

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۴

(اردیبهشت ماه ۱۴۰۴)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۱)

نکته: مجموع جملات دنباله هندسی با قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

نکته:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$S_q = 73 S_7 \Rightarrow \frac{a_1(q^9-1)}{q-1} = 73 \times \frac{a_1(q^3-1)}{q-1} \Rightarrow q^9-1 = 73(q^3-1)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد تفاضل مکعبات}} (q^3-1)(q^6+q^3+1) = 73(q^3-1) \Rightarrow q^6+q^3+1 = 73 \Rightarrow q^6+q^3-72 = 0$$

با تغییر متغیر $q^3 = t$ معادله به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$q^3 = t \Rightarrow t^2+t-72 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^3 = -9 \Rightarrow q = \sqrt[3]{-9} \\ q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \end{cases} \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q = 2$$

خواسته سؤال نسبت جمله سوم به جمله اول است:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = q^2 \xrightarrow{q=2} \frac{a_3}{a_1} = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)

۲- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$x^2 + \frac{10}{x^2+1} = 9 \xrightarrow{+1} x^2+1 + \frac{10}{x^2+1} = 10$$

اکنون طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x^2+1 + \frac{10}{x^2+1})^2 = 100 \Rightarrow (x^2+1)^2 + 2(x^2+1)(\frac{10}{x^2+1}) + \frac{100}{(x^2+1)^2} = 100 \Rightarrow (x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} + 20 = 100$$

$$\Rightarrow (x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} = 80$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)

۳- پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آنگاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.نکته (قوانین جذب یا همپوشانی): اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U باشند، داریم:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی، تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

با استفاده از نکات بالا، داریم:

$$\left. \begin{matrix} A \cup B' \subseteq A \cap B \\ B \subseteq B \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A \cup B') \cup B \subseteq \underbrace{(A \cap B) \cup B}_{\text{جذب}} \Rightarrow A \cup \underbrace{(B' \cup B)}_U \subseteq B \Rightarrow \left. \begin{matrix} U \subseteq B \\ B \subseteq U \end{matrix} \right\} \Rightarrow B = U$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۴- پاسخ: گزینه ۴

نکته: برای دو گزاره p و q داریم:

$$\text{قوانین دمورگان: } \begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

نکته: برای دو گزاره p و q همواره داریم:

نکته: خاصیت شرکت پذیری:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

نکته: خاصیت توزیع پذیری (پخش):

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

نکته: برای گزاره دلخواه p داریم:

الف) $p \wedge \sim p \equiv F$

ب) $p \vee \sim p \equiv T$

پ) $p \vee T \equiv T$

ت) $p \wedge T \equiv P$

ث) $p \vee F \equiv P$

ج) $p \wedge F \equiv F$

نکته: برای دو گزاره دلخواه p و q داریم:

$$\text{قوانین جذب: } \begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$$

نکته: برای دو گزاره p و q داریم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

گزاره داده شده را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \sim p \Leftrightarrow q &\equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv [(p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(p \vee q) \wedge \sim p] \\ &\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \vee [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \equiv [(p \wedge \sim q) \vee F] \vee [F \vee (q \wedge \sim p)] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

حال گزینه ها را ساده می کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \equiv \underbrace{\sim p \wedge [q \wedge (\sim p \vee q)]}_{\text{جذب}} \equiv \sim p \wedge q$$

$$\text{گزینه ۲: } \sim [(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \equiv \sim [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\text{گزینه ۳: } (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p \vee \underbrace{[q \vee (\sim p \wedge q)]}_{\text{جذب}} \equiv \sim p \vee q$$

$$\text{گزینه ۴: } \sim [(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)] \equiv \sim [(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه ها S و ضرب ریشه ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

نکته (اتحاد مکعب دو جمله ای):

ابتدا با توجه به رابطه مجموع و حاصل ضرب ریشه ها، داریم:

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5 \quad (1) \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 2 \quad (2) \end{cases}$$

صورت و مخرج عبارت خواسته شده را در β ضرب می کنیم:

$$A = \frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} \Rightarrow A = \frac{4\alpha\beta + \beta^6}{5\beta^2} \xrightarrow{\alpha\beta=2} A = \frac{8 + \beta^6}{5\beta^2} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \left(\frac{8}{\beta^2} + \beta^4 \right) \quad (*)$$

با توجه به رابطه (۲)، می دانیم:

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\beta} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{8}{\beta^3}$$

با جای گذاری $\alpha^3 = \frac{8}{\beta^3}$ در رابطه (*) داریم:

$$A = \frac{1}{5} (\alpha^3 + \beta^3) = \frac{1}{5} \left[\underbrace{(\alpha + \beta)^3}_{S} - \underbrace{3\alpha\beta(\alpha + \beta)}_P \right] = \frac{1}{5} [5^3 - 3(2)(5)] = \frac{1}{5} \times 95 = 19$$

۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

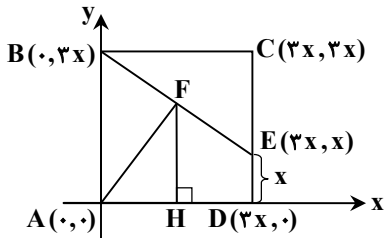
نکته: به طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نکته: اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

فرض می‌کنیم نقطه A روی مبدأ مختصات باشد، فرض می‌کنیم طول نقطه D برابر $3x$ باشد. با توجه به اطلاعات مسئله داریم:



$$\begin{cases} D(3x, 0), B(0, 3x), C(3x, 3x) \\ CD = 3ED \Rightarrow E(3x, x) \end{cases}$$

نقطه F وسط BE است؛ بنابراین مختصات آن به صورت زیر است:

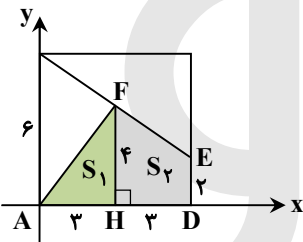
$$F\left(\frac{x_B + x_E}{2}, \frac{y_B + y_E}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}x, 2x\right)$$

از طرفی طول AF برابر ۵ است؛ بنابراین:

$$AF = 5 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (2x)^2} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{25x^2}{4} = 25 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \xrightarrow{x > 0} x = 2 \Rightarrow F(3, 4)$$

پس مساحت شکل خواسته شده برابر است با:

$$S_{ADEF} = S_1 + S_2 = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{(2+4) \times 3}{2} = 6 + 9 = 15$$



۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، عرض رأس سهمی برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ می‌باشد، که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$.

طبق فرض سؤال بیشترین مقدار f برابر ۱ است، پس کمترین مقدار مخرج برابر ۵ است:

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}} \xrightarrow{\max(f)=1} \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}} = 1$$

اکنون، m را طوری به دست می‌آوریم که کمترین مقدار سهمی برابر ۲۵ باشد، یعنی عرض رأس سهمی (y_S) برابر ۲۵ باشد:

$$y = mx^2 - 8x + 39 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 25 \Rightarrow -\frac{64 - 4(m)(39)}{4m} = 25 \Rightarrow -\frac{16 - 39m}{m} = 25 \Rightarrow -16 + 39m = 25m$$

$$\Rightarrow 14m = 16 \Rightarrow m = \frac{4}{7} \Rightarrow [m] = 1$$

دقت کنید به ازای $m = \frac{4}{7}$ ، سهمی $y = \frac{4}{7}x^2 - 8x + 39$ دارای کمترین مقدار است؛ زیرا ضریب x^2 مثبت است.

راه حل دوم:

صورت تابع f ، عدد ثابت ۵ است، پس برای اینکه تابع بیشترین مقدار ممکن باشد، باید مخرج کمترین مقدار ممکن شود، پس ابتدا نقاط (نقطه)

بحرانی مخرج را پیدا می‌کنیم یعنی مشتق مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(mx^2 - 8x + 39)' = 0 \Rightarrow 2mx - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{m}$$

با توجه به اینکه ماکزیمم تابع f برابر ۱ است، داریم:

$$f\left(\frac{4}{m}\right) = 1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{m\left(\frac{16}{m^2}\right) - 8\left(\frac{4}{m}\right) + 39}} = 1 \Rightarrow \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + 39 = 25 \Rightarrow \frac{16}{m} = 4 \Rightarrow m = \frac{16}{4} \Rightarrow m = \frac{4}{1} \Rightarrow [m] = 1$$

۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای (ب.م.م)، عبارتی است که شامل تمامی عامل‌های مشترک دو چندجمله‌ای باشد. ابتدا عبارت‌های جبری $p(x)$ و $q(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$p(x) = x^5 + ax^3 = x^3(x^2 + a)$$

$$q(x) = x^6 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^4 + 3x + 2) = x^2(x+1)(x+2)$$

$$q(x) \text{ و } p(x) \text{ ب.م.م: } x^n + x^3$$

$q(x)$ عامل x^2 و $p(x)$ عامل x^3 دارد، پس در ب.م.م $p(x)$ و $q(x)$ عامل x^2 وجود دارد؛ بنابراین $n=2$:

$$n=2 \Rightarrow x^2 + x^3 = x^2(1+x)$$

با قرار دادن $n=2$ متوجه می‌شویم که در ب.م.م عامل $x+1$ هم وجود دارد.

پس $p(x)$ هم عامل $x+1$ دارد؛ بنابراین $p(-1)$ برابر صفر است:

$$p(-1) = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین خواسته مسئله برابر $na = -2$ است.

۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ به شرط آن که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

راه حل اول:

ابتدا داریم:

$$f \circ f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$$

پس ابتدا معادله $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 & -2 \leq x \leq 2 \\ x+1=0 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \checkmark \\ x=-1 & \checkmark \end{cases} \Rightarrow f(1) = f(-1) = 0$$

اکنون معادله $f(x) = 1$ و $f(x) = -1$ را حل می‌کنیم:

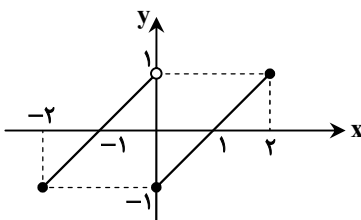
$$f(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 & -2 \leq x \leq 2 \\ x+1=1 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \checkmark \\ x=0 & \times \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 & -2 \leq x \leq 2 \\ x+1=-1 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \checkmark \\ x=-2 & \checkmark \end{cases}$$

پس معادله $f \circ f(x) = 0$ سه ریشه حقیقی دارد.

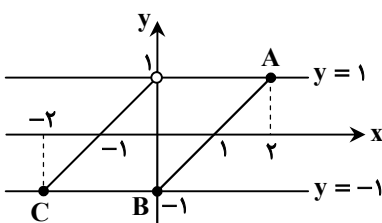
راه حل دوم:

نمودار f را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} f \circ f(x) = f(f(x)) = 0 \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \pm 1$$

می‌خواهیم معادله $f \circ f(x) = 0$ را حل کنیم. با توجه به اینکه $f(1) = 0$ و $f(-1) = 0$ ؛ پس باید معادله‌های $f(x) = 1$ و $f(x) = -1$ را حل کنیم. واضح است خط $y = 1$ نمودار f را در $x = 2$ و خط $y = -1$ نمودار f را در $x = -2$ و $x = 0$ قطع می‌کند، پس معادله سه جواب دارد.

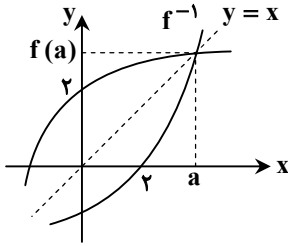


۱۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

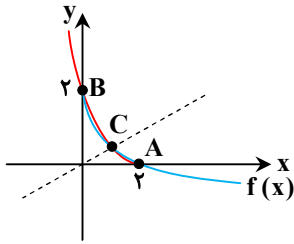
نکته: اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

اگر f اکیداً صعودی باشد، مطابق شکل، محل برخورد f روی خط $y = x$ است؛ بنابراین $f(a) = a$. پس حاصل حد خواسته شده برابر است با:



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

توجه کنید این سؤال کنکور ایراد علمی دارد؛ زیرا اگر f اکیداً صعودی نباشد، حاصل حد مورد نظر ممکن است برابر یک نشود. به عنوان مثال به تابع $f(x) = 2 - \sqrt{2x}$ و وارونش دقت کنید:



$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} A(2, 0) \Rightarrow a = 2, f(a) = 0 \\ B(0, 2) \Rightarrow a = 0, f(a) = 2 \\ C(a, a) \end{cases}$$

پس حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ فقط در نقطه C برابر یک است و در دو نقطه دیگر برابر یک نمی باشد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۲)

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته: دترمینان ماتریس ۲ در ۲ برابر است با:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

نکته: قانون ضرب لگاریتم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

نکته: قانون توان لگاریتم:

$$\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

ابتدا حاصل سمت راست معادله را به دست می آوریم:

$$\left| \frac{\log_5 \log_2}{\log_2 \log_5} \right| = (\log_5)^2 - (\log_2)^2 = (\log_5 + \log_2)(\log_5 - \log_2) = (\log 10)(\log \frac{5}{2}) = \log \frac{5}{2}$$

اکنون معادله داده شده را حل می کنیم:

$$\log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس خواسته مسأله برابر است با:

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = -2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

نکته (نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

با توجه به مفروضات مسأله، داریم:

$$\begin{cases} 1) \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \xrightarrow{\sin^2 \alpha > 0} \cos \alpha > 0 \\ 2) 2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha < 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha (\cos \alpha - 1) > 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0 \end{cases}$$

(دقت کنید: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \cos \alpha - 1 \leq 0$)پس $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha < 0$ و در نتیجه α در ناحیه چهارم است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: (نسبت‌های مثلثاتی مکمل زاویه):

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

نکته: اگر تفاضل زوایا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد، آنگاه داریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

نکته: به‌طور خلاصه، ضرایب زوج π (یعنی $2k\pi$) در نسبت‌های مثلثاتی تأثیری ندارد.

