

پاسخ تشریحی سوالات کنکور ریاضی خارج کشور - تیر ۱۴۰۴

سوال ۱: گزینه ۴

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

- (۱) $0, a, a^2, \dots$ (۲) $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots$ (۳) $a, a, a, \dots$ (۴) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \dots$

سوال ۲: گزینه ۲

۲- مقدار عبارت $\frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^3 - 24x + 18}$ به ازای ریشه بزرگ‌تر معادله $x^3 - 3x + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $0.5\sqrt{5}$ (۳) $0.1\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{5}$

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^3 - 24x + 18} = \frac{(2x - 3)^3}{2(4x^3 - 12x + 9)} = \frac{(2x - 3)^3}{2(2x - 3)^2} = \frac{2x - 3}{2}$$

$$= \frac{2\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) - 3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.5\sqrt{5}$$

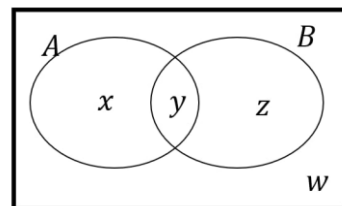
سوال ۳: گزینه ۴

۳- ساده‌شده عبارت $(B' \cap A) \cup [(B - A) \cup A'] \cap (A - B)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $B - A$ (۴) $A - B$

$$(B' \cap A) \cup [(B - A) \cup A'] \cap (A - B) = \{x\} \cup [(\{z\} \cup \{z, w\}) \cap \{x\}] =$$

$$\{x\} \cup [\{z, w\} \cap \{x\}] = \{x\} \cup \emptyset = \{x\} = A - B$$



سوال ۴: گزینه ۳

- ۴- نقیض گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره زیر است؟
- (۱) $\sim p \Rightarrow \sim (r \Rightarrow q)$ (۲) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$
- (۳) $p \Rightarrow \sim (r \Rightarrow q)$ (۴) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$

$$\begin{aligned} \sim((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)) &\equiv \sim(\sim(p \Rightarrow r) \vee (p \wedge q)) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv \\ &(\sim p \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv \sim p \vee (r \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim(\sim r \vee q) \equiv \sim p \vee \sim(r \Rightarrow q) \equiv \\ &p \Rightarrow \sim(r \Rightarrow q) \end{aligned}$$

سوال ۵: گزینه ۳

- ۵- اگر $A(2b+1, 2b-b^2)$ و $B(2b-1, 2b-b^2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های صحیح مثبت از سهمی $y = m(x - \alpha + 1)^2 + \alpha + 1$ باشند، مقدار m کدام است؟
- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

$$y = m(x - (\alpha - 1))^2 + (\alpha + 1) \Rightarrow S(\alpha - 1, \alpha + 1)$$

نقاط A و B هم‌عرض هستند، پس میانگین طول‌ها برابر طول راس است:

$$x_S = \frac{(2b-1) + (2b+1)}{2} = 2b = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 2b + 1$$

$$2b-1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}, \quad 2b+1 > 0 \Rightarrow b > -\frac{1}{2}, \quad 2b-b^2 > 0 \Rightarrow 0 < b < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{\alpha=3} \Rightarrow A(3, 1)$$

$$y = m(x - 2)^2 + 4 \xrightarrow{A(3,1)} 1 = m(3-2)^2 + 4 \Rightarrow \boxed{m = -3}$$

سوال ۶: گزینه ۲

- ۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0$ ، برابر -۱ باشد، مقدار $\frac{b}{a} (\sqrt{2})^a$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) ۱۰

$$(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0 \xrightarrow{x=-1} a \log 2 - a + b \log 2 = 0 \Rightarrow a(1 - \log 2) = b \log 2$$

$$\Rightarrow a \log 5 = b \log 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\log 5}{\log 2} = \log_2 5 \Rightarrow (\sqrt{2})^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

سوال ۷: گزینه‌ی ۴

۷- به ازای چند مقدار صحیح از a ، معادله $|4x-2|=x^2-x+a$ دارای چهار ریشه حقیقی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$4 \left| x - \frac{1}{4} \right| = \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{4} \right)$$

دقت کنید در این حالت، طول راس سهمی و مینیمم مقدار قدرمطلق یکی است.

اگر $a = 0$ آنگاه معادله به صورت $4 \left| x - \frac{1}{4} \right| = \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{4}$ درمی آید که راس سهمی پایین‌تر از مینیمم قدرمطلق شده و دو جواب خواهیم داشت.

