

پاسخ تشریحی سوالات کنکور ریاضی سراسری – تیر ۱۴۰۴ (نوبت دوم)

سوال ۱: گزینه ۲

۱- کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟

- (۱) $a, a^2, a^3, \dots$ (۲) $a, 1, \frac{1}{a}, \dots$ (۳) $a^2, a, 1, \dots$ (۴) $1, a, a^2, \dots$

سوال ۲: گزینه ۴

۲- مقدار عبارت $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

- (۱) $0.1\sqrt{5}$ (۲) $0.2\sqrt{5}$ (۳) $0.3\sqrt{5}$ (۴) $0.6\sqrt{5}$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)}{((2x + 1)^2)^2} = \frac{3(2x + 1)^3}{(2x + 1)^4} = \frac{3}{2x + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) + 1} = \frac{3}{\sqrt{5} - 1 + 1} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = 0.6\sqrt{5}$$

سوال ۳: گزینه ۳

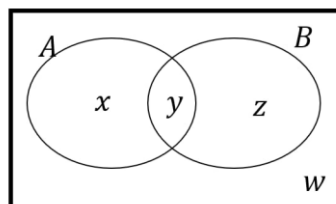
۳- ساده‌شده عبارت $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ کدام است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) B (۴) A

مثال می‌زنیم:

$$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A) = \{z\} \cup [(\{y\} - \{x, w\}) \cap \{x, y, z\}] =$$

$$\{z\} \cup [\{y\} \cap \{x, y, z\}] = \{z\} \cup \{y\} = \{y, z\} = B$$



سوال ۴: گزینه‌ی ۱

۴- گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \quad (۲)$$

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad (۱)$$

$$\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad (۴)$$

$$\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad (۳)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \equiv p \Rightarrow (\sim q \vee r) \equiv$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$$

سوال ۵: گزینه‌ی ۳

۵- نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطه

$S(b, b-2)$ رأس این سهمی باشد، فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\frac{13}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{4} \quad (۱)$$

نقاط A و B هم‌عرض هستند. پس میانگین طول‌ها برابر طول راس سهمی است:

$$x_s = b = \frac{(7-2a) + (2a+3)}{2} = 5 \Rightarrow S(5, 3)$$

گفته شد مؤلفه‌های نقاط A و B طبیعی هستند، پس:

$$7-2a > 0 \Rightarrow a < 3.5$$

$$2a+3 > 0 \Rightarrow a > -1.5$$

$$a-2 > 0 \Rightarrow a > 2$$

اشتراک همگی به ما $a = 3$ می‌دهد و داریم $A(9, 1)$ و $B(1, 1)$ و داشتیم $S(5, 3)$ پس دهانه‌ی سهمی رو به پایین است. بنابراین معادله‌ی سهمی به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x-5)^2 = -4a(y-3)$$

نقطه‌ی $B(1, 1)$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(1-5)^2 = -4a(1-3) \Rightarrow 16 = 8a \Rightarrow a = 2$$

$$(x-5)^2 = -8(y-3)$$

می‌گذاریم $x = 0$:

$$(0-5)^2 = -8(y-3) \Rightarrow 25 = -8y + 24 \Rightarrow y = -\frac{1}{8}$$

سوال ۶: گزینه‌ی ۱

۶- اگر عکس مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $-4ax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$ برابر $\log 4$ و a واسطه حسابی b و c باشد،

مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

$\sqrt{10}$ (۴)

$\sqrt[4]{10}$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt[4]{5}$ (۱)

$$-4ax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$$

$$[2a = b + c] \Rightarrow b = 2a - c$$

$$\frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{1}{S} = \frac{4a}{b} = \frac{4a}{2a - c} = \log 4 = 2 \log 2$$

$$\frac{2a}{2a - c} = \log 2 \Rightarrow \frac{2a - c}{2a} = \log_2 10 \Rightarrow 1 - \frac{c}{2a} = \log_2 10 \Rightarrow 1 - \log_2 10 = \frac{c}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 - \log_2 10 = \frac{c}{a}] \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^{2 - \log_2 10} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{2 - \log_2 10} = \left(2^{\frac{c}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(2^{2 - \log_2 10}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2^{\log_2 10}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{10}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = (2.5)^{\frac{1}{2}} = (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$$

