

توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{6}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۲) $-\sqrt{6}$

(۱) $-2\sqrt{3}$

حل: برای ساده سازی این عبارت، چون عبارت‌های زیر رادیکال صورت مزدوج هم هستند، بهتره که اول صورت رو به توان دو برسونیم (البته نتیجه رو باید زیر رادیکال قرار بدیم)، پس:

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1})^2}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2 = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)+2(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2 = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2 = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}-2 =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{1}}-2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2 = \sqrt{6}+2-2 = \sqrt{6}$$

۱۱۲- برای چند عدد طبیعی n ، بازه $(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

حل: بازه داده شده رو میتونیم به صورت $(\frac{3}{n}+1, \frac{3-n}{2})$ بازنویسی کنیم. به ازای $n=1$ این بازه برابر با $(1, 4)$ خواهد شد که شامل دو عدد صحیح ۲ و ۳ است. برای $n=2$ این بازه برابر با $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ است. به ازای $n=3$ این بازه برابر با $(0, 2)$ میشه که شامل تنها یک عدد صحیح است و برای n های بزرگتر از ۳، ابتدای بازه مقداری منفی خواهد داشت و انتهای بازه هم عددی بیش از ۱ است که قطعاً شامل اعداد صحیح صفر و ۱ است که مورد قبول نیست. پس این بازه به ازای یک مقدار برای n فقط شامل یک عدد صحیح است.

۱۱۳- اگر a ، b و c سه جمله نخست یک دنباله هندسی بوده و مجموع آنها ۱۸ باشد، مجموع چهار جمله $\frac{1}{4}a+2b$ ،

$\frac{3}{2}c$ و $-\frac{1}{2}b$ ، کدام است؟

(۴) ۲۷

(۳) ۲۴

(۲) ۱۸

(۱) ۱۲

حل: مجموع چهار جمله داده شده به صورت $\frac{1}{4}a + b + \frac{3}{4}c + a + \left(-\frac{1}{4}b\right) = \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}b + \frac{3}{4}c$ که با فاکتورگیری به صورت $\frac{3}{4}(a + b + c)$ میشود. با توجه به اینکه مجموع این اعداد برابر با ۱۸ است، پس $\frac{3}{4}(a + b + c) = \frac{3}{4} \times 18 = 27$ است.

۱۱۴- مجموعه جواب نامعادله $(2a+3)x^2 + (4b-5)x + 4c+1 < 0$ به صورت بازه $(a, +\infty)$ است. اگر b عدد طبیعی باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $-\frac{2}{4}$

حل: چون مجموعه جواب این نامعادله به صورت یک بازه یکطرفه تا بینهایت است، پس قطعاً عبارت داده شده درجه دوم نمیتونه باشه و بنابراین ضریب x^2 باید صفر باشه، یعنی $a = -\frac{3}{4}$ است و نامعادله به صورت $0 < (4b-5)x + 4c+1$ قابل بازنویسی است. چون بازه به صورت (a, ∞) داده شده، پس اولاً باید a ریشه این نامعادله باشه و ثانیاً این معادله خط شیب منفی داشته باشه، تا بتونه از یه جایی به بعد (یعنی همون بازه داده شده) مقدارش منفی بشه، پس:

$$(4b-5)\left(-\frac{3}{4}\right) + 4c+1 = 0 \Rightarrow -6b + \frac{15}{4} + 4c+1 = 0$$

چون شیب منفی هست، پس $b < \frac{5}{4} \Rightarrow 4b-5 < 0$. در صورت سوال قید شده که b عددی طبیعی است، لذا $b = 1$ باید باشه، پس با جایگذاری در رابطه بالا مقدار c بدست میاد:

$$-6 + \frac{15}{4} + 4c+1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{5}{8}} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

۱۱۵- نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{2x}$ را ابتدا یک واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را ۵ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می دهیم. طول نقطه برخورد نمودار تابع جدید با تابع ثابت $f(x) = \frac{y}{x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

