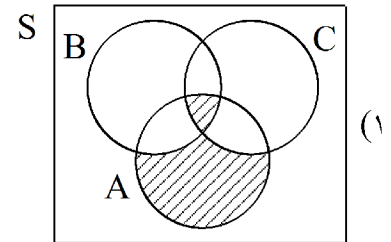


(۱) پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی خارج از کشور ۱۴۰۴
تهیه و تنظیم: مهندس کوهیار عیوضی

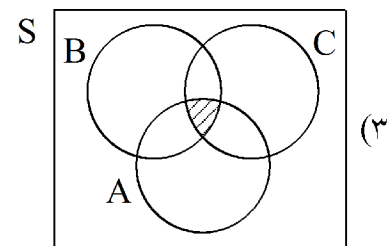
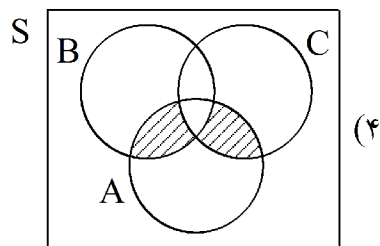
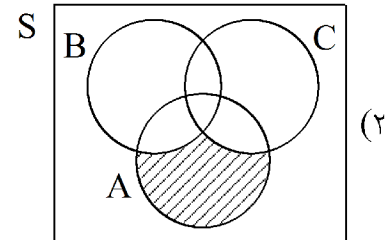
۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار ون هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.

$$A - [(B \cup C') \cap (B' \cup C)]' = A \cap [(B \cup C') \cap (B' \cup C)]$$



$$A - [(B' \cup C') - (B \cup C)]' = A \cap [(B' \cup C') - (B \cup C)]$$

$$= A \cap [(B' \cup C') \cap (B' \cap C')]$$



۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3x^2 - 19x - 14 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - \frac{19}{3}x - \frac{14}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{19}{3}x = \frac{14}{3}$$

توان دوم نصف ضریب X را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - \frac{19}{3}x + \left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{14}{3} + \left(\frac{19}{6}\right)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{19}{6}\right)^2 = \frac{14}{3} + \left(\frac{19}{6}\right)^2$$

از مقایسه رابطه فوق با صورت سوال نتیجه می‌گیریم:

$$b = \frac{19}{6}, a = \frac{14}{3} + \left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{14}{3} + \frac{361}{36} = \frac{168 + 361}{36} = \frac{529}{36}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} + b = \sqrt{\frac{529}{36}} + \frac{19}{6} \xrightarrow{\sqrt{529} = 23} = \frac{23}{6} + \frac{19}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2 - a = \frac{1}{a} \Rightarrow 2a - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

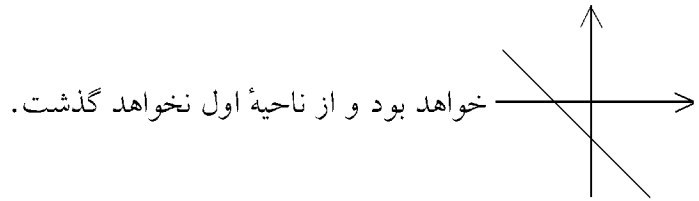
$$\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a} \xrightarrow{a=1} \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ هیچ یک از مخارج‌ها را صفر نمی‌کند پس پاسخ قابل قبولی است، در نتیجه معادله یک جواب دارد.

(۲)

پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی خارج از کشور ۱۴۰۴

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع درجه ۲ وقتی دارای بیشترین مقدار در رأس (Max) است که ضریب x^2 در فرم استاندارد آن منفی باشد. پس داریم: $a < 0$
در معادله خط داده شده $y = ax + (a - 3)$ ، شیب خط و عرض از مبدأ هر دو منفی هستند. پس نمودار به شکل



خواهد بود و از ناحیه اول نخواهد گذشت.