سوال ۷: گزینه‌ی ۲

۷- اگر معادله $|4x - 2| = x^2 - x + a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله کدام است؟

$5/5$ (۴)

5 (۳)

$4/5$ (۲)

4 (۱)

باید نقطه‌ی شکستگی تابع قدرمطلق روی سهمی باشد: $(\frac{1}{4}, 0)$ و جایگذاری می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = |4x - 2|$$

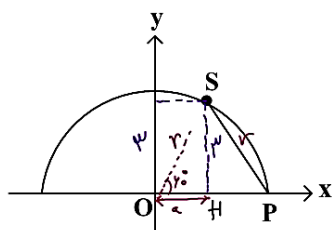
$$x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 4x - 2 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow$$

گزینه ۱ و ۳ نمی‌شود چون صحیح هستند و در معادله $\frac{9}{4}$ داریم. گزینه‌ی ۲ و ۴ را امتحان می‌کنیم:

گزینه‌ی $4/5 = \frac{4}{5}$ می‌شود. (نیازی به حل معادله‌ی دوم نیست چون در هر صورت $x \leq \frac{1}{4}$ است.)

سوال ۸: گزینه‌ی ۳

۸- نقطه $S(a, 3)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$OSH = 30^\circ \Rightarrow 2a = r \Rightarrow 3^2 + a^2 = (2a)^2 \Rightarrow 3a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

سوال ۹: گزینه‌ی ۲

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x+4 & f(x) \geq 0 \\ x-4 & f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $fg(-4)$ کدام است؟

(۱) ۱۹ (۲) ۹ (۳) -۱۵ (۴) -۵

ببینیم کی $f(x) \geq 0$ و $f(x) \leq 0$ است:

به ازای $x > 2$ ، $f(x) = x + 1$ همواره مثبت است.

به ازای $x \leq 2$ ، $f(x) = -3x + 7$ همواره مثبت است.

پس همواره $f(x) > 0$ است، بنابراین ضابطه‌ی دوم تابع $g(x)$ اصلاً اتفاق نمی‌افتد و داریم:

$$g(x) = -x + 4; D_g = \mathbb{R}$$

$$f(g(-4)) = f(4 + 4) = f(8) = 8 + 1 = 9$$

سوال ۱۰: گزینه ۴

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10$ در یک همسایگی از a ، وارون پذیر است. اگر $\text{fof}(a) = a$ باشد،

مقدار $f(a - 9)$ کدام است؟

۳۴ (۴)

۳۲ (۳)

۲۷ (۲)

۲۵ (۱)

$$f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 10 = 6x - (x + 2)\sqrt{x} + 10$$

اینکه $f \circ f(a) = a$ است یعنی می توان گفت در همسایگی a ، $f^{-1}(x) = f(x)$ است.

$$f(a) = f^{-1}(a) = a$$

$$f(a) = 6a - (a + 2)\sqrt{a} + 10 = a$$

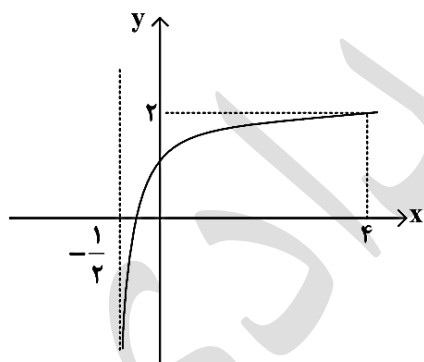
$$5a + 10 - (a + 2)\sqrt{a} = 0 \Rightarrow 5(a + 2) - (a + 2)\sqrt{a} = 0 \Rightarrow (a + 2)(5 - \sqrt{a}) = 0$$

$a = 25$ قابل قبول است و چون -2 در دامنه ی f تابع نیست:

$$f(25 - 9) = f(16) = 96 - 4(18) + 10 = 34$$

سوال ۱۱: گزینه ۱

۱۱- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ را نشان می دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟



$-\frac{4}{9}$ (۱)

$-\frac{2}{9}$ (۲)

$-\frac{5}{18}$ (۳)

