۲

۲۵- حداکثر چند مکعب کوچک باید از مکعب سمت چپ برداشته شود تا نمای بالا به صورت شکل سمت راست باشد؟

۱) ۲۴
۲) ۳۸
۳) ۱۸
۴) ۱۴



تعداد کل مکعب‌ها ۴۸ = ۳ × ۴ × ۴ است.

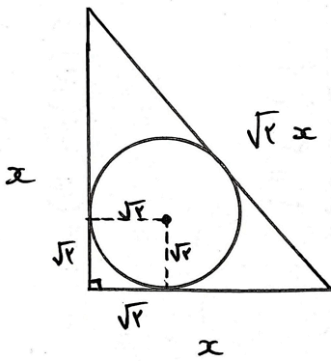
دو ردیف پایین را کلا برمی‌داریم: ۳۲ = ۲ × ۴ × ۴

شش مکعب دیگر برای تشکیل نمای بالا برمی‌داریم: ۳۸ = ۶ + ۳۲

سوال ۲۶: گزینه‌ی ۴

۲۶- مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ محیط شده است. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$



$$P = \frac{x + x + \sqrt{۲}x}{۲} = x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}x$$

$$r = P - \text{وتر} \Rightarrow \sqrt{۲} = x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}x - \sqrt{۲}x = \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)x$$

$$x = \frac{\sqrt{۲}}{۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲ - \sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} + ۲$$

نصف یک ساق برابر $۱ + \sqrt{۲}$ است.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۲۷: گزینه‌ی ۱

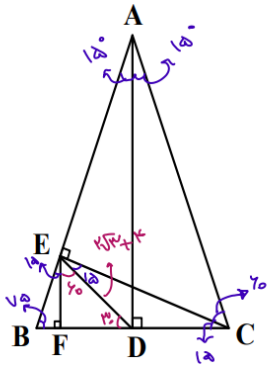
۲۷- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و $AB = ۲CE$ است. اگر $DE = ۲\sqrt{۳} + ۴$ باشد، اندازهٔ BF کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $۲\sqrt{۳}$



در مثلث AEC، $\sin A = \frac{CE}{AB} = \frac{۱}{۲}$ است، پس $A = ۳۰^\circ$ است. مثلث BEC قائم‌الزاویه و ED میانه‌ی وارد بر وتر است، پس $BC = ۲ED$.

$$BC = ۴\sqrt{۳} + ۸, \qquad BD = DC = ED = ۲\sqrt{۳} + ۴$$

پس مثلث CDE متساوی‌الساقین است.

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{FD}{ED} = \frac{FD}{۲\sqrt{۳}+۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow FD = ۳ + ۲\sqrt{۳}$$

$$BF = BD - FD = (۲\sqrt{۳}+۴) - (۳ + ۲\sqrt{۳}) = ۱$$

سوال ۲۸: گزینه‌ی ۳

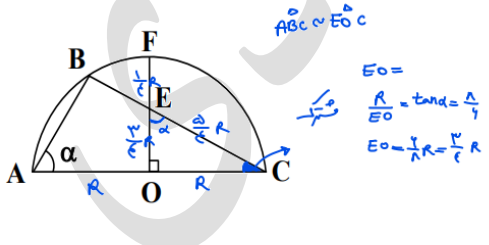
۲۸- در نیم‌دایرهٔ زیر، اگر $\sin\alpha = ۰/۸$ باشد، مقدار $\frac{BE}{EF}$ کدام است؟

۱) ۱/۲

۲) ۱/۳

۳) ۱/۴

۴) ۱/۵



$$\sin\alpha = ۰/۸ \,,\, \cos\alpha = ۰/۶$$

$$\triangle ABC: AC = ۲R \Rightarrow BC = AC.\sin\alpha = ۲R.۰/۸ = \frac{۱۶}{۱۰}R$$