حل: با انتقال تابع در جهت افقی به اندازه یک واحد به سمت x های منفی، باید x ها رو به $x + 1$ تبدیل کنیم.
پس:

$$y = 3 - \sqrt{2(x+1)}$$

برای قرینه کردن نسبت به محور x ها باید کل تابع در یه منفی ضرب بشه که به $y = -3 + \sqrt{2(x+1)}$ تبدیل میشه و نهایتاً برای انتقال به سمت بالا به اندازه 5 واحد باید به تابع 5 واحد اضافه کنیم. پس:

$$-3 + \sqrt{2(x+1)} + 5 = \sqrt{2(x+1)} + 2$$

برای بدست آوردن طول برخورد این تابع با خط افقی $y = \frac{9}{2}$ باید معادله $\sqrt{2(x+1)} + 2 = \frac{9}{2}$ رو حل کنیم.
پس:

$$\sqrt{2(x+1)} = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{به توان دو رساندن}} 2(x+1) = \frac{25}{4} \Rightarrow x+1 = \frac{25}{8} \Rightarrow x = \frac{17}{8}$$

یه سوال: اگه عرض تلاقی رو میخواست، جوابت چی بود؟!

۱۱۶- به ازای چند مقدار صحیح m، نقطه مینیمم تابع $y = x^2 - mx + 2 - m$ در ناحیه اول محورهای مختصات قرار دارد؟
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: طول نقطه مینیمم این تابع برابر با $\frac{m}{2}$ هست، با جایگذاری این مقدار در تابع مقدار عرض به صورت زیر بدست میاد:

$$x = \frac{m}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - m\left(\frac{m}{2}\right) + 2 - m = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 2 - m = -\frac{m^2}{4} - m + 2$$

برای اینکه این نقطه در ناحیه اول قرار بگیره، طول و عرض آن باید مثبت باشن، پس:

$$\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ و } -\frac{m^2}{4} - m + 2 > 0 \Rightarrow \frac{m^2}{4} + m < 2 \Rightarrow m^2 + 4m - 8 < 0$$

باید ریشه های این معادله رو بدست بیاریم که از Δ' استفاده می کنیم (چون ضریب m زوج)، پس:

$$m = -2 \pm \sqrt{4 + 8} = -2 \pm \sqrt{12} \approx \begin{cases} 1/4 \\ -5/4 \end{cases}$$

جواب این نامعادله بین دو ریشه میشه که با اشتراک گیری با شرط اول، بازه $(-5/4, 1/4)$ بدست میاد که فقط شامل یک صحیح است.

۱۱۷- نمودار تابع g محور x ها را در نقاطی به طول ۱ و $2\sqrt{2}$ قطع می کند. اگر $f(x) = x\sqrt{x}$ باشد، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g \circ f$ محور x ها را قطع می کند، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: نمودار تابع g دارای دو ریشه ۱ و $2\sqrt{2}$ است، یعنی $g(1) = 0$ و $g(2\sqrt{2}) = 0$. محل تلاقی با محور x ها همون ریشه هاس، پس ما دنبال ریشه های تابع $g(f(x))$ یا در واقع حل معادله $g(f(x)) = 0$ هستیم. پس باید ببینیم تابع f به ازای چه مقادیری از x برابر با ۱ و $2\sqrt{2}$ میشه، یعنی حل این دو معادله:

$$\begin{cases} x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ x\sqrt{x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 2 - 1 = 1$$

۱۱۸- اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + x - 1 - m^2 = 0$ باشد، کمترین مقدار ممکن برای $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

حل: برای محاسبه کمترین مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ اول ساده اش میکنیم. به صورت زیر:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2(-1 - m^2) = 3 + 2m^2$$

کمترین مقدار این تابع درجه دوم برابر با ۳ است.