$-\frac{7}{18}$ (۴)

مجانِب عمودی درون لگاریتم را صفر می کند:

$$a\left(\frac{-1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow 2b = a$$

$$f(4) = \log_3(4a + b) = 2 \Rightarrow 4a + b = 9 \Rightarrow 8b + b = 9 \Rightarrow b = 1 \text{ و } a = 2$$

$$f(x) = \log_3(2x + 1) = -2 \Rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{9} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{-4}{9}$$

سوال ۱۲: گزینه ۴

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(\sqrt{1+\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha})(1+\cos \alpha)$ کدام

است؟

- (۱) $\cos \alpha$ (۲) $\sin \alpha$ (۳) $-\cos \alpha$ (۴) $-\sin \alpha$

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) &= (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) = \\ (1 + \cos \alpha) \left(\left| \frac{1}{\sin \alpha} \right| + \frac{1}{\tan \alpha} \right) &= (1 + \cos \alpha) \left(\frac{-1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(\frac{-1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ &= \frac{(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha \end{aligned}$$

سوال ۱۳: گزینه ۱

۱۳- اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{15}$ (۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

سعی کنیم رابطه‌ای بین 12° و 18° با زوایایی که می‌شناسیم پیدا کنیم: مثلاً $12^\circ + 18^\circ = 30^\circ$

$$\tan(\alpha + 12^\circ + 18^\circ - 18^\circ) = \tan((\alpha - 18^\circ) + 30^\circ) = \frac{\tan(\alpha - 18^\circ) + \tan 30^\circ}{1 - \tan(\alpha - 18^\circ) \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

می‌گیریم: $A = \tan(\alpha - 18^\circ)$

$$\frac{A + \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 4A + \frac{4}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3} - A \Rightarrow 5A = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A = \tan(\alpha - 18^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{15}$$

$$\Rightarrow \cot(\alpha - 18^\circ) = -\cot(18^\circ - \alpha) = \frac{-1}{\tan(\alpha - 18^\circ)} = \frac{-1}{\frac{-\sqrt{3}}{15}} = \frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

سوال ۱۴: گزینه‌ی ۲

۱۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{3}\cos(210^\circ)\sin(243^\circ) - \sqrt{2}\sin(135^\circ)\cos(153^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟
 (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{0}{5}$

$$A = \sqrt{3}\cos(210^\circ)\sin(243^\circ) - \sqrt{2}\sin(135^\circ)\cos(153^\circ) =$$

$$\sqrt{3}\cos(180^\circ + 30^\circ)\sin(270^\circ - 27^\circ) - \sqrt{2}\sin(90^\circ + 45^\circ)\cos(180^\circ - 27^\circ) =$$

$$\sqrt{3}(-\cos 30^\circ)(-\cos 27^\circ) - \sqrt{2}(\sin 45^\circ)(-\cos 27^\circ) =$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\cos 27^\circ) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\cos 27^\circ) = \frac{5}{2}(\cos 27^\circ)$$

سوال ۱۵: گزینه‌ی ۳

۱۵- معادلهٔ مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازهٔ $(0, \pi)$ دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

$$\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi = 0$$

$$\tan 3x = -\tan 2x = \tan(-2x)$$

$$3x = -2x + k\pi \Rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{5} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4$$

سوال ۱۶: گزینه‌ی ۳

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

(۱) $\sqrt{\frac{2}{a}}$ (۲) $\sqrt{\frac{2}{3a}}$ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

باید عامل $x = 3a$ از صورت و مخرج ساده شود:

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{(x+3a)(x-3a)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{(x+3a)(x-3a)}} + \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x^2-9a^2}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2}{\sqrt{(x+3a)}} + \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x^2-9a^2}} \times \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{3a})} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2}{\sqrt{(x+3a)}} + \frac{3(x-3a)}{(\sqrt{x} + \sqrt{3a}) \times \sqrt{(x+3a)} \times \sqrt{(x-3a)}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2}{\sqrt{(x+3a)}} + \frac{3\sqrt{(x-3a)}}{(\sqrt{x} + \sqrt{3a}) \times \sqrt{(x+3a)}} \right) = \frac{2}{\sqrt{(3a+3a)}} + \frac{3\sqrt{(3a-3a)}}{(\sqrt{3a} + \sqrt{3a})\sqrt{(3a+3a)}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{(3a+3a)}} + 0 = \frac{2}{\sqrt{6a}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6a}} = \sqrt{\frac{4}{6a}} = \sqrt{\frac{2}{3a}}$$