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

نکته: رابطه تانژانت تفاضل زوایا:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

ابتدا زاویه‌های داده‌شده را برحسب زاویه 15° می‌نویسیم:

$$\sin(-285^\circ) = -\sin(285^\circ) = -\sin(\underbrace{270^\circ + 15^\circ}_{\text{ربع چهارم}}) = \cos 15^\circ$$

$$\cos(-105^\circ) = \cos(105^\circ) = \cos(\underbrace{90^\circ + 15^\circ}_{\text{ربع دوم}}) = -\sin 15^\circ$$

$$\sin(165^\circ) = \sin(\underbrace{180^\circ - 15^\circ}_{\text{ربع دوم}}) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(375^\circ) = \sin(\underbrace{360^\circ + 15^\circ}_{\text{ربع اول}}) = \sin 15^\circ$$

بنابراین:

$$\frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{2\sin 15^\circ + 3\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{5\sin 15^\circ} = \frac{1}{5}\cot 15^\circ - \frac{2}{5}$$

اکنون $\tan 15^\circ$ را به‌دست می‌آوریم و آن را معکوس می‌کنیم تا $\cot 15^\circ$ به‌دست آید:

$$\tan(15^\circ) = \tan(60^\circ - 45^\circ) \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} \Rightarrow \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

پس حاصل کسر موردنظر برابر است با:

$$\frac{1}{5}\cot 15^\circ - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

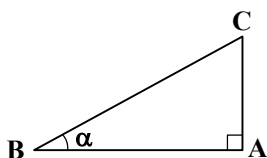
▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حاده آن α باشد را در نظر بگیرید. نسبت مثلثاتی سینوس و تانژانت زاویه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad \text{سینوس}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB} \quad \text{تانژانت}$$



نکته: رابطه تانژانت تفاضل زوایا:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

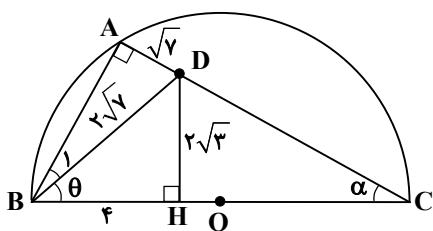
با توجه به شکل، زاویه A، زاویه محاطی روبه قطر است، پس $\hat{A} = 90^\circ$ ؛ بنابراین:

$$\text{در مثلث ABD: } \sin \hat{B}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \hat{B}_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ$$

$$\text{در مثلث BDH: } BD^2 = BH^2 + DH^2 \Rightarrow 28 = 16 + DH^2 \Rightarrow DH = 2\sqrt{3}$$

در مثلث BDH، نسبت $\tan \theta$ را می‌نویسیم:

$$\tan \theta = \frac{DH}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$



از طرفی در مثلث ABC، داریم:

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \theta + \alpha = 90^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1 = 30^\circ} \theta + \alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ - \theta \Rightarrow \tan \alpha = \tan(60^\circ - \theta)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan 60^\circ - \tan \theta}{1 + \tan 60^\circ \tan \theta} \xrightarrow{(1)} \tan \alpha = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

۱۵- پاسخ: گزینه ۴

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{\pi}{2}$ رادیکالی، ابتدا مزدوج رادیکال را در آن ضرب می‌کنیم، سپس با تبدیل به چندجمله‌ای، آن را تجزیه می‌کنیم.

راه حل اول:

حد منفرجه در $x = 0$ برابر صفر است و جواب حد عدد حقیقی است، پس حد صورت نیز در $x = 0$ برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (k + \cos \sqrt{ax}) = 0 \Rightarrow k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

اکنون حد داده شده را با قرار دادن $k = -1$ بازنویسی می‌کنیم و حاصل حد را بر حسب a به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{ax} - 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos \sqrt{ax} - 1)(\cos \sqrt{ax} + 1)}{-x^2 (\cos \sqrt{ax} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 \sqrt{ax} - 1)}{-x^2 (\cos \sqrt{ax} + 1)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \sqrt{ax} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin^2 \sqrt{ax}}{-x^2} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{\sin \sqrt{ax}}{\sqrt{ax}} \times \sqrt{ax})^2}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{x^2} = \frac{1}{2} a$$

حاصل این حد برابر ۳ است؛ بنابراین:

$$\frac{1}{2} a = 3 \Rightarrow a = 6$$

با توجه به اینکه $a = 6$ و $k = -1$ ، پس $\frac{a}{k} = -6$.

راه حل دوم:

می‌توان نشان داد که وقتی عبارت u به سمت صفر میل کند، هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$(1 - \cos^n u) \sim \frac{nu^2}{2}$$

با استفاده از هم‌ارزی فوق و اینکه $k = -1$ ، مقدار حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{ax} - 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\sqrt{ax})^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{x^2} = \frac{a}{2}$$

حاصل حد برابر ۳ است، بنابراین $a = 6$ ، پس $\frac{a}{k} = -6$.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۶- پاسخ: گزینه ۳

نکته (تعریف): خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

نکته: خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

نکته: اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + b$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

خط $y = -4$ مجانب افقی تابع f است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)} = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2}{mx^2} = -4 \Rightarrow \frac{a^2}{m} = -4 \Rightarrow a^2 = -4m \quad (1)$$

همچنین خط $x = -a$ مجانب قائم تابع f است و علامت تابع در اطراف $x = -a$ ، تغییر نکرده است؛ پس $x = -a$ ریشه مضاعف مخرج کسر است. یعنی $x = -a$ هر دو پیرانتز را در مخرج صفر می‌کند:

$$\frac{(x+a)(mx-\gamma)}{x=-a \quad x=-a} = 0 \Rightarrow -ma - \gamma = 0 \Rightarrow ma = -\gamma \Rightarrow m = -\frac{\gamma}{a} \quad (2)$$

$$a^2 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow a^3 = \lambda \Rightarrow a = \sqrt[3]{\lambda}$$

بنابراین با توجه به (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

۱۷- پاسخ: گزینه ۳ $\blacktriangle$ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

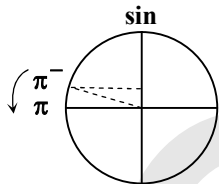
نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ابتدا مقدار براکت را در مخرج مشخص می‌کنیم: $x \rightarrow \pi^- \xrightarrow{x < \pi} [x - \pi] = [-] = -1$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{-1}{-(+)} = \frac{1}{+} = +\infty$$

دقت کنید وقتی $x \rightarrow \pi^-$ ، زاویه x در ربع دوم قرار دارد و مقادیر $\sin x$ با مقادیر بیشتر از صفر به آن نزدیک می‌شوند:



۱۸- پاسخ: گزینه ۲ $\blacktriangle$ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ چندجمله‌ای کافی است از راه تجزیه اقدام کنیم.

نکته (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

دامنه تابع f مجموعه $\mathbb{R} - \{a\}$ است، پس a ریشه مخرج تابع است. اما از آنجاکه حد تابع f در a موجود است، پس $x = a$ ریشه صورت $f(x)$ نیز می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|ax + a| = 0 \xrightarrow{x=a} |a^2 + a| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق (است } f(x) = 0 \text{)} \\ a = -1 \end{cases}$$

چون $x = a$ ریشه مخرج است و $a = -1$ ، پس $x = -1$ ریشه مخرج است:

$$|x^3 + (m-2)x + a^2| = 0 \xrightarrow{x=-1, a=-1} |-1 + (m-2)(-1) + 1| = 0 \Rightarrow |-m+2| = 0 \Rightarrow m = 2$$

اکنون با توجه به اینکه $a = -1$ و $m = 2$ ، حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x-1|}{|x^3+1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۲ $\blacktriangle$ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: اگر r یک عدد حقیقی باشد و $f(x) = x^r$ ، آنگاه $f'(x) = rx^{r-1}$.

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع $f \pm g$ نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر است و داریم: $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

$$f'(1) - 2g'(1) = (f - 2g)'(1)$$

توجه کنید مقدار خواسته شده برابر است با:

پس ابتدا تابع $f - 2g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f - 2g)(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} - 2x \times \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2|x-2| + 2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = -2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

دقت کنید:

$$(f - 2g)' = (-2\sqrt{3})\left(-\frac{1}{6}\right)x^{-\frac{1}{6}-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{7}{6}}$$

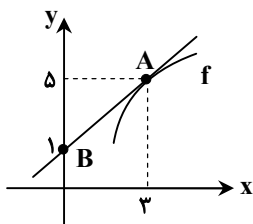
اکنون از تابع فوق مشتق می‌گیریم:

$$(f - 2g)'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر با:

۲۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)



نکته: مقدار مشتق تابع در a برابر با شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ای به طول a است.
می‌دانیم مشتق در نقطه تماس با شیب خط مماس برابر است، پس شیب خط داده شده همان $f'(3)$ است.
بنابراین با توجه به نمودار، شیب خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(3, 5) \\ B(0, 1) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط مماس } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5 - 1}{3 - 0} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(3) = \frac{4}{3}$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، پس در $x = a$ نیز مشتق پذیر است. یعنی تابع در $x = a$ پیوسته است و مشتق راست و چپ برابر دارد:

$$f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$$

$$x = a \text{ در } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \Rightarrow 2ba + c = 3a^2 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2b & x > a \\ 6x & x \leq a \end{cases} \xrightarrow[\text{چپ و راست}]{\text{برابری مشتق}} f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow b = 3a \quad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$(1): 2ba + c = 3a^2 \xrightarrow{b=3a} 6a^2 + c = 3a^2 \Rightarrow c = -3a^2 \quad (3)$$

با استفاده از نتایج (۱) و (۲)، خواسته سؤال برابر است با:

$$a^3 + b - c = a^3 + 3a + 3a^2 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 1 = (a+1)^3 - 1$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

نکته: برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.

ریشه عبارت داخل قدرمطلق $x = a$ است و چون سؤال ماکزیمم مطلق تابع را در بازه $[0, a]$ می‌خواهد، پس $0 \leq x \leq a$ و در نتیجه اکنون مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} (a-x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} (a-x) + (-1)\sqrt[3]{x^2} = \frac{2(a-x) - 3\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2})}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2a - 5x}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow 2a - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}a \checkmark \\ \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f' \text{ موجود نیست} \end{cases}$$

نقطه $x = \frac{2}{5}a$ در بازه $[0, a]$ قرار دارد. حال مقدار ماکزیمم مطلق را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} (a-x) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = 0 \\ f\left(\frac{2}{5}a\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{25}a^2\right)} \left(\frac{3}{5}a\right) \end{cases}$$

مقدار ماکزیمم تابع همان $f\left(\frac{2}{5}a\right)$ است که طبق فرض سؤال برابر $1/5$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$\sqrt[3]{\frac{4}{25}a^2} \times \frac{3}{5}a = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{توان ۳}} \frac{4a^2}{25} \times \frac{a^3}{125} = \frac{1}{125} \Rightarrow 4a^5 \times a^3 = 125 \Rightarrow (4a)^5 = 125 \Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow a = 5/4$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

نکته (انحراف معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $\bar{x} - x_i$ را انحراف داده i ام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

نکته (واریانس داده‌ها): توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

می‌دانیم اگر به تمام داده‌ها عدد ثابتی را اضافه کنیم تا از تمام داده‌ها عدد ثابتی را کم کنیم، واریانس داده‌ها تغییری نمی‌کند. از آنجایی که انحراف ۵ داده آماری از y یعنی $x_i - y$ ها برابر $-1, -5, -6, -7$ و 4 می‌باشد، پس واریانس داده‌های اصلی با واریانس داده‌های $-1, -5, -6, -7$ و 4 برابر است. پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{-1-5-6-7+4}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\sigma^2 = \frac{(-1+3)^2 + (-5+3)^2 + (-6+3)^2 + (-7+3)^2 + (4+3)^2}{5} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{4+4+9+16+49}{5} = \frac{82}{5} = 16\frac{4}{5}$$

۲۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس‌های ۱ و ۴)

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

نکته: برای پیشامد دلخواه A داریم: $P(A') = 1 - P(A)$.