اگر $a = 1$ آنگاه معادله به صورت $4 \left| x - \frac{1}{4} \right| = \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4}$ درمی آید که راس سهمی بالاتر از مینیمم قدرمطلق شده و چهار جواب خواهیم داشت. تا کجا ادامه دهیم؟ فرض کنیم $A = \left| x - \frac{1}{4} \right|$. پس:

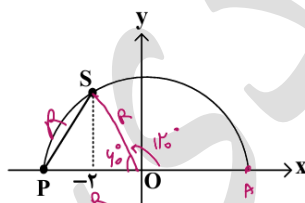
$$A^2 - 4A + \left(a - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1) \left(a - \frac{1}{4} \right) = 16 - 4a + 1 = 17 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{17}{4}$$

$$0 < a < \frac{17}{4} \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4$$

سوال ۸: گزینه‌ی ۳

۸- در نیم‌دایره شکل زیر، اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، عرض نقطه S کدام است؟



$$1,5\sqrt{3} \quad (1)$$

$$2,5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$S(R \cos 120^\circ, R \sin 120^\circ)$$

$$R \cos 120^\circ = R \times \frac{-1}{2} = -2 \Rightarrow \boxed{R=4} \Rightarrow R \sin 120^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

سوال ۹: گزینه‌ی ۱

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 3 \\ -2x+1 & x \leq 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+3 & f(-x) > 0 \\ x-3 & f(-x) \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $fo g(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) $\frac{13}{2}$ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) -۴

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 3 \\ -2x+1 & x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = \begin{cases} -x+2 & x < 3 \\ 2x+1 & x \geq 3 \end{cases}$$

به ازای $x < 3$ ، $f(-x) = -x+2$ همواره منفی است. به ازای $x \geq 3$ ، $f(-x) = 2x+1$ همواره مثبت است.

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 3 \\ x-3 & x < 3 \end{cases}$$

$$f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}-3\right) = f\left(-\frac{7}{2}\right) = -2\left(-\frac{7}{2}\right) + 1 = 8$$

سوال ۱۰: گزینه‌ی ۱

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 4x - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9$ در یک همسایگی از a ، وارون‌پذیر است. اگر $fof(a) = a$ باشد، مقدار $f(a-5)$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۹ (۴) ۷

$$f(x) = 4x - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9$$

اینکه $f \circ f(a) = a$ ، یعنی در این همسایگی $f^{-1}(x) = f(x)$.

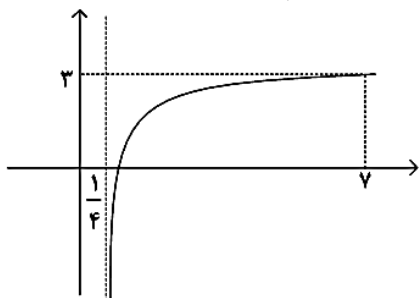
$$f(a) = 4a - a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 9 = a \Rightarrow$$

$$3(a+3) - (a+3)\sqrt{a} = 0 \Rightarrow (a+3)(3-\sqrt{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

$$f(a-5) = f(9-5) = f(4) = 16 - 8 - 6 + 9 = 11$$

سوال ۱۱: گزینه ۴

۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-1}(-1)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{4}{5}$
(۲) $\frac{3}{5}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{1}{3}$

مجانِب عمودی درون لگاریتم را صفر می‌کند:

$$\frac{a}{3} + b = 0$$

$$\log_3(10a+b) = 3 \Rightarrow 10a+b = 27 \Rightarrow a=3, b=-1$$

$$f(x) = \log_3(3x-1) \Rightarrow \log_3(3x-1) = -1 \Rightarrow x = f^{-1}(-1) = \frac{1}{3}$$

سوال ۱۲: گزینه ۲

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{1+\tan^2 \alpha}$ کدام است؟

(۴) $\tan \alpha$

(۳) $\cot \alpha$

(۲) $-\tan \alpha$

(۱) $-\cot \alpha$

$$\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} \times \frac{1+\sin \alpha}{1+\sin \alpha} = \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{1-\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1+\sin \alpha}{-\cos \alpha}$$

$$\sqrt{1+\tan^2 \alpha} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1+\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{-\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin \alpha}{-\cos \alpha} - \frac{1}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