۱۱۹- وارون تابع $y = x^2 + \sqrt{b - ax}$ خط $y = x - 4$ را در نقطه $(a, -1)$ قطع می کند. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) ۴

حل: وقتی خط $y = x - 4$ در نقطه $(a, -1)$ قطع شده، پس این نقطه روی این واقع است و در نتیجه در آن صدق میکنه. پس $-1 = a - 4 \Rightarrow a = 3$. بنابراین نقطه $(3, -1)$ روی تابع وارون قرار داره یا به بیان دیگه نقطه $(-1, 3)$ روی خود تابع قرار داره و در معادله اش باید صدق کنه. پس:

$$3 = (-1)^2 + \sqrt{b - (3)(-1)} \Rightarrow 3 = 1 + \sqrt{b + 3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a - b = 3 - 1 = 2$$

۱۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} |x+2|+1 & x \leq -2 \\ \Delta m - mx & x > -2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. اگر بازه $[a, b]$ ، حدود مقادیر m باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{7}$

حل: اول قدرمطلق ضابطه بالایی رو ساده کنیم. برای محدوده داده شده، داخل قدرمطلق منفی میشه و قرینه اش بیرون میاد. پس:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 + 1 & x \leq -2 \\ -mx + 5m & x > -2 \end{cases}$$

این تابع از دو خط راست تشکیل شده که برای نزولی بودن، اولاً هر دو ضابطه باید نزولی باشند. ثانیاً ابتدای ضابطه پایینی از انتهای ضابطه بالایی کوچکتر مساوی باشد. پس شیب خط‌ها باید منفی باشد، یعنی $-m < 0$ یا $m > 0$ همیشه.

حالا بریم سراغ شرط دوم. ابتدای خط پایینی برابر با $2m + 5m = 7m$ همیشه که باید از انتهای خط بالایی، یعنی ۱ کمتر باشد، یعنی $m \leq \frac{1}{7} \Rightarrow 7m \leq 1$ همیشه. پس بازه $(0, \frac{1}{7}]$ همیشه، خود $m = 0$ هم قابل قبوله، اگه m برابر با صفر باشد، خط ضابطه پایین تبدیل به یه خط افقی میشه و مجدداً تابع میتونه نزولی باشه (دیگه اکیدا نزولی نیست!). پس بازه مورد قبول $[0, \frac{1}{7}]$ میشه، پس $a = 0, b = \frac{1}{7}$ همیشه.

۱۲۱- چندجمله‌ای $f(x) = x^5 - 3x^3 + ax + 5$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. مقدار a کدام است؟

۲٫۵ (۴)

-۲٫۵ (۳)

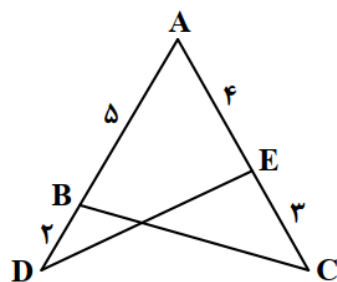
۱٫۵ (۲)

-۱٫۵ (۱)

حل: چون چند جمله ای بر $x + 2$ بخش پذیره، یعنی باقیمانده‌اش بر این عبارت صفره. برای پیدا کردن باقیمانده، کافیه ریشه این عبارت، یعنی $x = -2$ رو در چندجمله‌ای جایگذاری کنیم. پس:

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^5 - 3(-2)^3 + a(-2) + 5 = 0 \Rightarrow -32 + 24 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

۱۲۲- در شکل زیر، اختلاف مساحت مثلث‌های ABC و ADE برابر $\frac{1}{75}$ است. $\tan \hat{A}$ کدام مقدار زیر است؟



$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۱)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۴)

حل: میدونیم که مساحت مثلث ABC از رابطه $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$ بدست میاد که A زاویه بین این دو ضلع. پس:

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin A \\ S_{ADE} = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin A \end{cases} \Rightarrow \Delta S = \frac{1}{2} \times 7 \times \sin A = 1/75 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{7}$$

این زاویه ۳۰ درجه می‌شود که تانژانتش برابر با $\frac{1}{\sqrt{3}}$ می‌شود.