نکته: پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای « A و « B » و « A' و « B » و « A و « B' » نیز مستقل‌اند.

از رابطه $P(A - B) = P(A) \cdot P(B')$ داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$$

پس A و B' مستقل از هم هستند و در نتیجه A و B نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A) = \frac{1}{6} P(B) \xrightarrow{P(B)=x} P(A) = \frac{1}{6} x$$

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{25} \Rightarrow P(A \cup B)' = \frac{1}{25} \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{25} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24}{25} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}x + x - \frac{1}{6}x^2 = \frac{24}{25} \Rightarrow \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{24}{25} = 0$$

$$\Delta = (-\frac{7}{6})^2 - 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{24}{25} = \frac{49}{36} - \frac{4}{5} = \frac{1}{96} \Rightarrow x = \frac{\frac{7}{6} \pm \frac{1}{6}}{2 \times \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{1/6} \text{ غق} \\ x = \frac{1/2}{3/2} = \frac{12}{32} \end{cases} \Rightarrow P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{16}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{5}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$P(A \cup B') = P(A' \cap B)' = 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(A') \cdot P(B) = 1 - (1 - \frac{3}{5}) \times \frac{3}{8} \Rightarrow P(A \cup B') = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۴، درس ۲)

۲۵- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تعداد کل مکعب‌ها را می‌یابیم:

$$\text{تعداد کل مکعب‌ها} = 3 \times 4 \times 4 = 48$$

برای یافتن تعداد حداکثر مکعب‌هایی که باید حذف کنیم، فقط مکعب‌های نمای بالا را نگه داشته و مابقی را حذف می‌کنیم.

$$\text{جواب} = 48 - 10 = 38$$

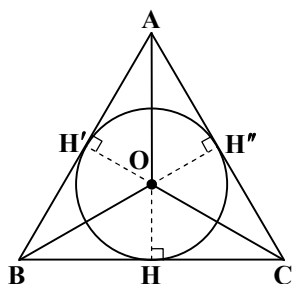
۲۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳)

نکته: سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رس‌اند. این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است و شعاع این دایره که آن را با r نشان می‌دهیم فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است.

در مثلث رابطه $S = Pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است، برقرار است.



$$OH = OH' = OH'' = r$$

طبق شکل مقابل، با فرض $AB = AC = x$ داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$$

$$\text{محیط } ABC = 2p = x + x + x\sqrt{2} = 2x + x\sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{x}{2}(2 + \sqrt{2})$$

$$\text{مساحت } ABC = S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} x^2$$

با استفاده از فرمول شعاع دایره محاطی داخلی مثلث، داریم:

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} x^2}{\frac{x}{2}(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2} + 1)$$

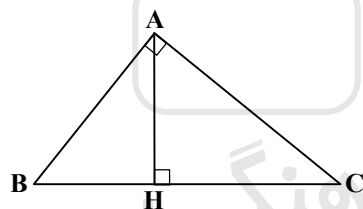
برای رسم عمود منصف یکی از ساق‌ها، باید دهانه پُرگار را حداقل بیشتر از $\frac{1}{4}x$ باز کنیم، پس:

$$\text{جواب: } \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \times 2(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1$$

۲۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳ و فصل ۳، درس ۱)

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:



$$1) AB^2 = BC \cdot BH$$

$$2) AC^2 = BC \cdot CH$$

$$3) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$4) AH^2 = BH \cdot CH$$

$$5) AH \times BC = AB \times AC$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 30° باشد، ضلع مقابل به آن، نصف وتر است و برعکس.

نکته: اگر در مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه 15° باشد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، داریم:

$$AB = AC, AB = 2CE \Rightarrow AC = 2CE \Rightarrow CE = \frac{1}{2} AC$$

در مثلث قائم‌الزاویه ACE ، ضلع CE ، نصف وتر AC است، پس زاویه مقابل ضلع CE ، برابر 30° است.

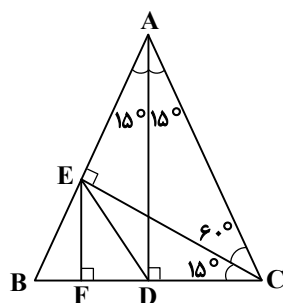
است $\hat{CAE} = 30^\circ$. از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه و نیمساز زاویه رأس نیز می‌باشد، پس:

$$\hat{BAD} = \hat{DAC} = 15^\circ$$

$$\hat{ACE} : \hat{ACE} = 60^\circ, \hat{ACD} : \hat{ACD} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \Rightarrow \hat{ECB} = 15^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است، پس:

$$\hat{BCE} : DE = \frac{1}{2} BC \Rightarrow 2\sqrt{3} + 4 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} + 8 \Rightarrow BD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow BD = \frac{1}{2}(4\sqrt{3} + 8) = 2\sqrt{3} + 4$$



در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه 15° ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است، پس:

$$\triangle BCE : EF = \frac{1}{4} BC = \frac{1}{4} (4\sqrt{3} + 8) = \sqrt{3} + 2$$

از روابط مثلث قائم‌الزاویه در مثلث قائم‌الزاویه BCE استفاده می‌کنیم:

$$EF^2 = BF \times FC \Rightarrow EF^2 = BF(BC - BF) \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)^2 = BF(4\sqrt{3} + 8 - BF)$$

با فرض $BF = x$ داریم:

$$3 + 4 + 4\sqrt{3} = (4\sqrt{3} + 8)x - x^2 \Rightarrow x^2 - (4\sqrt{3} + 8)x + 7 + 4\sqrt{3} = 0$$

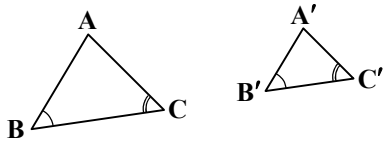
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 7 + 4\sqrt{3} \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

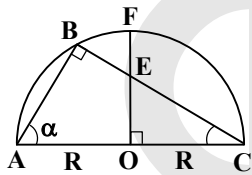
۲۸- پاسخ: گزینه ۳

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}') \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



با فرض اینکه شعاع دایره برابر R است، داریم:



$$\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{BC}{2R}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{6} R \Rightarrow AB^2 = AC^2 - BC^2 = (2R)^2 - (\frac{1}{6} R)^2$$

$$AB^2 = (2R - \frac{1}{6} R)(2R + \frac{1}{6} R) = \frac{1}{4} R \times \frac{25}{6} R = \frac{1}{4} \times \frac{25}{6} R^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2} R$$

مثلث‌های ABC و OCE متشابه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{O} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle OCE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{OC}{BC} = \frac{OE}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

$$\frac{OC}{BC} = \frac{OE}{AB} \Rightarrow \frac{R}{\frac{1}{6} R} = \frac{OE}{\frac{1}{2} R} \Rightarrow OE = \frac{1/2}{1/6} R = \frac{12}{16} R = \frac{3}{4} R = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} R$$

$$\frac{OC}{BC} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{R}{\frac{1}{6} R} = \frac{CE}{2R} \Rightarrow CE = \frac{2}{1/6} R = \frac{20}{16} R = \frac{5}{4} R = \frac{1}{2} \times \frac{5}{5} R$$

خواسته سؤال برابر است با:

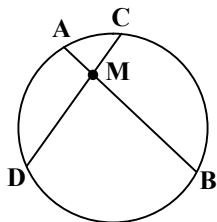
$$\frac{BE}{EF} = \frac{BC - CE}{OF - OE} = \frac{\frac{1}{6} R - \frac{1}{2} \times \frac{5}{5} R}{R - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} R} = \frac{\frac{1}{6} R - \frac{1}{2} R}{R - \frac{3}{20} R} = \frac{\frac{1}{6} R - \frac{10}{12} R}{\frac{20}{20} R - \frac{3}{20} R} = \frac{\frac{1}{6} R - \frac{5}{6} R}{\frac{17}{20} R} = \frac{-\frac{4}{6} R}{\frac{17}{20} R} = -\frac{4}{6} \times \frac{20}{17} = -\frac{40}{17}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۲۹- پاسخ: گزینه ۴

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را

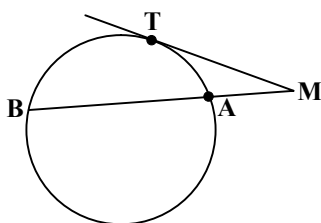
قطع کنند. آنگاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



نکته: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع

اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع

$$MT^2 = MA \cdot MB$$



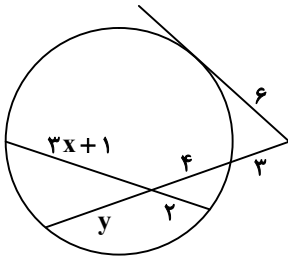
طبق نکات بالا، داریم:

$$6^2 = 3(3 + 4 + y) \Rightarrow 36 = 3(7 + y) \Rightarrow 12 = 7 + y \Rightarrow y = 5$$

$$4y = 2(3x + 1) \Rightarrow 4 \times 5 = 2(3x + 1) \Rightarrow 3x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} = 0.6$$



▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۳۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته: برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d، کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می نامیم و می نویسیم:

$$S(A) = A'$$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می شود.

اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است.

با توجه به نکته و مفروضات سؤال، دو حالت وجود دارد:

الف) ارتفاع وارد بر OA از رأس A'، بر امتداد OA عمود است.

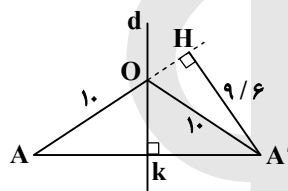
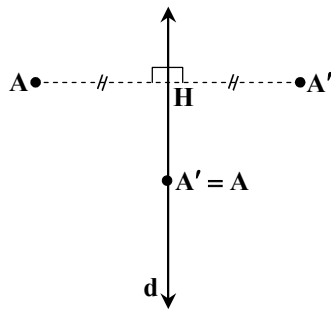
$$OA = OA' = 10, OH^2 + A'H^2 = OA'^2 \Rightarrow OH^2 + 9/6^2 = 10^2$$

$$OH^2 = 10^2 - 9/6^2 = (10 - 9/6)(10 + 9/6) = 0.4 \times 19/6$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{4 \times 196}{100} \Rightarrow OH = \frac{2 \times 14}{10} = 2/8$$

$$\Rightarrow AH = OA + OH = 10 + 2/8 \Rightarrow AH = 12/8$$

در مثلث AHA' داریم:



$$\triangle AHA': AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = (12/8)^2 + (9/6)^2 = 163/84 + 92/16 = 256 \Rightarrow AA' = 16$$

ب) ارتفاع وارد بر OA از رأس A'، بر OA عمود است.

$$OH^2 + A'H^2 = OA'^2 \Rightarrow OH^2 + 9/6^2 = 10^2 \Rightarrow OH = 2/8 \Rightarrow AH = 10 - 2/8$$

$$\Rightarrow AH = 7/2$$

$$\triangle AHA': AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = 7/2^2 + 9/6^2 = 51/84 + 92/16 = 144$$

$$\Rightarrow AA' = 12$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$16 + 12 = 28$$

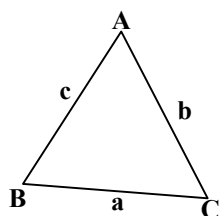
▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳ و فصل ۳، درس ۲)

۳۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته (قضیه کسینوس ها): در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع های اندازه های

دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$



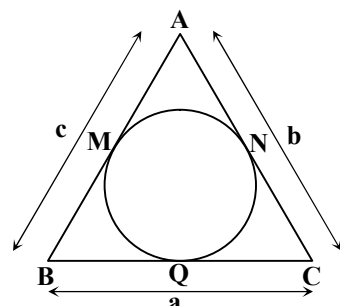
نکته: در مثلث ABC اگر دایره محاطی داخلی را رسم کنیم، داریم:

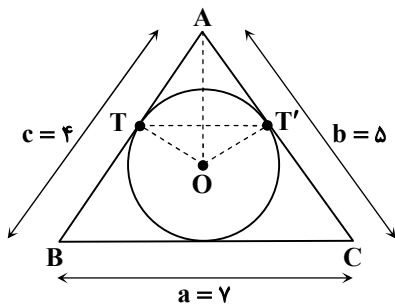
$$AM = AN = P - a$$

$$BM = BQ = P - b$$

$$CN = CQ = P - c$$

P: نصف محیط





ابتدا در مثلث ABC با استفاده از قضیه کسینوس ها، کسینوس زاویه A را محاسبه می کنیم.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 7^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \cos \hat{A} \Rightarrow 49 = 25 + 16 - 40 \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 40 \cos \hat{A} = 21 - 49 = -28 \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{7}{10} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{2}$$

