

تحليل سوالات رياضی کنکور ۱۴۰۴
نوبت اول اردیبهشت ۱۴۰۴
رشته ریاضی

سعيد پناهی

دکترای برق مخابرات خواجه نصیر

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱- اگر مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جمله اول آن باشد، جمله سوم این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

گزینه ۴ (دنباله حسابی و هندسی) (متوسط)

$$S_9 = 73S_3 \Rightarrow \frac{a(1-q^9)}{1-q} = 73 \frac{a(1-q^3)}{1-q} \Rightarrow \frac{1-q^9}{1-q^3} = 73 \Rightarrow \frac{(1-q^3)(1+q^3+q^6)}{1-q^3} = 73$$

$$\Rightarrow 1+q^3+q^6 = 73 \rightarrow q = 2 \rightarrow \frac{a_3}{a} = \frac{aq^2}{a} = q^2 = 2^2 = 4$$

۲- اگر $x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9$ باشد، مقدار $(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2}$ کدام است؟

۸۰ (۴)

۸۸ (۳)

۹۰ (۲)

۹۸ (۱)

گزینه ۴ (توان های گویا و عبارت های جبری) (ساده)

$$x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9 \Rightarrow (x^2+1) + \frac{10}{(x^2+1)} = 10 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} + 20 = 100$$

$$(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} = 100 - 20 = 80$$

۳- A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟

A = ∅ (۴)

B = A (۳)

A = U (۲)

B = U (۱)

گزینه ۱ (مجموعه ها آمار و احتمالات) (ساده) - با زدن مثال عددی برای مجموعه ها

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۴- گزاره $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

- (۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$
 (۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$
 (۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
 (۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

گزینه ۴ (آمار و احتمالات یازدهم) (متوسط) - طبق جدول زیر درستی گزینه ۴ تایید می شود.

p	q	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴) ۱۸

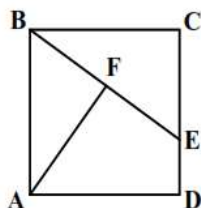
گزینه ۳ (روابط بین ریشه ها حسابان یازدهم) (سخت)

$$S = \alpha + \beta = 5 \quad P = \alpha \cdot \beta = 2$$

$$\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} + \frac{4\beta + \alpha^5}{5\alpha^2} = \frac{20(\beta^3 + \alpha^3) + 5\alpha^2\beta^2((\beta^3 + \alpha^3))}{25\alpha^2\beta^2} =$$

$$\frac{4}{5} \frac{S^3 - 3PS}{P^2} + \frac{1}{5} (S^3 - 3PS) = \frac{4}{5} \left(\frac{125 - 30}{4} \right) + \frac{1}{5} (125 - 30) = 19 + 19 = 38 \div 2 = 19$$

۶- در مربع شکل زیر، $CD = ۳ED$ و نقطه F ، وسط پاره خط BE قرار دارد. اگر $AF = ۵$ باشد، مساحت چهارضلعی $ADEF$ کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۵

(۳) ۲۰

(۴) ۲۵

گزینه ۲ (هندسه دهم) (چندضلعی ها)

$$ED = y \Rightarrow CE = ۲y, \quad BC = ۳y \Rightarrow \text{فیناغورس}$$

$$BE^2 = ۹y^2 + ۴y^2 = ۱۳y^2 \Rightarrow BE = \sqrt{۱۳}y$$

$$BE \text{ وسط } F \Rightarrow BF = \frac{\sqrt{۱۳}y}{۲} \Rightarrow \text{فیناغورس } AE^2 = ۹y^2 + y^2 = ۱۰y^2 \Rightarrow AE = \sqrt{۱۰}y$$

$$AF = ۲.۵y = ۵ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow S_{AFED} = ۱.۵y^2 + ۲.۲۵y^2 = ۳.۷۵y^2 = ۱۵$$

۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{۵}{\sqrt{mx^2 - ۸x + ۳۹}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m ، بیشترین مقدار تابع

f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

گزینه ۳ (متوسط)

برای اینکه تابع داده شده بیشترین مقدار را اختیار کند باید مقدار عبارت زیر رادیکال کمترین مقدار ممکن باشد.

$$۲mx - ۸ = ۰ \rightarrow x = \frac{۴}{m} \rightarrow ۱ = \frac{۵}{\sqrt{m\left(\frac{۱۶}{m^2}\right) - ۸\left(\frac{۴}{m}\right) + ۳۹}} \rightarrow \left(\frac{۱۶}{m}\right) - ۸\left(\frac{۴}{m}\right) + ۳۹ = ۲۵$$

$$\frac{۱۶}{m} - \frac{۳۲}{m} = -\frac{۱۶}{m} = ۲۵ - ۳۹ = -۱۴ \Rightarrow m = \frac{۱۶}{۱۴} = \frac{۸}{۷} \Rightarrow [m] = ۱$$

۸- اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x) = x^5 + ax^3$ و $q(x) = x^6 + 3x^3 + 2x^2$ ، دو جمله‌ای $x^n + x^3$ باشد، مقدار na کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

گزینه ۱ (بخش پذیری) (متوسط)

$$p(x) = x^3(x^2 + a) \quad q(x) = x^2(x^2 + 3x + 2) = x^2(x+1)(x+2)$$

$$\text{بزرگترین عامل مشترک} = x^2(x+1) = x^3 + x^2 \rightarrow n = 2, \quad a = -1$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه ۳ - ساده

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow f(f(0)) = f(-1) = -1 + 1 = 0 \checkmark \\ x = 1 &\rightarrow f(f(1)) = f(0) = 0 + 1 = 1 \times \\ f \circ f(x) = f(f(x)) = & \quad x = 2 \rightarrow f(f(2)) = f(1) = 1 - 1 = 0 \checkmark \\ x = -1 &\rightarrow f(f(-1)) = f(0) = 0 - 1 = -1 \times \\ x = -2 &\rightarrow f(f(-2)) = f(-1) = -1 + 1 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

۱۰- تابع پیوسته f یک‌به‌یک بوده و وارون خود را در نقطه $A(a, f(a))$ قطع می‌کند. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} \text{ کدام است؟}$$

 $f'(a)$ (۴) a (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه ۱ - ساده (حد و پیوستگی)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)}{a} \Rightarrow \text{اکید صعودی و یک به یک} \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)}{a} = 1$$

$$-11) \quad \log(3x+1) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \text{ اگر باشد، مقدار } \log_{\sqrt{2}} x \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

گزینه ۲ (لگاریتم و دترمینان) (ساده)

$$\log(3x+1) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = \left(\log \frac{5}{2}\right) (\log 10)$$

$$\log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \log_{\sqrt{2}} 2^{-1} = -2$$

$$-12) \quad \text{اگر } 2\sin\alpha < \sin 2\alpha \text{ و } \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > 0 \text{ باشد، انتهای کمان } \alpha \text{ در کدام ربع قرار دارد؟}$$

$$(4) \text{ چهارم}$$

$$(3) \text{ سوم}$$

$$(2) \text{ دوم}$$

$$(1) \text{ اول}$$

گزینه ۴ (مثلثات) (ساده)

$$\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > 0 \Rightarrow \text{چهارم یا اول} \Rightarrow 2\sin\alpha < 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2\sin\alpha(1 - \cos\alpha) < 0$$

$$1 - \cos\alpha \geq 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0 \Rightarrow \text{چهارم}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)}$ کدام است؟

۰٫۴√۳ (۴)

۰٫۲√۳ (۳)

۰٫۴√۶ (۲)

۰٫۲√۶ (۱)