۱۲۳- حاصل عبارت $\frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

حل: می‌توانیم عبارت داده رو به توان دو برسونیم و در آخر از اون جذر بگیریم. فقط قبلش باید بینم علامت کسر منفی هست یا مثبت. زاویه داده شده در ربع دوم قرار می‌گیرد که سینوسش مثبت و کسینوسش منفی. پس مخرج مثبت می‌شود. این زاویه تقریباً نزدیک به π رادیان هست (یعنی سمت چپ دایره مثلثاتی) که اندازه کسینوس از اندازه سینوس بزرگتره و باعث می‌شود که صورت کسر منفی بشه، پس کل عبارت منفی می‌شود. یعنی یا گزینه ۲ درسته یا ۴. حالا بریم مقدارش رو بدست بیاریم. پس عبارت رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$\pm \sqrt{\frac{1+2\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}}{1-2\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}}} = \pm \sqrt{\frac{1+\sin\frac{11\pi}{6}}{1-\sin\frac{11\pi}{6}}} = \pm \sqrt{\frac{1+\sin(\pi-\frac{\pi}{6})}{1-\sin(\pi-\frac{\pi}{6})}} = \pm \sqrt{\frac{1-\sin(\frac{\pi}{6})}{1+\sin(\frac{\pi}{6})}} = \pm \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس مقدار منفی قابل قبوله. یعنی گزینه ۴ درسته.

راه دوم (استفاده از بسط تانژانت): می‌توانیم صورت و مخرج عبارت داده شده رو بر $\cos \frac{11\pi}{12}$ تقسیم کنیم و

عبارت به $\frac{\tan(\frac{11\pi}{12})+1}{\tan(\frac{11\pi}{12})-1}$ تبدیل می‌شود. اگه از مخرج کسر یه منفی فاکتور بگیریم به عبارت $-\frac{1+\tan(\frac{11\pi}{12})}{1-\tan(\frac{11\pi}{12})}$ تبدیل می‌شود یا همون $-\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}\right)$. پس:

$$-\tan\left(\frac{15\pi}{12}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۲۴- فرم کلی جواب‌های معادله $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi - 2x}{2}\right)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

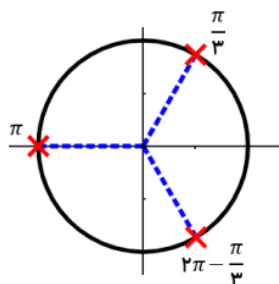
(۱) $2k\pi \pm \pi$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{k\pi}{3} + \pi$

حل: برای حل این معادله عبارت سمت راست تساوی رو می‌توانیم به صورت زیر ساده کنیم:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

پس معادله رو میتونیم به معادله زیر تبدیل کنیم:

$$\cos 2x = -\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$



با چک کردن مجموع ضرایب متوجه میشیم که به ریشه ۱- هست و ریشه دیگه هم $\frac{1}{2}$. جواب‌ها روی دایره به صورت زیر میشه که فقط گزینه ۳ میتونه این جواب‌ها رو تولید کنه.

۱۲۵- معادله $2^{|x|} = (0.25)^{x^2 - x}$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

حل: برای محاسبه این معادله میتونیم به حای $0.25 = \frac{1}{4}$ مقدار $\frac{1}{4}$ رو قرار بدیم یا همون $2^{-2} = \frac{1}{4}$. پس معادله رو به صورت زیر بازنویسی میکنیم:

$$2^{|x|} = 2^{-2(x^2 - x)} \Rightarrow 2|x| = -2(x^2 - x) \Rightarrow |x| = x^2 - x \Rightarrow x^2 = x + |x|$$

برای حل این معادله، به علت وجود قدرمطلق باید دو حالت در نظر بگیریم. پس:

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, x = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ قابل قبوله}$$

$$x \leq 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس این معادله فقط به جواب داره.

۱۲۶- میانگین و واریانس چهار عدد a, b, c, d به ترتیب ۳ و $\frac{1}{5}$ است. واریانس داده‌های a, b, c, d و 5 کدام است؟

۱.۸۴ (۴)

۱.۶۵ (۳)

۰.۹۴ (۲)

۰.۷۵ (۱)

حل: چون میانگین این ۴ عدد ۳ شده، پس جمعشون ۱۲ میشه. بنابراین جمع ۵ عدد بعدی برابر با ۱۷ میشه و میانگینشون برابر با $\frac{3}{4}$ میشه. واریانس این اعداد هم $\frac{1}{5}$ بوده، پس میتونیم مجموع مربعاتشون رو بدست بیاریم:

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - 9$$

$$10/5 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{\varepsilon} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 42$$

واریانس داده‌های جدید به صورت زیر بدست میاد:

$$\sigma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+25}{5} - (\bar{x})^2 = \frac{42+25}{5} - \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{67}{5} - \frac{17^2}{25} = \frac{335-289}{25} = \frac{46}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{184}{100} = 1/84$$

۱۲۷- برای چند عدد طبیعی، ریشه دوم عبارت $\frac{1-a}{9-3a}$ وجود ندارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: برای اینکه ریشه دوم وجود نداشته باشد، باید مقدار این عبارت منفی بشه یا تعریف نشده باشه. مخرج این عبارت به ازای $a = 3$ تعریف نشده اس. همچنین با تعیین علامت این عبارت متوجه میشیم که بین ۱ تا ۳ این عبارت منفی میشه. پس این عبارت به ازای $a = 2, 3$ ریشه دوم نداره.

۱۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} [8x^3 - x]$ کدام است؟

۴ (وجود ندارد)

۳ (صفر)

۲ (-۱)

۱ (۱)

حل: مقدار عبارت داخل براکت به ازای $x = -\frac{1}{2}$ برابر با $-\frac{1}{2}$ است. پس در همسایگی این عدد هم مقدار تابع در حوالی همین مقدار قرار داره که براکتش برابر با -۱ میشه.

۱۲۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -2\pi} \frac{4 + k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = +\infty$ باشد، مقدار $[-k]$ کدام است؟

۴ (-۲)

۳ (-۳)

۲ (-۴)

۱ (-۱)

حل: حد راست و چپ این عبارت هر دو مثبت شدن. پس باید بریم هر دو حالت رو بررسی کنیم. اول حد راست رو بدست بیارم، یعنی $x \rightarrow (-2\pi)^+$ ، یعنی مثلاً $(-2/\pi)$ که در ربع اول هم قرار میگیره که مخرج برابر با صفر حدی مثبت (0^+) میشه، صورت هم برابر با $4 - 2k$ میشه که باید مثبت باشه، یعنی $4 - 2k > 0 \Rightarrow k < 2$ میشه. همچنین میتونیم گزینه رو بزیم. یه خورده از ۲ کمتر، مثلاً $1/99$ رو اگه قرار بدیم مقدار $[k]$ برابر با -۲ میشه که گزینه ۴ درسته. اما اگه گزینه ای وجود داشت که بیشتر از یه مقدار صحیح برای $[k]$ در نظر گرفته بود، باید حد چپ هم بررسی میکردیم. البته همین سوال رو هم میتونستیم با حد چپ حل کنیم.

بریم حد چپ هم بررسی کنیم. در اینجا باید مثلاً تابع در $-2/\pi$ بررسی کنیم. مخرج صفر حدی منفی، یعنی (0^-) میشه. صورت هم باید منفی باشه، پس:

$$\varepsilon + k \left\lceil \frac{-2/\pi}{\pi} \right\rceil = \varepsilon - 3k < 0 \Rightarrow k > \frac{\varepsilon}{3}$$

پس $[-k]$ برابر با -2 - میشه. در واقع k باید در بازه $(\frac{\varepsilon}{3}, 2)$ باشه. اگرچه برای حل این تست نیازی نبود کل این بازه مشخص بشه.

۱۳۰- به ازای چند مقدار a تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+a} & x \geq a \\ \frac{a-1}{x-1} & x < a \end{cases}$$

روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: چون تابع روی R پیوسته اس، اولاً هر ضابطه باید روی دامنه خودش پیوسته باشه، ثانیاً تابع در نقطه تغییر ضابطه هم پیوسته باشه.

