

پاسخنامه سوالات ریاضی ۱ و حسابان ۲ کنکور ریاضی (تیر ۱۴۰۴)
محمد پاک نژاد مدرس کنکور شهرستان لاهیجان ۰۹۱۱۲۴۱۲۶۳۳

۱- کدام یک از دنباله های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می دهد؟

- (۱) $a, a^2, a^3, \dots$ (۲) $a, 1, \frac{1}{a}, \dots$ (۳) $a^2, a, 1, \dots$ (۴) $1, a, a^2, \dots$

در دنباله نباید صفر باشد، زیرا به ۴ حذف

صفر اول نباید صفر باشد، زیرا به ۱ و ۳ حذف

۲- مقدار عبارت $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

۰٫۶ $\sqrt{5}$ (۴) ✓

۰٫۳ $\sqrt{5}$ (۳)

۰٫۲ $\sqrt{5}$ (۲)

۰٫۱ $\sqrt{5}$ (۱)

$$x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)}{((2x+1)^2)^2} = \frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1} = \frac{3}{2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+1} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

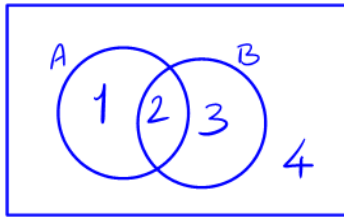
۳- ساده شده عبارت $(A' \cap B) \cup [((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)]$ کدام است؟

A (۴)

B (۳) ✓

$B - A$ (۲)

$A - B$ (۱)



$$(A' \cap B) \cup [((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)] = 3 \cup 2 = B$$

Handwritten annotations for the Venn diagram regions:
 - Region 1 (A only): 3, 4
 - Region 2 (Intersection): 2, 3
 - Region 3 (B only): 1, 4
 - Region 4 (Outside): 1, 2, 3

۵- نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه

$S(b, b-2)$ رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\frac{13}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{13}{4} \quad (1)$$

نقاط مؤلفه‌های طبیعی هستند پس

$$\begin{cases} 7-2a > 0 \rightarrow a < \frac{7}{2} \\ a-2 > 0 \rightarrow a > 2 \end{cases} \rightarrow 2 < a < \frac{7}{2} \xrightarrow{\in \mathbb{N}} a=3 \Rightarrow A(1,1), B(1,1) \xrightarrow{\text{هم‌عنق هستند}} x_s = \frac{1+1}{2} = 1 \rightarrow b=1 \rightarrow S(1, -1)$$

$$\text{شیب: } y = m(x-5) + 3 \xrightarrow{(1,1)} m(-4) + 3 = 1 \rightarrow 4m = -2 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-5) + 3$$

$$\text{مقطع: } x=0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}(5) + 3 = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{فاصله}} \frac{1}{2}$$

۶- اگر عکس مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $-fax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$ برابر $\log 4$ و a واسطه حسابی b و c باشد،

مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

$\sqrt{10}$ (۴)

$\sqrt[4]{10}$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt[4]{5}$ (۱) ✓

$$S = \frac{b}{2a} \rightarrow \frac{fa}{b} = \log 4 = r \log r \rightarrow \frac{ra}{b} = \log r \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{r} \log r \rightarrow \frac{a}{b} = \log \sqrt{r} \rightarrow \frac{b}{a} = \log \frac{1}{\sqrt{r}} = \log \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$ra = b + c \rightarrow r = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \rightarrow \frac{c}{a} = r - \log \frac{1}{\sqrt{r}} = \log 4 - \log \frac{1}{\sqrt{r}} = \log \frac{4}{\sqrt{r}}$$

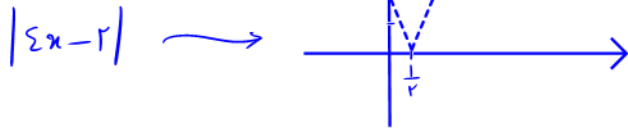
$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{r}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(r^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(r^{-\frac{1}{4}}\right)^{\log \frac{4}{\sqrt{r}}} = r^{-\frac{1}{4} \log \frac{4}{\sqrt{r}}} = r^{-\log \sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{r}}}} = \sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{r}}} = \sqrt[4]{5}$$

۷- اگر معادله $|4x-2|=x^2-x+a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ تر معادله کدام است؟

۵,۵ (۴)

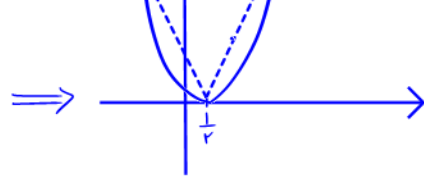
۵ (۳)

۴ (۱)



x^2-x+a $\rightarrow$ $x_s = -\frac{-1}{2(1)} = \frac{1}{2}$

سیمی



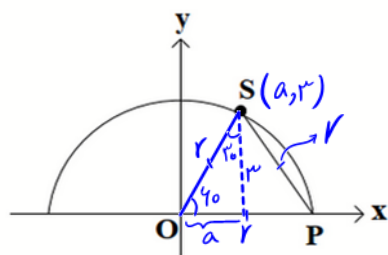
فقط در این حالت سه ریشه دارد.