گزینه ۳ (مثلثات) (ساده)

$$\frac{-\sin(270 + 15) + 2\cos(90 + 15)}{2\sin(180 - 15) + 3\sin(360 + 15)} = \frac{+\cos(15) - 2\sin(15)}{2\sin(15) + 3\sin(15)} = \frac{1}{5}\cot(15) - \frac{2}{5}$$

$$\cot(15) = \frac{\cos(45 - 30)}{\sin(45 - 30)} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{5}(2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0.2\sqrt{3}$$

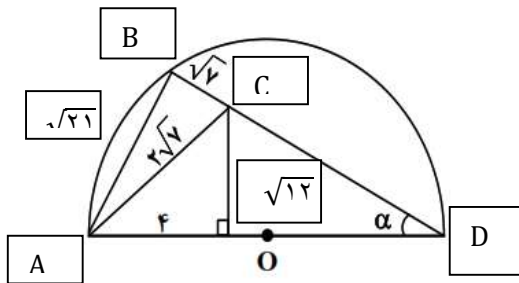
۱۴- در نیم‌دایره شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

۰٫۲√۳ (۱)

۰٫۳√۳ (۲)

۰٫۴√۳ (۳)

۰٫۵√۳ (۴)



گزینه ۱ (مثلثات) - (سخت) زاویه B محاطی و روبه روبه قطر است پس ۹۰ درجه بوده و مثلث ABC قائم الزاویه است.

$$\tan \alpha = \cot(A_1 + A_2) = 1 \div \frac{\tan A_1 + \tan A_2}{1 - \tan(A_1) \tan(A_2)} = 1 \div \frac{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} + \frac{\sqrt{12}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{4}} = 1 \div \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$1 \div \frac{\frac{5\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}} = 1 \div \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0.2\sqrt{3}$$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a} x)}{kx^2} = 3$ باشد، مقدار $\frac{a}{k}$ کدام است؟

-۶ (۴)

-۳ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

گزینه ۴ (حد)(متوسط)

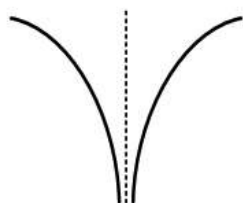
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a} x)}{kx^2} \Rightarrow k + \cos(0) = 0 \Rightarrow k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

با دو بار هوییتال گرفتن

$$\text{HOP} \Rightarrow \frac{0 - \sqrt{a} \sin(\sqrt{a} x)}{2kx} \Rightarrow \frac{0 - a \cos(\sqrt{a} x)}{2k} = 3 \Rightarrow \frac{-a}{2k} = 3 \Rightarrow \frac{-a}{-2} = 3$$

$$\Rightarrow a = 6 \Rightarrow \frac{a}{k} = -6$$

۱۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)}$ در همسایگی $x = -a$ به صورت شکل زیر است. اگر $y = -4$ مجانب افقی

تابع f باشد، مقدار a کدام است؟

-۲ (۱)

-۴ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

گزینه ۳ (مجانب ها)(حسابان دوازدهم - متوسط)

$$y = -۴ \cong \frac{a^2 x^2}{mx^2} = \frac{a^2}{m} \Rightarrow a^2 = -۴m \quad \text{مجانِب افقی}$$

با توجه به شکل $x = -a$ ریشه تکراری مخرج است.

$$mx - ۲ = ۰ \Rightarrow -ma - ۲ = ۰ \Rightarrow -ma = ۲ \Rightarrow m = -\frac{۲}{a}$$

در نتیجه

$$a^2 = -۴m = -۴\left(-\frac{۲}{a}\right) = \frac{۸}{a} \Rightarrow a^3 = ۸ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow m = -۱$$

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

گزینه ۳ (حد و پیوستگی) (حسابان دوازدهم - ساده)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot(x)}{[\pi^- - \pi]} = \frac{\cot(x)}{[0^-]} = \frac{\cot(x)}{-۱} = -\cot x = -\cot(\pi^-) = -\frac{\cos(\pi^-)}{\sin(\pi^-)} = -\frac{-۱}{0^+} = +\infty$$

۱۸- تابع ناصفر f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3}|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|}$ روی $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{۲}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{۲}$

گزینه ۲ (مشتق) (حسابان دوازدهم - سخت)

با توجه به دامنه تعریف شده برای تابع $x = a$ باید ریشه مخرج باشد.