سوال ۱۷: گزینه‌ی ۱

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a} \right]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

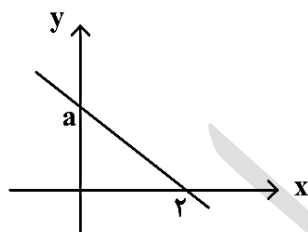
اینکه گفته نشده از چه سمتی به $x = \sqrt[3]{4}$ نزدیک شده، پس یعنی حد چپ و حد راست $+\infty$ می‌شود. توجه کنید صورت همواره مثبت است، پس مخرج چه در حد چپ و چه در حد راست، برابر 0^+ می‌شود. پس مخرج ریشه‌ی مزدوج دارد که آن ریشه همان $x = \sqrt[3]{4}$ است. پس:

$$(x - \sqrt[3]{4})^2 = x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{4} = x^2 + ax + b$$

$$a = -2\sqrt[3]{4}, b = 2\sqrt[3]{4} \Rightarrow \left[\frac{b}{a} \right] = \left[\frac{2\sqrt[3]{4}}{-2\sqrt[3]{4}} \right] = \left[-\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} \right] = \left[-\frac{1}{1} \right] = \left[-1 \right] = -1$$

سوال ۱۸: گزینه‌ی ۲

۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح a کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $1 + \sqrt{2}$
(۳) $-1 + \sqrt{2}$
(۴) $2\sqrt{2}$

$$f(x) = \left(\frac{-a}{2} \right) x + a, \quad f^{-1}(x) = \left(\frac{-2}{a} \right) x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{-2}{a} \right) x + 2}{\left| 2 \left(\left(\frac{-a}{2} \right) x + a \right) - a \left(\left(\frac{-2}{a} \right) x + 2 \right) \right|} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{-2}{a} \right) x + 2}{|(-ax + 2a) + (2x - 2a)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{-2}{a} \right) x + 2}{|(2 - a)x|} = \frac{-2}{a - 2} \div \frac{-2}{2 - a}$$

$$\blacksquare \frac{-2}{a - 2} = \frac{-2}{a(a - 2)} = 2 \Rightarrow a(a - 2) = -1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare \blacksquare \frac{2}{a - 2} = \frac{2}{a(a - 2)} = 2 \Rightarrow a(a - 2) = 1 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

سوال ۱۹: گزینه ۴

۱۹- اگر تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases}$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{5}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{2x + a} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - ax} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{2x - a} = \frac{1}{a}$$

$$f(0) = \frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a} \Rightarrow 2a^2 - a = 2a + 2 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$a = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} \quad (\text{با } a = 2 \text{ همواره مخارج ناصفر است.})$$

اگر $a = -\frac{1}{2}$ باشد، مخارج تابع ریشه‌دار شده و از پیوستگی در می‌آید.

سوال ۲۰: گزینه ۳

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \tan \frac{x}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{2}} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2 \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos \pi = -2$$

سوال ۲۱: گزینه ۴

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار

$a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

تابع را یک بار دیگر بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ bx^{\frac{1}{3}} & x \geq 1 \end{cases}$$

تابع قدر مطلق داریم که در $x = 0$ تغییر می کند و همان نقطه‌ی مشتق ناپذیر و تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد. پس دوباره بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & x \leq 0 \\ a + x & 0 \leq x < 1 \\ bx^{\frac{1}{3}} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}b & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = a + 1 = b, \quad f'(1) = 1 = \frac{1}{3}b$$

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$

سوال ۲۲: گزینه ۱

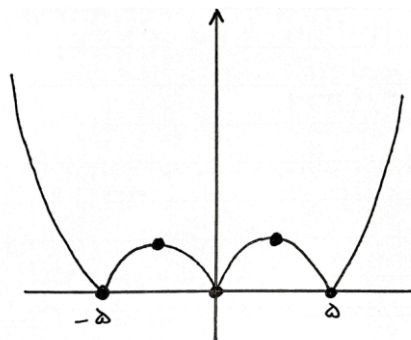
۲۲- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

$$f(x) = x^2 - 5|x| = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 0 \\ x^2 + 5x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{2}{2}$$



