

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

- (۱) $a, a^2, a^3, \dots$ (۲) $a, 1, \frac{1}{a}, \dots$ (۳) $a^2, a, 1, \dots$ (۴) $1, a, a^2, \dots$
- $a \neq 0$

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

۲- مقدار عبارت $\frac{24x^2 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

$$\frac{24x^2 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{60x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$$

$$\frac{60x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(20x^2 + 6x + 1)}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$$

$$\frac{3(20x^2 + 6x + 1)}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3}{\Delta} \sqrt{\Delta} = \frac{3}{\Delta} \sqrt{\Delta}$$

$x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x + 1 = \sqrt{5}$

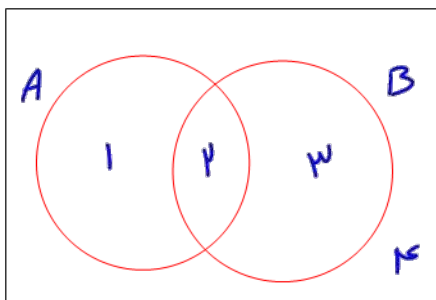
$x^2 = 1 - x$

$x^3 = x - x^2$

$x^3 = x - 1$

۳- ساده‌شده عبارت $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ کدام است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) B (۴) A



$$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A) = \{3, 2\} = B$$

۵- نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\frac{13}{8} \quad (4) \qquad \frac{1}{8} \quad (3) \qquad \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \frac{13}{4} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 7-2a \geq 1 \\ 2a+3 \geq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \geq 2 \\ a \geq 3 \end{array} \Rightarrow a \geq 3$$

$$A(9, 1), B(1, 1)$$

$$x_s = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$S(5, 3)$$

$$y = a(x-5) + 3 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=1}} 1 = 14a + 3$$

$$-2 = 14a$$

$$a = -\frac{1}{7}$$

$$y = -\frac{1}{7}(x-5) + 3$$

$$x=0 \rightarrow y = -\frac{5}{7} + 3 = \frac{16}{7}$$

فاصله $(0, \frac{16}{7})$ از مبدأ $= \frac{16}{7}$

۶- اگر عکس مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $-4ax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$ برابر $\log 4$ و a واسطه حسابی b و c باشد،

مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4)$$

$$\sqrt[4]{10} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} = \log 4 \rightarrow \frac{\frac{1}{8}a}{b} = \log 4 \rightarrow b = \frac{\frac{1}{8}a}{\log 4}$$

$$2a = b + c \rightarrow c = 2a - b = 2a - \frac{\frac{1}{8}a}{\log 4} \rightarrow \frac{c}{a} = 2 - \frac{1}{8 \log 4} = 2 - \frac{1 \log 10}{8 \log 2} = 2 - \log_2 10$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{2 - \log_2 10} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{2}^{\log_2 10} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \times 100^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{100}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5}$$

۷- اگر معادله $|4x-2|=x^2-x+a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ تر معادله کدام است؟

۵/۵ (۴)

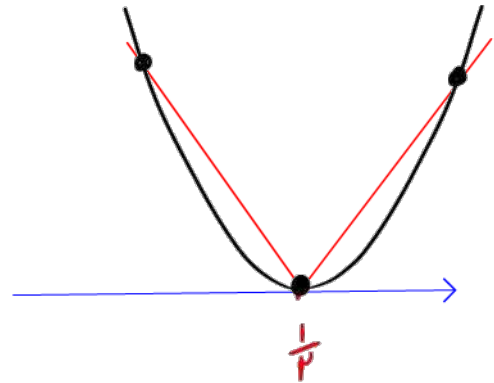
۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

$$x_s = \frac{1}{2}, y_s = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a$$