$\rightarrow$ سیمی: $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4x-2 = x^2-x+\frac{1}{4} \rightarrow x^2-5x+\frac{9}{4}=0 \rightarrow x=\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{بزرگ ترین}} x=\frac{9}{4}$

۸- نقطه $S(a, r)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟



$$\tan \theta_0 = \frac{r}{a} \rightarrow \sqrt{r} = \frac{r}{a} \rightarrow a = \sqrt{r}$$

- نقطه $S(a, r)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱
 - (۲) $\frac{1}{2}$
 - (۳) $\sqrt{r}$ ✓
 - (۴) $\frac{\sqrt{r}}{2}$

$$g(x) = \begin{cases} -x+4 & f(x) \geq 0 \\ x-4 & f(x) < 0 \end{cases} \text{ و } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases} \text{ اگر } -9$$

-5 (4) -15 (3) 9 (2) ✓ 19 (1)

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1))$$

$$-3x+7 \xrightarrow{x \leq 2} \text{نمی باشد} \longrightarrow f(x) \geq 0 \longrightarrow f(g(-1)) = f(-(-1)+4) = f(1) = 1+1 = 2$$

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10$ در یک همسایگی از a ، وارون پذیر است. اگر $f \circ f(a) = a$ باشد،

مقدار $f(a-9)$ کدام است؟

۳۴ (۴) ✓

۳۲ (۳)

۲۷ (۲)

۲۵ (۱)

$$(f \circ f)(a) = a \longrightarrow \text{تابع معکوس} \longrightarrow f^{-1}(a) = f(a)$$

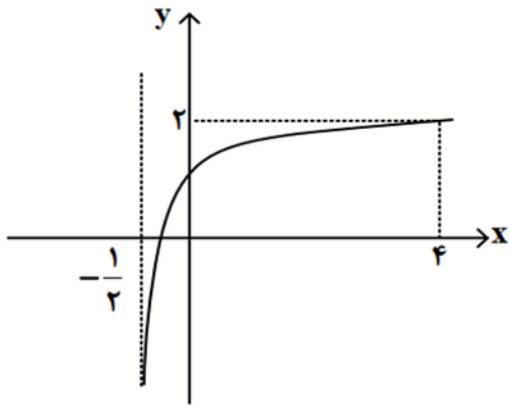
$$f(a) = 6a - a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 10 = a \longrightarrow 5a - (a+2)\sqrt{a} + 10 = 0 \longrightarrow 5(a+2) - (a+2)\sqrt{a} = 0$$

$$\longrightarrow (5-\sqrt{a})(a+2) = 0 \longrightarrow a = -2, 25$$

x ✓

$$f(a-9) = f(25-9) = f(16) = 96 - 48 - 4 + 10 = 34$$

۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_r(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



$$-\frac{1}{r}a + b = 0 \rightarrow b = \frac{1}{r}a \rightarrow a = rb$$

$$\stackrel{(4,2)}{\Rightarrow} \log_r(2a+b) = 2 \rightarrow \log_r 4b = 2$$

$$\rightarrow 4b = r^2 \rightarrow b = 1$$

$$\rightarrow a = rb = 2$$

$$-\frac{4}{9} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$-\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$-\frac{5}{18} \quad (3)$$

$$-\frac{7}{18} \quad (4)$$

$$f^{-1}(-2) = k \rightarrow f(k) = -2 \rightarrow \log_r 2k+1 = -2$$

$$\rightarrow 2k+1 = \frac{1}{r} \rightarrow k = -\frac{r-1}{r} \rightarrow f^{-1}(-2) = -\frac{r-1}{r}$$

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$ کدام

است؟

$-\sin \alpha$ (۴) ✓

$-\cos \alpha$ (۳)

$\sin \alpha$ (۲)

$\cos \alpha$ (۱)

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) &= (1 + \cos \alpha) \left(\underbrace{\left| \frac{1}{\sin \alpha} \right|}_{\text{منفی}} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(\frac{-1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ &= (1 + \cos \alpha) \left(\frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \right) = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha \end{aligned}$$

۱۳- اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (2)$$

$$5\sqrt{3} \quad (1) \checkmark$$

$$\begin{aligned} \tan(\underbrace{18^\circ - \alpha}_a + \underbrace{\alpha + 12^\circ}_b) &= \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}x \\ \Rightarrow \frac{5}{4}x &= \frac{\sqrt{3}}{12} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \tan(18^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \cot(18^\circ - \alpha) = \frac{15}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

۱۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \cos(210^\circ) \sin(243^\circ) - \sqrt{2} \sin(135^\circ) \cos(153^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟

۰٫۵ (۴)

۱٫۵ (۳)