حال با محاسبه AT و AT' داریم:

$$AT = AT' = p - a = \frac{4+5+7}{2} - 7 = 8 - 7 = 1$$

$$\hat{ATT'} : TT'^2 = AT^2 + AT'^2 - 2AT \cdot AT' \cos \hat{A} \Rightarrow TT'^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow TT'^2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow TT' = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر زاویه بین دو بردار غیر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، داریم:

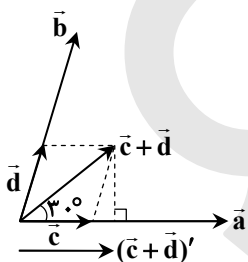
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \alpha$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \alpha$$

فرض می کنیم $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\vec{d} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ، اندازه بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{d}$ برابر یک واحد است، زیرا:

$$|\vec{c}| = \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

$$|\vec{d}| = \left| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right| = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = 1$$



از طرفی بردار $\vec{c} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ هم جهت با بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{d} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$ هم جهت با بردار $\vec{b}$ است. پس طبق

شکل چون $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ بردار $\vec{c} + \vec{d}$ در راستای نیمساز زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. حال اندازه بردار $\vec{c} + \vec{d}$ را می یابیم.

$$|\vec{c} + \vec{d}|^2 = |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2|\vec{c}||\vec{d}|\cos 60^\circ \Rightarrow |\vec{c} + \vec{d}|^2 = 1^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow |\vec{c} + \vec{d}| = \sqrt{3}$$

حال اندازه تصویر قائم بردار $\vec{c} + \vec{d}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ را می یابیم.

$$\cos 30^\circ = \frac{|(\vec{c} + \vec{d})'|}{|\vec{c} + \vec{d}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|(\vec{c} + \vec{d})'|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |(\vec{c} + \vec{d})'| = \frac{3}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۳۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: (دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3): در این روش که فقط برای ماتریس های 3×3 قابل استفاده است. دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

نکته: برای ماتریس مربعی A و عدد حقیقی k داریم:

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}| \quad \text{و} \quad |A^n| = |A|^n$$

ابتدا دترمینان ماتریس A را به روش ساروس می یابیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (1+8+8) - (4+4+4) = 17 - 12 = 5$$

حال از فرض $|A^2 + kA - A| = 125$ داریم:

$$|A(A + (k-1)I)| = 125 \Rightarrow |A||A + (k-1)I| = 125 \Rightarrow 5|A + (k-1)I| = 125 \Rightarrow |A + (k-1)I| = 25$$

ماتریس $A + (k-1)I$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A + (k-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + (k-1)I| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = (k^3 + 8 + 8) - (4k + 4k + 4k) \Rightarrow |A + (k-1)I| = (k^3 + 16) - (12k)$$

$$\Rightarrow k^3 + 16 - 12k = 25 \Rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0 \Rightarrow k = -3$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$|(k+1)I_3| = (k+1)^3 |I_3| = (-3+1)^3 \times 1 = -8$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس‌های ۱ و ۲)

۳۴- پاسخ: گزینه ۳

نکته: عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینان A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ابتدا با توجه به $|A| = 2$ ، داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow ad - bc = 2$$

حال از $B^2 = 2I$ ، داریم:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+cd & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a(1+d) \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c(1+d) & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$1+ac = 2 \Rightarrow ac = 1$$

$$ac+d^2 = 2 \Rightarrow 1+d^2 = 2 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1$$

اگر $d = 1$ باشد، چون $a(1+d) = 0$ ، پس $a = 0$ و $2a = 0$ که این غیرممکن است، چون $ac = 1$ ، پس $d = -1$ است و داریم:

$$ad - bc = 2 \Rightarrow -a - bc = 2$$

با توجه به $b = \pm 1$ ، دو حالت داریم:

$$1 \text{ حالت } b = 1 \Rightarrow -a - c = 2 \Rightarrow a = -2 - c \xrightarrow{ac=1} -2c - c^2 = 1 \Rightarrow c^2 + 2c + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (c+1)^2 = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$2 \text{ حالت } b = -1 \Rightarrow -a + c = 2 \Rightarrow a = c - 2 \xrightarrow{ac=1} c^2 - 2c = 1 \Rightarrow c^2 - 2c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow c = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

چون درایه‌های A صحیح هستند، پس این حالت غیرقابل قبول است و خواسته سؤال برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = B^T \cdot B = 2I \cdot B = 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2(-2) \times 2\sqrt{2} \times (-2) \times (-2) = -32\sqrt{2}$$

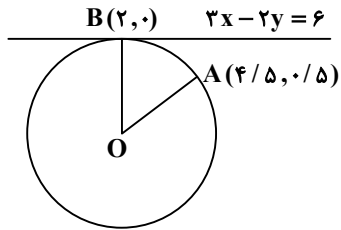
۳۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)

با توجه به شکل فرضی مقابل، ابتدا معادله خط گذرنده از O و B را می‌یابیم.

$$3x - 2y = 6 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M_{OB} = -\frac{2}{3}, B(2, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

مرکز دایره بر روی خط $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ قرار دارد، پس مختصات آن به صورت زیر است:

$$O(a, -\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}), OA = OB \Rightarrow \sqrt{(a - 4/5)^2 + (-\frac{2}{3}a + \frac{4}{3} - 0/5)^2} = \sqrt{(a - 2)^2 + (-\frac{2}{3}a + \frac{4}{3})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (a - \frac{4}{5})^2 + (-\frac{2}{3}a + \frac{4}{3})^2 = (a - 2)^2 + (-\frac{2}{3}a + \frac{4}{3})^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 9a + \frac{16}{5} + \frac{4}{9}a^2 + \frac{25}{36} - \frac{20}{18}a = a^2 - 4a + 4 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{16}{9} - \frac{16}{9}a \Rightarrow -9a - \frac{10}{9}a + \frac{16}{5} + \frac{25}{36} = -4a - \frac{16}{9}a + 4 + \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow -9a - \frac{10}{9}a + 4a + \frac{16}{9}a = 4 + \frac{16}{9} - \frac{25}{36} - \frac{16}{9}$$

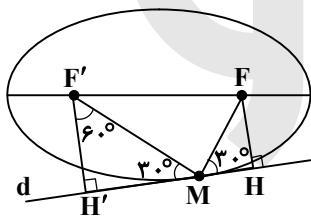
$$\Rightarrow -5a + \frac{6}{9}a = 4 + \frac{64 - 25}{36} - \frac{16}{9} \Rightarrow -5a + \frac{2}{3}a = 4 + \frac{39}{36} - \frac{16}{9} \Rightarrow -\frac{13a}{3} = \frac{16 - 81}{4} + \frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow -\frac{13a}{3} = \frac{-195 + 13}{12} \Rightarrow \frac{-13a}{3} = -\frac{182}{12} \Rightarrow a = \frac{182}{12} \times \frac{3}{13} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \Rightarrow O(\frac{7}{2}, -1)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

۳۶- پاسخ: گزینه ۳

نکته: بر طبق خاصیت بازتابندگی بیضی، اگر پرتویی از یک کانون بیضی، بر بدنه داخلی آن بتابد، پرتو بازتابش از کانون دیگر بیضی می‌گذرد.
با توجه به شکل و طبق ویژگی بازتابندگی در بیضی داریم:



$$F'MH' = FMH = 30^\circ$$

$$F'MH' : \cos 30^\circ = \frac{MH'}{MF'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MH'}{MF'} \Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} MF'$$

$$FMH : \cos 30^\circ = \frac{MH}{MF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MH}{MF} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF$$

طبق فرض $HH' = 2\sqrt{3}$ ، پس:

$$MH' + MH = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} MF' + \frac{\sqrt{3}}{2} MF = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} (MF' + MF) = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MF' + MF = 4 \xrightarrow[\text{بیضی}]{\text{طبق تعریف}} 2a = 4 \Rightarrow \text{طول قطر بزرگ} = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۳۷- پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a | b \Rightarrow a | mb$$

نکته: به $mb + nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left. \begin{array}{l} a | b \\ a | c \end{array} \right\} \Rightarrow a | mb + nc$$

از رابطه $8x^2 + xy + 3x - y = 0$ را بر حسب x حل می‌کنیم.

$$8x^2 + 3x = y - xy \Rightarrow 8x^2 + 3x = y(1 - x) \Rightarrow y = \frac{8x^2 + 3x}{1 - x}$$

چون $y \in \mathbb{Z}$ ، پس در کسر بالا، صورت باید بر مخرج بخش پذیر باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 1 - x | 8x^2 + 3x \\ 1 - x | 1 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - x | (8x^2 + 3x) + 8x(1 - x) \Rightarrow 1 - x | 8x^2 + 3x + 8x - 8x^2 \Rightarrow 1 - x | 11x$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - x | 11x \\ 1 - x | 1 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - x | 11x + 11(1 - x) \Rightarrow 1 - x | 11 \Rightarrow \begin{cases} 1 - x = \pm 1 \Rightarrow x = 0, x = 2 \\ 1 - x = \pm 11 \Rightarrow x = -10, x = 12 \end{cases}$$

بنابراین، چهار نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

۳۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل

$$\text{یعنی برابر است با } \binom{n+k-1}{k-1}$$

با توجه به اینکه جملات x_2 و x_3 باید عدد صحیح باشند، حالات زیر را داریم:

$$x_1 + 0 + 0 + \sqrt{x_3} + x_4 = 4$$

$$1) x_2 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_4 = 4 \xrightarrow[k=2]{n=4} \text{تعداد جوابها} = \binom{4+2-1}{2-1} = \binom{5}{1} = 5$$

$$2) x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_4 = 3 \xrightarrow[k=2]{n=3} \text{تعداد جوابها} = \binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$$

$$3) x_2 = 0, x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_4 = 2 \xrightarrow[k=2]{n=2} \text{تعداد جوابها} = \binom{2+2-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$4) x_2 = 0, x_3 = 9 \Rightarrow x_1 + x_4 = 1 \xrightarrow[k=2]{n=1} \text{تعداد جوابها} = \binom{1+2-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$5) x_2 = 0, x_3 = 16 \Rightarrow x_1 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = 1$$

$$6) x_2 = 5, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_4 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{2+2-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$7) x_2 = 5, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{1+2-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

$$8) x_2 = 5, x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = 1$$

$$9) x_2 = 10, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = 1$$

تعداد کل جوابها برابر است با:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 1 = 22$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

با توجه به اینکه از چهار عضو مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ چهار پیکان به اعضای $\{1, 2, 4\}$ رسم می‌شود، مجموع مقادیر تابع زمانی فرد است که

تعداد پیکان‌های وارد بر ۱، فرد باشد، پس حالات زیر را داریم:

الف) یکی از اعضای $\{1, 2, 3, 4\}$ به ۱ وصل شده باشد و مابقی به ۲ یا ۴ متصل باشند.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ حالت } \Rightarrow \text{یک پیکان به ۱} \\ 4 \text{ یا } 2 \text{ به } \{1, 2, 3, 4\} \text{ سه عضو دیگر } \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4 \times 8 = 32$$

ب) سه عضو از اعضای $\{1, 2, 3, 4\}$ به ۱ وصل شده باشند و مابقی به ۲ یا ۴ متصل باشند.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ به } \{1, 2, 3, 4\} \text{ سه عضو } \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{4}{3} = 4 \\ 2 \text{ حالت } \Rightarrow \text{یک عضو دیگر } \{1, 2, 3, 4\} \text{ به ۲ یا ۴} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4 \times 2 = 8$$

$$\text{تعداد کل حالات} = 32 + 8 = 40$$

۴۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

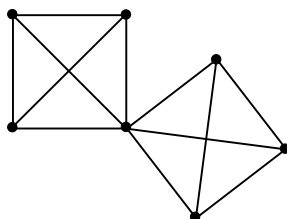
نکته (بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف): بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$

نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم.

نکته (دور): دنباله $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n

می‌نامیم.

گراف موردنظر به صورت زیر است:



$$P_{\text{Min}} = 7$$

فیزیک

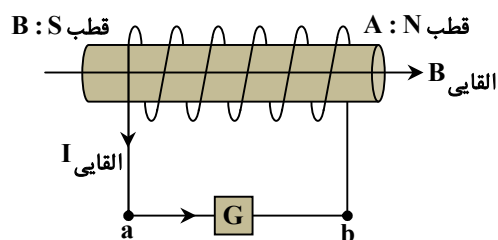
۴۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

در واپاشی آلفا، عدد جرمی هسته ۴ واحد کاهش می‌یابد.

