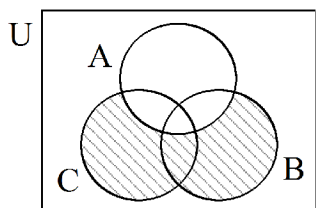


(۱)

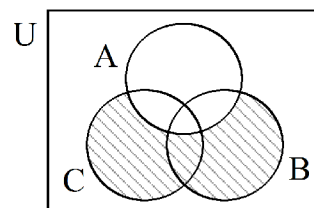
پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی تیرماه ۱۴۰۴

تهیه و تنظیم: مهندس کوهیار عیوضی

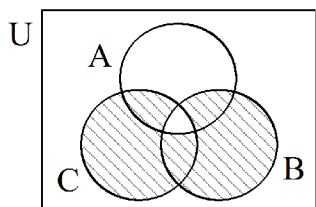
۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با رسم نمودار ون مربوط به هر یک از گزینه‌ها، مشخص می‌شود که پاسخ گزینه ۳ است.



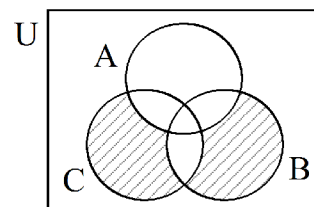
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$ax^2 + (2-3a)x - 18 = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 + \left(\frac{2-3a}{a}\right)x - \frac{18}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{2-3a}{a}\right)x = \frac{18}{a}$$

توان دوم نصف ضریب X را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + \left(\frac{2-3a}{a}\right)x + \left(\frac{2-3a}{2a}\right)^2 = \frac{18}{a} + \left(\frac{2-3a}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{2-3a}{2a}\right)^2 = \frac{18}{a} + \left(\frac{2-3a}{2a}\right)^2$$

از مقایسه رابطه فوق با صورت سوال نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{2-3a}{2a} = -1/3 \Rightarrow 2-3a = -2/6a \Rightarrow 0/4a = 2 \Rightarrow a = 5$$

$$b = \frac{18}{a} + \left(\frac{2-3a}{2a}\right)^2 \xrightarrow{a=5} b = \frac{18}{5} + (-1/3)^2 = 3/6 + 1/69 = 5/29 \Rightarrow \sqrt{b} = \sqrt{5/29} = 2/3$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

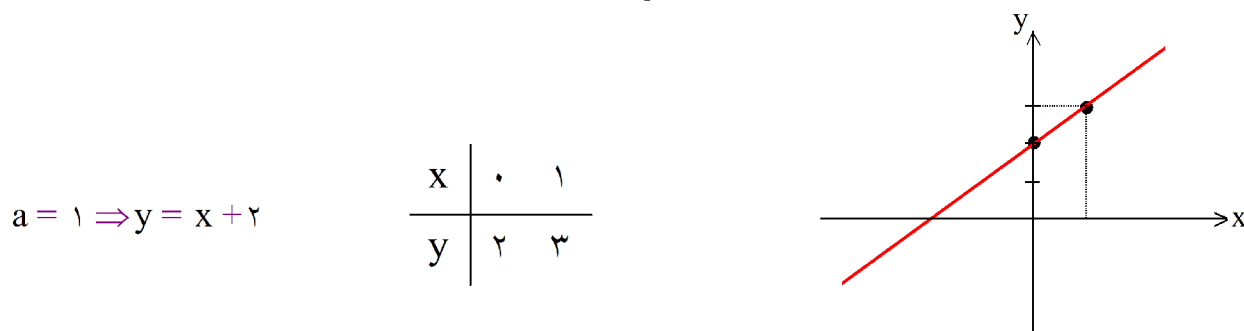
$$\frac{6-a}{3} = \frac{3}{a} \Rightarrow 6a - a^2 = 9 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a} \xrightarrow{a=3} \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow 3x+9 = x^2+x \Rightarrow x^2-2x-9=0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-9) = 4 + 36 = 40$$

• $\Delta > 0$ پس معادله دارای دو جواب متمایز است.توجه: ریشه‌های منفرجه‌ها ($x=3$ و $x=0$) در بین پاسخ‌ها نیست پس هر دو جواب قابل قبول است.

- ۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع درجه ۲ وقتی دارای کمترین مقدار در رأس (Min) می‌باشد که ضریب x^2 در فرم استاندارد آن مثبت باشد، پس داریم: $a > 0$
- اگر معادله خط داده شده را به صورت $y = a(x+1) + 1$ بنویسیم، مشخص است که به ازای $a > 0$ و $x > 0$ همواره مثبت خواهد شد یعنی در قسمت مثبت محور x ها مقدار y هیچ‌گاه منفی نخواهد شد. به بیان دیگر نمودار این خط از ناحیه چهارم محورهای مختصات نخواهد گذشت.
- به عنوان مثال مقدار a را برابر ۱ در نظر می‌گیریم و نمودار تابع خطی را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل مشخص است که نمودار از نواحی اول و دوم و سوم گذشته و از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.

- ۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 0 \right\}$$

$${}_2g = \left\{ (-1, 4), (0, 10), (5, 4), \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right\}$$

$$D_{f+{}_2g} = D_f \cap D_{{}_2g} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 0 \right\}$$

$$f+{}_2g = \left\{ (-1, 5), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (0, 11) \right\}$$

$$D_{\frac{{}_2-f \times g}{f+{}_2g}} = D_{{}_2-f \times g} \cap D_{f+{}_2g} - \{x | f+{}_2g = 0\}$$

پس $\frac{1}{2}$ نمی‌تواند عضو دامنه باشد چون عبارت مخرج را صفر می‌کند.

در نتیجه دامنه تابع مورد نظر برابر است با: $\{-1, 0\}$ که شامل دو عضو می‌شود.

- ۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع همانی و با دانستن اینکه از نقطه‌ای به طول ۲- می‌گذرد، خواهیم داشت:

$$f(x) = x \xrightarrow{x=-2} y = -2 \Rightarrow (-2, -2) \quad \text{نقطه تقاطع تابع همانی و سهمی}$$

این نقطه را در معادله سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(-2, -2)} -2 = a(-2)^2 + 3(-2) - 2 \Rightarrow -2 = 4a - 6 - 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$ بوده و طول رأس آن برابر است با:

(۳)

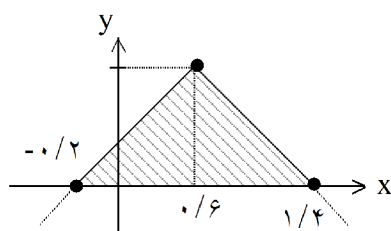
پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی تیرماه ۱۴۰۴

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = -1$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم.

$$5x - 3 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$y = \begin{cases} 4 - (5x - 3) = 4 - 5x + 3 = 7 - 5x & ; x \geq \frac{3}{5} \xrightarrow{y=0} x = 1.4 \\ 4 + (5x - 3) = 5x + 1 & ; x < \frac{3}{5} \xrightarrow{y=0} x = -0.2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2 \div (\text{ارتفاع} \times \text{مساحت مثلث}) \\ = (4 \times 1.4) \div 2 = 3.2 \end{aligned}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از روی نمودار دایره‌ای مشخص است که زاویه مربوط به نمره D برابر ۹۰° است. پس:

$$\frac{\alpha_D}{360^\circ} = \frac{f_D}{\text{تعداد کل}} \Rightarrow f_D = \frac{90}{360} \times 96 = \frac{96}{4} = 24 \quad (\text{فراوانی نمره D})$$

$$\begin{aligned} f_D = 2f_A, f_C = 3f_A \\ \Rightarrow f_A + f_B + f_C = 96 - 24 = 72 \xrightarrow{f_D = 2f_A, f_C = 3f_A} f_A + 2f_A + 3f_A = 6f_A = 72 \\ \Rightarrow f_A = 12 \Rightarrow f_C = 3f_A = 3 \times 12 = 36 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\text{تعداد شاخص ها}} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ممکن است a و c قرینه یکدیگر باشند در آن صورت $a + c = 0$ خواهد شد و نمی توان طرفین گام چهارم را بر $a + c$ تقسیم کرد. پس ایراد استدلال در گام پنجم است.