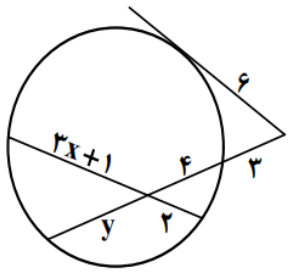
$$BE = BC - EC = \frac{۱۶}{۱۰}R - \frac{۵}{۴}R = \frac{۷}{۲۰}R \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{\frac{۷}{۲۰}R}{\frac{۱}{۴}R} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۲۹: گزینه‌ی ۴

۲۹- در شکل زیر، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

$$۶^۲ = ۳ \times (۳ + ۴ + y) \Rightarrow ۳۶ = ۳(۷ + y) \Rightarrow y = ۵$$

$$۲(۳x + ۱) = ۴ \times y = ۲۰ \Rightarrow x = ۳$$

$$\frac{x}{y} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

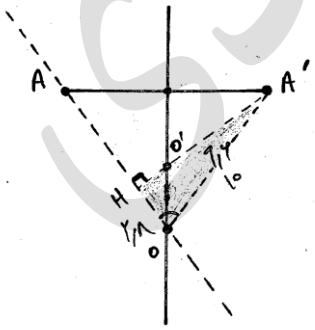
سوال ۳۰: گزینه‌ی ۱

۳۰- نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط d و نقطهٔ O روی خط d قرار دارد. اگر $OA' = ۱۰$ و فاصله نقطه A' از خط OA برابر ۹/۶ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای AA' کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۰ ۴) ۱۴

با جابه‌جا شدن نقطه‌ی O روی خط d زاویه‌ی AOA' ممکن است باز یا بسته باشد که دو حالت مختلف را از این بازتاب به دست می‌دهد. این دو حالت را با کسینوس زاویه‌ی AOA' در نظر می‌گیریم و اعمال می‌کنیم:

در مثلث OHA' داریم: $OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۹/۶^۲} = ۲/۸$ و محاسبه می‌شود $\cos O = \frac{OH}{OA'} = \frac{۲/۸}{۱۰}$



می‌دانیم در مثلث AOA' و طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$AA'^۲ = AO^۲ + A'O^۲ \pm ۲AO.A'O\cos AOA' = ۱۰۰ + ۱۰۰ \pm ۲۰۰\cos AOA'$$

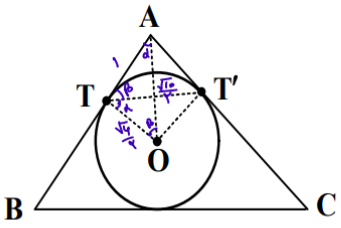
$$= ۲۰۰ \pm ۲۰۰\cos O = ۲۰۰ \pm ۲۰۰ \times ۰/۲۸ = ۲۰۰ \pm ۵۶ = \begin{cases} ۲۵۶ \\ ۱۴۴ \end{cases} \Rightarrow AA' = \begin{cases} ۱۶ \\ ۱۲ \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} ۲۸$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۳۱: گزینه‌ی ۲

۳۱- در مثلث محیطی شکل زیر، اضلاع $AB=۴$ و $AC=۵$ به‌ترتیب در نقاط T و T' بر محیط دایره محاطی، مماس هستند. اگر $BC=۷$ باشد، اندازهٔ وتر TT' کدام است؟



۱) $۰/۲\sqrt{۱۵}$

۲) $۰/۴\sqrt{۱۵}$

۳) $۰/۲\sqrt{۵}$

۴) $۰/۴\sqrt{۵}$

$$P_{ABC}=\frac{۴+۵+۷}{۲}=۸,\qquad S_{ABC}=\sqrt{۸\times۴\times۳\times۱}=۴\sqrt{۶}$$

$$OT=R=\frac{S_{ABC}}{P_{ABC}}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۸}=\frac{\sqrt{۶}}{۲},\qquad AT=AT'=P_{ABC}-BC=۸-۷=۱\Longrightarrow OA=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

$$\sin\beta=\frac{TA}{OA}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}}=\frac{\frac{TT'}{۲}}{\frac{\sqrt{۶}}{۲}}\Longrightarrow TT'=\frac{\sqrt{۶}}{\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۲\sqrt{۶۰}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۶۰}}{۵}=\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۵}=۰/۴\sqrt{۱۵}$$