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_f = \{1, 2, 3, -1\} \cap D_g = \{1, 2, 4, -1\} \longrightarrow D_{f \times g} = \{1, 2, -1\}$$

$$\text{چون } \begin{cases} D_f = D_{2f} = D_{2f+1} \\ D_{f \times g} = D_{f \times g} - g \end{cases} \text{ پس داریم:}$$

$$D_{\frac{1+2f}{f \times g - g}} = D_f \cap D_{f \times g} - \{x | f \times g - g = 0\} = \{1, 2, -1\} - \{x | f \times g - g = 0\}$$

حال تابع $f \times g - g$ را تشکیل می‌دهیم تا ببینیم به ازای اعضای دامنه‌اش، مقدارش برابر صفر خواهد شد یا خیر.

$$f \times g = \{(1, 5), (2, 10), (-1, 0)\}$$

$$f \times g - g = \{(1, 0), (2, 5), (-1, 0)\}$$

مشخص می‌شود که به ازای $\{1, -1\}$ مقدار $f \times g - g$ برابر صفر خواهد شد و چون در مخرج است قابل قبول نیست و این دو عضو از دامنه حذف خواهند شد. پس تابع $\frac{1+2f}{f \times g - g}$ تنها دارای یک عضو است.

$$D_{\frac{1+2f}{f \times g - g}} = \{2\}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع همانی به فرم کلی $f(x) = x$ است و چون از نقطه‌ای به طول ۳ می‌گذرد پس نقطه تقاطع سهمی و تابع همانی $(3, 3)$ خواهد بود. این نقطه را در معادله سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(3, 3)} 3 &= a(3)^2 + 2(3) + 3 \Rightarrow 3 = 9a + 6 + 3 \Rightarrow 3 = 9a + 9 \Rightarrow 9a = -6 \\ \Rightarrow a &= -\frac{6}{9} \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x + 3$ خواهد بود و طول رأس آن برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

(۳)

پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی ۱۴۰۴

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع قدرمطلق ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

پس در مقادیر x بالاتر از $-\frac{1}{3}$ داخل قدرمطلق مثبت است و کمتر از $-\frac{1}{3}$ داخل قدرمطلق منفی است. خواهیم داشت:

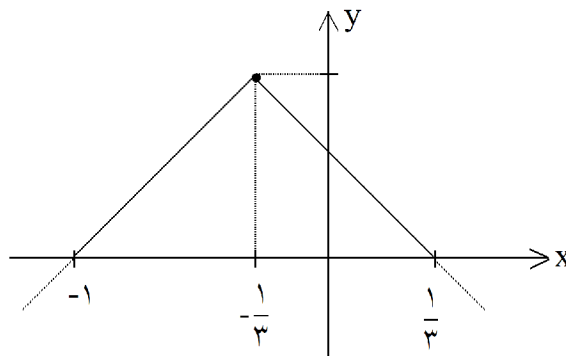
$$y = \begin{cases} 2 - (3x + 1) = 2 - 3x - 1 = 1 - 3x & ; x \geq -\frac{1}{3} \\ 2 + (3x + 1) = 3x + 3 & ; x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

محل تقاطع هر یک از خطوط فوق با محور x ها را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{y=0} \begin{cases} 1 - 3x = 0 \Rightarrow 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 3x + 3 = 0 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

با رسم نمودار مربوطه، مشخص است بخشی از نمودار که بالای محور x هاست در واقع مثلثی است با ارتفاع ۲ و قاعده $\frac{4}{3} - (-1) = \frac{1}{3}$ پس مساحت آن برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) \\ &= \left(2 \times \frac{4}{3} \right) \div 2 = \frac{8}{3} \div 2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\alpha_A = 5\alpha_{AB}$$

$$\alpha_B = 3\alpha_{AB}$$

$$\alpha_O = 2\alpha_B = 6\alpha_{AB}$$

$$\alpha_A + \alpha_B + \alpha_O + \alpha_{AB} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 5\alpha_{AB} + 3\alpha_{AB} + 6\alpha_{AB} + \alpha_{AB} = 360^\circ \Rightarrow 15\alpha_{AB} = 360^\circ \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_O = 6\alpha_{AB} = 6 \times 24^\circ = 144^\circ$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. همه زاویه‌ها را بر حسب α_{AB} می‌نویسیم:

از طرفی با توجه به نمودار می‌دانیم:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\text{تعداد متغیرها}} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در صورتی که $a = 1$ نمی‌توانیم طرفین را در گام پنجم بر $a - 1$ تقسیم کنیم و چون در گام پنجم ذکر نشده که $a \neq 1$ پس ایراد استدلال در همین گام است.