سوال ۲۳: گزینه‌ی ۲

۲۳- به ۱۶ داده آماری با واریانس ۴۰، دو داده جدید اضافه می‌کنیم. اگر میانگین داده‌های جدید تغییر نکند ولی واریانس آنها ۱ واحد افزایش یابد، اختلاف دو داده جدید کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

$$\frac{(\sum_{i=1}^{16} x_i)}{16} = \frac{(\sum_{i=1}^{16} x_i) + (a+b)}{18} \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} x_i = 18(a+b) \Rightarrow \bar{x} = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2}{16} = 40 \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2 = 640$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2) + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2}{18} =$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2) + \left(a - \frac{(a+b)}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{(a+b)}{2}\right)^2}{18} =$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2) + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{18} = \frac{640 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{18} = \frac{640 + \frac{(a-b)^2}{2}}{18} = 41$$

$$(a-b)^2 = 196 \Rightarrow a-b = 14$$

سوال ۲۴: گزینه‌ی ۳

۲۴- در یک کلاس ۱۰ نفره که هیچ دو نفری از آنها هم‌قد نیستند دو دانش‌آموز پشت سرهم به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که دومی از اولی کوتاه‌تر است. احتمال اینکه دانش‌آموز اول بلندقدترین عضو کلاس باشد، کدام است؟

۰٫۱ (۴)

۰٫۲ (۳)

۰٫۳ (۲)

۰٫۴ (۱)

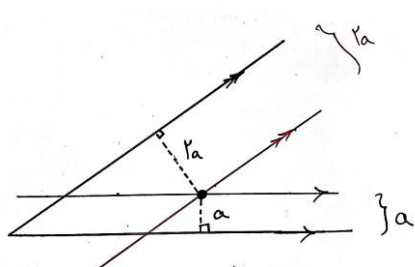
سوال را می‌توانیم معادل عدد ۱ تا ۱۰ در نظر بگیریم. اگر اولی ۱۰ باشد، برای دومی ۹ انتخاب داریم. اگر اولی ۹ باشد، برای دومی ۸ انتخاب داریم و همین‌طور تا اگر اولی ۲ باشد، دومی ۱ است و یک انتخاب داریم. حالت خاص هم وقتی است که اولی ۱۰ باشد، پس برای دومی ۹ انتخاب داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{1}}{\binom{9}{1} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0.2$$

برای مخرج می‌توانستیم بگیریم کلا $10 \times 9 = 90$ انتخاب داریم که نصف آن‌ها دومی کمتر از اولی است.

سوال ۲۵: گزینه ۴

۲۵- با استفاده از کدام روش رسم زیر، می‌توانیم نقطه‌ای در فاصله بین دو ضلع یک زاویه بیابیم به طوری که فاصله آن



نقطه از یک ضلع زاویه دو برابر فاصله آن نقطه از ضلع دیگر زاویه باشد

(۱) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

(۲) رسم خط موازی با نیمساز یک زاویه، از نقطه‌ای روی آن

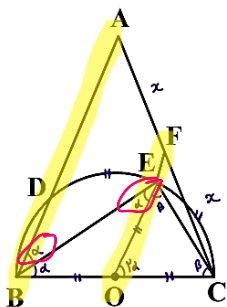
(۳) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

(۴) رسم خط موازی با یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

خطی موازی با یک ضلع و فاصله‌ی a و خط موازی با ضلع دیگر و با اندازه‌ی $2a$ رسم می‌کنیم. محل برخورد جواب مسئله است.