از طرفی چون حد تابع موجود بوده و عددی غیر صفر می باشد. پس $x = a$ ریشه مخرج نیز بوده و بعد از هوییتال گرفتن به مقدار عددی حد تابع داده شده می توان رسید.

$$\sqrt{3}|a^2 + a| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, -1$$

$$a^3 + (m - 2)a + a^2 = 0 \Rightarrow a(a^2 + m - 2 + a) = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x + 1|}{|x^3 + 1|} \rightarrow \text{HOP} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{|2x - 4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

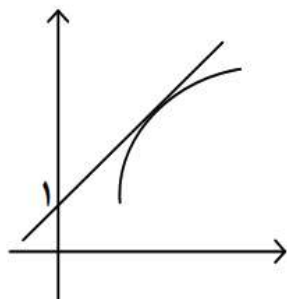
(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

گزینه ۲ (مشتق) (حسابان دوازدهم - ساده)

$$f(x) - 2g(x) = \frac{-2\sqrt{(x-2)^2} - 2\sqrt{3x} + 2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2|x-2| - 2\sqrt{3x} + 2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$-2\sqrt{3} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = -2\sqrt{3} x^{-\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۰- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

گزینه ۴ (مشتق و شیب خط مماس) (حسابان دوازدهم - ساده)

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار $a^3 + b - c$ کدام است؟

(۱) $(a+1)^3 - 1$ (۲) $(a+1)^3 + 1$ (۳) $(a-1)^3 - 1$ (۴) $(a-1)^3 + 1$

گزینه ۱ (مشتق پذیری) (حسابان دوازدهم - متوسط)

شرط اول پیوستگی

$$2ba + c = 3a^2$$

شرط دوم برابر بودن مشتق چپ و راست

$$2b = 6a \Rightarrow b = 3a \Rightarrow 6a^2 + c = 3a^2 \Rightarrow c = -3a^2$$

مطلوب مساله

$$a^3 + b - c = a^3 + 3a^2 + 3a = (a+1)^3 - 1$$

۲۲- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x - a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

(۱) $2/5$ (۲) 2 (۳) $1/5$ (۴) 1

گزینه ۱ (کاربرد مشتق) (متوسط)

با توجه بازه تعریف شده برای تابع

$$f(x) = -(x - a) \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x - a) = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

با جاگذاری ریشه به دست آمده (البته با توجه به این نکته که به ازای ابتدا و انتهای بازه مقدار تابع صفر بوده و مینیمم مطلق تابع را به ما می دهند).

$$f\left(\frac{2a}{5}\right) = 1/5 \Rightarrow -\sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}} \times \frac{2a}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۲۳- اگر انحراف ۵ داده آماری از y ، به ترتیب برابر -1 ، -5 ، -6 ، -7 و 4 باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

(۱) $15/6$ (۲) $16/4$ (۳) $24/6$ (۴) $25/4$

گزینه ۲ (آمار یازدهم - متوسط) - با توجه به این نکته که انحراف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

$$-1 - 5 - 6 - 7 + 4 = -15$$

در واقع با ۱۵ واحد جابجایی انحراف از میانگین صفر می شود. یعنی ۵ داده‌ی داده شده هر کدام ۳ واحد جابجایی خواهند داشت.

$$\text{واریانس} = \frac{49 + 16 + 9 + 4 + 4}{5} = \frac{82}{5} = 16/4 \Rightarrow 2 + 2 \text{ و } -2 \text{ و } -3 \text{ و } -4 \text{ و } 7 \text{ داده‌ها}$$