سوال ۱۳: گزینه ۳

۱۳- اگر $\tan(\alpha + 25^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $\cot(35^\circ - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\cot(35^\circ - \alpha) = \cot(60^\circ - 25^\circ - \alpha) = \cot(60^\circ - (\alpha + 25^\circ)) = \frac{1 + \tan 60^\circ \tan(\alpha + 25^\circ)}{\tan 60^\circ - \tan(\alpha + 25^\circ)} =$$

$$\frac{1 + (\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۱۴: گزینه ۲

۱۴- اگر $A = \sqrt{2} \cos(135^\circ) \cos(297^\circ) + \sqrt{3} \cos(63^\circ) \sin(120^\circ)$ باشد، حاصل $2A$ کدام است؟

- (۱) $\cos(27^\circ)$ (۲) $\sin(27^\circ)$ (۳) $\Delta \sin(27^\circ)$ (۴) $\Delta \cos(27^\circ)$

$$2A = 2 \left(\frac{\sin 27^\circ}{2} \right) = \sin 27^\circ$$

$$A = \sqrt{2} \cos(135^\circ) \cos(297^\circ) + \sqrt{3} \cos(63^\circ) \sin(120^\circ) =$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \cos(27^\circ + 27^\circ) + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos(9^\circ - 27^\circ) = -\sin 27^\circ + \frac{3}{2} \sin 27^\circ = \frac{\sin 27^\circ}{2}$$

سوال ۱۵: گزینه ۳

۱۵- معادله مثلثاتی $\tan(3x - \frac{\pi}{3}) + \tan 2(x - \frac{\pi}{3}) = \cot(\frac{3\pi}{2})$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(2x - \pi\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(2x) = 0$$

$$\tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} - 3x + k\pi \Rightarrow 5x = \frac{(3k+1)\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(3k+1)\pi}{15}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

سوال ۱۶: گزینه ۴

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{2\sqrt{x - \frac{3}{a}} + 3\sqrt{x} - \sqrt{\frac{27}{a}}}{\sqrt{x^2 - \frac{9}{a^2}}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

(۴) $\sqrt{\frac{2a}{3}}$

(۳) $\sqrt{\frac{2}{3a}}$

(۲) $\sqrt{\frac{3}{2a}}$

(۱) $\sqrt{\frac{3a}{2}}$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{2\sqrt{x - \frac{3}{a}} + 3\sqrt{x} - 3\sqrt{\frac{3}{a}}}{\sqrt{(x - \frac{3}{a})(x + \frac{3}{a})}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{2\sqrt{x - \frac{3}{a}} + 3\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{a}}\right)}{\sqrt{x - \frac{3}{a}} \times \sqrt{x + \frac{3}{a}}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x + \frac{3}{a}}} + \frac{3\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{a}}\right)}{\sqrt{x - \frac{3}{a}} \times \sqrt{x + \frac{3}{a}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x + \frac{3}{a}}} + 0 \right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{2}{\sqrt{x + \frac{3}{a}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{6}{a}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{\frac{6}{a}}} = \sqrt{\frac{4a}{6}} = \boxed{\sqrt{\frac{2a}{3}}} \text{ پاسخ نهایی}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{3\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{a}}\right)}{\left(\sqrt{x - \frac{3}{a}}\right)\left(\sqrt{x + \frac{3}{a}}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{a}}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{a}}\right)} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{3\left(x - \frac{3}{a}\right)}{\left(\sqrt{x - \frac{3}{a}}\right)\left(\sqrt{x + \frac{3}{a}}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{a}}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{3\left(\sqrt{x - \frac{3}{a}}\right)}{\left(\sqrt{x + \frac{3}{a}}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{a}}\right)} = 0$$

سوال ۱۷: گزینه ۱

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{[-x] + a}{\left| \frac{\sqrt{3}}{3}x + a \right| + a} = -\infty$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

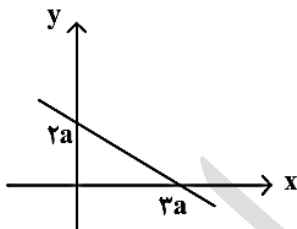
- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{[-x] + a}{\left| \frac{\sqrt{3}}{3}x + a \right| + a} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{a - 1}{\left| \frac{\sqrt{3}}{3}x + a \right| + a} = \frac{a - 1}{\left| \frac{1}{3} + a \right| + a} = \frac{a - 1}{0^+} = -\infty$$

$$\left| a + \frac{1}{3} \right| + a = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{6} \Rightarrow \left[\frac{-1}{6} \right] = -1$$

