۱۱۱) $\sqrt[12]{2^8} \times \underbrace{\sqrt[4]{162}}_{\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{2}=3\sqrt[4]{2}} \times \underbrace{\sqrt{4}}_{2} \times \sqrt{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[12]{2^8} \times 6\sqrt[4]{2} \times \sqrt[12]{2}$

$= 2^{\frac{8}{12}} \times 6 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{12}} = \underbrace{2^{\frac{9}{12}} \times 2^{\frac{1}{4}}}_{2} \times 6 = 12$

خواسته سوال: $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancelto{2}{12}\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$

۲ گزینه

۱۱۲)

$$A = \left[\frac{۴}{m+۱}, +\infty\right)$$

$$B = \left(-\infty, \frac{۵}{m+۲}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{m+۲} < \frac{۴}{m+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۵m+۵ < ۴m+۸ \Rightarrow m < ۳ \Rightarrow \underline{m = ۳, ۲, ۱}$$

۱۱۳) حسابی اند $a, b, c \Rightarrow 2b = a + c$

هندسی اند $b, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}c \Rightarrow \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b \times \frac{1}{4}c \Rightarrow \frac{a^2}{\cancel{4}} = \frac{bc}{\cancel{4}}$

قدر نسبت هندسی $\rightarrow 2r = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}a}{b} = \frac{a}{b} = ?$ $\Rightarrow \boxed{a^2 = bc}$

از طرفی: $2b = a + c \rightarrow 2b = a + \frac{a^2}{b} \rightarrow 2b = \frac{ab + a^2}{b}$

$\rightarrow 2b^2 = ab + a^2 \xrightarrow{\div b^2} 2 = \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \xrightarrow{\frac{a}{b} = A} 2 = A + A^2$

$\rightarrow A^2 + A - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 & \times \\ \frac{a}{b} = -2 & \checkmark \end{cases}$

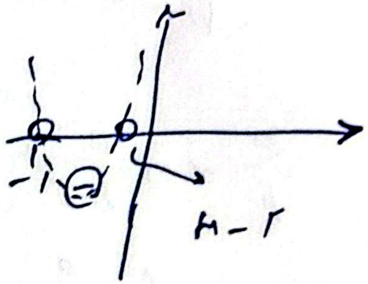
if $\frac{a}{b} = 1 \rightarrow a = b \xrightarrow{\text{پس}} a, a, a \rightarrow d = 0$ دنباله ثابت است $\times$

if $\frac{a}{b} = -2 \rightarrow a = -2b \xrightarrow{\text{پس}} -2b, b, 4b \rightarrow d = 3b$ دنباله حسابی است

گزینه ۴

۱۱) (۴) $(5-2m)x^2-(2m+n-5)x-n<0$

$(-1,\ m-2) \longrightarrow$



پس دهانه سهمی باید رو به بالا باشد؛ یعنی ضریب x^2 باید مثبت باشد. به عبارت دیگر:

$5-2m>0 \to 5>2m \to m<2/5$

چون $m\in \mathbb{N}$ است یا $m=2$ است و یا $m=1$. اگر $m=1$ باشد بازه مورد نظر به صورت $(-1,-1)$ درمی‌آید که غیرقابل قبول است. پس $m=2$ قابل قبول می‌باشد.

$m=2 \longrightarrow x^2-(n-1)x-n<0$

$(-1,0) \Rightarrow S=-1=\dfrac{n-1}{1} \to n-1=-1 \to n=0$

خواسته سوال: $m+n=2+0=2$ (۳) گزینه ۳

۱۱۵)

ارتفاع $= h$

قاعده $= L$

$\Rightarrow h = 3L+2 \Rightarrow S_{\text{اولیه}} = \dfrac{L\times(3L+2)}{2}$

۴ واحد به ارتفاع و قاعده اضافه کنیم. $\Rightarrow$

$h+4$, $L+4 \Rightarrow \begin{cases} 3L+6 \\ L+4 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{جدید}} = \dfrac{(3L+6)(L+4)}{2}$

$$\frac{S_{\text{جدید}}}{S_{\text{قدیم}}} = \frac{9}{2} = \frac{3(L+2)(L+4)}{\underbrace{L(3L+2)}_{3L^2+2L}} = 9L^2+6L = 2(L^2+6L+8)$$

