

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

(۱) $a, a^2, a^2, \dots$ (۲) $a, 1, \frac{1}{a}, \dots$ (۳) $a^2, a, 1, \dots$ (۴) $1, a, a^2, \dots$

$$a, b, c, \dots < \begin{cases} b^2 = ac \\ a \neq 0 \end{cases}$$

۲- مقدار عبارت $\frac{24x^2 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

(۱) $0,1\sqrt{5}$ (۲) $0,2\sqrt{5}$ (۳) $0,3\sqrt{5}$ (۴) $0,6\sqrt{5}$

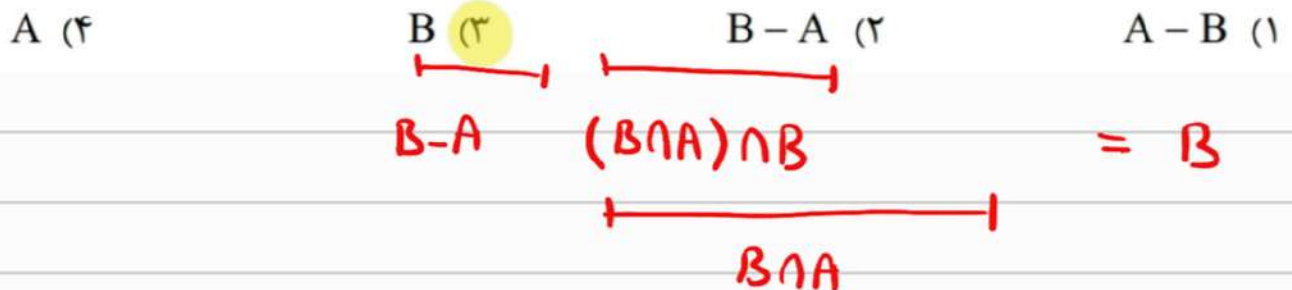
$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{48x - 24 - 36x + 36 + 18x + 3}{(-4x + 4 + 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{30x + 15}{25} = \frac{3}{5} \sqrt{5} (x + 1) = 0,6\sqrt{5}$$

۳- ساده‌شده عبارت $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ کدام است؟



۴- گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ (۲)

$\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (۴)

$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ (۱)

$\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ (۳)

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$$

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \vee (r \vee \sim q) \quad \text{ساده‌تر}$$

۵- نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\frac{13}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{13}{4} \quad (1)$$

$$a-2 \geq 1 \rightarrow a \geq 3 \rightarrow a=3$$

$$A(9,1), B(1,1) \quad f(x) = A(x-5)^2 + 3 \rightarrow f(1) = 1$$

$$A = -1/8$$

$$\frac{9+1}{2} = 5 \quad \downarrow \text{نقطه وسط} \rightarrow S(5,3)$$

۶- اگر عکس مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $-fax^2 + bx + \frac{1}{r}c = 0$ برابر $\log 4$ و a واسطه حسابی b و c باشد،

مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4)$$

$$\sqrt[4]{10} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} = \frac{4a}{b} = \log 4 \rightarrow \frac{a}{b} = \log \sqrt{2}$$

$$c = 2a - b \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{2a-b}{a}} = 2 - \frac{1}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log \frac{1}{5}}{\log \sqrt{2}}$$

$$= \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{5} = 5^{1/4} = \sqrt[4]{5}$$

۷- اگر معادله $|4x-2|=x^2-x+a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ تر معادله کدام است؟

۵/۵ (۴)

۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

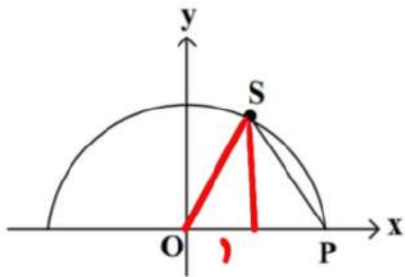
$$x_0 = 1/2$$

$$(1/2, 0) \rightarrow 1/4 - 1/2 + a = 0$$

$$\rightarrow a = 1/4$$

$$x^2 - x + 1/4 = 4x - 2 \rightarrow x^2 - 5x + 9/4 = 0 \rightarrow \Delta = 16 \rightarrow x = 9/2 \text{ و } 1/2$$

۸- نقطه $S(a, 3)$ روی نیم دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم دایره باشد، مقدار a کدام است؟



$$\tan \alpha = \sqrt{3} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

۱ (۱)
1/2 (۲)
sqrt(3) (۳)
sqrt(3)/2 (۴)

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x+4 & x \geq 8 \\ x-4 & x < 8 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(g(-4))$ کدام است؟

-۵ (۴)

-۱۵ (۳)

۹ (۲)

۱۹ (۱)

$$f(g(-4)) = f(8) = 9 \quad (f \circ g)_w = f(g(w))$$

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10$ در یک همسایگی از a ، وارون پذیر است. اگر $f \circ f(a) = a$ باشد، مقدار $f(a-9)$ کدام است؟