۲٫۵ (۲) ✓

۳٫۵ (۱)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} \cos(180+30) \sin(270-27) - \sqrt{2} \sin(180-45) \cos(180-27) \\ &= \sqrt{3} (-\cos 30) (-\cos 27) - \sqrt{2} (\sin 45) (-\cos 27) = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-\cos 27) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (-\cos 27) \\ &= \frac{3}{2} \cos 27 + \cos 27 = \frac{5}{2} \cos 27 \end{aligned}$$

۱۵- معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

۳ (۴

۴ (۳ ✓

۵ (۲

۶ (۱

$$\tan 5\pi = \tan \pi = 0 \longrightarrow \tan 2x + \tan 3x = 0 \longrightarrow \tan 3x = -\tan 2x = \tan(-2x)$$

$$\longrightarrow 3x = k\pi - 2x \longrightarrow 5x = k\pi \longrightarrow x = \frac{k\pi}{5}$$

$$\xrightarrow{(0, \pi)} \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

(۴) $+\infty$

(۳) $\sqrt{\frac{2}{3a}}$ ✓

(۲) $\sqrt{\frac{2}{a}}$

(۱) $\wedge$

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - 3\sqrt{3a}}{\sqrt{x-3a} \times \sqrt{x+3a}} &= \frac{2\sqrt{x-3a} + 3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a} \times \sqrt{x+3a}} = \frac{1}{\sqrt{x+3a}} \left(\frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x-3a}} + \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4a}} \left(2 + 3 \left(\frac{\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x-3a}(\sqrt{x+3a})} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{4a}} \left(2 + 3 \left(\frac{0}{\sqrt{3a}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{4a}} = \sqrt{\frac{4}{4a}} = \sqrt{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a} \right]$ کدام است؟

۲ (۴)

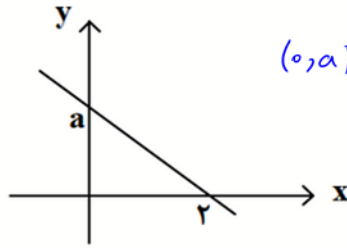
۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱) ✓

$$(x - \sqrt[3]{4})^2 = x^2 - \frac{2\sqrt[3]{4}}{a}x + \frac{\sqrt[3]{16}}{b} \rightarrow \left[\frac{b}{a} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{4}}{-2} \right] = \left[\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \right] = -1$$

۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح a کدام است؟



$$(0, a), (r, 0) \rightarrow m = -\frac{a}{r} \rightarrow y = -\frac{a}{r}(x - r) = -\frac{a}{r}x + a$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{r}{a}x + r$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{r}{a}x + r}{\left| r\left(-\frac{a}{r}x + a\right) - a\left(-\frac{r}{a}x + r\right) \right|} = \frac{-\frac{r}{a}x + r}{\left| -ax + ra + rx - ra \right|} = \frac{-\frac{r}{a}x + r}{\left| (r-a)x \right|}$$

$$= \frac{\frac{r}{a}}{a-r} = \frac{r}{a(a-r)} = 2 \rightarrow a(a-r) = 1 \rightarrow a^2 - ra - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4}}{2} \rightarrow a = 1 \pm \sqrt{r}$$

a کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۱)

$1 + \sqrt{2}$ (۲) ✓

$-1 + \sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۴)

۱۹- اگر تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۴) ✓

$\frac{2}{4}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 + ax} = \frac{x(x+1)}{x(x+a)} = \frac{x+1}{x+a} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - ax} = \frac{x(x-1)}{x(x-a)} = \frac{x-1}{x-a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a} \rightarrow 2a^2 - a = 2a + 2 \rightarrow 2a^2 - 2a - 2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۲ (۳) ✓

۲ (۲)

۳ (۱)

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \tan \frac{x}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{2}} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} = 2 \cos 2x \times 1 = 2 \cos \pi = -2$$

Hop

۲۱- تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases}$$
 در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= a + 1 & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= b \longrightarrow a + 1 = b \\ f'(x) &= \begin{cases} 1 \\ \frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{cases} & x < 1 & \longrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 1 \longrightarrow \frac{1}{3} = 1 \longrightarrow 1 = 3 \longrightarrow b = \frac{1}{3} \\ & & x > 1 & \longrightarrow \frac{1}{3} = 1 \longrightarrow 1 = 3 \longrightarrow b = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ a &= b - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

۲۲- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

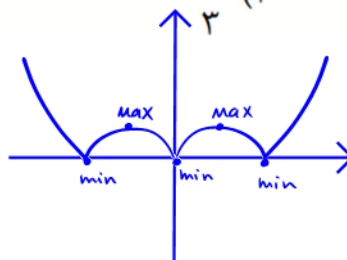
۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱) ✓

$$y = |f(x)| = |x^2 - 5|x|| = \begin{cases} |x^2 - 5x| & x \geq 0 \\ |x^2 + 5x| & x < 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{matrix} m=2 \\ n=3 \end{matrix} \longrightarrow \frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$