۲۴- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S، روابط $P(A-B) = P(A)P(B')$ و $P(A) = \frac{1}{6}P(B)$ برقرار است. اگر $P(A \cap B') = 0.25$ باشد، مقدار $P(A \cup B')$ کدام است؟

$$\frac{31}{40} \quad (4)$$

$$\frac{17}{20} \quad (3)$$

$$\frac{13}{20} \quad (2)$$

$$\frac{27}{40} \quad (1)$$

گزینه ۳ (آمار یازدهم) (سخت)

$$P(A) = x, \quad P(B) = y$$

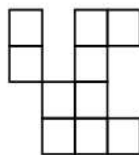
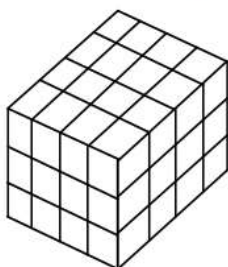
$$P(A) - P(A \cap B) = P(A) \times (1 - P(B)) \Rightarrow P(A \cap B) = xy$$

$$0.25 = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.75 = x + y - xy \Rightarrow 0.75 = 1.6y + y - 1.6y^2$$

$$1.6y^2 - 2.6y + 0.75 = 0 \Rightarrow y = \frac{+2.6 \pm \sqrt{6.76 - 4.8}}{3.2} = \frac{+2.6 \pm 1.4}{3.2} = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{3}{5} \Rightarrow P(A \cup B') = x + (1 - y) - x(1 - y) = 1 - y + xy = 1 - \frac{3}{8} + \frac{9}{40} = \frac{17}{20}$$

۲۵- حداکثر چند مکعب کوچک باید از مکعب سمت چپ برداشته شود تا نمای بالا به صورت شکل سمت راست باشد؟



$$24 \quad (1)$$

$$38 \quad (2)$$

$$18 \quad (3)$$

$$14 \quad (4)$$

گزینه ۲ (هندسه دهم) (تجسم فضایی)

$$16 \times 2 + 6 = 32 + 6 = 38 \text{ تا}$$

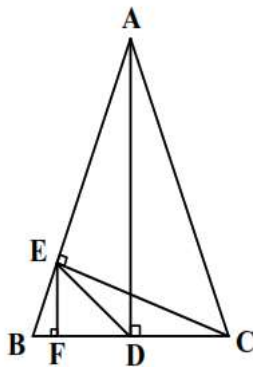
۲۶- مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ای بر دایره ای به شعاع $\sqrt{2}$ محیط شده است. برای رسم عمود منصف یکی از ساق های این مثلث، باید دهانه پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟

- (۱) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $2 + \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{2} + 1$

گزینه ۴ (هندسه دهم و یازدهم) (متوسط) - دهانه پرگار باید بیش از نصف اندازه طول ضلع باز شود.

$$\text{شعاع دایره محاطی} = r = \frac{S}{P} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\frac{a^2}{2}}{2a + \sqrt{2}a} \Rightarrow a = 2(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow \text{نصف} = \sqrt{2} + 1$$

۲۷- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین بوده و $AB = 2CE$ است. اگر $DE = 2\sqrt{3} + 4$ باشد، اندازه BF کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $2\sqrt{3}$

گزینه ۱ (هندسه دهم) (سخت)

در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز است.

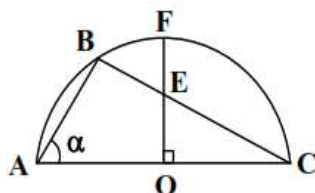
$$\text{میانه } ED = \frac{1}{2} BC \rightarrow BC = 4\sqrt{3} + 8 \rightarrow BD = 2\sqrt{3} + 4$$

$$EF = \frac{1}{4} BC = \sqrt{3} + 2$$

$$BEF \text{ قائم الزاویه} \Rightarrow \text{با استفاده روابط طولی در مثلث قائم الزاویه} \Rightarrow EF^2 = BF \times BC$$

$$(\sqrt{3} + 2)^2 = y(4\sqrt{3} + 8 - y) \rightarrow y = 1$$

۲۸- در نیم‌دایره زیر، اگر $\sin \alpha = 0.8$ باشد، مقدار $\frac{BE}{EF}$ کدام است؟