۴۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند؛ بنابراین $q_1 > 0$ و $q_2 < 0$ است. از طرفی دیگر، چون تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_1 بیشتر از تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_2 است، می‌توان گفت $|q_2| < |q_1|$ است.

۴۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)



آهنربا در حال دور شدن از سیم‌لوله است؛ بنابراین شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله در حال کاهش است. طبق قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی در سیم‌لوله باید هم‌جهت با میدان مغناطیسی آهنربا باشد؛ بنابراین جهت میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله باید مطابق شکل از چپ به راست باشد: میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله از قطب S به N است؛ بنابراین ناحیه A قطب N و ناحیه B قطب S است. با توجه به قاعده دست راست، جهت جریان القایی در گالوانومتر از a به b است.

۴۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)

$$25 \text{ kWh} = 25 \text{ kWh} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \times \frac{1000 \text{ W}}{1 \text{ kW}} = 25 \times 3600 \times 1000 \text{ W} \cdot \text{s} = 90 \times 10^6 \text{ J} = 90 \text{ MJ}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

گلوله اول در لحظه $t = 0$ ، گلوله دوم در لحظه $t = 2 \text{ s}$ و گلوله سوم در لحظه $t = 4 \text{ s}$ رها شده است؛ بنابراین هنگام رها شدن گلوله سوم، گلوله اول به مدت 4 s سقوط کرده است و به سطح زمین رسیده است:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 \Rightarrow h = 80 \text{ m}$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h' = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20 \text{ m}$$

در لحظه $t = 4 \text{ s}$ ، گلوله دوم به مدت 2 s سقوط کرده است:

همه گلوله‌ها از ارتفاع 80 m متری سطح زمین رها شده‌اند و در لحظه $t = 4 \text{ s}$ ، گلوله دوم 20 m سقوط کرده است؛ بنابراین این گلوله در لحظه $t = 4 \text{ s}$ به ارتفاع $h - h' = 80 - 20 = 60 \text{ m}$ از سطح زمین می‌رسد. (جهت مثبت محور حرکت را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم).

۴۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

از لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر می‌شود تا لحظه‌ای که آن‌ها به هم می‌رسند، فاصله دو متحرک در حال کم شدن است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t^2 \\ x_2 = (t-3)^2 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 = (t-3)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}t = t-3 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0/\Delta t \\ v_2 = 2(t-3) \end{cases}$$

$$v_1 = v_2 \Rightarrow 0/\Delta t = 2t-6 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

بنابراین در بازه زمانی $t = 3 \text{ s}$ تا $t = 6 \text{ s}$ یعنی به مدت 3 s فاصله دو متحرک در حال کاهش بوده است.

۴۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا معادله حرکت متحرک A را نوشته و مکان آن را در لحظه $t = 4 \text{ s}$ می‌یابیم:

$$v_A = \frac{26-20}{3} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_A = v_A t + x_0 \Rightarrow x_A = 2t + 20 \xrightarrow{t=4 \text{ s}} x_A = 2(4) + 20 = 28 \text{ m}$$

حالا معادله حرکت متحرک B را می‌نویسیم و سپس مکان آن در لحظه $t = 4 \text{ s}$ را برابر با $x = 28 \text{ m}$ قرار می‌دهیم، زیرا در این لحظه متحرک B به متحرک A رسیده است:

$$x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}at^2 + 12t + 0 \xrightarrow{t=4 \text{ s}} 28 = \frac{1}{2}a \times (4)^2 + 12 \times 4 \Rightarrow -20 = 8a \Rightarrow a = -2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (-2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \vec{i}$$

۴۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۲ ثانیه دوم حرکت یعنی بازه زمانی ۲s تا ۴s:

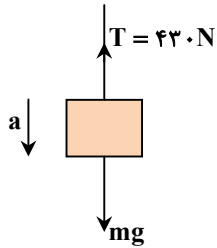
$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_{fs} - v_{rs}}{4 - 2} \Rightarrow a_{av} = \frac{(3(4)^2 - 8) - (3(2)^2 - 8)}{2} = \frac{3(4^2 - 2^2)}{2} = 18 \frac{m}{s^2}$$

۴۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

سمت شرق را مثبت در نظر می‌گیریم:

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} \Rightarrow r = \frac{0.8(5 - (-5))}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{8}{r} = 4s$$

۵۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net} = mg - T = ma \Rightarrow 50 \times 9.8 - 430 = 50a \Rightarrow 60 = 50a \Rightarrow a = 1.2 \frac{m}{s^2}$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

طبق قانون دوم نیوتون $F_{net} = ma$ است:

$$\begin{cases} F = m_1 \times 12 \\ F = m_2 \times 4 \end{cases} \Rightarrow m_1 \times 12 = m_2 \times 4 \Rightarrow m_2 = 3m_1 \quad \text{رابطه (۱)}$$

طبق رابطه بالا، حاصل $m_2 - m_1$ برابر است با:

$$m_2 - m_1 = 3m_1 - m_1 = 2m_1$$

حال اگر نیروی F به جرم $2m_1$ اثر کند، داریم:

$$F = 2m_1 \times a \xrightarrow{\frac{F}{m_1} = 12} 12 = 2 \times a \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

دوره گردش سکه همان دوره گردش میز است:

$$T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{3/14}{3} = \frac{\pi}{3} s$$

از آنجاکه نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه: نقش نیروی مرکزگرا را بازی می‌کند، داریم:

$$f_{s,max} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \mu_s mg = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow \mu_s \times 10 = \frac{4\pi^2 \times 0.1}{(\frac{\pi}{3})^2} \Rightarrow \mu_s = 0.36$$

۵۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{F_B}{F_A}} \times \sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}} \times \sqrt{\frac{A_A}{A_B}} \xrightarrow{\text{جنس و نیروی کشش دو تار یکسان است.}} \frac{v_B}{v_A} = 1 \times 1 \times \sqrt{\frac{A_A}{A_B}} \Rightarrow \frac{v_B}{100} = \sqrt{\frac{4A_B}{A_B}} \Rightarrow v_B = 200 \frac{m}{s}$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

براساس اثر دوپلر برای امواج الکترومغناطیسی، هنگام نزدیک شدن چشمه به ناظر (کهکشان به ما)، بسامد موج دریافتی افزایش می‌یابد.

۵۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

ابتدا ثابت فنر را می‌یابیم:

$$mg = kx \Rightarrow 0.2 \times 10 = k \times \frac{2}{100} \Rightarrow k = 100 \frac{N}{m}$$

بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر با انرژی مکانیکی آن است:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \times 100 \times (2 \times 10^{-2})^2 = 40 \times 4 \times 10^{-4} = 16 mJ$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

فاصله بین جبهه‌های موج متوالی در ناحیه A بیشتر از ناحیه B است؛ بنابراین طول موج و در نتیجه تندی انتشار موج در ناحیه A بیشتر از ناحیه B است.

از طرفی دیگر، برای امواج سطحی آب در آب‌های کم‌عمق، هر چقدر تندی انتشار موج در یک ناحیه بیشتر باشد، تندی انتشار موج سطحی در آن ناحیه نیز بیشتر است؛ بنابراین عمق ناحیه A بیشتر از ناحیه B است.

۵۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

ضرب شکست شیشه برای طول موج‌های مختلف نور مانند نورهای قرمز و آبی، متفاوت است؛ بنابراین این نورها درون شیشه به‌طور متفاوت می‌شکنند و از هم جدا می‌شوند و هنگام خروج از شیشه موازی با یکدیگر و موازی با راستای انتشار اولیه (قبل از ورود به شیشه) در هوا منتشر می‌شوند.

۵۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

تابع کار یک فلز وابسته به جنس فلز است و طبق رابطه $K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$ ، با ثابت بودن تابع کار فلز و کاهش طول موج نور فرودی،

حاصل $\frac{hc}{\lambda}$ و در نتیجه مقدار $K_{\max}$ (بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها) افزایش می‌یابد.

۵۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

مدل اتمی بور متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن را نمی‌تواند توجیه کند و از طرفی دیگر برای اتم‌های هیدروژن گونه‌ای یعنی اتم‌هایی که فقط یک الکترون دارند، به کار می‌رود. این مدل برای وقتی که بیش از یک الکترون به دور هسته می‌گردد به کار نمی‌رود؛ زیرا در مدل بور، نیروی الکتریکی که یک الکترون بر الکترون دیگر وارد می‌کند به حساب نیامده است؛ بنابراین عبارت‌های «ب» و «ج» پاسخ این سؤال هستند.

۶۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

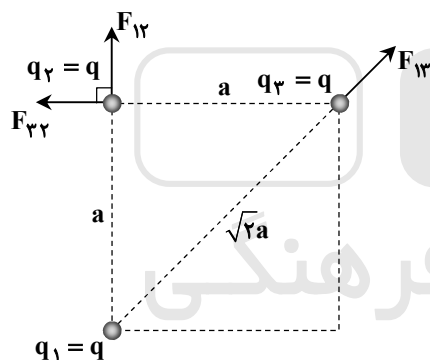
$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{16} N_0 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 4$$

$$n = \frac{\Delta t}{T_{1/2}} \Rightarrow 4 = \frac{\Delta t}{T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = 2h$$

۶۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

هر ضلع مربع را a و مقدار هر بار الکتریکی را q در نظر می‌گیریم:



$$F_{22} = F_{12} = \frac{kq \times q}{a^2} = \frac{kq^2}{a^2} \Rightarrow F_{T2} = F_{12} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}kq^2}{a^2} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$F_{13} = \frac{k|q_1 q_3|}{r_{13}^2} = \frac{kq \times q}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2} \frac{kq^2}{a^2} \quad \text{رابطه (۲)}$$

از تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲) داریم:

$$\frac{F_{T2}}{F_{13}} = \frac{\sqrt{2} \frac{kq^2}{a^2}}{\frac{1}{2} \frac{kq^2}{a^2}} = 2\sqrt{2}$$

۶۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

با اضافه شدن دی‌الکتریک $k = 3$ بین دو صفحه خازن، ظرفیت خازن طبق رابطه $C = \frac{k\epsilon_0 A}{d}$ ، ۳ برابر می‌شود. از طرفی دیگر، خازن به باتری وصل است، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت می‌ماند:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \times \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \xrightarrow[\text{اختلاف پتانسیل ثابت است.}]{\text{ظرفیت ۳ برابر می‌شود.}} \frac{U_2}{U_1} = 3 \times 1 = 3$$

با ثابت ماندن اختلاف پتانسیل دو سر خازن و فاصله بین صفحات آن، طبق رابطه $E = \frac{V}{d}$ ، میدان الکتریکی بین دو صفحه ثابت می‌ماند.

۶۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{18 - 6}{3 + 1 + 2} = 2A$$

جریان عبوری از باتری‌ها برابر است با:

$$\frac{P_{(2)} \text{ ورودی باتری (۲)}}{P_{(1)} \text{ خروجی باتری (۱)}} = \frac{\mathcal{E}_2 I + r_2 I^2}{\mathcal{E}_1 I - r_1 I^2} = \frac{(6 \times 2) + 2(2)^2}{(18 \times 2) - (2)^2} = \frac{12 + 8}{36 - 4} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

۶۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$m_A = \frac{1}{V} m_B \xrightarrow{m=\rho V} \rho_A A_A L_A = \frac{1}{V} \rho_B A_B L_B \xrightarrow{\rho_A=\rho_B} A_A \times 2 L_B = \frac{1}{V} A_B L_B \Rightarrow 4 A_A = A_B \quad (۱) \text{ رابطه}$$

$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A} \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \frac{R_A}{R_B} = 1 \times 2 \times 4 = 8$$

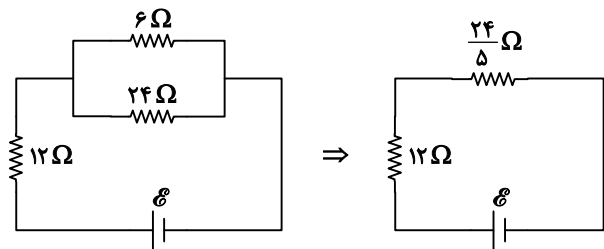
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۵- پاسخ: گزینه ۲

دو مقاومت 6Ω و 24Ω موازی اند:

$$R_{6,24} = \frac{6 \times 24}{6 + 24} = \frac{6 \times 24}{30} = \frac{24}{5}\Omega$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت های 6Ω ، 24Ω و $\frac{24}{5}\Omega$ یکسان است. از طرفی دیگر، چون دو مقاومت $\frac{24}{5}\Omega$ و 12Ω با یکدیگر متوالی هستند، جریان یکسانی از آن ها عبور می کند؛ بنابراین داریم:



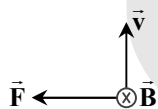
$$I_{12\Omega} = I_{\frac{24}{5}\Omega} \Rightarrow \frac{V_{12\Omega}}{12} = \frac{V_{\frac{24}{5}\Omega}}{\frac{24}{5}}$$

$$V_{6\Omega} = V_{\frac{24}{5}\Omega} \Rightarrow \frac{V_{12\Omega}}{V_{6\Omega}} = \frac{12}{\frac{24}{5}} = \frac{5}{2}$$

۶۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

هر دو ذره آلفا و پوزیترون دارای بار الکتریکی مثبت هستند؛ بنابراین طبق قاعده دست راست، هر دو به سمت چپ منحرف می شوند:



۶۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow 157 \times 10^{-4} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N \times 2 / 5}{0.1} \Rightarrow 1 / 57 \times 10^{-3} = 4 \times 3 / 14 \times 2 / 5 \times 10^{-7} N \Rightarrow 1 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-7} N$$

$$\Rightarrow N = \frac{10^{-3}}{2 \times 10^{-7}} = 500$$

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

$$\Delta\Phi = BA(\cos\theta_f - \cos\theta_i) \Rightarrow \Delta\Phi = 0.5 \times 4 \times 10^{-4} (\cos 90^\circ - \cos 0^\circ) \Rightarrow \Delta\Phi = 2 \times 10^{-4} (0 - 1) = -2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

علامت منفی به معنی کاهش شار مغناطیسی است.

