

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

$$(۴) \quad 1, a, a^2, \dots$$

$a=0$
 $\downarrow$
 $1, 0, 0, \dots \times$
 هندسی نیست

$$(۳) \quad a^2, a, 1, \dots$$

$a=0$
 $\downarrow$
 $0, 0, 1, \dots \times$
 هندسی نیست

$$(۲) \quad a, 1, \frac{1}{a}, \dots$$

$a \neq 0$
 $\downarrow$
 (چون درمخرج است)

$$(۱) \quad a, a^2, a^3, \dots$$

$a=0$
 $\downarrow$
 $0, 0, 0, \dots \times$
 هندسی نیست



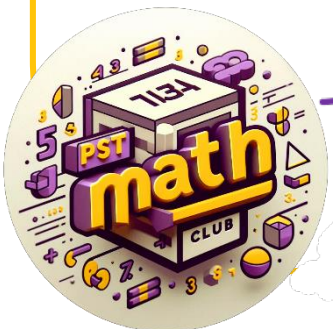
۲- مقدار عبارت $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\sqrt{5}$ (۱)
 ☐ ۲ $\sqrt{5}$ (۲)
 ☐ ۳ $\sqrt{5}$ (۳)
 ☒ ۴ $\sqrt{5}$ (۴)

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = 1 + 4 = 5 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (*)$$

$$\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)}{((2x+1)^2)^2} = \frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1}$$

$$(*) \rightarrow \frac{3}{2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+1} = \frac{3}{-1+\sqrt{5}+1} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{10} = \boxed{0.6\sqrt{5}}$$



۳- ساده شده عبارت $(A' \cap B) \cup [((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)]$ کدام است؟

(۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) B ✓ (۴) A

$$\textcircled{1} (B \cap A) - B' = (B \cap A) \cap B = B \cap A$$

$$\textcircled{2} (B \cap A) \cap (B \cup A) = B \cap A$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = (A' \cap B) \cup (B \cap A) = (B - A) \cup (B - A') = \boxed{B}$$



۵- نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\frac{13}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{13}{4} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_B \in \mathbb{N} \rightarrow 7-2a \geq 1 \rightarrow a \leq 3 \\ y_B \in \mathbb{N} \rightarrow a-2 \geq 1 \rightarrow a \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a=3 \Rightarrow A(9,1), B(1,1)$$

$$y_A = y_B \Rightarrow x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow b = \frac{9+1}{2} = 5 \Rightarrow S(5,3)$$

$$y = C(x-5)^2 + 3 \xrightarrow{(1,1)} 14C + 3 = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}(x-5)^2 + 3$$

$$\xrightarrow{x=0} y = -\frac{25}{8} + 3 = -\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \boxed{\frac{1}{8}}$$



۶- اگر عکس مجموعه ریشه‌های معادله درجه دوم $-4ax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$ برابر $\log 4$ و a واسطه حسابی b و c باشد،

مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4)$$

$$\sqrt[4]{10} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{5} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$S = \frac{-b}{-4a} = \frac{b}{4a} \Rightarrow \frac{4a}{b} = \log 4 \xrightarrow{\div 4} \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \log 4 = \log \sqrt{2} \Rightarrow a = b \log \sqrt{2}$$

$$4a = b + c \rightarrow c = 4a - b = 4b \log \sqrt{2} - b = b(4 \log \sqrt{2} - 1) = b(\log 4 - 1)$$

$$\Rightarrow c = -b \log 2$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{-b \log 2}{b \log \sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{4} \log 2} = 2^{\log \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2} = \boxed{\sqrt[4]{5}}$$



۷- اگر معادله $|4x-2| = x^2 - x + a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ تر معادله کدام است؟

(۴) ۵, ۵

(۳) ۵

(۲) ۴, ۵ ✓

(۱) ۴

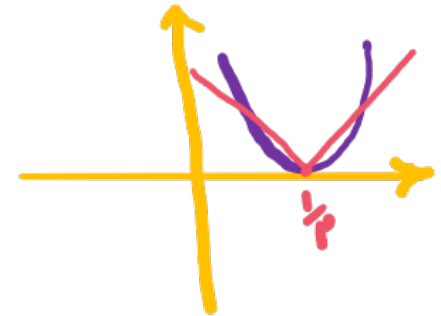
$$\text{در } x = \frac{1}{4} \rightarrow 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\text{در } x > \frac{1}{4} \rightarrow |4x-2| = x^2 - x + \frac{1}{4} \rightarrow 4x-2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

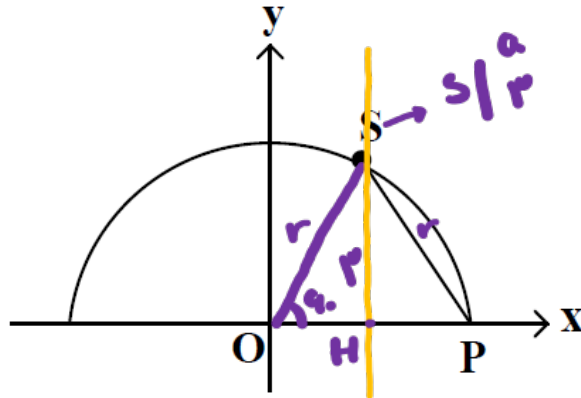
$$\rightarrow x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 20x + 9 = 0$$

$$\rightarrow (x - \frac{1}{4})(4x - 18) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \rightarrow x = \frac{18}{4} = \boxed{\frac{9}{2}} \checkmark$$