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جابه جایی در ترکیب دوشروطی تأثیری ندارد پس با گزینه ۴ هم ارز است. در ترکیب دوشروطی با نقیض کردن هر دو گزاره طرفین ترکیب ارزش گزاره تغییری نمی کند یعنی:

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

پس گزاره داده شده با گزاره های ۲ و ۳ نیز هم ارز است و پاسخ صحیح گزینه ۱ خواهد بود.

(۴)

پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی تیرماه ۱۴۰۴

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\bar{X} = 6 \xrightarrow[\text{از هر یک از داده ها}]{\text{کم کردن ۲ واحد}} \bar{X}' = 6 - 2 = 4 \xrightarrow[\text{داده ها در ۴}]{\text{ضرب کردن هر یک از}} \bar{X}_{\text{جدید}} = 4 \times 4 = 16$$

توجه: تعداد داده‌ها (۷) تأثیری در حل مسئله ندارد.

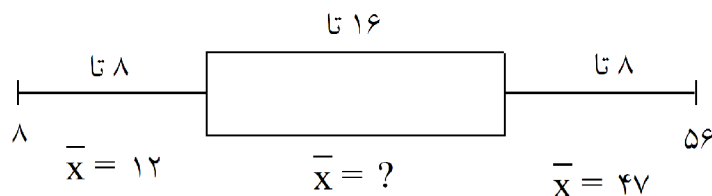
۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$[(\text{میانگین طول جمله} + \text{درصد کلمات دشوار}) \times 0.4] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

$$\Rightarrow \text{پایه دهم} \quad [(18 + 8) \times 0.4] = [26 \times \frac{4}{10}] = [\frac{104}{10}] = [10.4] = 10$$

$$\left[\frac{32}{4} \right] = 8$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد داده‌های هر چارک:



$$\text{بدون داده ابتدایی} \quad \text{مجموع داده‌های سبیل چپ} = 8 \times 12 = 96 \xrightarrow{96 - 8 = 88}$$

$$\text{بدون داده انتهایی} \quad \text{مجموع داده‌های سبیل راست} = 8 \times 47 = 376 \xrightarrow{376 - 56 = 320}$$

میانگین داده‌های بین کمترین و بیشترین داده (یعنی ۸ و ۵۶) برابر ۲۸ است. یعنی خود ۸ و ۵۶ در محاسبه این میانگین دخیل نیستند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد داده ها} = 32 - 2 = 30 \\ \text{میانگین} = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع داده های بین ۸ و ۵۶} = 30 \times 28 = 840$$

مجموع داده‌های داخل جعبه:

$$840 - (88 + 320) = 432 \Rightarrow \text{میانگین داده های داخل جعبه} = \frac{432}{16} = 27$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (مضرب ۵ ← یکان صفر یا ۵)

حالت (۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{3}{\text{صفر}} \times \frac{4}{\text{یکی از ۴ تای باقیمانده}} \times \frac{1}{\text{۱ یا ۲ یا ۳}} = 12 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{\text{صفر}} \times \frac{3}{\text{۱ یا ۲ یا ۳}} \times \frac{1}{\text{عدد ۴}} = 3 \quad (\text{ب})$$

(۵ نمی‌تواند باشد)

چون از ۴۴۰ بزرگ‌تر می‌شود.