۶۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

ابتدا ارتفاع مایع درون استوانه را می یابیم:

$$V = Ah \Rightarrow 2500 = 50 \cdot h \Rightarrow h = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

فشار پیمانه ای در کف ظرف برابر با فشار حاصل از ستون 50 cm مایع با چگالی $\frac{1}{2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ است. کافی است بفهمیم فشار 50 cm از ستون

این مایع معادل با فشار چند سانتی متر از جیوه است:

$$P_g \text{ ظرف} = P_{\text{ستون مایع}} = \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 1/2 \times 50 = 13/6 h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{60}{13/6} \approx 4/4 \text{ cm} \Rightarrow P_g \text{ ظرف} \approx 4/4 \text{ cmHg}$$

۷۰- پاسخ: گزینه ۱

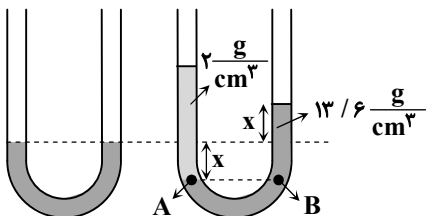
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

هنگامی که از یکی از شاخه ها 17 cm مایع روی جیوه ریخته می شود، جیوه در آن شاخه به اندازه x پایین رفته و جیوه درون شاخه مقابل نیز به همان اندازه x بالا می آید:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} = P_0 + \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} (2x) \Rightarrow 2 \times 17 = 13/6 \times 2x \Rightarrow x = 1/25 \text{ cm}$$

سطح جیوه در شاخه مقابل نسبت به موقعیت اولیه به اندازه $x = 1/25 \text{ cm}$ بالاتر رفته است.



۷۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

از قضیه کار و انرژی جنبشی کمک می‌گیریم: $v_A = ۱۲۶ \frac{km}{h}$ برابر با $۳۵ \frac{m}{s}$ است.

$$W_t = K_B - K_A \Rightarrow W_t = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow ۲۴۰۰ = \frac{1}{2} \times ۶۰ (v_B^2 - ۳۵^2)$$

$$\Rightarrow ۸۰۰ = v_B^2 - ۱۲۲۵ \Rightarrow v_B^2 = ۲۰۲۵ \Rightarrow v_B = ۴۵ \frac{m}{s}$$

کافی است $v_B = ۴۵ \frac{m}{s}$ را برحسب $\frac{km}{h}$ به دست آوریم:

$$v_B = ۴۵ \frac{m}{s} \times \frac{۳}{۶} = ۱۶۲ \frac{km}{h}$$

۷۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

اگر کمیت‌های مربوط به پدر را با زیروند ۱ و کمیت‌های مربوط به پسر را با زیروند ۲ نشان دهیم، داریم:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{K_2}{\frac{1}{2} K_2} = \frac{m_2}{2 m_2} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow ۲ = \frac{1}{2} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = ۴$$

$$\Rightarrow v_2 = ۲ v_1 \quad (۱) \text{ رابطه}$$

هنگامی تندی حرکت پدر $v'_1 = v_1 + ۲ \frac{m}{s}$ می‌شود، انرژی جنبشی پدر و پسر برابر می‌شود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$K_2 = K'_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \xrightarrow[\text{رابطه (۱)}]{m_1 = 2 m_2} m_2 \times (2 v_1)^2 = 2 m_2 \times (v_1 + 2)^2 \Rightarrow 4 v_1^2 = 2 (v_1 + 2)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} v_1 = v_1 + 2 \Rightarrow (\sqrt{2} - 1) v_1 = 2 \Rightarrow v_1 = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2} + 2 \frac{m}{s}$$

۷۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۴)

انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن نمونه‌ای از همرفت طبیعی است. بقیه موارد مطرح شده، جلوه‌هایی از همرفت واداشته هستند.

۷۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow[\text{حجم هوای اتاق ثابت است}]{\text{فشار هوای اتاق تغییر نمی‌کند}} \frac{n_2}{n_1} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{\Delta n}{n_1} = \frac{\Delta T}{T_2} \Rightarrow \frac{\Delta n}{n_1} = \frac{۱}{۲۷۳ + ۲۵} = \frac{۱}{۲۹۸}$$

۷۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

از بین ۶ فرایند چرخه ماشین بنزینی، ۴ فرایند آن با حرکت پیستون همراه است که به آن‌ها ضربه می‌گوییم.

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

گزینه ۱: نادرست؛ تفاوت انرژی نورهای سرخ و نیلی، بیشتر از تفاوت انرژی نورهای نارنجی و آبی است.

بنفش	نیلی	آبی	سبز	زرد	نارنجی	سرخ
۴۳۵-۳۸۰	۵۰۰-۴۳۵	۵۲۰-۵۰۰	۵۶۵-۵۲۰	۵۹۰-۵۶۵	۶۲۵-۵۹۰	۷۴۰-۶۲۵

گزینه ۲: درست

گزینه ۳: نادرست؛ رنگ شعله لیتیم سولفات و لیتیم نترات به دلیل یکسان بودن کاتیون در آن‌ها مشابه است. (رنگ شعله لیتیم و نمک‌های آن همگی سرخ‌رنگ است.) اما رنگ شعله مس (II) سولفات (شعله سبز) و سدیم سولفات (شعله زرد) به دلیل متفاوت بودن کاتیون در آن‌ها متفاوت است.

توجه داشته باشید که آزمون شعله روشی برای تشخیص فلز یا کاتیون آن در یک ترکیب است و آنیون‌ها در شعله رنگ ایجاد نمی‌کنند.

گزینه ۴: نادرست؛ سطح انرژی لایه اول یا همان $n = ۱$ در تمام اتم‌ها متفاوت است.

۷۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

گزینه ۱: نادرست؛ درصد فراوانی گوگرد در زمین و مشتری متفاوت است ولی در هر دو سیاره ششمین عنصر فراوان به‌شمار می‌آید.

گزینه ۲: درست

گزینه ۳: درست؛ سومین عنصر فراوان در زمین و مشتری به ترتیب سیلیسیم (شبه‌فلز) و کربن (نافلز) است.

گزینه ۴: درست؛ درصد فراوانی آهن در زمین کمتر از ۵۰ درصد و درصد فراوانی هیدروژن در مشتری بیشتر از ۵۰ درصد (بیش از ۹۰ درصد) است.

۷۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

با توجه به ثابت بودن حجم در این فرایند در می‌یابیم که شمار مول‌های CO(g) خارج شده از بالون با شمار مول‌های Ar(g) وارد شده به بالون باید برابر باشد.

$$\text{جرم آرگون} = ۱۸۶ \text{ g} \Rightarrow \frac{\text{جرم آرگون}}{۶۲۰} \times ۱۰۰ = ۳۰ \Rightarrow \frac{\text{جرم آرگون}}{\text{جرم کل}} \times ۱۰۰ = \text{درصد جرمی آرگون}$$

پس جرم CO(g) باقی‌مانده در بالون برابر است با:

$$۶۲۰ - ۱۸۶ = ۴۳۴ \text{ g}$$

اکنون شمار مول‌های Ar(g) را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{mol Ar} = ۱۸۶ \text{ g Ar} \times \frac{1 \text{ mol Ar}}{۴۰ \text{ g Ar}} = ۴/۶۵ \text{ mol}$$

پس شمار مول‌های CO(g) خارج شده نیز برابر ۴/۶۵ mol بوده که جرم آن برابر است با:

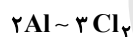
$$\text{جرم خارج شده CO(g)} = ۴/۶۵ \text{ mol CO} \times \frac{۲۸ \text{ g CO}}{1 \text{ mol CO}} = ۱۳۰/۲ \text{ g}$$

بنابراین جرم کل CO(g) برابر بوده است با:

$$۴۳۴ + ۱۳۰/۲ = ۵۶۴/۲$$

۷۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

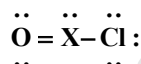
ابتدا واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم سپس ضریب H_۲(g) (عنصر مشترک در معادله) را در دو معادله یکسان می‌کنیم:بنابراین به‌ازای مصرف ۲ مول Al، ۳ مول Cl_۲ نیز مصرف می‌شود، پس:

$$\frac{? \text{ g}}{۲ \times ۲۷ \text{ g}} = \frac{۸/۹۶ \text{ L}}{۳ \times ۲۲/۴ \text{ L}} \Rightarrow ? = ۷/۲$$

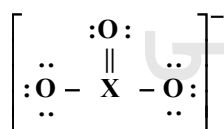
۸۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

با توجه به داده‌های سؤال، ساختار لوویس مولکول XOCl به صورت زیر است:



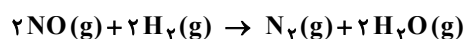
در این ساختار ۱۸ الکترون وجود دارد که هریک از اتم‌های اکسیژن و کلر در لایه ظرفیت خود به ترتیب ۶ و ۷ الکترون دارند. پس اتم X نیز باید ۵ الکترون در لایه ظرفیت خود داشته باشد؛ بنابراین X اتم عنصری از گروه ۱۵ است که در واکنش با فلزها به شکل X^{۳-} (۵ - ۱۳ = ۵) شرکت می‌کند. همچنین ساختار لوویس آنیون XO_۳⁻ به صورت زیر است:



که در این ساختار ۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)



معادله موازنه شده واکنش چنین است:

$$۱۳/۴۴ \text{ L} \times \frac{1 \text{ mol}}{۲۲/۴ \text{ L}} = ۰/۶ \text{ mol}$$

ابتدا مول هریک از دو گاز واکنش‌دهنده را به دست می‌آوریم:

با توجه به اینکه دو گاز واکنش‌دهنده متناسب با ضرایب استوکیومتری با یکدیگر واکنش داده‌اند و براساس معادله موازنه شده ضریب هر دو گاز یکسان است، پس شمار مول هر دو گاز برابر ۰/۳ = ۰/۶ / ۲ است.

از این‌رو برای محاسبه بازده درصدی واکنش می‌توان از هریک از دو گاز NO و H_۲ استفاده کرد.

$$\frac{۰/۳ \text{ mol} \times \frac{\text{R}}{۱۰۰}}{۲ \text{ mol}} = \frac{۳/۸۴ \text{ g}}{۲۸ + (۲ \times ۱۸) \text{ g}} \Rightarrow \text{R} = ۴۰$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا جرم حل‌شونده یا سدیم هیدروکسید حل شده را به دست می‌آوریم:

$$\text{NaOH جرم} = 0.500 \text{ L} \times \frac{2 \text{ mol}}{\text{L}} \times \frac{40 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 40 \text{ g}$$

$$\text{جرم حل‌شونده} = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow 5 = \frac{40 \text{ g NaOH}}{(500 \text{ mL} \times 1/2 \frac{\text{g}}{\text{mL}}) + m \text{ g H}_2\text{O}} \times 100 \Rightarrow m = 200 \text{ g}$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

گزینه ۱: نادرست؛ انحلال‌پذیری گاز CO_2 از انحلال‌پذیری هر دو گاز N_2 و NO بیشتر و مقایسه انحلال‌پذیری آن‌ها چنین است:

زیرا انحلال CO_2 جنبه شیمیایی دارد یعنی انحلال آن همراه با واکنش شیمیایی و تولید یون هیدرونیوم است ولی انحلال دو گاز دیگر فقط جنبه فیزیکی دارد.