سوال ۱۸: گزینه ۲

۱۸- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f''(x)}{x|f^{-1}(x)|}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{4}{9}$
(۲) $-\frac{8}{27}$
(۳) $-\frac{8}{9}$
(۴) $-\frac{4}{27}$

$$f(x) = \frac{-2}{3}x + 2a, \quad f^{-1}(x) = \frac{-3}{2}x + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f''(x)}{x|f^{-1}(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}x + 2a\right)''}{x \left| \frac{-3}{2}x + 2a \right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}x + 2a\right)''}{x \left(\frac{-3}{2}x + 2a\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{9}x^2 + \dots}{\frac{-3}{2}x^2 + \dots} = \frac{-8}{27}$$

سوال ۱۹: گزینه ۴

۱۹- اگر تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + mx - m - 1|}{m|x^2 - 1| + |x - 1|} & x \neq 1 \\ \frac{m}{m+2} & x = 1 \end{cases}$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{7}{8}$

$x = 1$ ریشه‌ی صورت و مخرج است. صورت به فرم اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌شود:

$$f(x) = \frac{|x^2 + mx - (m+1)|}{|x-1|(m|x+1|+1)} = \frac{|x-1||x+(m+1)|}{|x-1|(m|x+1|+1)} = \frac{|x+(m+1)|}{m|x+1|+1}$$

عامل صفرشونده‌ی صورت و مخرج که از بین رفت، حد چپ و راست برابر می‌شود:

$$f(1^+) = f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x+(m+1)|}{m|x+1|+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x+(m+1)|}{m(x+1)+1} = \frac{|m+2|}{2m+1} = f(1) = \frac{m}{m+2}$$

$$\frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \boxed{m = -1}, \boxed{m = 4}$$

$m = 4$ قابل قبول است چون تابع پیوسته می‌شود $f(1^+) = f(1^-) = f(1) = \frac{7}{8}$. به ازای $m = -1$ حد و مقدار تابع در $x = 1$ برابر نمی‌شوند.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{|x+5|}{4|x+1|+1} = \frac{|\frac{1}{4}+5|}{4|\frac{1}{4}+1|+1} = \frac{7}{8}$$

سوال ۲۰: گزینه ۲

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(2x - \pi) \tan(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(2x - \pi)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = \frac{-1}{2}$$

سوال ۲۱: گزینه ۱

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \\ b + c\sqrt{x^2} & x < 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار

$\frac{ab}{c^2}$ کدام است؟ ($c \neq 0$)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \\ b + cx & 0 \leq x < 1 \\ b - cx & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2a}{3\sqrt[3]{x}} & x \geq 1 \\ c & 0 \leq x < 1 \\ -c & x < 0 \end{cases}$$

$$f(1^+) = f(1^-) \Rightarrow \boxed{a = b + c}$$

نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x = 0$ است. پس تابع در $x = 1$ مشتق دارد.

$$f'(1^+) = f'(1^-) \Rightarrow \frac{2a}{3} = c \Rightarrow \boxed{\frac{a}{c} = \frac{3}{2}}$$

$$\frac{ab}{c^2} = \frac{a(a-c)}{c^2} = \frac{a^2 - ac}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{a}{c} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

سوال ۲۲: گزینه ۳

۲۲- تابع $y = |f(x)|$ که در آن $f(x) = x(|x| + 3)$ است، چند نقطه بحرانی دارد؟

صفر (۴)

۱ (۳)

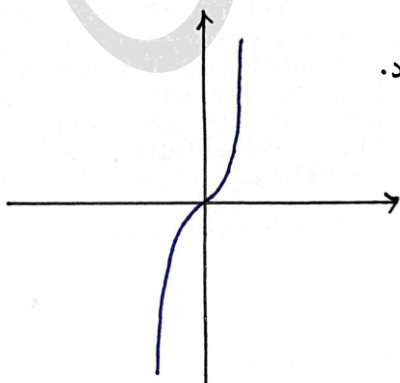
۳ (۲)

۵ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) = 0$$

تابع $f(x)$ در تمامی نقاط مشتق پذیر و پیوسته است.

تابع $|f(x)|$ نیز همه جا مشتق پذیر و پیوسته است و در $x = 0$ مینیمم دارد.



