

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

✓ ۱, a, a², ... (۴)

a², a, 1, ... (۳)

a, 1, $\frac{1}{a}$, ... (۲) ✓

a, a², a³, ... (۱)

$a \neq 0$

$a \neq 0$

۲- مقدار عبارت $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

$0,6\sqrt{5}$ (۴)

$0,3\sqrt{5}$ (۳)

$0,2\sqrt{5}$ (۲)

$0,1\sqrt{5}$ (۱)

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$x^2 = -x + 1$

$2x = -\cancel{x} + \cancel{1} + \cancel{x} + 1 = 2 \rightarrow x = 1$

x^2

$x^3 = -x^2 + x = x - 1 + x = 2x - 1$

$2x = \frac{18x - 24 - 36x + 36 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$

$= 18x + 15$

$\frac{(4x+3)}{2x} = \frac{4x+3}{2}$

$= \frac{3}{2} (2x+1)$

$= \frac{3}{2} (\sqrt{5})$

۵- نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه

$S(b, b-2)$ رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

$\frac{13}{8}$ (۴)

✓ $\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{13}{4}$ (۱)

$7-2a \geq 1$

$a \leq 3$

$a-2 \geq 1$

$a \geq 3$

$a = 3$

$B(1, 1)$ $A(9, 1)$

$x_8 = 5$

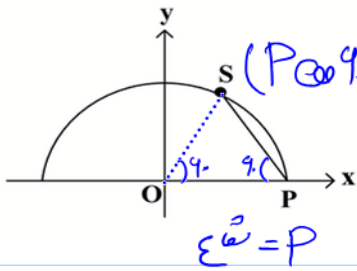
$S(5, 3)$

$y = -\frac{1}{8}(x-5)^2 + 3$

$(1, 1) \rightarrow 1 = 14a + 3 \rightarrow a = -\frac{1}{8}$

$x = 0 \rightarrow y = -\frac{25}{8} + 3 = -\frac{1}{8}$

۸- نقطه $S(a, 3)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟



$$(P(0, r), S(4, 3)) = \left(\frac{r}{2}, r\sqrt{3}\right)$$

$$r\sqrt{3} = 3$$

$$r = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{r}{2} = a \Rightarrow \sqrt{3} = a$$

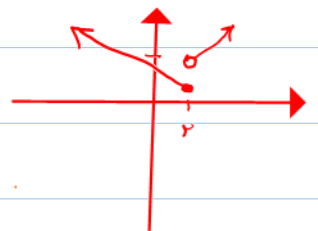
- (1) 1
(2) $\frac{1}{2}$
(3) $\sqrt{3}$ ✓
(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۹- مقدار $f(g(-4))$ باشد، مقدار $g(x) = \begin{cases} -x+4 & f(x) \geq 0 \\ x-4 & f(x) < 0 \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases}$ اگر -9

$$g(-4) = 8$$

$$f(8) = 9$$

$$g(x) = \begin{cases} -x+4 & x \in \mathbb{R} \\ x-4 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10$ در یک همسایگی از a ، وارون پذیر است. اگر $f(a) = a$ باشد، مقدار $f(a-9)$ کدام است؟

$$f(a) = f(a) \Rightarrow 9a - a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 10 = a$$

$$8a - a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 10 = 0$$

$$a(\sqrt{a} - \sqrt{a}) + 2(-\sqrt{a} + \sqrt{a}) = 0$$

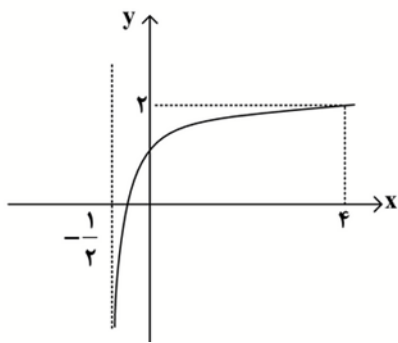
$$(a - \sqrt{a})(a + 2) = 0$$

$$a = 4$$

$$\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \quad a = -2 \quad \times$$

$$f(14) = 94 - 44 - 2 + 10 = 38$$

۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{4}{9}$ ✓
(۲) $-\frac{2}{9}$
(۳) $-\frac{5}{18}$
(۴) $-\frac{7}{18}$

$$-\frac{9}{2} + b = 0$$

$$a = 2b$$

$$2 = \log_3 f a + b$$

$$f a + b = 9$$

$$9b = 9 \rightarrow b = 1$$

$$a = 2$$

$$f^{-1}(-2) \rightarrow -2 = \log_3(2x+1)$$

$$2x+1 = \frac{1}{9}$$

$$2x = -\frac{8}{9} \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$ کدام است؟