گزینه ۲: درست؛ گشتاور دوقطبی CH_4 و CS_2 برابر صفر است. توجه داشته باشید که ساختار CS_2 همانند CO_2 است.

گزینه ۳: نادرست؛ انحلال‌پذیری اغلب گازها با افزایش دما کاهش می‌یابد. از سویی انحلال‌پذیری اغلب نمک‌ها با افزایش دما، افزایش می‌یابد. پس لزوماً ارتباط انحلال‌پذیری آن‌ها مخالف هم نیست.

گزینه ۴: نادرست؛ انتقال پیام‌های عصبی بدون وجود یون پتاسیم امکان‌پذیر نیست و متوقف می‌شود.

۸۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$[\text{HF}]_{\text{باقی‌مانده}} = 0.2 - (0.2 \times \frac{2/4}{1.0}) = 0.1952$$

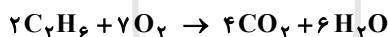
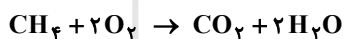
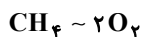
$$[\text{H}^+] = [\text{HCOO}^-] = 0.1 \times \frac{2}{1.0} = 0.02 \Rightarrow [\text{H}^+] + [\text{HCOO}^-] = 2 \times 0.02 = 0.04$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

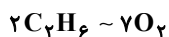
$$\frac{0.1952}{0.04} = 48/8$$

۸۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

نخستین آلکان، گاز متان (CH_4) و دومین آلکان (C_2H_6)، گاز اتان است که معادله سوختن کامل آن‌ها چنین است:جرم متان را برابر m و جرم اتان را m' در نظر می‌گیریم، سپس جرم اکسیژن را بر حسب m و m' به دست می‌آوریم:

$$\frac{m \text{ g}}{16 \text{ g}} = \frac{x}{2 \times 32 \text{ g}} \Rightarrow x = 4m$$



$$\frac{m' \text{ g}}{2 \times 30 \text{ g}} = \frac{x'}{7 \times 32 \text{ g}} \Rightarrow x' = (\frac{7 \times 8}{15})m'$$

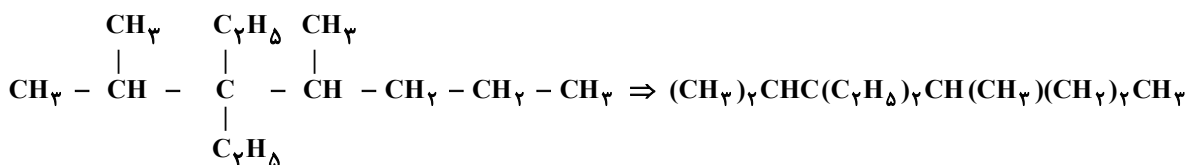
با توجه به داده‌های سؤال، داریم:

$$x = 3x' \Rightarrow 4m = 3(\frac{56}{15})m' \Rightarrow m = 3(\frac{14}{15})m' \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{42}{15} = 2/8$$

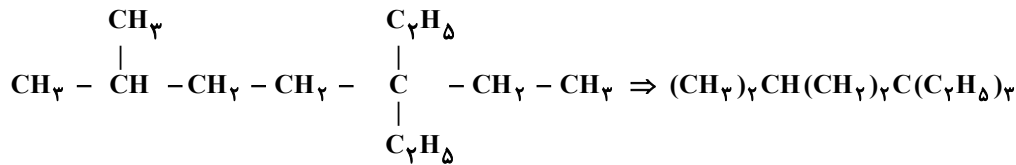
۸۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

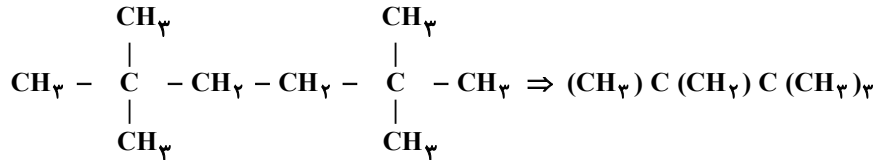
گزینه ۱: نادرست؛ فرمول فشرده اشتباه رسم شده است.



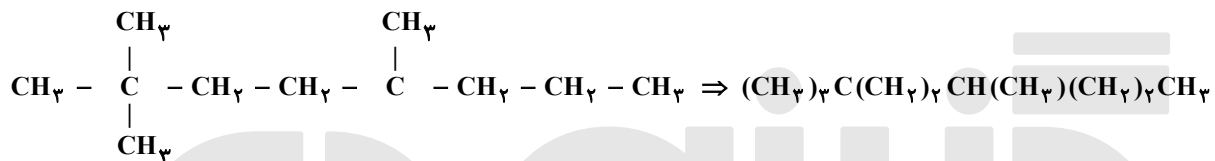
گزینه ۲: نادرست؛ فرمول فشرده درست رسم شده است و شمار گروه‌های CH_2 در آن برابر ۵ است؛ زیرا در هر گروه C_2H_5 - یک گروه CH_2 - وجود دارد.



گزینه ۳: درست؛ فرمول فشرده درست رسم شده است و شمار گروه‌های CH_2 در آن برابر ۲ است.

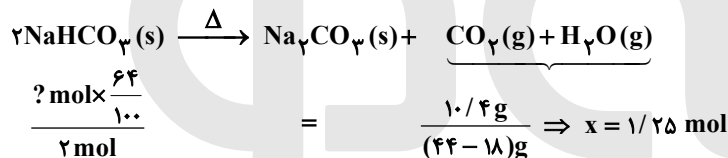


گزینه ۴: نادرست؛ فرمول فشرده اشتباه رسم شده است.



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۷- پاسخ: گزینه ۲



▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱) و شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۸- پاسخ: گزینه ۴

شمار الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر X از دسته s می‌تواند ۱ یا ۲ باشد که در این صورت شمار الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر Y از دسته d باید دو برابر و مساوی ۲ یا ۴ باشد، پس Y می‌تواند عنصر Zn با دو الکترون ظرفیتی و یا Ti با چهار الکترون ظرفیتی باشد. از سویی اتم عنصر X می‌تواند هیدروژن و یا یک فلز قلیایی باشد و یا هلیوم یا یک فلز قلیایی خاکی باشد.

گزینه ۱: نادرست؛ اگر X اتم هیدروژن باشد، در واکنش با گاز کلر الکترون مبادله نمی‌شود. همچنین اگر X اتم هلیوم باشد، اتم هلیوم با کلر واکنش نمی‌دهد.

گزینه ۲: نادرست؛ حالت فیزیکی هیدروژن و هلیوم گاز است. واکنش‌پذیری X به یقین از Y بیشتر نیست؛ زیرا ممکن است X هلیوم باشد که از واکنش‌پذیری برخوردار نیست.

گزینه ۳: نادرست؛ اگر X اتم هیدروژن یا هلیوم باشد، آنگاه بالاترین عدد اکسایش آن‌ها برابر ۲ نیست و به ترتیب برابر +۱ و صفر است.

گزینه ۴: درست؛ اگر هر دو عنصر X و Y در دوره چهارم جدول تناوبی باشند، آنگاه عدد اتمی آن‌ها به ترتیب برابر ۱۹ (K)، ۲۰ (Ca)، ۲۲ (Ti) و ۳۰ (Zn) است که در نتیجه تفاوت عدد اتمی آن‌ها حداقل برابر ۲ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

۸۹- پاسخ: گزینه ۱



(مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها) - (مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها) = آنتالپی واکنش

$$-92 = \left[\underbrace{2(\text{N} \equiv \text{N}) + 6(\text{H} - \text{H})}_x \right] - [6(\text{N} - \text{H})]$$

$$-92 = x - (6 \times 390) \Rightarrow x = 2248 \text{ kJ}$$

مقدار x برابر مجموع آنتالپی یک مول پیوند در N_2 و سه مول پیوند در H_2 است. اکنون این مقدار را برای $0.2x$ یا همان خواسته سؤال یعنی

0.2 مول پیوند در N_2 و 0.6 مول پیوند در H_2 محاسبه می‌کنیم:

$$0.2 \times 2248 \text{ kJ} = 449.6$$

۹۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

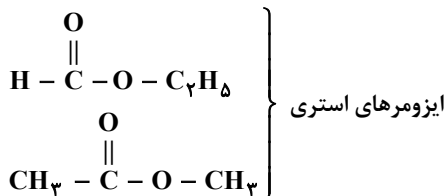
فرمول مولکولی $C_3H_6O_2$ را در صورت غیرحلقوی بودن می‌توان به کربوکسیلیک اسید و یا استر با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده نسبت داد؛ بنابراین:

گزینه ۱: نادرست؛ باید اشاره شود که کربوکسیلیک اسید است و نه هر اسیدی!

گزینه ۲: درست

گزینه ۳: درست؛ شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در تمام ایزومرهای اسیدی و استری برابر است.

گزینه ۴: درست؛ نیروی بین مولکولی در ایزومرهای کربوکسیلیک اسید از نوع پیوند هیدروژنی و در ایزومرهای استری از نوع واندروالسی است.



۹۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)



شمار مول‌های اولیه: ۲ mol

تغییر مول‌ها: -۲x

+۴x

+x

شمار مول‌ها در ۲۰s: ۲ - ۱ = ۱

۲

۰/۵

پس مجموع شمار مول‌های گازی درون ظرف برابر ۳/۵ مول است که برای محاسبه مجموع غلظت مولی گازها باید حجم ظرف را نیز به دست آوریم که با توجه به اینکه ۰/۵ مول O_2 در مدت ۲۰ ثانیه تولید شده است و سرعت تولید آن نیز گزارش شده است، پس:

$$\frac{0.5 \text{ mol } O_2}{20 \text{ s}} \times \frac{L \cdot \text{min}}{0.6 \text{ mol } O_2} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 2.5 \text{ L}$$

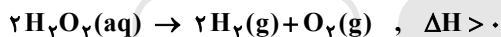
در پایان مجموع غلظت مولی گازها برابر می‌شود با:

$$\frac{3.5 \text{ mol}}{2.5 \text{ L}} = 1.4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

۹۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

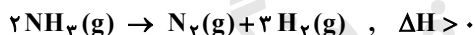
گزینه ۱: نادرست؛ تجزیه هیدروژن پراکسید، گرماگیر است ولی با افزایش شمار مول‌های گازی فرآورده‌ها همراه است.



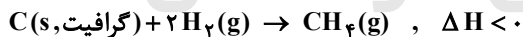
گزینه ۲: درست



گزینه ۳: نادرست؛ واکنش تجزیه آمونیاک به عنصرهای سازنده‌اش با افزایش شمار مول‌های گازی فرآورده همراه است.



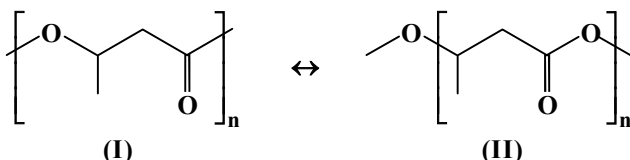
گزینه ۴: نادرست؛ تشکیل متان از گرافیت و هیدروژن، گرماده است.



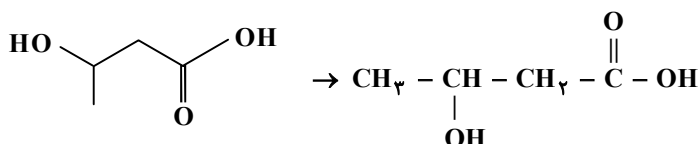
۹۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

پلیمر نشان داده شده نوعی پلی‌استر است که واحد سازنده یا مونومر آن دارای هر دو گروه هیدروکسیل ($-OH$) و کربوکسیل ($-COOH$) بوده است.



برای به دست آوردن مونومر کافیست که در ساختار (I) اتم O را به OH و C را به $C=O$ تبدیل کنیم.



گزینه ۱: نادرست؛ جرم مولی مونومر آن برابر $104 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ و جرم مولی ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید یک عاملی یا متانویک اسید یا فرمیک اسید با فرمول HCOOH برابر $46 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است که نسبت $2 \neq \frac{104}{46}$ است.

گزینه ۲: نادرست؛ این پلیمر از یک نوع مونومر ساخته شده است که در ساختار خود دو گروه عاملی دارد.

گزینه ۳: نادرست؛ مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در فرمول مونومر آن که به صورت $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}_z$ است برابر -2 است.

$$4C + 8(+1) + 3(-2) = 0 \Rightarrow 4C = -2$$

گزینه ۴: درست

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۴- پاسخ: گزینه ۳

در ساخت منبع بزرگ پلاستیکی از پلی اتن (از نوع سنگین که البته در سؤال مورد پرسش قرار نگرفته است) و تأیر خودرو از پلی آمید استفاده می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۱: درست؛ در خنثی شدن شمار مول‌های H^+ و OH^- برابر می‌شود. شمار مول‌های H^+ در ظرف (I) برابر است با:

$$0.5 \text{ mol} \times 0.1 \text{ M} \times 0.5 \text{ L}$$

گزینه ۲: درست؛ حاصل ضرب $[\text{H}^+]$ در $[\text{OH}^-]$ همواره در دمای اتاق برابر 10^{-14} است.