سوال ۲۳: گزینه ۴

۲۳- واریانس پنج داده آماری برابر $\frac{16}{3}$ است. با اضافه کردن سه داده a ، b و b به داده‌های اولیه، میانگین داده‌ها تغییر

نکرده ولی واریانس آنها ۱ واحد افزایش پیدا می‌کند. اختلاف a و b کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i + 2a + b}{8} \Rightarrow \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{5(2a + b)}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2a + b}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{16}{3} \Rightarrow \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{80}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + 2(a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2}{8} = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}$$

$$\frac{\frac{80}{3} + 2(a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2}{8} = \frac{19}{3} \Rightarrow \frac{10}{3} + \frac{2\left(a - \frac{2a+b}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{2a+b}{3}\right)^2}{8} =$$

$$\frac{10}{3} + \frac{2\left(\frac{1}{3}(a-b)\right)^2 + \left(\frac{2}{3}(b-a)\right)^2}{8} = \frac{10}{3} + \frac{\frac{2}{9}(a-b)^2 + \frac{4}{9}(b-a)^2}{8} =$$

$$\frac{10}{3} + \frac{\frac{2}{9}(a-b)^2}{8} = \frac{19}{3} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{12} = 3 \Rightarrow |a-b| = 6$$

سوال ۲۴: گزینه ۲

۲۴- تیم ملی وزنه‌برداری، ۵ وزنه‌بردار در پنج وزن مختلف به مسابقات المپیک اعزام می‌کند. از بین آنها دو ورزشکار به

تصادف پشت‌سرهم انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که نفر دوم از نفر اول سنگین‌وزن‌تر است. احتمال اینکه نفر

اول سبک‌وزن‌ترین عضو تیم باشد، کدام است؟

۰٫۲ (۴)

۰٫۳ (۳)

۰٫۴ (۲)

۰٫۵ (۱)

پنج ورزشکار را معادل ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در نظر می‌گیریم. تعداد رقم دهگان بیشتر از یکان باشد:

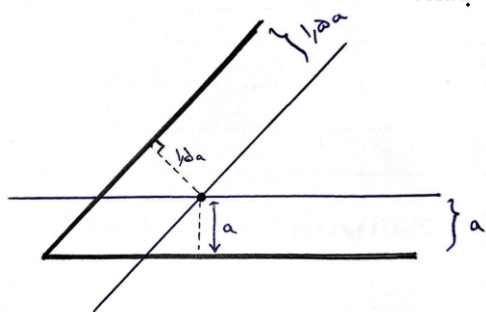
$$1 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 10$$

تعداد ارقامی که بارقم دهگان ۱ شروع می‌شود: $1 \times 4 = 4$

$$p = \frac{4}{10}$$

سوال ۲۵: گزینه‌ی ۴

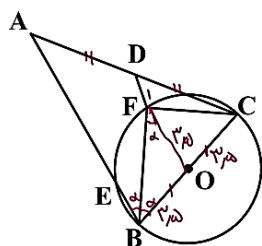
۲۵- با استفاده از کدام روش رسم زیر، می‌توانیم نقطه‌ای در فاصله بین دو ضلع یک زاویه بیابیم به‌طوری که فاصله آن نقطه از یک ضلع زاویه ۱٫۵ برابر فاصله آن نقطه از ضلع دیگر زاویه باشد؟



- (۱) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن
- (۲) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن
- (۳) رسم خط موازی با نیمساز یک زاویه، از نقطه‌ای روی آن
- (۴) رسم خط موازی با یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

سوال ۲۶: گزینه‌ی ۳

۲۶- در شکل زیر، قطر دایره برابر ۷ و $DF = 1$ است. اگر $\widehat{EF} = \widehat{FC}$ و نقطه D وسط پاره خط AC باشد، اندازه AB کدام است؟



- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰

اگر از O خطی به F وصل می‌کنیم. چون دو کمان $FC = EF$ ، پس زاویه‌ی نظیر هر دو با هم برابر است:

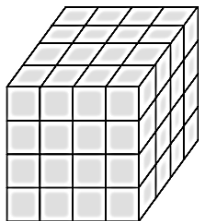
$$\widehat{EBF} = \widehat{FBC} = \alpha$$