سوال ۳۲: گزینه‌ی ۴

۳۲- اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ۶۰° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

اندازه‌ی بردارهای $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برابر ۱ است، پس بردار $\vec{v}$ نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و زاویه‌ی بین $\vec{v}$ و $\vec{a}$ برابر ۳۰° است.

$$\vec{v}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|^۲=\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|^۲+\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|^۲+۲\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=۱+۱+۲\cos\theta=۳$$

$$|\vec{v}|=\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|=\sqrt{۳}$$

$$\left|\vec{v'}\right|=|\vec{v}||\cos۳۰|=\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۳۳: گزینه‌ی ۳

۳۳- برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$، اگر $|A^۲+kA-A|=۱۲۵$ باشد، دترمینان $(k+۱)I_۳$ $(k\in\mathbb{Z})$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) −۸ ۴) −۶۴

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$|A^۲+kA-A|=|A^۲+(k-۱)A|=|A(A+(k-۱)I)|=|A||A+(k-۱)I|=۱۲۵$$

$$|A|=۵\implies |A+(k-۱)I|=۲۵$$

$$A+(k-۱)I=\begin{bmatrix}k & ۲ & ۲\\ ۲ & k & ۲\\ ۲ & ۲ & k\end{bmatrix}\implies \begin{vmatrix}k & ۲ & ۲\\ ۲ & k & ۲\\ ۲ & ۲ & k\end{vmatrix}=k^۳-۱۲k+۱۶=۲۵$$

$$k^۳-۱۲k-۹=۰\implies x=-۳\in\mathbb{Z}$$

$$\det(k+۱)I_۳=(k+۱)^۳=(-۲)^۳=-۸$$

سوال ۳۴: گزینه‌ی ۳

۳۴- برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و ماتریس $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & a\\ ۰ & \sqrt{۲}\,b & ۰\\ c & ۰ & d\end{bmatrix}$، اگر $|A|=۲$ و $B^۲=۲I$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس $B^۳$ کدام است؟

۱) $۳۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $-۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

$$B^۲=\begin{bmatrix}۱+ac & ۰ & a+ad\\ ۰ & ۲b^۲ & ۰\\ c+cd & ۰ & ac+d^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\implies b^۲=۱, d^۲=۱, ac=۱$$

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc=۲$$

چون گفته شده درایه‌ها صحیح هستند می‌توانیم خودمان تعیین کنیم: $a=۱, d=۱, c=۱, b=-۱$

$$B^۳=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -\sqrt{۲} & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۲\\ ۰ & -۲\sqrt{۲} & ۰\\ ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

Telegram: @konkur_in

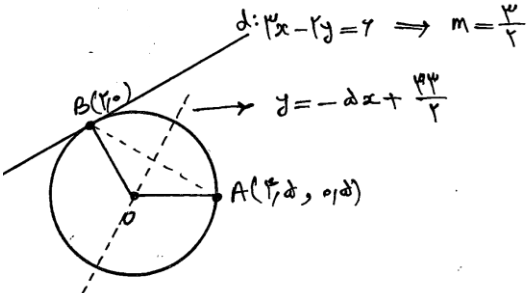
www.konkur.in

سوال ۳۵: گزینه‌ی ۴

۳۵- مختصات مرکز دایره‌ای که از نقطهٔ $(۴/۵ , ۰/۵)$ بگذرد و بر خط $۳x-۲y=۶$ در نقطهٔ $(۲,۰)$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $(۲/۵ , ۴)$ ۲) $(۳ , ۱/۵)$ ۳) $(۴ , -۳/۵)$ ۴) $(۳/۵ , -۱)$