$$a = \frac{1}{4}$$

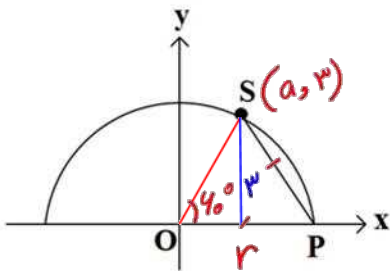


$$|4x-2| = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \rightarrow 4x-2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \rightarrow x^2 - 5x + \frac{9}{4} \xrightarrow{\Delta=14} x = \frac{5 \pm \sqrt{14}}{2} = \frac{5 + \sqrt{14}}{2}$$

$$x \leq \frac{1}{2} \rightarrow 2-4x = x^2 - x + \frac{1}{4} \rightarrow x^2 + 3x - \frac{7}{4} \xrightarrow{\Delta=14} x = \frac{-3 \pm \sqrt{14}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{14}}{2}$$

۸- نقطه $S(a, 3)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟



$$\sin 40^\circ = \frac{3}{r} \rightarrow r = \frac{3}{\sin 40^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$r = OS = \sqrt{a^2 + 9}$$

$$\sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{12} \rightarrow a^2 = 3 \rightarrow a = \sqrt{3}$$

۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x+4 & f(x) \geq 0 \\ x-4 & f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f \circ g(-4)$ کدام است؟

-۵ (۴)

-۱۵ (۳)

۹ (۲)

۱۹ (۱)

$$f(\overbrace{g(-4)}^1) = f(1) = 9$$

$$f(x) > 0$$

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10$ در یک همسایگی از a ، وارون پذیر است. اگر $f \circ f(a) = a$ باشد،

مقدار $f(a-9)$ کدام است؟

۳۴ (۴)

۳۲ (۳)

۲۷ (۲)

۲۵ (۱)

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

$$f(a) = a$$

$$4a - a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 10 = a$$

$$3a + 10 - (a+2)\sqrt{a} = 0$$

$$3(a+2) - \sqrt{a}(a+2) = 0$$

$$(3 - \sqrt{a})(a+2) = 0$$

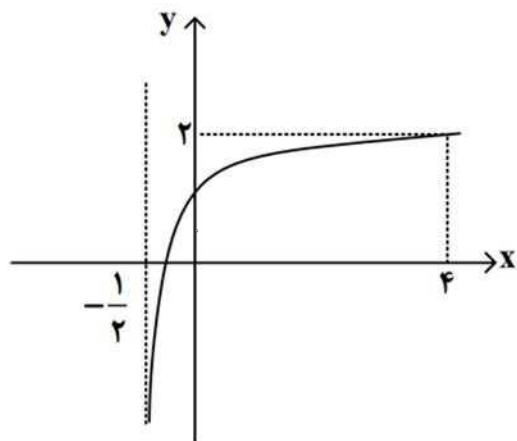
$$a = 9$$

$$a = -2$$

$$f(a-9) = f(14)$$

$$= 94 - 42 - 1 + 10 = 61$$

۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ را نشان می دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



$$f(4) = 2$$

$$\log_3(4a + \frac{1}{2}) = 2$$

$$4a + \frac{1}{2} = 9$$

$$4a = \frac{17}{2} \Rightarrow a = \frac{17}{8}$$

$-\frac{4}{9}$ (۱)

$-\frac{2}{9}$ (۲)

$-\frac{5}{18}$ (۳)

$-\frac{7}{18}$ (۴)

$$\log_3\left(\frac{17}{8}x + \frac{1}{2}\right) = -2$$

$$\frac{1}{9} = \frac{17}{8}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 17x + 4 \Rightarrow -3 = 17x \Rightarrow x = -\frac{3}{17} = -\frac{2}{9}$$

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$ کدام است؟

α در ناحیه ۴
 $\cos \alpha$ (۱) $\sin \alpha$ (۲) $-\cos \alpha$ (۳) $-\sin \alpha$ (۴)

$$(1 + \cos \alpha) \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} \right) = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha$$

۱۳- اگر $\tan(\alpha + 13^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$5\sqrt{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{15}$ (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$$\tan(x+y) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{5} + \tan y}{1 - \frac{\sqrt{3}}{5} \tan y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5}{3} \tan y = \frac{\sqrt{3}}{12} \rightarrow \tan y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot y = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