اگه فرض کنیم هر ضابطه پیوسته اس، پس باید حد راست و چپ با مقدار تابع در $x = a$ با هم برابر باشن. پس:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3}{x+a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a-1}{x-1} = f(a) \Rightarrow \frac{3}{2a} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

به ازای این مقدار تابعمون به

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+\frac{3}{2}} & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x-1} & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

که در اینصورت ضابطه پایین در $x = 1$ ناپیوسته

میشه. اما باید به حالت خاص هم بررسی کنیم. اگه $a = 1$ باشه تابعمون به تابع زیر تبدیل میشه که باز هم در $x = 1$ ناپیوسته اس.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & x \geq 1 \\ \cdot & x < 1 \end{cases}$$

۱۳۱- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ در بازه $[1, 3]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در نقطه‌ای با کدام طول

برابر است؟ ($a \neq 0$)

(۴) $\sqrt{6}$

(۳) $\sqrt{5}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{2}$

حل: آهنگ متوسط این تابع برابر است با:

$$\frac{(1-\frac{a}{3})-(1-a)}{3-1} = \frac{a}{3}$$

برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای این تابع باید از تابع مشتق بزنیم:

$$f'(x) = \frac{a}{x^2} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{a}{x^2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

مقدار منفی در بازه داده شده نیست. پس $\sqrt{3}$ قابل قبوله.

۱۳۲- نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x مماس است. مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) -۴	(۲) -۲	(۳) ۴	(۴) ۲
--------	--------	-------	-------

حل: چون این تابع در $x = 2$ بر محور x مماس است، یعنی این نقطه هم باید ریشه تابع باشد و هم ریشه مشتق تابع. پس:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 4 + 2a - b = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4x + a = 0 \Rightarrow 8 + a = 0 \Rightarrow a = -8 \end{cases} \Rightarrow b = -16 \Rightarrow b - a = -16 + 8 = -8$$

۱۳۳- نقطه A ، نقطه برخورد تابع $y = \sqrt{x+2}$ با محور عرض‌ها است. کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x + |x|$ کدام است؟

(۱) $0.1\sqrt{10}$	(۲) $0.1\sqrt{5}$	(۳) $0.2\sqrt{10}$	(۴) $0.2\sqrt{5}$
--------------------	-------------------	--------------------	-------------------

حل: نقطه برخورد با محور عرض‌ها $(0, \sqrt{2})$ می‌شه. برای محاسبه کمترین فاصله باید فاصله این نقطه رو از خط $y = 2x$ بدست بیاریم که طبق فرمول فاصله نقطه از خط به صورت زیر بدست میاد:

$$d = \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10} = 0.2\sqrt{10}$$

۱۳۴- با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که هر رقم از رقم قبل از خود (سمت چپ) کوچک‌تر باشد؟

(۱) ۲۰	(۲) ۲۵	(۳) ۳۱	(۴) ۳۵
--------	--------	--------	--------

حل: برای نوشتن اعداد سه‌رقمی با ترتیب نزولی کافیست که فقط سه رقم رو انتخاب کنیم و به ترتیب نزولی (یک حالت می‌شه) کنار هم قرارشون بدیم. دقت کن که در اینجا رقم صفر هم مشکلی ایجاد نمی‌کنه. مثلاً اگر ارقام صفر، ۳ و ۸ رو انتخاب کنیم، فقط میتونیم به یه ترتیب کنار هم قرارشون بدیم، یعنی عدد ۸۳۰ ساخته می‌شه. پس تعداد کل حالات برابر است با $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$

۱۳۵- در پرتاب ۱ تاس و ۳ سکه، با کدام احتمال تعداد دفعاتی که سکه رو می‌آید ۳ برابر عدد روی تاس است؟

$$\frac{1}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{48} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{24} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

حل: در اینجا فضای نمونه شامل ۴۸ عضو. $n(S) = 6 \times 2^3 = 48$. تعداد دفعاتی که سکه رو می‌آید، میتونه صفر، ۱، ۲ یا ۳ تا باشه که طبق خواسته مسئله فقط یه حالت امکان پذیره و اون اینه که تاس ۱ بیاد و هر سه سکه رو بین. پس احتمالش برابر با $\frac{1}{48}$ میشه.