AB وتر دایره و شیب آن به صورت زیر است:



$$m_{AB}=\frac{۰/۵-۰}{۴/۵-۲}=\frac{۰/۵}{۲/۵}=\frac{۱}{۵}$$

نقطه‌ی وسط AB به صورت $M(۳/۲۵,۰,۲۵)$ در می آید. خطی که از M می‌گذرد و بر AB عمود است از مرکز دایره می‌گذرد:

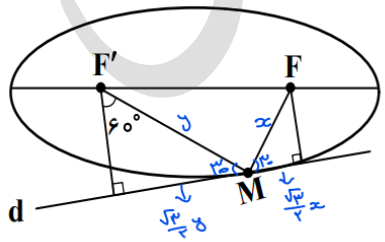
$$y-\frac{۱}{۴}=-۵\left(x-\frac{۱۳}{۴}\right)=-۵x+\frac{۶۵}{۴}\Longrightarrow y=-۵x+\frac{۳۳}{۲}\Longrightarrow O\left(\alpha,-۵\alpha+\frac{۳۳}{۲}\right)$$

$$m_{OB}=-\frac{۱}{m_d}=\frac{-۲}{۳}\Longrightarrow y=\frac{-۲}{۳}(x-۲)\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$-۵\alpha+\frac{۳۳}{۲}=\frac{-۲}{۳}(\alpha-۲)\Longrightarrow \alpha=\frac{۷}{۲}\Longrightarrow O\left(\frac{۷}{۲},-۱\right)$$

سوال ۳۶: گزینه‌ی ۳

۳۶- در شکل زیر، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. اگر فاصله بین پای عمودهای رسم‌شده از دو کانون F و F' بر خط d برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x+y)=۲\sqrt{۳}\Longrightarrow x+y=۴$$

$$۲a=F'M+FM=x+y=۴$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۳۷: گزینه‌ی ۱

۳۷- چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $۸x^۲ + xy + ۳x - y = ۰$ قرار دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

$$y(x-۱) = -۸x^۲ - ۳x \Rightarrow ۸x^۲ + xy + ۳x - y = ۰ \Rightarrow xy - y = -۸x^۲ - ۳x \Rightarrow$$

$$y = -\frac{۸x^۲ + ۳x}{x-۱} \Rightarrow x-۱ \mid ۸x^۲ + ۳x \Rightarrow x-۱ \mid ۵ \Rightarrow x-۱ = \pm ۱ \text{ و } \pm ۵$$

سوال ۳۸: گزینه‌ی ۳

۳۸- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + ۰/۴x_۲ + \sqrt{x_۳} + x_۴ = ۴$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۱

$$\boxed{if\ x_۳ = ۰} \Rightarrow x_۱ + ۰/۴x_۲ + x_۴ = ۴ \Rightarrow$$

$$x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۴ \Rightarrow \binom{۴+۱}{۱} = ۵$$

$$x_۲ = ۵ \Rightarrow x_۱ + ۲ + x_۴ = ۴ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۲ \Rightarrow \binom{۲+۱}{۱} = ۳$$

$$x_۲ = ۱۰ \Rightarrow x_۱ + ۴ + x_۴ = ۴ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۰ \Rightarrow \binom{۰+۱}{۱} = ۱$$

$$\boxed{if\ x_۳ = ۱} \Rightarrow x_۱ + ۰/۴x_۲ + x_۴ = ۳ \Rightarrow$$

$$x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۳ \Rightarrow \binom{۳+۱}{۱} = ۴$$

$$x_۲ = ۵ \Rightarrow x_۱ + ۲ + x_۴ = ۳ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۱ \Rightarrow \binom{۱+۱}{۱} = ۲$$

$$\boxed{if\ x_۳ = ۴} \Rightarrow x_۱ + ۰/۴x_۲ + x_۴ = ۲ \Rightarrow$$

$$x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۲ \Rightarrow \binom{۲+۱}{۱} = ۳$$

$$x_۲ = ۵ \Rightarrow x_۱ + ۲ + x_۴ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۰ \Rightarrow \binom{۰+۱}{۱} = ۱$$

$$\boxed{if\ x_۳ = ۹} \Rightarrow x_۱ + ۰/۴x_۲ + x_۴ = ۱ \Rightarrow$$

$$x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۱ \Rightarrow \binom{۱+۱}{۱} = ۲$$

$$\boxed{if\ x_۳ = ۱۶} \Rightarrow x_۱ + ۰/۴x_۲ + x_۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۴ = ۰ \Rightarrow \binom{۰+۱}{۱} = ۱$$