چون $OF = OB = R$ ، پس مثلث BOF متساوی‌الساقین است، پس $\angle BFO = \alpha$. پس $OF \parallel AB$. پس خط OD دو ضلع AC و BC را نصف کرده و موازی ضلع سوم یعنی AB است و دو مثلث ABC و DOC متشابه هستند با نسبت تشابه ۲. پس:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{4/5}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 9$$

سوال ۲۷: گزینه ۳

۲۷- تمام وجه‌های مکعب شکل زیر رنگ آمیزی شده است. تعداد مکعبات کوچک رنگ شده چند برابر تعداد مکعبات

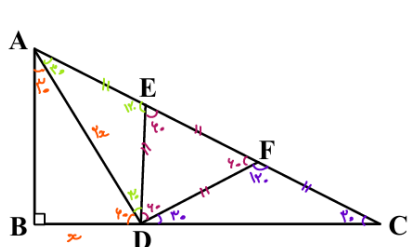


کوچک رنگ نشده است؟

- تعداد کل مربع‌ها: $4 \times 4 \times 4 = 64$ (۱)
 تعداد مربع‌های غیررنگی: $2 \times 2 \times 2 = 8$ (۲)
 تعداد مربع‌های رنگی: $64 - 8 = 56$ (۳)
 $56 \div 8 = 7$ (۴)

سوال ۲۸: گزینه ۱

۲۸- در مثلث شکل زیر، اگر مثلث DEF متساوی‌الاضلاع و مثلث‌های ADE و CFD متساوی‌الساقین باشند، آنگاه



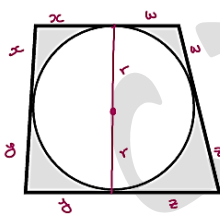
کدام است $\frac{AD}{BD}$ ؟

- (۱) ۲
 (۲) ۱.۵
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\sqrt{3}$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{2x}{x} = 2$$

سوال ۲۹: گزینه ۴

۲۹- در شکل زیر، محیط چهارضلعی محیطی $\sqrt{80\pi}$ است. اگر مساحت قسمت سایه خورده ۵ باشد، اندازه محیط دایره



محاطی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}\pi$
 (۲) $2\sqrt{5}\pi$
 (۳) $\sqrt{5\pi}$
 (۴) $2\sqrt{5\pi}$

$$P = 2(x + y + z + w) = \sqrt{80\pi} = 4\sqrt{5\pi} \Rightarrow (x + y + z + w) = 2\sqrt{5\pi}$$

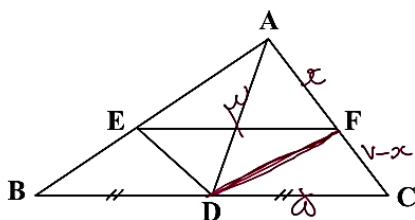
$$S_{\text{هاشوری}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{دایره}} = \frac{(x + y + z + w) \times 2r}{2} - \pi r^2 = 2\sqrt{5\pi}r - \pi r^2 = 5$$

$$\pi r^2 - 2\sqrt{5\pi}r + 5 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{5}{\pi}}} \Rightarrow P_{\text{دایره}} = 2\sqrt{5\pi}$$

سوال ۳۰: گزینه‌ی ۴

۳۰- در مثلث ABC ، $EF \parallel BC$ و $\widehat{ADE} = \widehat{BDE}$ است. اگر $AC = ۷$ ، $BC = ۱۰$ و $AD = ۳$ باشد، طول نیمساز

زاویه $\widehat{ADC}$ کدام است؟



(۱) $\frac{۲۱}{۸}$

(۲) $\frac{۱۹}{۸}$

(۳) $\frac{۱۷}{۸}$

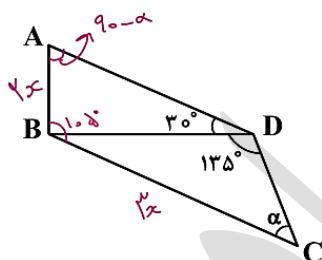
(۴) $\frac{۱۵}{۸}$

$$\frac{۳}{x} = \frac{۵}{۷-x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲۱}{۸}} \Rightarrow DF^x = AD \cdot DC - AF \cdot FC = ۳ \times ۵ - \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۳۵}{۸} = \frac{۲۲۵}{۶۴}$$

$$\Rightarrow DF = \frac{۱۵}{۸}$$

سوال ۳۱: گزینه‌ی ۱

۳۱- در شکل زیر، اگر $\frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۳}$ و زاویه $\widehat{ABC} = ۱۰۵^\circ$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



(۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

(۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

(۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

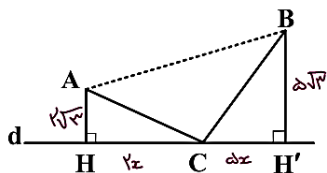
(۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

مجموع زوایای داخلی چهارضلعی ۳۶۰° درجه است، پس $\widehat{A} = ۹۰ - \alpha$. از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{۲x}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{BD}{\sin(۹۰^\circ - \alpha)} \Rightarrow \frac{۲x}{\frac{1}{۲}} = \frac{BD}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{BD}{۴x} \\ \frac{۳x}{\sin ۱۳۵^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{۳x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{۲}BD}{۶x} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{۲}BD}{۶x}}{\frac{BD}{۴x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

سوال ۳۲: گزینه ۳

۳۲- در شکل زیر، فاصله نقاط A و B از خط d، به ترتیب، $2\sqrt{3}$ و $5\sqrt{3}$ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت مثلث ACH برابر $6\sqrt{3}$ باشد، اندازه HH' کدام است؟



۱۵ (۱)

۱۸ (۲)

۲۱ (۳)

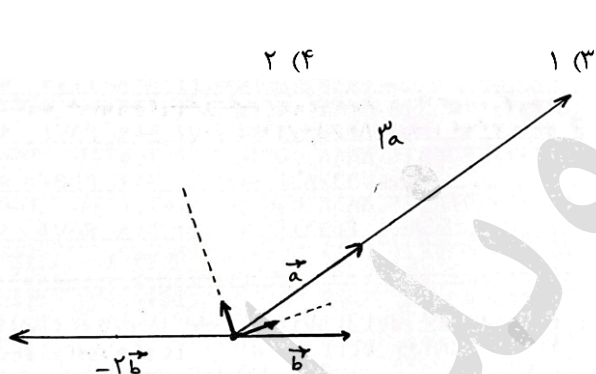
۲۴ (۴)

دو مثلث AHC و BCH' متشابه هستند، با نسبت تشابه ۲ به ۵.

$$S_{ACH} = \frac{(2x)(2\sqrt{3})}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow HH' = 7x = 21$$

سوال ۳۳: گزینه ۲

۳۳- اگر $\vec{e}_1$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_2$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $-\vec{a}$ و $-\vec{b}$ باشد، طول یکی از قطرهای متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ تولید می‌شود، کدام است؟



اگر اندازه‌ی طول دو بردار تغییر کند، تغییری در راستای نیمساز به وجود نمی‌آید. نیمسازهای دو زاویه‌ی مکمل همواره بر هم عمودند، پس دو بردار $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ بر هم عمودند و طول آن‌ها برابر ۱ است و یک مربع تشکیل می‌دهند که قطر آن برابر $\sqrt{2}$ است.

سوال ۳۴: گزینه ۴

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|(AB)^T|$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۶ (۳)

 $\frac{25}{9}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۱)

$$|(AB)^T| = |AB|^T = |A|^T |B|^T = (-6)^T \left(-\frac{5}{6}\right)^T = 25$$

سوال ۳۵: گزینه ۱

۳۵- اگر ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = B \times C$ باشند، درایه واقع در سطر سوم ستون اول

ماتریس A^5 کدام است؟

(۴) -۶۴

(۳) -۸

(۲) -۳۲

(۱) -۱۶

$$A = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A \xRightarrow{\text{توان ۲}} A^4 = 4A^2 = 4(2A) = 8A \xRightarrow{\times A} A^5 = 8A^2 = 8(2A) = 16A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = 8A^2 = 8(2A) = 16A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

سوال ۳۶: گزینه ۲

۳۶- نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی $y^2 + 2x + 3y + 2 = 0$ قرار دارد. اگر فاصله نقطه A از کانون سهمی برابر $2/5$ باشد،

اختلاف مقادیر ممکن برای β کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۴

(۱) ۵

$$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = -2x - 2 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -2x + \frac{1}{4} = -2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{16}\right)$$

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -4 \times \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{16}\right) \Rightarrow \left[S\left(\frac{1}{16}, -\frac{3}{2}\right), a = \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \left[F\left(\frac{-7}{16}, -\frac{3}{2}\right), d: x = \frac{9}{16}\right]$$