۸- نقطه $S(a, 3)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\sqrt{3}$ ✓
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 40^\circ = \frac{3}{OH} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{3}{OH} \Rightarrow OH = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \rightarrow \boxed{a = \sqrt{3}}$$



به قلم: پریسا صادقی تجریشی

$g(x) = \begin{cases} -x+4 & f(x) \geq 0 \\ x-4 & f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(g(-4))$ کدام است؟

$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases}$ اگر

(۱) ۱۹ (۲) ۹ ✓ (۳) -۱۵ (۴) -۵

$$f(\underline{g(-4)}) = f(-(-4)+4) = f(8) = 8+1 = \boxed{9}$$

$$f(-4) = 19 > 0$$



۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10$ در یک همسایگی از a ، وارون پذیر است. اگر $f \circ f(a) = a$ باشد، مقدار $f(a-9)$ کدام است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۲۷

(۳) ۳۲

(۴) ۳۴ ✓

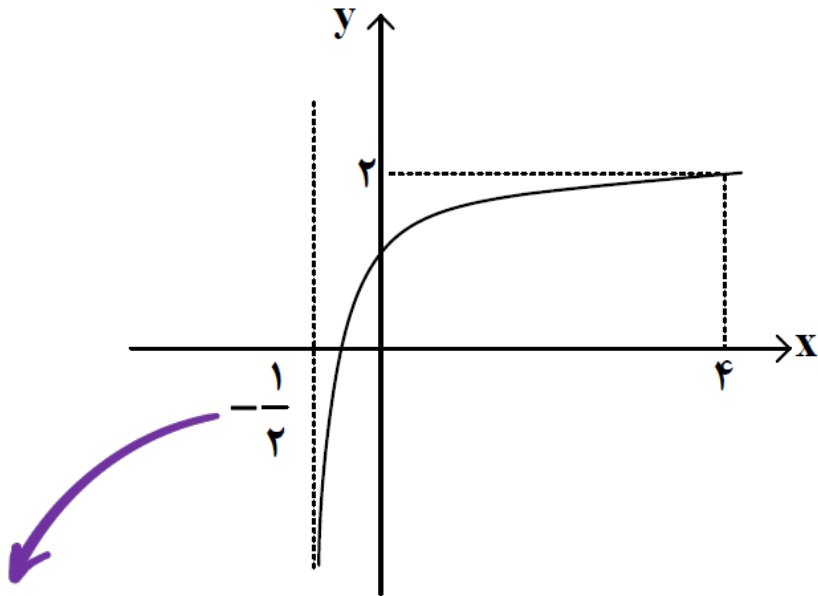
$$f \circ f(a) = a \rightarrow f = f^{-1} \rightarrow f(x) = x \rightarrow 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10 = x$$

$$\rightarrow 5x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10 = 0 \xrightarrow{\text{حس}} x = 25 \Rightarrow a = 25$$

$$f(a-9) = f(25-9) = f(16) = \underbrace{6 \times 16}_{2 \times 16} - \underbrace{16\sqrt{16}}_{4} - 2\sqrt{16} + 10 = \boxed{34}$$



۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



(۱) $-\frac{4}{9}$ ✓

(۲) $-\frac{2}{9}$

(۳) $-\frac{5}{18}$

(۴) $-\frac{7}{18}$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}a + b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (*)$$

$$(4, 2) \rightarrow \log_3(4a+b) = 2 \xrightarrow{(*)} \log_3 9b = 2 \rightarrow 9b = 3^2 = 9 \rightarrow b = 1 \xrightarrow{(*)} a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_3(2x+1) = -2 \rightarrow 2x+1 = 3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -\frac{4}{9} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(-2) = -\frac{4}{9}}$$



۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$ کدام

است؟

$-\sin \alpha$ (۴) ✓

$-\cos \alpha$ (۳)

$\sin \alpha$ (۲)

$\cos \alpha$ (۱)

$$(1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \right)$$

$$= (1 + \cos \alpha) \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(\frac{-1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \boxed{-\sin \alpha}$$



۱۳- اگر $\tan(\alpha + ۱۲^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(\alpha - ۱۸^\circ)$ کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{۱۵} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{۵} \quad (۲)$$

$$۵\sqrt{3} \quad (۱) \checkmark$$

$$x + y = 30^\circ \rightarrow \tan(x + y) = \tan 30^\circ \rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \tan y \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + A}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}A} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} + 3A = \sqrt{3} - \frac{3}{4}A \rightarrow (3 + \frac{3}{4})A = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow \frac{15}{4}A = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \tan y = \frac{\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \cot y = \frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = \boxed{5\sqrt{3}}$$



۱۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \cos(210^\circ) \sin(243^\circ) - \sqrt{2} \sin(135^\circ) \cos(153^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟