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

سوال ۳۹: گزینه‌ی ۲

۳۹- چند تابع $f:\{۱,۲,۳,۴\}\rightarrow\{۱,۲,۴\}$ می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۰ ۳) ۲۸ ۴) ۲۷

حالت اول: $R_f=\{۱,۲\}$

$f:\{۱,۲,۳,۴\}\rightarrow\{۱,۲\}$

سه عضو به ۱ و یک عضو به ۲ $\Leftarrow$ ۴ حالت

یک عضو به ۱ و سه عضو به ۲ $\Leftarrow$ ۴ حالت

حالت دوم: $R_f=\{۱,۴\}$

$f:\{۱,۲,۳,۴\}\rightarrow\{۱,۴\}$

سه عضو به ۱ و یک عضو به ۴ $\Leftarrow$ ۴ حالت

یک عضو به ۱ و سه عضو به ۴ $\Leftarrow$ ۴ حالت

حالت سوم: $R_f=\{۱,۲,۴\}$

$f:\{۱,۲,۳,۴\}\rightarrow\{۱,۲,۴\}$

یک عضو به ۱ و دو عضو به ۲ و یک عضو به ۴ $\Leftarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$ حالت

یک عضو به ۱ و یک عضو به ۲ و دو عضو به ۴ $\Leftarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$ حالت

$۴+۴+۴+۴+۱۲+۱۲=۴۰$

Telegram: @konkur_in

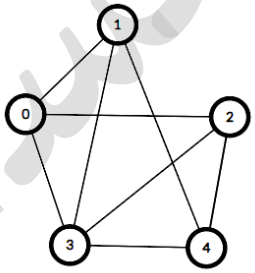
www.konkur.in

سوال ۴۰: گزینه‌ی ۲

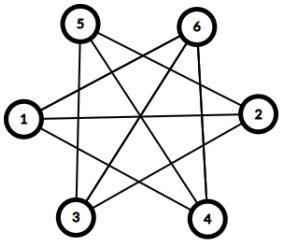
۴۰- در گراف G، $p(G)>4$ و $\delta(G)\geq 3$ است. اگر طول بلندترین دور در گراف G برابر ۴ باشد، کمترین مقدار $p(G)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

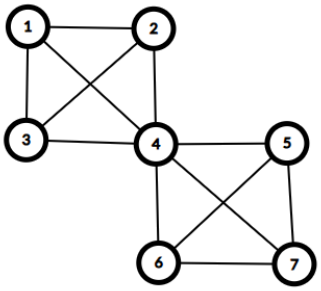
اگر $p=5$ و دو یا یک یال را طوری برداریم که داشته باشیم ۳، ۳، ۳، ۳، ۴ باز هم گراف دوری به طول پنج (۲۰۱۴۳۲) خواهد داشت و اگر یک یال دیگر برداریم δ کمتر از ۳ می‌شود.



اگر $p=6$، می‌توان پنج یال را حذف کرد و باز هم دوری به طول ۶ داشت. با حذف ششمین یال به $\delta=3$ می‌رسیم ولی دور به طول پنج داریم و با حذف یک یال دیگر δ کمتر از ۳ می‌شود.



اگر $p=7$ و با خواسته‌های سوال دو گراف K_4 (هم دوری به طول ۴ دارد و هم $\deg v=3$) می‌شود که از یک راس با هم مشترک هستند.



Telegram: @konkur_in