است؟

(۱) $\cos \alpha$

(۲) $\sin \alpha$

(۳) $-\cos \alpha$

(۴) $-\sin \alpha$

$$(1 + \cos \alpha) \left(\frac{1}{-\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = (\quad) \left(\frac{-1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha$$

۱۳- اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (2)$$

$$5\sqrt{3} \quad (1) \checkmark$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \sqrt{3}x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \sqrt{3}x} \Rightarrow 4\sqrt{3} - \sqrt{3}x = 4x + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

۱۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{3}\cos(21^\circ)\sin(243^\circ) - \sqrt{2}\sin(135^\circ)\cos(153^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟

$$0,5 \quad (4)$$

$$1,5 \quad (3)$$

$$2,5 \quad (2)$$

$$3,5 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 27^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 27^\circ \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 27^\circ + 1 \cos 27^\circ \\ & \frac{5}{2} \cos 27^\circ = 2,5 \cos 27^\circ \end{aligned}$$

۱۵- معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

$$3 \quad (4)$$

$$4 \quad (3) \checkmark$$

$$5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

$$\tan 2x = -\tan 3x = \tan(-3x)$$

$$2x = k\pi - 3x \rightarrow 5x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 2\sqrt{x-\sqrt{27}a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ (ا $a > 0$)

(۴) $+\infty$

(۳) $\sqrt{\frac{2}{3a}}$

(۲) $\sqrt{\frac{2}{a}}$

(۱) ۱

$$\lim \frac{\cancel{2\sqrt{x-3a}}}{\cancel{\sqrt{27}a}\sqrt{x+3a}} + \frac{\cancel{2\sqrt{x-3a}} - \cancel{2\sqrt{x-3a}}}{\sqrt{x^2-9a^2}} \times \frac{\cancel{2\sqrt{x-3a}} + \cancel{2\sqrt{x-3a}}}{\cancel{2\sqrt{x-3a}}} = \frac{9x-27a}{\cancel{2\sqrt{x-3a}}(\sqrt{x+3a})(-)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{4a}}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4a}} = \sqrt{\frac{4}{4a}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x^3}{x^2+ax+b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۲

(۱) -۱

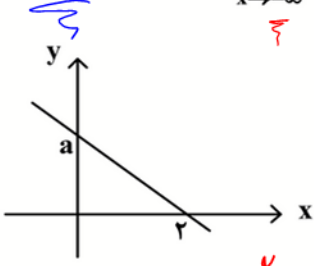
$$x^3 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{14}$$

$$a = -2\sqrt[3]{4}$$

$$b = \sqrt[3]{14}$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{14}}{-2\sqrt[3]{4}}\right] = \left[-\frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{32}}\right] = \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right] = -1$$

۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح



$$y = -\frac{a}{r}x + a$$

$$y = -\frac{r}{a}x + r$$

ا کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $1 + \sqrt{2}$ ✓
- (۳) $-1 + \sqrt{2}$
- (۴) $2\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{r}{a}x}{|-ax + r + rx - r|} = \frac{-\frac{r}{a}x}{|-a + r| |x|}$$

$$\frac{\frac{r}{a}}{|r-a|} = 2$$

$a > r \rightarrow \frac{r}{a} = -r + r \rightarrow r - r - r = 0$

$r - r - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{r + r\sqrt{2}}{r} = 1 + \sqrt{2}$ (۱+√۲)

$a < r \rightarrow \frac{r}{a} = r - r \rightarrow r - r + r = 0$

$a = 1$ ✗

۱۹- اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴) ✓

$\frac{3}{4}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 + a|x|} = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + a)} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2}$$

$$r - a = r + r$$

$$r - r - r = 0$$

$$r - r - r = 0$$

$a = -\frac{1}{r}$ $a = \frac{r}{r} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} f = \frac{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + 1} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟ $\tan x$

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

$x - \frac{\pi}{2} = t$
 $x = t + \frac{\pi}{2}$

$t \rightarrow 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \pi) \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2})}{t}$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin 2t}{t} \right) \times \tan \frac{\pi}{2} = -2 \times 1 = -2$

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b\sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$x = 0$ مشتق پذیر

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

$a + 1 = b$ می‌باید
 $x = 1$ مشتق پذیر $\rightarrow 1 = b \left(\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{1}{3} b$
 $\Rightarrow 1 = \frac{1}{3} b \Rightarrow b = \frac{3}{1}$
 $a = \frac{1}{3}$

۲۲- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

$x > 0$ $x^2 - 5x$
 $x < 0$ $x^2 + 5x$