(۱) ۱.۲

(۲) ۱.۳

(۳) ۱.۴

(۴) ۱.۵

گزینه ۳ (هندسه یازدهم و دهم دایره) (سخت) - زاویه B محاطی و برابر با نصف کمان روبه رویی قطر AC است و برابر ۹۰ درجه است. پس مثلث ABC قائم الزویه است.

$$C + E = 90 \quad \text{و} \quad C + B = 90 \Rightarrow E = B \quad \text{و} \quad \Delta OEC \sim \Delta ABC$$

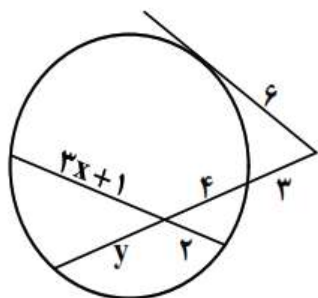
$$A = E \rightarrow \sin \alpha = \sin E = \frac{4x}{5x} \rightarrow OC = 4x \quad \text{و} \quad EC = 5x$$

با نوشتن نسبت های تشابه در دو مثلث متشابه

$$\frac{OE}{6x} = \frac{5x}{8x} = \frac{CE}{10x} \rightarrow OE = \frac{15x}{4} \rightarrow EF = \frac{5x}{4} \rightarrow CE = \frac{25x}{4} \rightarrow BE = \frac{7x}{4}$$

$$\frac{BE}{EF} = 1.4$$

۲۹- در شکل زیر، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



(۱) ۰.۳

(۲) ۰.۴

(۳) ۰.۵

(۴) ۰.۶

گزینه ۴ (دایره - هندسه یازدهم - ساده)

$$۶^۲ = ۳ \times (۷ + y) \Rightarrow ۷ + y = ۱۲ \Rightarrow y = ۵$$

$$۴y = ۲۰ = ۲ \times (۳x + ۱) \Rightarrow ۳x + ۱ = ۱۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۳}{۵} = ۰.۶$$

۳۰- نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط d و نقطه O روی خط d قرار دارد. اگر $OA' = ۱۰$ و فاصله نقطه A' از خط OA برابر $۹/۶$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای AA' کدام است؟

۱۴ (۴)

۲۰ (۳)

۲۲ (۲)

۲۸ (۱)

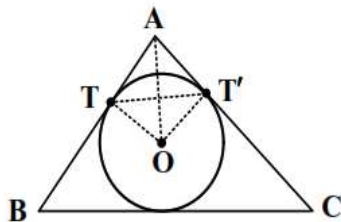
گزینه ۱ (دایره - هندسه یازدهم - متوسط)

$$AA'^۲ = ۱۰۰ + ۱۰۰ \pm ۲۰۰ \cos \alpha \quad \text{قضیه کسینوس ها}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{۱۰۰ - ۹.۶^۳}}{۱۰} = \frac{۷}{۲۵}$$

$$AA'^۲ = ۲۰۰ \pm ۵۶ \rightarrow ۱۴۴, ۲۵۶ \rightarrow AA' = ۱۲, ۱۶ \rightarrow ۱۲ + ۱۶ = ۲۸$$

۳۱- در مثلث محیطی شکل زیر، اضلاع $AB=۴$ و $AC=۵$ به ترتیب در نقاط T و T' بر محیط دایره محاطی، مماس هستند. اگر $BC=۷$ باشد، اندازه وتر TT' کدام است؟



$$۰.۲\sqrt{۱۵} \quad (۱)$$

$$۰.۴\sqrt{۱۵} \quad (۲)$$

$$۰.۲\sqrt{۵} \quad (۳)$$

$$۰.۴\sqrt{۵} \quad (۴)$$

گزینه ۲ (هندسه یازدهم) (سخت)

$$P = \frac{a+b+c}{۲} = \frac{۴+۵+۷}{۲} = ۸ \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} =$$

$$\sqrt{۸(۸-۷)(۸-۵)(۸-۴)} = ۸ \times ۳ \times ۴ = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۸} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