۰٫۵ (۴)

۱٫۵ (۳)

۲٫۵ (۲) ✓

۳٫۵ (۱)

$$A = \sqrt{3} \cos(180 + 30) \sin(270 - 27) - \sqrt{2} \sin(180 - 45) \cos(180 - 27)$$

$$= \sqrt{3} \times (-\cos 30) \times (-\cos 27) - \sqrt{2} \times (\sin 45) \times (-\cos 27)$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} \times -\cos 27 - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times -\cos 27 = \frac{3}{2} \cos 27 + \cos 27$$

$$= \frac{5}{2} \cos 27 \Rightarrow \boxed{\frac{5}{2} = 2.5}$$



۱۵- معادلهٔ مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازهٔ $(0, \pi)$ دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳) ✓

۵ (۲)

۶ (۱)

$$\tan 2x + \tan 3x = 0 \rightarrow \tan 3x = -\tan 2x = \tan(-2x)$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + (-2x) \rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \in (0, \pi)$$

$\Rightarrow$ ۴ جواب



۱۶- حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

(۴) $+\infty$ (۲) $\sqrt{\frac{2}{a}}$ (۱) $\sqrt{\frac{2}{3a}}$

علیه فرایند $\rightarrow$ Hop

$$A = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{(x-3a)(x+3a)}} + \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{3a}}{\sqrt{x-3a}} \times \frac{1}{\sqrt{x+3a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4a}} + \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x-3a}}} \times \frac{1}{\sqrt{x+3a}} = \frac{2}{\sqrt{4a}} + 0 = \frac{2}{\sqrt{4a}} = \sqrt{\frac{4}{4a}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$



۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a} \right]$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۲

(۱) -۱ ✓

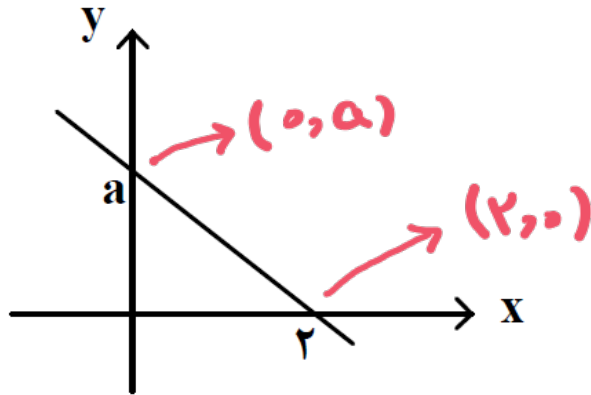
$$x = \sqrt[3]{4} \text{ ریشه مضاعف } \rightarrow (x - \sqrt[3]{4})^2 = x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16} \Rightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt[3]{4} \\ b = \sqrt[3]{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{b}{a} \right] = \left[\frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} \right] = \left[\frac{-1}{2} \sqrt[3]{\frac{16}{4}} \right] = \left[\frac{-\sqrt[3]{4}}{2} \right] = \left[\frac{-1}{2} \right] = -1$$



به قلم: پریسا صادقی تجربی

۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح



$$m = \frac{0-a}{2-0} = -\frac{a}{2}$$

$$y = -\frac{a}{2}x + h \xrightarrow{h=a} f(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}(x-a)$$

a کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$-1 + \sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{|-ax + 2 + 2x - 2a|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{|(2-a)x|} = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x}{|(2-a)x|} = 2$$

$$\rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \quad \Delta = 4 + 4 = 8 \rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$\xrightarrow{a > 0} 1 + \sqrt{2}$



۱۹- اگر تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 + ax} = \frac{0}{0} \text{ Hop} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{2x+a} = \frac{1}{a} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - ax} = \frac{0}{0} \text{ Hop} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{2x-a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

بررسی $\rightarrow \frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a}$

$$\rightarrow 2a^2 - a = 2a + 2$$

$$\rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\rightarrow (2a+1)(a-2) = 0$$

$\downarrow$ $a = -\frac{1}{2}$ $\downarrow$ $a = 2$

$\overline{\text{GÖX}}$ $\overline{\text{GÖV}}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 2|x|} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$



۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) -۲ ✓

(۴) -۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \tan \frac{x}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \stackrel{H\&P}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 2x}{1}$$

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$

$$= 2 \cos \pi = 2 \times -1 = \boxed{-2}$$



۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار

$a + b$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) ۱

(۴) ۲ ✓

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ b x^{\frac{2}{3}} & x \geq 1 \end{cases}$$

→ در ریبیجی داخل قلمه مطلق (۱) مشتق پذیر نیست، پس باید در $x=1$ مشتق پذیر باشد.

→ مشتق پذیر $x=1$ → $1 = \frac{2}{3} \times 1 \times b \rightarrow b = \frac{3}{2}$ *

→ پیوسته در $x=1$ → $a + 1 = b$

* → $a = \frac{1}{2}$

⇒ $a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$



۲۲- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$y = |x^2 - 5|x|| = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 0 \\ x^2 + 5x & x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} m = 2 \\ n = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$