سوال ۲۶: گزینه ۲

۲۶- در شکل زیر، شعاع نیم‌دایره برابر $4/5$ و $EF = 2$ است. اگر $\widehat{DE} = \widehat{EC}$ و $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$ باشد، اندازه‌ی AB کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۳

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

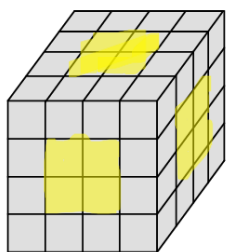
از E به O خطی رسم می‌کنیم. زوایای B و C را به ترتیب α و β می‌نامیم و چون زاویه‌ی E رو به قطر است، پس قائمه است و سایر زوایا رو تکمیل می‌کنیم. می‌بینیم دو زاویه‌ی مشخص شده برابر هستند، پس دو خط $AB \parallel OF$ است و خط BE مورب است. بنابراین:

$$\triangle ABC \sim \triangle OFC \Rightarrow \frac{FC}{AF} = \frac{OF}{AB} \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{2 + 4/5}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6/5}{AB} \Rightarrow AB = 12$$

سوال ۲۷: گزینه ۴

۲۷- تمام وجه‌های مکعب به ابعاد $4 \times 4 \times 4$ شکل زیر، رنگ آمیزی شده است. چند مکعب به ابعاد $1 \times 1 \times 1$ وجود دارد که

فقط یک وجه‌شان رنگ شده است؟



(۱) ۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

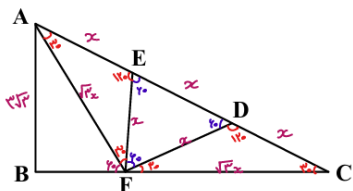
(۴) ۲۴

$$4 \times 6 = 24$$

سوال ۲۸: گزینه‌ی ۳

۲۸- در مثلث شکل زیر، نقاط D و E ضلع AC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مثلث EFD، متساوی‌الاضلاع است.

اگر $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ و $AB = 3\sqrt{3}$ باشد، طول FC کدام است؟



(۱) $4\sqrt{3}$

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) $6\sqrt{3}$

$$AF = FC = 2a = \sqrt{3}x$$

$$BF + FC = BC \Rightarrow BF + 2a = 3a \Rightarrow BF = a$$

فرض کنید $\frac{AF}{BC} = \frac{2a}{3a}$

قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABF:

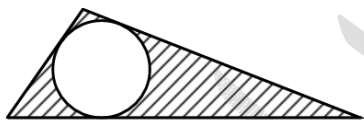
$$(3\sqrt{3})^2 = (a)^2 + (2a)^2 - 2(a)(2a)\cos 60^\circ = (3\sqrt{3})^2 = 5a^2 - 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow a = 3$$

$$FC = 2a = 6$$

سوال ۲۹: گزینه‌ی ۱

۲۹- در شکل زیر، محیط مثلث محیطی $\sqrt{48\pi}$ است. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۳ باشد، مساحت مثلث

محیطی کدام است؟



(۱) ۶

(۲) $6,5$

(۳) $\pi + 3$

(۴) $1,5\pi + 3$

$$P = \sqrt{48\pi} = \sqrt{3 \times 16 \times \pi} = 4\sqrt{3\pi}$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{هاشور}} + S_{\text{دایره}} \Rightarrow 2\sqrt{3\pi}r = 3 + \pi r^2$$

$$S_{\text{کل}} = r(P_{\text{نصف}}) = 2\sqrt{3\pi}r$$

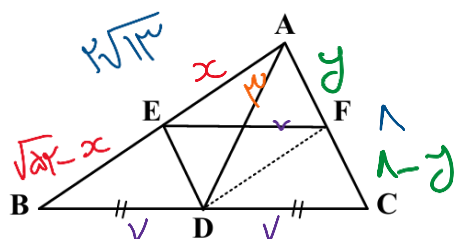
$$S_{\text{دایره}} = \pi r^2$$

$$\pi r^2 - 2\sqrt{3\pi}r + 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

$$S_{\text{کل}} = r(P_{\text{نصف}}) = 2\sqrt{3\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} = 6$$

سوال ۳۰: گزینه‌ی ۴

۳۰- در مثلث ABC، DE نیمساز زاویه $\hat{A}DB$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $AC = ۸$ ، $BC = ۱۴$ و $AD = ۳$ باشد، اندازه