گزینه ۳: نادرست؛ در خنثی شدن باید شمار مول‌های H^+ و OH^- برابر شود.

گزینه ۴: درست

$$\frac{n_1 M_1 V_1}{\text{HCl}} = \frac{n_2 M_2 V_2}{\text{NaOH}} \Rightarrow 1 \times 0.1 \times 0.5 = 1 \times M_2 \times 0.25 \Rightarrow M_2 = 0.2 \Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{0.2}{0.1} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۶- پاسخ: گزینه ۱

فرمول شیمیایی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیر شده به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{COONa}$ و فرمول شیمیایی پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیر شده به صورت $\text{C}_m\text{H}_{2m+1}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$ است. با توجه به داده‌های سؤال، تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در پاک‌کننده صابونی و اتم‌های هیدروژن در حلقه بنزنی $(-\text{C}_6\text{H}_4-)$ برابر ۳۱ است، پس:

$$2n + 1 = 35 \Rightarrow \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}$$

گزینه ۱: درست؛ جرم مولی پاک‌کننده صابون $306 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

گزینه ۲: نادرست؛ شمار اتم‌های کربن در زنجیر هیدروکربنی پاک‌کننده غیرصابونی (m) مشخص نیست.

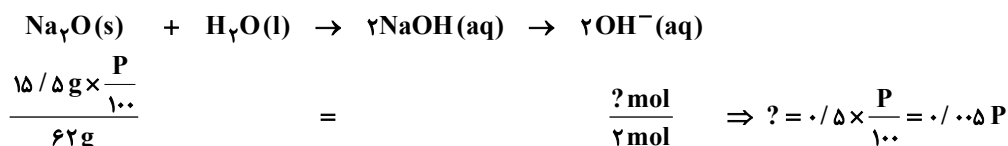
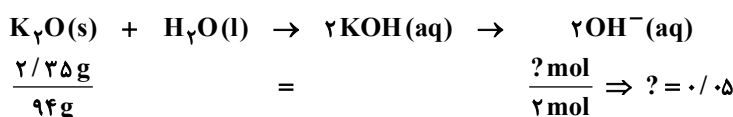
گزینه ۳: نادرست؛ با توجه به مشخص نبودن m در پاک‌کننده غیرصابونی نمی‌توان در مورد جرم مولی آن اظهار نظر دقیقی کرد.

گزینه ۴: نادرست؛ تفاوت شمار اتم‌های کربن در دو پاک‌کننده مشخص نیست؛ زیرا مقدار m نامعلوم است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۷- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با توجه به معادله دو واکنش مقدار مول OH^- تولید شده در هر واکنش را به دست می‌آوریم:



اکنون با توجه به pH محلول و حجم آن، مقدار مول کل یون OH^- را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{pH} = 13/7 \Rightarrow \text{pOH} = 14 - 13/7 = 0.3 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-0.3} = 10^{-1} \times 10^{0.7} = 10^{-1} \times 5 = 0.5 \text{ M}$$

$$\text{mol OH}^- = 0.5 \text{ M} \times 0.5 \text{ L} = 0.25$$

در پایان باید مجموع مول‌های OH^- تولید شده در دو واکنش با ۰/۲۵ برابر باشد:

$$0.25 = 0.05 + 0.005 P \Rightarrow P = 40$$

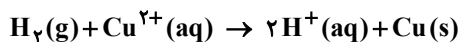
۹۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

گزینه ۱: درست؛ در واکنش «اکسایش - کاهش» میان دو اتم نافلز مانند واکنش کلی سلول سوختی الکترونی میان گونه‌های اکسند و کاهنده مبادله نمی‌شود.

گزینه ۲: نادرست؛ در یک واکنش اکسایش - کاهش همانند معادله کلی واکنش در بسیاری از سلول‌های گالوانی دو گونه فلزی نقش اکسند و کاهنده را دارند و آنیون‌ها (نافلزها) یون ناظر هستند و در واکنش نقشی ندارد.

گزینه ۳: نادرست؛ اگر به‌طور خاص یک یون فلز در واکنش شرکت داشته باشد ممکن است، یون فلز با گرفتن الکترون به اتم فلزی در فرآورده‌ها تبدیل شود. مانند:



گزینه ۴: نادرست؛ واکنش اکسایش - کاهش لزوماً ارتباطی با حالت فیزیکی مواد شرکت‌کننده در واکنش ندارد.

۹۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

با توجه به شکل‌های داده‌شده در سلول (۱) حرکت الکترون در مدار بیرونی از X به Cu است، پس X آند و Cu کاتد است ولی در سلول (۲) حرکت الکترون در مدار بیرونی از Cu به Y است، پس Cu آند و Y کاتد است؛ بنابراین مقایسه قدرت کاهندگی این سه تیغه چنین است:



گزینه ۱: نادرست؛ مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون مربوط به این سه الکتروود فلزی چنین است:



برای مقایسه قدرت اکسندگی X^{n+} و S^{2+} با توجه به سلول (۱) ابتدا پتانسیل کاهش X را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{emf (۱)} = E^\circ(\text{Cu}) - E^\circ(\text{X}) \Rightarrow 1/0.8 = 0/34 - E^\circ(\text{X}) \Rightarrow E^\circ(\text{X}) = -0/74$$

پس قدرت کاهندگی X از Sn بیشتر و قدرت اکسندگی X^{n+} از Sn^{2+} کمتر است:



گزینه ۲: نادرست

$$\text{emf (۲)} = E^\circ(\text{Y}) - E^\circ(\text{Cu}) \Rightarrow 0/46 = E^\circ(\text{Y}) - 0/34 \Rightarrow E^\circ(\text{Y}) = 0/8$$

بنابراین emf سلول گالوانی تشکیل شده از دو نیم‌سلول X و Y که در آن X با پتانسیل منفی‌تر، نقش آند و Y با پتانسیل مثبت‌تر، نقش کاتد را دارد برابر است با:

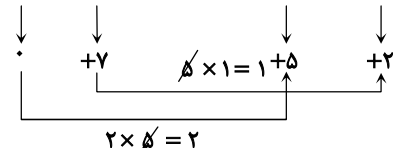
$$\text{emf} = E^\circ(\text{Y}) - E^\circ(\text{X}) = 0/8 - (-0/74) = 1/54$$

گزینه ۳: نادرست؛ اگر در سلول (۱) به‌جای نیم‌سلول X، نیم‌سلول Sn قرار گیرد تغییری در جهت جریان ایجاد نمی‌شود؛ زیرا همچنان Sn از Cu کاهنده‌تر است، ولی در سلول (۲) جهت جریان برعکس می‌شود.

گزینه ۴: درست؛ اگر تغییر جرم تیغه مس در هر دو سلول برابر باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو سلول نیز برابر است؛ زیرا هر Cu^{2+} با گرفتن ۲ الکترون و یا هر اتم Cu با از دست دادن ۲ الکترون در واکنش شرکت می‌کند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۳

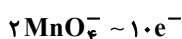


ابتدا تغییر عدد اکسایش دو گونه کاهنده و اکسند را به‌دست می‌آوریم. سپس در زیروند مربوط به آن‌ها ضرب می‌کنیم. اگر دو عدد به‌دست آمده قابل ساده شدن باشند، آن‌ها را ساده می‌کنیم. در پایان دو عدد به‌دست آمده را به شکل ضربدری در سمت چپ جابه‌جا می‌کنیم.



مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنه برابر ۱۳ است.

یون MnO_4^- اکسند است، پس:



$$\frac{0/4 \text{ mol}}{2 \text{ mol}} = \frac{? \text{ mol}}{10 \text{ mol}} \Rightarrow ? = 2$$

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

- گزینه ۱: درست؛ آنتالپی فروپاشی LiF از KBr بیشتر است.
 گزینه ۲: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی MgO از AlF₃ کمتر است.
 گزینه ۳: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی KBr از NaCl کمتر است.
 گزینه ۴: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی CaO از Al₂O₃ کمتر است.

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

$$100 \times \frac{\text{جرم آب افزوده شده} + \text{جرم آب در نمونه اولیه}}{\text{جرم آب افزوده شده} + \text{جرم نمونه اولیه}} = \text{درصد جرمی آب در نمونه جدید}$$

$$20 = \frac{10 + m}{100 + m} \times 100 \Rightarrow 2000 + 20m = 1000 + 100m \Rightarrow 1000 = 80m \Rightarrow m = 12.5$$

$$\text{درصد جرمی سیلیس در نمونه جدید} = \frac{\text{جرم سیلیس}}{\text{جرم آب افزوده شده} + \text{جرم نمونه اولیه}} \times 100 = \frac{36 \text{ g}}{(100 + 12.5) \text{ g}} \times 100 = 22\%$$

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

- گزینه ۱: نادرست؛ هر دو تغییر بیان شده تعادل را در جهت برگشت جابه‌جا می‌کنند.
 گزینه ۲: نادرست؛ هر چند که خارج کردن مقداری Cl₂ سبب می‌شود که تعادل در جهت تولید فراورده‌ها جابه‌جا شوند ولی مقدار Cl₂ در تعادل جدید از مقدار آن در تعادل اولیه کمتر خواهد بود؛ زیرا جابه‌جایی تعادل بخشی از مقدار خارج شده را جبران می‌کند. همچنین افزودن SO₂ نیز سبب جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود.
 گزینه ۳: نادرست؛ تعادل گرماگیر است، پس کاهش دما سبب جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود.
 گزینه ۴: درست؛ افزایش دما سبب می‌شود که تعادل گرماگیر در جهت رفت و تولید فراورده‌ها جابه‌جا شود. همچنین کاهش حجم ظرف سبب می‌شود که غلظت مولی تمام گونه‌های گازی موجود در تعادل افزایش یابد.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

- گزینه ۱: نادرست؛ هر چه فاصله قله تا واکنش‌دهنده‌ها کمتر باشد، فقط می‌توان گفت که مقدار انرژی فعال‌سازی کمتر است و در مورد ΔH واکنش و در نتیجه مجموع آنتالپی‌های پیوند مواد نمی‌توان اظهار نظر کرد.
 گزینه ۲: نادرست؛ هر چه فاصله قله تا فراورده‌ها کمتر باشد، تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها با سطح انرژی فراورده‌ها بیشتر است و ΔH واکنش مثبت‌تر است.

گزینه ۳: درست؛ هر چه فاصله قله تا واکنش‌دهنده‌ها بیشتر باشد، مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش بیشتر است.

- گزینه ۴: نادرست؛ هر چه فاصله قله تا فراورده‌ها بیشتر باشد، مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش در جهت برگشت بیشتر است ولی در مورد گرمای آزاد شده از واکنش نمی‌توان اظهار نظر درستی کرد؛ زیرا گرمای آزاد شده در واکنش به اختلاف سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وابسته است.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

ابتدا در دمای b°C مقدار فراورده HI را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c} \text{H}_2(\text{g}) + \text{I}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{HI}(\text{g}) \\ \text{در لحظه تعادل} \quad 1-x \quad 1-x \quad 0+2x \end{array}$$

$$4 = \frac{(2x)^2}{(1-x)^2} \Rightarrow 2 = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow 2-2x=2x \Rightarrow x=0.5 \Rightarrow \text{بازده درصدی} = \frac{0.5}{1} \times 100 = 50\%$$

(توجه داشته باشید که در محاسبات K حجم ظرف بی‌تأثیر است؛ زیرا مجموع مول‌های گازی دو سمت تعادل برابر است.)

بازده درصدی در دمای b°C برابر ۵۰٪ است؛ زیرا تنها نیمی از واکنش‌دهنده‌ها مصرف شده‌اند.

اکنون بازده درصدی را در دمای a°C به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c} \text{H}_2(\text{g}) + \text{I}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{HI}(\text{g}) \\ \text{در لحظه تعادل} \quad 1-x \quad 1-x \quad 0+2x \end{array}$$

$$0.01 = \frac{(2x)^2}{(1-x)^2} \Rightarrow 0.1 = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow 0.1-0.1x=2x \Rightarrow 2/1x=0.1 \Rightarrow x=\frac{1}{21} \Rightarrow \text{بازده درصدی} = \frac{21}{1} \times 100 = \frac{100}{21}\%$$

اکنون نسبت بازده درصدی واکنش را در دو دمای a و b به دست می‌آوریم:

$$\frac{50}{100} = \frac{21}{2} = 10.5$$

$$21$$