OAT : رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $OA = \sqrt{1 + \frac{6}{4}} = \frac{10}{4} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$TH \times OA = AT \times OT \rightarrow TH = \sqrt{\frac{3}{5}} \rightarrow TT' = 2 TH = 2 \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.4\sqrt{15}$

۳۲- اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۴ (هندسه دوازدهم) (متوسط) - بارسم بردارها و تصویر قائم آنها

جواب $= \sqrt{3} \times \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

۳۳- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، اگر $|A^2 + kA - A| = 125$ باشد، دترمینان $(k+1)I_3$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) ۶۴ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) -۶۴

گزینه ۳ (هندسه دوازدهم - ماتریس) (متوسط)

$|A|(A + (k-1)I) = 125 \rightarrow (k-1)I + A = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix} = 125 \rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0$

$\rightarrow k = -3 \Rightarrow |-2I| = -8 \times 1 = -8$

۳۴- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2} & b \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$ اگر $|A| = 2$ و $B^2 = 2I$ باشد،

حاصل ضرب درایه‌های غیر صفر ماتریس B^3 کدام است؟

(۱) $32\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $-32\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

گزینه ۳ (هندسه دوازدهم - ماتریس) (سخت)

$$|A| = ad - bc = 2$$

$$B^3 = B^2 \times B = 2I \times B = 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2a \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2b \\ 2c & 0 & 2d \end{bmatrix}$$

$$B^3 = 2B \Rightarrow \text{حاصل ضرب درایه‌های غیر صفر ماتریس } B^3 = 32\sqrt{2}abcd = -32\sqrt{2}$$

$$B^2 = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+cd & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow b = \pm 1, d = -1$$

۳۵- مختصات مرکز دایره‌ای که از نقطه $(4/5, 0/5)$ بگذرد و بر خط $3x - 2y = 6$ در نقطه $(2, 0)$ مماس باشد، کدام است؟

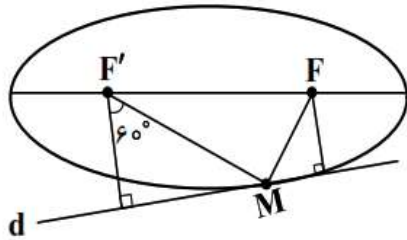
(۱) $(2/5, 4)$ (۲) $(3, 1/5)$ (۳) $(4, -3/5)$ (۴) $(3/5, -1)$

گزینه ۴ (هندسه دوازدهم - مقاطع مخروطی) (ساده)

$$\text{شیب خط} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{شیب شعاع دایره} = -\frac{4}{3} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 2} \rightarrow y_0 = -\frac{4}{3}x_0 + \frac{8}{3}$$

با امتحان نقاط در رابطه داده شده درستی گزینه ۴ تأیید می‌شود.

۳۶- در شکل زیر، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. اگر فاصله بین پای عمودهای رسم شده از دو کانون F و F' بر خط d برابر $2\sqrt{3}$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

گزینه ۳ (هندسه دوازدهم - مقاطع مخروطی) (متوسط)

$$\sin 60^\circ = \frac{MH}{MF'} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MH}{MF'} \rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF'$$

$$FH = y, \quad F'H' = x, \quad MF = 2y, \quad MF' = 2x, \quad MH = \sqrt{3}y, \quad MH' = \sqrt{3}x$$

$$\text{طول قطر بزرگ بیضی} = MF + MF' = 2a = 2(x + y) = ?$$

$$MH + MH' = \sqrt{3}(x + y) = 2\sqrt{3} \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow \text{جواب} = 4$$