DF کدام است؟

(۱) $\sqrt{۷}$

(۲) $۰.۹\sqrt{۷}$

(۳) $۰.۵\sqrt{۲۱}$

(۴) $۰.۶\sqrt{۲۱}$

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Rightarrow 9 = \frac{AB^2 + 64}{2} - (7)^2 \Rightarrow AB^2 = 52 \Rightarrow \boxed{AB = 2\sqrt{13}}$$

در مثلث ADE و نیمساز داریم:

$$\frac{3}{x} = \frac{7}{2\sqrt{13} - x} \Rightarrow 7x = 6\sqrt{13} - 3x \Rightarrow x = \frac{3}{5}\sqrt{13}$$

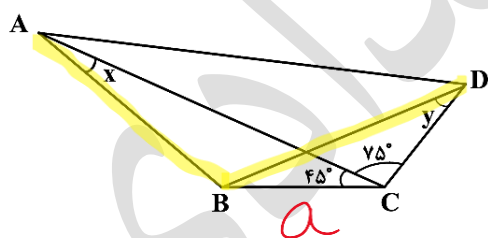
$$EB = 2\sqrt{13} - x = 2\sqrt{13} - \frac{3}{5}\sqrt{13} = \frac{7}{5}\sqrt{13}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{\frac{2}{5}\sqrt{13}}{\frac{7}{5}\sqrt{13}} = \frac{y}{8-y} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{y}{8-y} \Rightarrow y = \frac{12}{5}, \boxed{FC = \frac{28}{5}}$$

$$(DF)^2 = 3 \times 7 - \frac{12}{5} \times \frac{28}{5} = 21 - 13\frac{4}{5} = 7\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{DF = 0.6\sqrt{21}}$$

سوال ۳۱: گزینه‌ی ۳

۳۱- در شکل زیر، اگر $\hat{A}DB = \hat{B}AD$ و $x + y = 90^\circ$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

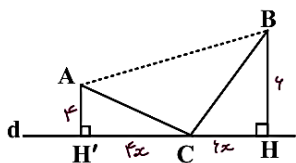
(۴) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$\triangle BCD: \frac{a}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\cos x} = \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{\cos x} = AB}$$

$$\triangle ABC: \frac{a}{\sin x} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

سوال ۳۲: گزینه ۲

۳۲- در شکل زیر، فاصله نقاط A و B از خط d به ترتیب، ۴ و ۶ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت چهارضلعی ABHH' برابر $50\sqrt{3}$ باشد، اندازه CH کدام است؟



(۱) $4\sqrt{3}$

(۲) $6\sqrt{3}$

(۳) $8\sqrt{3}$

(۴) $10\sqrt{3}$

می دانیم مسیر ACB کوتاهترین مسیر است که از طریق بازتاب به دست می آید و دو مثلث $AH'C$ و BCH متشابه هستند. پس:

$$S = \frac{(4+6)(4x+6x)}{2} = \frac{10 \cdot 10x}{2} = 50x = 50\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow CH = 6x = 6\sqrt{3}$$

سوال ۳۳: گزینه ۳

۳۳- اگر $\vec{u}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{v}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $-\vec{b}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تولید می شود، کدام است؟

(۴) ۱

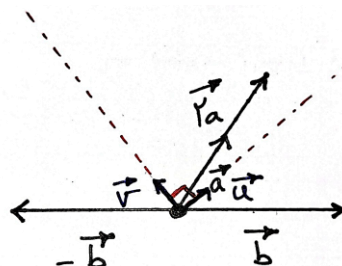
(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

دقت کنید هرچقدر اندازه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تغییر کند، راستای نیمسازها تغییر نمی کند چون با تغییر اضلاع زاویه راستای نیمساز ثابت است و از طرفی، زاویه ای که بین دو نیمساز دو زاویه مکمل ایجاد می شود همواره قائمه است. پس زاویه بین دو بردار $|\vec{u}|$ و $|\vec{v}|$ ، 90° درجه است. چون $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ پس:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$$



سوال ۳۴: گزینه‌ی ۴

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $D = BA^T B$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) -۸ (۴) $-\frac{8}{3}$

$$|D| = |BA^T B| = |B| |A^T| |B| = |A|^T |B|^2$$

$$= \left(-1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^2 (-2 \times 3 \times 4)^2 = \frac{-1}{6^3} \times 24^2$$

$$= -\frac{6^2 \times 4^2}{6^3} = -\frac{4^2}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