(۴)

پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی ۱۴۰۴

$$\sim q \Rightarrow p \equiv \sim q \vee \sim p$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) p \Rightarrow \sim q \equiv p \vee q \quad \times$$

$$۲) \sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim q \vee p \quad \times$$

$$۳) q \Rightarrow \sim p \equiv q \vee p \quad \times$$

$$۴) \sim p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee \sim q \quad \checkmark$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\bar{x} = 3 \xrightarrow[\text{به هر یک از داده ها}]{\text{اضافه کردن ۴ واحد}} \bar{x}' = 3 + 4 = 7 \xrightarrow[\text{در ۶}]{\text{ضرب کردن داده ها}} \bar{x}_{\text{جدید}} = 7 \times 6 = 42$$

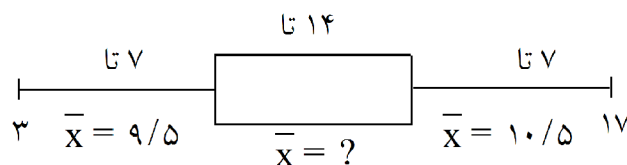
۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[0.4 \times (\text{میانگین طول جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

$$\Rightarrow \text{شاخص پایه آموزش} = [(22 + 9) \times 0.4] = [31 \times 0.4] = [12.4] = 12$$

پس این رُمان برای دانش‌آموزان پایه دوازدهم مناسب است.

$$۱۴- \text{گزینه ۲ پاسخ صحیح است. } \bar{x}_{\text{کل}} = 12 \text{ و تعداد داده‌های هر چارک: } \left[\frac{28}{4} \right] = 7$$



$$\text{مجموع داده‌های سبیل چپ} = 9/5 \times 6 + 3 = 60$$

$$\text{مجموع داده‌های سبیل راست} = 10/5 \times 6 + 17 = 80$$

$$\text{مجموع کل داده‌ها} = 12 \times 28 = 336$$

$$\text{مجموع داده‌های داخل جعبه} = 336 - (60 + 80) = 196$$

$$\text{میانگین داده‌های داخل جعبه} = \frac{196}{14} = 14$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زوج باشد $\Leftarrow$ یکان: ۰ یا ۲ یا ۴

حالت ۱: یکان صفر باشد.

$$\frac{1}{\text{عدد ۴}} \times \frac{3}{\text{صفر ۱ یا ۲ یا ۳}} \times \frac{1}{\text{صفر ۱ یا ۲ یا ۳}} = 3$$

الف) صدگان ۴ باشد.

$$\frac{3}{\text{صفر ۱ یا ۲ یا ۳}} \times \frac{4}{\text{یکی از ۴ تایی باقیمانده}} \times \frac{1}{\text{صفر ۱ یا ۲ یا ۳}} = 12$$

ب) صدگان ۴ نباشد.

حالت ۲: یکان ۲ باشد.

$$\frac{1}{\text{عدد ۴}} \times \frac{3}{\text{صفر ۱ یا ۲ یا ۳}} \times \frac{1}{\text{عدد ۲ یا ۰ یا ۱ یا ۳}} = 3$$

الف) صدگان ۴ باشد.

(۵)

پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی خارج از کشور ۱۴۰۴

(ب) صدگان ۴ نباشد.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{1}{2} = 8$$

عدد ۲ یکی از ۴ تای باقیمانده ۱ یا ۳

$$\frac{3}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} = 12$$

عدد ۴ یکی از ۴ تای باقیمانده ۱ یا ۲ یا ۳

حالت ۳: یکان ۴ باشد.

طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$38 = 3 + 12 + 3 + 8 + 12 = \text{تعداد کل حالات}$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴ قوچ $\Leftarrow$ ۵ قوچ شاخدار + ۹ قوچ بدون شاخ

$$n(S) = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7!7!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13 \times 12 \times 11 \times 2$$

حداکثر دو تا شاخدار یعنی یکی از سه حالت زیر:

یا صفر قوچ شاخدار انتخاب شود و ۷ قوچ بدون شاخ: $\binom{5}{0} \binom{9}{7}$ یا یک قوچ شاخدار انتخاب شود و ۶ قوچ بدون شاخ: $\binom{5}{1} \binom{9}{6}$ یا دو قوچ شاخدار انتخاب شود و ۵ قوچ بدون شاخ: $\binom{5}{2} \binom{9}{5}$

$$\Rightarrow n(A) = \binom{5}{0} \binom{9}{7} + \binom{5}{1} \binom{9}{6} + \binom{5}{2} \binom{9}{5} = \frac{9!}{7!2!} + 5 \times \frac{9!}{6!3!} + 10 \times \frac{9!}{5!4!}$$

$$= 36 + 5 \times 84 + 10 \times 126 = 1716$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1716}{13 \times 12 \times 11 \times 2} = \frac{858}{13 \times 12 \times 11} = 0.5$$

تذکر: با اینکه این سؤال در زمره سؤالات متوسط محسوب می شود ولی محاسبات عددی طولانی و زمانبری دارد.