۳۷- چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $8x^2 + xy + 3x - y = 0$ قرار دارد؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

گزینه ۱ (گسسته نظریه اعداد) (متوسط)

$$y(x-1) = -8x^2 - 3x \rightarrow y = \frac{-8x^2 - 3x}{x-1} = \frac{-8(x-1)^2 - 19(x-1) - 11}{x-1}$$

$$\text{در نتیجه} \Rightarrow x-1 \mid 11 \rightarrow x = -10, 0, 2, 12$$

۳۸- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \sqrt[3]{x_2} + x_3 = 4$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۲ (۳)

۱۵ (۲)

۱۶ (۱)

گزینه ۳ (گسسته) (متوسط)

$$x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_4 = 4$$

$$x_3 = 1 \rightarrow x_1 + x_4 = 3$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + \sqrt[3]{x_3} + x_4 = 4 \rightarrow x_3 = 4 \rightarrow x_1 + x_4 = 2$$

$$x_3 = 9 \rightarrow x_1 + x_4 = 1$$

$$x_3 = 16 \rightarrow x_1 + x_4 = 0$$

$$x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_4 = 2$$

$$x_2 = 5 \Rightarrow x_1 + \sqrt[3]{x_3} + x_4 = 2 \rightarrow x_3 = 1 \rightarrow x_1 + x_4 = 1$$

$$x_3 = 4 \rightarrow x_1 + x_4 = 0$$

$$x_2 = 10 \Rightarrow x_1 + \sqrt[3]{x_3} + x_4 = 0 \rightarrow$$

$$22 = 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 3 + 4 + 6 = \text{تعداد کل جواب ها}$$

۳۹- چند تابع $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 4\}$ می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۴۰ (۲)

۴۱ (۱)

گزینه ۲ (گسسته ترکیبیات) (متوسط)

چون در برد تابع داده شده فقط عدد ۱ فرد است. پس در نوشتن زوج مرتب‌ها عدد یک یا باید یک بار نوشته شود یا ۳ بار.

$$\binom{4}{1} \times 2^3 + \binom{4}{3} \times 2^1 = 32 + 8 = 40$$

۴۰- در گراف G ، $p(G) > 4$ و $\delta(G) \geq 3$ است. اگر طول بلندترین دور در گراف G برابر ۴ باشد، کمترین مقدار $p(G)$ کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

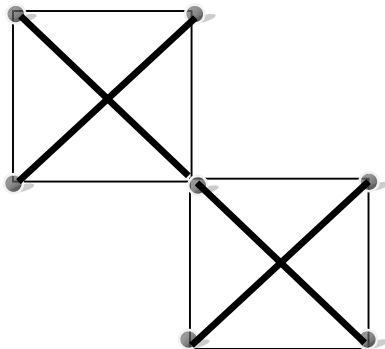
۸ (۱)

گزینه ۲ (گسسته گراف) (سخت)

طول بلندترین دور گراف برابر ۴ است. پس بیشترین n ضلعی که میتوان در رسم گراف مد نظر قرار داد چهارضلعی است که همه راس های آن به هم وصل باشند. با توجه به اینکه مینیمم درجه گراف برابر ۳ می باشد.

چون تعداد راس های گراف بیش از ۴ راس است پس باید دو مربع حداقل رسم کرد. این دو مربع نباید در بیش از یک راس مشترک باشند. در غیر این صورت شرایط مساله (بلندترین دور و مینیمم درجه نقض می شود).

گرچه دو مربع را میتوان به صورت ناهمبند هم رسم کرد. اما در این حالت تعداد راس های گراف ۸ خواهد شد. و از حالت همبند که ۷ راس است بیشتر می شود.



سعید پناهی – دبیر دبیرستان های تهران

۰۹۲۱۴۶۲۹۲۰۰

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