۱۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \cos(21^\circ) \sin(24^\circ) - \sqrt{2} \sin(135^\circ) \cos(151^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟

0.5 (۴) 1.5 (۳) 2.5 (۲) 3.5 (۱)

$$\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\cos 27) - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\cos 27) = \left(\frac{3}{2} + 1\right) \cos 27 = \frac{5}{2} \cos 27$$

۱۵- معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

www.konkur.in

$$\tan 2x = -\tan 3x = \tan(-3x)$$

$$2x = k\pi - 3x \rightarrow 5x = k\pi \rightarrow x = \frac{k}{5}\pi$$

$$(0, \pi) \rightarrow \frac{1}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi$$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$$

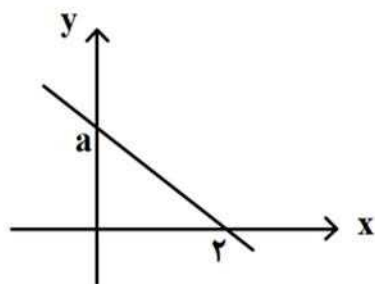
$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2(\sqrt{x-3a} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a} \cdot \sqrt{x+3a}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3a}}{\sqrt{x} + \sqrt{3a}} = 0$$

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a} \right]$ کدام است؟

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[3]{14}}{-\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{-2} = \frac{1}{-2} \rightarrow \boxed{-1}$$

۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح



$$\rightarrow f(x) = -\frac{a}{x} + a$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{a} + 2$$

a کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $1 + \sqrt{2}$

(۳) $-1 + \sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{a}}{|-ax + 2x|} = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{a}}{|x| |-a+2|} = 2$$

$$\rightarrow \frac{1}{a|-a+2|} = 2 \rightarrow a|-a+2| = \frac{1}{2}$$

$$a \geq 2 \rightarrow a(a-2) = \frac{1}{2} \rightarrow a^2 - 2a - \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\Delta=1} a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

۱۹- اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) ۱

(۱) ۲

$$f(0) = \frac{2a-1}{2a+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2a-1}{2a+2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2+x}{x^2+ax}}{\frac{x^2+x}{x^2+ax}} = \frac{2a-1}{2a+2} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2}$$

$$2a^2 - a = 2a + 2 \rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \xrightarrow{a.c} a = -\frac{1}{2}, a = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} f(x) = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{25} + 1} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{26}{25}} = \frac{3}{13}$$

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cot(\frac{\pi}{2} - x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴)

هویتال $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1} = \cos \frac{\pi}{2} = -1$

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۳ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} \\ b\sqrt[3]{x} \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{1}{3}b x^{-\frac{2}{3}} \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}b \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2}b = 1 \rightarrow b = \frac{2}{3}$

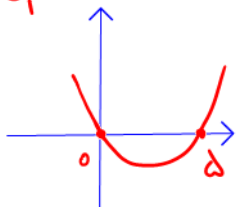
صداقت = حد $x=1$

$a+1 = b = \frac{2}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow a+b = 1$

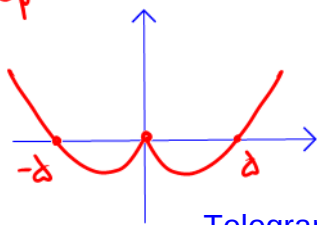
۲۲- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - \delta|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۳ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴)

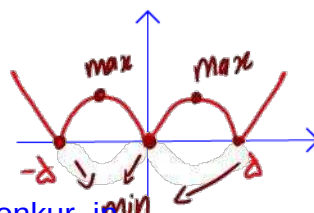
$y_1 = x^2 - \delta x$



$y_2 = |x^2 - \delta x|$



$|y_1|$



حل سوالات حسابان کنکور ریاضی و فیزیک

تیر ۱۴۰۴

حسین نواب

استان خوزستان شهرستان مسجد سلیمان



کانال ایتا و رویکا @math_navab

۰۹۱۶ ۷۸۷ ۷۱۱۶