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ناچاریم به n مقدار بدهیم و a_n را محاسبه کنیم و سپس نتیجه گیری کنیم.

$$\frac{n=1}{a_1=24 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_2 = \frac{24}{2} = 12 \quad ; \quad \frac{n=2}{a_1=12 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_3 = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{n=3}{a_3=6 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_4 = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad \frac{n=4}{a_4=3 \text{ (فرد)}} \rightarrow a_5 = 3(3) + 1 = 10$$

$$\frac{n=5}{a_5=10 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_6 = \frac{10}{2} = 5 \quad ; \quad \frac{n=6}{a_6=5 \text{ (فرد)}} \rightarrow a_7 = 3(5) + 1 = 16$$

$$\frac{n=7}{a_7=16 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_8 = \frac{16}{2} = 8 \quad ; \quad \frac{n=8}{a_8=8 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_9 = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{n=9}{a_9=4 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_{10} = \frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad \frac{n=10}{a_{10}=2 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_{11} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{n=11}{a_{11}=1 \text{ (فرد)}} \rightarrow a_{12} = 3(1) + 1 = 4 \quad ; \quad \frac{n=12}{a_{12}=4 \text{ (زوج)}} \rightarrow a_{13} = \frac{4}{2} = 2$$

(۶) پاسخ تشریحی ریاضی و آمار کنکور انسانی خارج از کشور ۱۴۰۴

الگو به تکرار رسید و از این به بعد چرخه ۱، ۲، ۴ تکرار خواهد شد یعنی جملات دنباله به شکل زیر هستند:
 ۱۲، ۶، ۳، ۱۰، ۵، ۱۶، ۸، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ...
 و همان‌طور که مشخص است کوچک‌ترین جمله دنباله عدد ۱ می‌باشد.

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + 10d) = 11(a_1 + 5d) = 165 \Rightarrow a_1 + 5d = 15 \quad (1)$$

$$a_3 + a_8 = a_1 + 2d + a_1 + 7d = 2a_1 + 9d = 22 \quad (2)$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول فوق مقادیر d و a_1 به دست خواهد آمد.

راه‌حل میان‌بر: به طرفین رابطه (۲)، d را اضافه می‌کنیم:

$$2a_1 + 10d = 22 + d \Rightarrow 2(a_1 + 5d) = 22 + d \xrightarrow{(1)} 2(15) = 22 + d \Rightarrow d = 30 - 22 = 8$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دنباله داده شده یک دنباله هندسی است با $a_1 = \frac{2}{5}$ و $r = \frac{1}{2}$.

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{63 \times 2}{64}$$

$$\frac{10}{9}S = \frac{10}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{63 \times 2}{64} = \frac{7}{8}$$

برای محاسبه $\frac{10}{9}S$ خواهیم داشت:

توجه: در محاسبات عددی کسری در بسیاری مواقع بهتر است صورت و مخرج را به صورت ضرب باقی بگذاریم و حاصل ضرب را محاسبه نکنیم و از طریق ساده کردن زودتر به جواب برسیم.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار $y = a^x$ کاهشی است پس $0 < a < 1$ (رد گزینه ۱)

نمودارهای $y = b^x$ و $y = c^x$ افزایشی هستند. پس: $\left. \begin{matrix} b > 1 \\ c > 1 \end{matrix} \right\}$ (رد گزینه ۴)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq \frac{1}{1.7} < 1 \quad (\text{چون})$$

برای انتخاب یکی از گزینه‌های ۲ و ۳ باید دو تابع $y = b^x$ و $y = c^x$ را با هم مقایسه کنیم. در قسمت مثبت محور x ها، در نمودارهای افزایشی، نموداری بالاتر قرار می‌گیرد که پایه‌اش بزرگ‌تر باشد پس چون $y = c^x$ بالاتر از

$y = b^x$ است نتیجه خواهیم گرفت: $c > b$ ، که در گزینه ۲ هم چنین است یعنی: $\frac{1}{2} < 2$.

$$\frac{1}{2} < 3 \quad (\text{رد گزینه ۳})$$