۱۳۶- احتمال اینکه نیلوفر در درس ریاضی قبول شود $\frac{2}{3}$ احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال

آنکه فقط دوستش در درس ریاضی قبول شود برابر $\frac{3}{8}$ باشد، با کدام احتمال هیچ کدام در درس ریاضی قبول نمی‌شوند؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

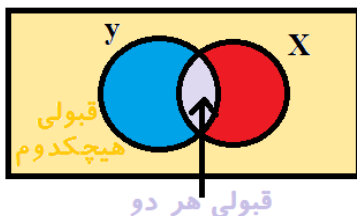
$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

حل: میتونیم از نمودار ون استفاده کنیم. احتمال قبولی نیلوفر رو با x نشون میدیم و احتمال قبولی دوستش رو y در نظر میگیریم. پس $x = \frac{2}{3}y$. احتمالی که فقط دوستش قبول میشه همیشه احتمال قبولی اون شخص منهای احتمال اشتراکشون که چون دو پدیده مستقلند، احتمال اشتراک برابر با حاصل ضرب احتمالها میشه، بنابراین:

قبولی نیلوفر قبولی دوستش



$$\frac{3}{8} = y - xy$$

حالا باید با این دو معادله مقدار x و y رو بدست بیاریم. پس از رابطه بالا مقدار x رو با $\frac{2}{3}y$ جایگذاری میکنیم. پس:

$$\frac{3}{8} = y - \left(\frac{2}{3}y\right)y \Rightarrow \frac{2}{3}y^2 - y - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

اجتماع این دو پیشامد برابر میشه با $x + y - xy = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$ پس احتمالی که هیچکدام قبول نشن برابر میشه با $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

۱۳۷- نقاط M و N روی پاره خط AB قرار دارند. نقطه M پاره خط AB را به نسبت ۱ به ۵ و نقطه N این پاره خط را به نسبت ۳ به ۴ تقسیم می کند. اگر $MN = 22$ و هر دو نقطه به یک سر پاره خط نزدیک تر باشند، مجموع ارقام طول پاره خط AB چقدر است؟

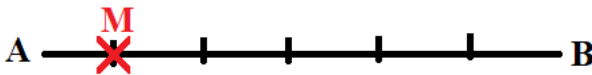
۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

حل: پاره خط رو به صورت زیر در نظر میگیریم. اگر طول پاره خط x باشد، پس $MN = \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}x = \frac{11}{20}x$. پس: $\frac{11}{20}x = 22 \Rightarrow x = 40$. مجموع ارقام برابر است با $4 + 0 = 4$.



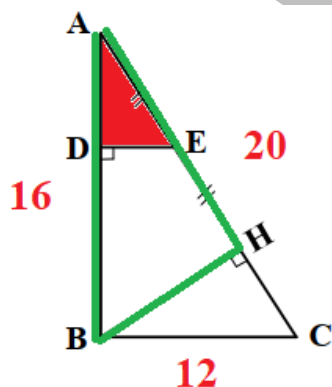
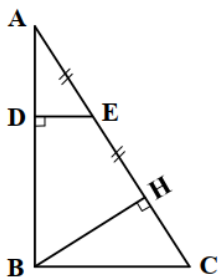
۱۳۸- در شکل زیر، $AB = 16$ ، $BC = 12$ و زاویه $\hat{ABC}$ قائمه است. طول DE کدام است؟

۳٫۸۴ (۱)

۲٫۶۴ (۲)

۲٫۳۶ (۳)

۱٫۹۲ (۴)



حل: میدونیم که اگر اضلاع زاویه قائمه یه مثلث قائم الزاویه ۳ و ۴ باشن، وترش ۵ میشه. در اینجا اضلاع قائمه ۱۶ و ۱۲ هستن که ۴ برابر شدن، پس وتر هم برابر با ۲۰ میشه. در این شکل دو مثلث ADE (قرمز رنگ) و ABH (محیطش سبز رنگه) متشابه ان. پس DE با BH نظیره و وترش، یعنی AE با وتر مثلث سبز، یعنی ۱۶. پس:

$$\frac{DE}{BH} = \frac{AE}{16}$$

اگر بتوانیم BH و AE رو بدست بیاریم تمومه. BH که ارتفاع وارد بر وتر در مثلث بزرگ ABC هست. مساحت این دو مثلث رو میتونیم از دو منظر بینم. صورت زیر:

$$\frac{16 \times 12}{2} = \frac{BH \times 20}{2} \Rightarrow BH = 9/6$$

برای محاسبه AE کل AH رو بدست میاریم و تقسیم بر ۲ میکنیم. در مثلث بزرگ میدونیم که:

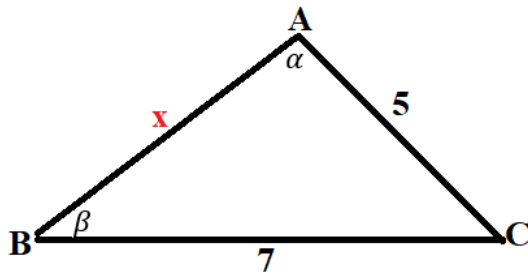
$$16^2 = AH \times 20 \Rightarrow \frac{AH}{2} = AE = 6/4$$

$$DE = \frac{9/6 \times 6/4}{16} = 2/4 \times 1/6 = 3/84$$

۱۳۹- در مثلث ABC ، اندازه زاویه $\hat{A}$ دو برابر زاویه $\hat{B}$ است. اگر $AC = 5$ و $BC = 7$ باشد، اندازه ضلع AB کدام است؟

۴٫۸ (۴)	۴٫۷۵ (۳)	۵٫۲۵ (۲)	۵٫۲ (۱)
---------	----------	----------	---------

حل: اول شماتیک مسئله رو به صورت زیر رسم میکنیم. طبق قضیه سینوسها داریم:



$$\frac{5}{\sin \beta} = \frac{7}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin 2\beta} = \frac{7}{2 \sin \beta \cos \beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{7}{10}$$

حالا میتونیم از قضیه کسینوسها استفاده کنیم.

$$x^2 + 7^2 - 2(x)(7) \cos \beta = 5^2 \Rightarrow x^2 - 9/8x + 24 = 0$$

$$x = 5, x = 4/8$$

که همینجا متوجه میشیم گزینه ۴ درسته. سوال: اگر مقدار ۵ هم در گزینه‌ها وجود داشت چی؟! در اینجا مقدار این ضلع نمیتونه ۵ باشه، اگر ۵ باشه پس مثلث متساوی الساقین میشه و زاویه سمت راست هم همون β میشه. پس $\beta = 45 \Rightarrow \beta + \beta + \alpha = 180 \Rightarrow \beta = 45$ که دیگه مقدار کسینوس $0/7$ نیست.

۱۴۰- خط ℓ در نقطه $(-3, -4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است. اگر خط عمود بر ℓ در ناحیه دوم بر این دایره مماس باشد، حاصل ضرب طول و عرض مختصات نقطه برخورد دو خط کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

حل: وقتی مختصات نقطه $(-3, -4)$ هست، پس شعاع دایره برابر با ۵ و ضابطه آن $x^2 + y^2 = 25$ است. شیب این خط برابر با $-\frac{4}{3}$ است، پس شیب خط عمود بر آن قرینه و معکوسش، یعنی $\frac{3}{4}$ خواهد بود. چون این خط بر دایره در ناحیه دوم مماس هست، پس مختصات نقطه تلاقی $(-4, 3)$ باشد (چون نقطه در ناحیه دوم هست، طولش منفی و عرضش مثبت). حالا کافیست که معادله دو خط رو بدست بیاریم. پس:

$$\text{خط مماس بر دایره در ناحیه دوم: } y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \quad \text{خط مماس بر دایره در ناحیه سوم: } y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

برای بدست آوردن تلاقی این دو خط ضابطه‌ها رو با هم برابر قرار میدیم (معادله تقاطع):

$$\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{25}{12}x = -25 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = -25 \left(\frac{7}{12} \right) \Rightarrow x = -7, y = -1$$

پس حاصل ضرب طول و عرض این نقطه برابر با ۷ میشه.

مهندس سید امید شفیعی

دانش آموخته مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران

در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

نویسنده کتاب ریاضیات جامع تجربی (ریاضی سنجاب)

Instagram: [riazi.sanjob](https://www.instagram.com/riazi.sanjob)

ایمیل: seyedomid.shafiei@gmail.com