اگر نقطه روی سهمی باشد، فاصله‌اش از کانون برابر فاصله‌اش تا خط هادی است. دهانه‌ی سهمی رو به چپ است، پس خط هادی در سمت راست نقطه‌ی A قرار دارد:

$$\frac{9}{16} - \alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow \left[\alpha = -\frac{31}{16}\right] \Rightarrow \left(\beta + \frac{3}{2}\right)^2 = -4 \times \frac{1}{4} \left(-\frac{31}{16} - \frac{1}{16}\right) = 4 \Rightarrow \beta + \frac{3}{2} = \pm 2$$

$$\beta = -3/5 \text{ و } 1/5 \Rightarrow \text{اختلاف برابر} = 4$$

سوال ۳۷: گزینه‌ی ۲

۳۷- اگر n عدد صحیح و زوج باشد و $m|n+1$ و $k|m+2$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $m^2 + k^2 + 3$ بر ۸ کدام است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

طبق فعالیت کتاب درسی، اگر n زوج باشد و $m|n+1$ ، آنگاه m فرد است. اگر m فرد باشد و $k|m+2$ ، آنگاه k نیز فرد است. مربع یک عدد فرد به فرم $8q+1$ است، پس:

$$m^2 + k^2 + 3 \equiv (8q + 1) + (8q' + 1) + 3 \equiv 1 + 1 + 3 \equiv 5 \pmod{8}$$

سوال ۳۸: گزینه‌ی ۴

۳۸- ۸ دانشجو را به چند طریق می‌توان در چهار اتاق ۲ نفره یکسان اسکان داد؟

۱۰۵ (۴)

۲۱۰ (۳)

۳۱۵ (۲)

۶۳۰ (۱)

$$\frac{\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{4!} = \frac{(28)(15)(6)}{4!} = 105$$

سوال ۳۹: گزینه‌ی ۳

۳۹- در جعبه‌ای ۵۲ کارت به تعداد مساوی از چهار رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی وجود دارد. حداقل چند کارت از جعبه بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۶ کارت قرمز یا حداقل ۴ کارت سبز یا حداقل ۳ کارت زرد یا حداقل ۲ کارت آبی بیرون آورده‌ایم؟

۱۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۵ (۲)

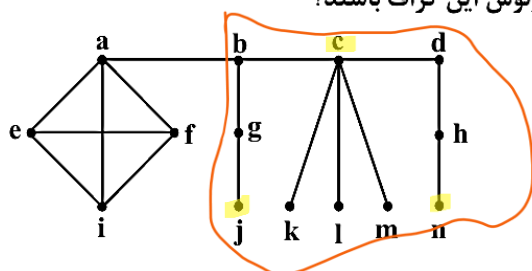
۱۶ (۱)

از هر رنگ ۱۳ کارت داریم.

$$(5 + 3 + 2 + 1) + 1 = 12$$

سوال ۴۰: گزینه‌ی ۱

۴۰- در گراف شکل زیر، چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم برای این گراف وجود دارد به‌طوری‌که همسایگی‌های بسته‌ی عضوهای مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم، افزای برای مجموعه‌ی رئوس این گراف باشند؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۱

ترجمه‌ی متن سوال این است که فرض کنید یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم نوشتید. بعد مجموعه‌ی همسایگی بسته‌ی هر راس این مجموعه را هم نوشتید. آیا این مجموعه‌ها مجموعه‌ی V را افزای می‌کند؟ یعنی هیچ عضوی تکراری درون این مجموعه‌ها نباشد، هیچ مجموعه‌ای تهی نباشد و اجتماع این مجموعه‌ها V را بدهد.

با حداقل ۴ راس این مجموعه‌ی احاطه می‌شود. راس‌های c, j, n قسمت مشخص شده در شکل را احاطه می‌کنند، به‌طوری‌که هیچ راسی دو بار احاطه نمی‌شود.

برای احاطه شدن بخش سمت چپ گراف با هر کدام از راس‌های e, f, i احاطه می‌شود. راس a را در نظر نمی‌گیریم چون آنگاه راس b دوبار (با a و c) احاطه می‌شود که خلاف خواسته‌ی سوال است. این مجموعه‌ها:

$$\{c, j, n, e\}, \{c, j, n, f\}, \{c, j, n, i\}$$

هستند.

«در نظر بگیرید پاسخ‌ها برای شفافیت، در طولانی‌ترین حالت نوشته شده است»

© NastaranVandadi