حالت (۲) یکان ۵ باشد:

(۵)

پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی تیرماه ۱۴۰۴

$$\frac{4}{4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1} \times \frac{4}{\text{عدد باقیمانده}} \times \frac{1}{5 \text{ عدد}} = 16$$

(به جز ۵ و رقم صدگان)

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 12 + 3 + 16 = 31$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تعداد کبوتر نوک سرخ = ۵ ، تعداد کبوتر غیرنوک سرخ = ۵

$$n(S) = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

کل حالاتی که موش ۷ کبوتر آزاد کند:

حالات مطلوب حالاتی است که: یا هر ۵ کبوتر نوک سرخ آزاد شده باشد.

یا ۴ کبوتر نوک سرخ آزاد شده باشد.

یا ۳ کبوتر نوک سرخ آزاد شده باشد.

توجه کنید که در هر یک از سه حالت فوق باید تعداد حالات انتخاب کبوترهای غیرنوک سرخ هم در نظر بگیریم.

$$n(A) = \binom{5}{5} \binom{5}{2} + \binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{3} \binom{5}{4} = 1 \times 10 + 5 \times 10 + 10 \times 5 = 110$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{110}{120} = \frac{11}{12}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{n_1 = 1}{a_1 = 15 \text{ (فرد)}} \rightarrow a_2 = 3(15) - 1 = 44$$

$$\frac{n = 2}{a_2 = 44 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_3 = \frac{44}{2} = 22$$

$$\frac{n = 3}{a_3 = 22 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_4 = \frac{22}{2} = 11$$

$$\frac{n = 4}{a_4 = 11 \text{ (فرد)}} \rightarrow a_5 = 3(11) - 1 = 32$$

$$\frac{n = 5}{a_5 = 32 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_6 = \frac{32}{2} = 16$$

$$\frac{n = 6}{a_6 = 16 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_7 = \frac{16}{2} = 8$$

$$\frac{n = 7}{a_7 = 8 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_8 = \frac{8}{2} = 4$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_2 + a_{10} = 34 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + 9d = 2a_1 + 10d = 34 \xrightarrow{\div 2} a_1 + 5d = 17 \quad (1)$$

$$S_{12} - S_3 = 117 \Rightarrow \frac{12}{2} [2a_1 + 11d] - \frac{3}{2} [2a_1 + 2d] = 12a_1 + 66d - 3a_1 - 3d = 117$$

$$\Rightarrow 9a_1 + 63d = 117 \xrightarrow{\div 3} 3a_1 + 21d = 39 \quad (2)$$

حل دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول:

$$\xrightarrow{(1), (2)} \times 3 \begin{cases} 3a_1 + 21d = 39 \\ a_1 + 5d = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 21d = 39 \\ 3a_1 + 15d = 51 \end{cases}$$

$$6d = -12 \Rightarrow d = -2$$

$$\begin{cases} d = -2 \\ a_1 + 5d = 17 \Rightarrow a_1 + 5(-2) = 17 \Rightarrow a_1 = 27 \end{cases}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دنباله داده شده یک دنباله هندسی است با $a_1 = \frac{9}{5}$ و $r = \frac{2}{3}$. برای مجموع n جمله اول دنباله هندسی داریم:

$$S_n = a_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r} \Rightarrow S_6 = \frac{9}{5} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)} \Rightarrow S = \frac{9}{5} \times \frac{1 - \frac{64}{729}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{5} \times \frac{\frac{665}{729}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{9 \times 665 \times 3}{5 \times 729} = \frac{665}{5 \times 27} = \frac{133}{27} \Rightarrow \frac{3}{7} S = \frac{3 \times 133}{7 \times 27} = \frac{133}{7 \times 9} = \frac{19}{9}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، نمودار $y = a^{-x}$ یا $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ افزایشی است پس $\frac{1}{a} < 1$ در نتیجه $a < 1$ خواهد بود و گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند.

حال در مورد b و c چون در قسمت منفی محور x نمودار $y = b^x$ بالاتر از $y = c^x$ است پس $b < c$ که در $\frac{1}{5^3} < \frac{1}{5^2}$

گزینه ۴ هم داریم:
پس پاسخ صحیح گزینه ۴ خواهد بود.