۳۴ (۴)

۳۲ (۳)

۲۷ (۲)

۲۵ (۱)

$$f(25-9) = f(16)$$

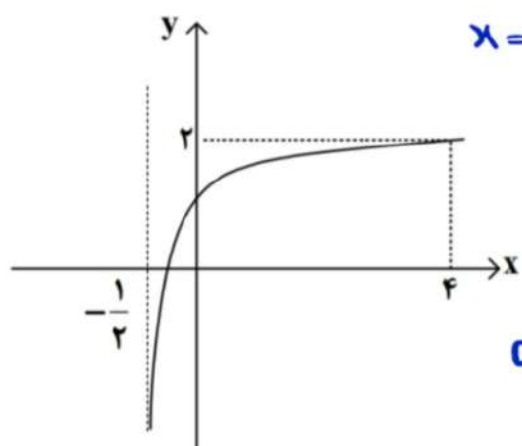
$$f(w) = x \rightarrow (f \circ f)_w = x \rightarrow 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10 = x$$

$$5x = x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 10 \rightarrow 96 - 64 - 8 + 10 = 34$$

$$\rightarrow x = 25$$

مهندس علی سامانی

۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



$$x = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{9}{2}$$

$$\log_3(4a+b) = 2 \rightarrow 4a+b = 9$$

$$4a + \frac{9}{2} = 9 \rightarrow 4.5a = 9$$

$$a = 2, b = 1$$

$$\log_3(2n+1) = -2 \rightarrow 2n+1 = \frac{1}{9} \rightarrow n = -\frac{4}{9}$$

$$-\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$-\frac{5}{18} \quad (3)$$

$$-\frac{7}{18} \quad (4)$$

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$ کدام است؟

$$-\sin \alpha \quad (4)$$

$$-\cos \alpha \quad (3)$$

$$\sin \alpha \quad (2)$$

$$\cos \alpha \quad (1)$$

$$\alpha = 300 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{3}} - \sqrt{3} \right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1} \right) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 60 = -\sin 300$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۳- اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (2)$$

$$5\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \tan y = \frac{\sqrt{3}}{15} \rightarrow \cot y = 5\sqrt{3}$$

۱۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{3}\cos(210^\circ)\sin(243^\circ) - \sqrt{2}\sin(135^\circ)\cos(153^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟

$$0,5 \quad (4)$$

$$1,5 \quad (3)$$

$$2,5 \quad (2)$$

$$3,5 \quad (1)$$

$$(\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\cos 27) - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos 27) = 2,5 \cos 27$$

۱۵- معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

$$3 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

$$\tan 3x = \tan(-2\pi) \rightarrow x = \frac{k\pi}{5} \rightarrow x = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{12a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

$$+\infty \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3a}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{(\sqrt{x-3a})\sqrt{x+3a}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3a}}{\sqrt{x} + \sqrt{3a}} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x-3a}\sqrt{x+3a}} = \sqrt{\frac{2}{3a}}$$

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a} \right]$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

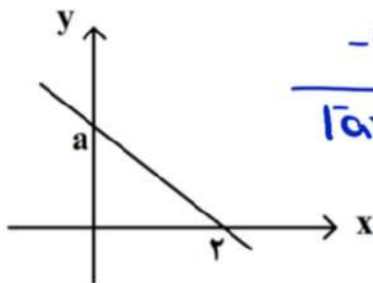
$$x \rightarrow \sqrt[3]{4} : (x - \sqrt[3]{4})^2 = x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}$$

$$\rightarrow a = -2\sqrt[3]{4} \quad b = \sqrt[3]{16} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$$

۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح

a کدام است؟

 $\sqrt{2}$ (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $-1 + \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

$$\frac{-2/a^n}{|2ax + 2n|} = \frac{2}{a|a-2|} = 2 \rightarrow a|a-2| = 1$$

$$a \geq 2 : a^2 - 2a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \checkmark$$

$$a < 2 : -a^2 + 2a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \checkmark$$

۱۹- اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ کدام است؟

 $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

$$\frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2} \rightarrow a = 2 \checkmark \quad a = -\frac{1}{2} \times$$

$$x \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{5}$$

$$2 \cos 2x = 2x - 1 = -2$$

-3 (4)

-2 (3)

20- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

21- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b\sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) 2

$x=1$ مشتق دارد --- $\frac{2}{3}b = 1$

$$a+1=b \rightarrow 1=\frac{2}{3}b \rightarrow b=\frac{3}{2} \rightarrow a=\frac{1}{2} \rightarrow a+b=2$$

22- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

2 (4)

$\frac{1}{2}$ (3)

$\frac{2}{3}$ (2)

$\frac{3}{2}$ (1)

$$f(x) = |x|^2 - 5|x| \rightarrow x^2 - 5x$$