سوال ۳۵: گزینه‌ی ۱

۳۵- برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

$$|D| = |BCA| = |B(AB)A| = |BABA| = |BA| |BA| =$$

$$|BA|^2 = 2^2 = 4$$

$$|BA| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2$$

سوال ۳۶: گزینه ۳

۳۶- نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی $x = -y^2 + 5y - 6$ قرار دارد. اگر فاصله نقطه A از کانون سهمی برابر $1/5$ باشد،

مقدار α کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

$$x = -y^2 + 5y - 6 = -(y^2 - 5y + 6)$$

$$y^2 - 5y + \frac{25}{4} = -x + \frac{25}{4} - 6 \Rightarrow \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -x + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \quad S\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right), \quad F\left(0, \frac{5}{2}\right), \quad d: x = \frac{1}{4}$$

سهمی افقی و دهانه به سمت چپ است پس

$$\frac{1}{4} - \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

سوال ۳۷: گزینه ۲

۳۷- اگر عدد طبیعی $a > 3$ اعداد $7m + 2$ و $11m + 4$ را عاد کند، کدام مورد نمی تواند عدد اول بزرگتر از ۳ باشد؟

- (۱) $ak + 1$ (۲) $ak + 3$ (۳) $ak + 5$ (۴) $ak + 7$

$$\begin{cases} a | 7m + 2 \\ a | 11m + 4 \end{cases} \Rightarrow a | 6 \vee a > 3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 6k + 3 = 3q$$

گزینه ۲ مضرب ۳ است پس نمی تواند عدد اولی بزرگتر از ۳ باشد.

سوال ۳۸: گزینه ۴

۳۸- ۱۰ نفر به چند طریق می توانند در پنج اتاق ۲ نفره یکسان واقع در یک هتل اسکان یابند؟

- (۱) ۱۸۹ (۲) ۳۱۵ (۳) ۵۶۷ (۴) ۹۴۵

از ۱۰ نفر، دو نفر دو نفر انتخاب می کنیم که در هر اتاق قرار دهیم. چون اتاق ها یکسان هستند و جابه جایی تاثیری در حالت جدید ندارد، تقسیم بر ۵! می کنیم:

$$\frac{\binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{5!} = \frac{(45)(28)(15)(6)(1)}{5!} = 945$$

سوال ۳۹: گزینه‌ی ۲

۳۹- در کیسه‌ای ۶ گوی آبی، ۵ گوی سبز، ۴ گوی قرمز و ۷ گوی سفید وجود دارد. حداقل چند گوی از کیسه بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۳ گوی آبی یا حداقل ۴ گوی سبز یا حداقل ۲ گوی قرمز یا حداقل ۵ گوی سفید بیرون آورده‌ایم؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۶ آبی ← ۳

۵ سبز ← ۴

۴ قرمز ← ۲

۷ سفید ← ۵

$$(۲ + ۳ + ۱ + ۴) + ۱ = ۱۱$$

سوال ۴۰: گزینه‌ی ۳

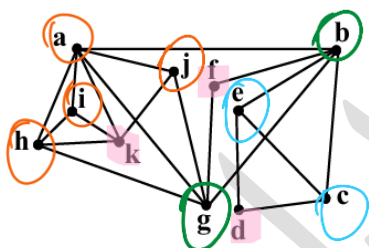
۴۰- در گراف شکل زیر، چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم برای این گراف وجود دارد به‌طوری‌که هر رأس گراف فقط متعلق به یکی از همسایگی‌های بسته‌ی اعضای مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم باشد؟

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

صفر (۴)



مجموعه‌ی $\{k, f, d\}$ این شرط را دارد.

(دقت کنید مجموعه‌های $\{a, f, c\}$, $\{a, f, d\}$, $\{a, f, e\}$ هم احاطه‌گر مینیمم هستند اما مثلاً رأس g با دو رأس a, f احاطه می‌شود که خلاف خواسته‌ی سوال است.)

«در نظر بگیرید پاسخ‌ها برای شفافیت، در طولانی‌ترین حالت نوشته شده است»