$\rightarrow 9L^2+6L = 2L^2+12L+16 \Rightarrow 7L^2-6L-16=0$

دو

$\rightarrow \Delta = 36-4(-112) = 448+36 = 484$

$\rightarrow \begin{cases} L = \dfrac{6+22}{14} = \dfrac{28}{14} = 2 \\ L = \dfrac{6-22}{14} \ \times \end{cases} \Rightarrow S_{\text{اولیه}} = \dfrac{\cancel{2}\times 8}{\cancel{2}} = 8$

گزینه ۱

---

۱۱۶)

$\underbrace{g(3x)}_{K} + 2f\underbrace{(3+x)}_{3+x} = 3+2x \Rightarrow K + 6 + \cancel{2x} = 3 + \cancel{2x} \rightarrow K = -3$

پس $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = -3 \end{cases} \Longrightarrow$ خواسته سوال: $\dfrac{f(-1)}{g(4)} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

گزینه ۲

---

۱۱۷)

$f(x) = \sqrt{a-x}$

$g(f(x)) = 3-\sqrt{a-x}$

منطبق اند $\Rightarrow f(x) = g(f(x)) \xrightarrow{x=0} f(0) = g(f(0))$

$\Rightarrow \sqrt{a} = 3-\sqrt{a} \rightarrow 2\sqrt{a} = 3 \rightarrow \sqrt{a} = \dfrac{3}{2} \rightarrow a = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$

گزینه ۳

۱۱۸) $36x^2-(m+14)x+1=0$

فرض ریشه‌ها $\alpha, \beta \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}=5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=5 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}=25 \Rightarrow \frac{S}{P}+\frac{2}{\sqrt{P}}=25 \rightarrow \begin{cases} S=\frac{m+14}{36} \\ P=\frac{1}{36} \end{cases}$

$\Rightarrow m+14+\frac{2}{\frac{1}{6}}=25 \rightarrow m+14+12=25 \rightarrow \boxed{m=-1}$

حال: $-x^2+3x+2=0 \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P=\frac{c}{a}=\frac{2}{-1}=-2$ ✓ گزینه ۱

---

۱۱۹) $f^{-1}(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{پس}} f(-\frac{4}{5})=-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \frac{-3}{5}=-1\times\sqrt{a+b(\frac{16}{25})} = \frac{3}{5}=\sqrt{a+\frac{16b}{25}}$ به توان ۲

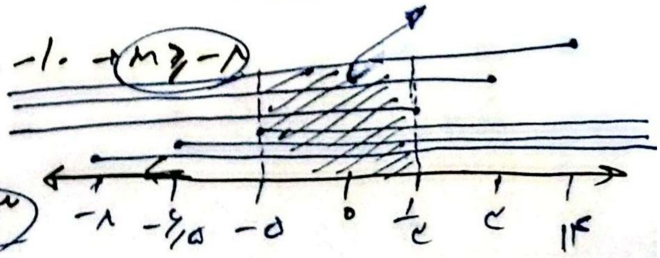
$\frac{9}{25}=a+\frac{16b}{25} \rightarrow \frac{9}{\cancel{25}}=\frac{25a+16b}{\cancel{25}} \rightarrow 25a+16b=9$

$\rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \rightarrow \frac{a}{b}=-1$ گزینه ۴

---

۱۲۰) $\begin{cases} 4-m \geq 2m+3 \rightarrow m\leq \frac{1}{3} \quad 2m+3\geq m-2 \rightarrow m\geq -5 \\ 2m+3\geq -10 \rightarrow m\geq -6.5 \quad m-2\geq -10 \rightarrow m\geq -8 \\ 4-m\geq -10 \rightarrow -m\geq -14 \rightarrow m\leq 14 \\ 4-m\geq m-2 \rightarrow -2m\geq -6 \rightarrow m\leq 3 \end{cases}$

$-5, -4, -3, -2, -1, 0$



۱۲۱) ~~(۲, ۴a~~

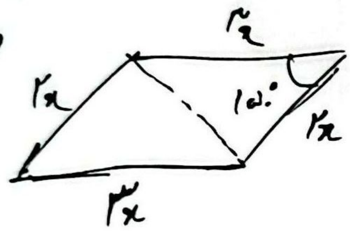
۱۲۱) $(2, a+b) \vee (4b-a, 5) \xrightarrow{\text{آنگاه}} (2,5) - \underbrace{\{a+b, 4b-a\}}_{\text{حذف}}$

پس: $\begin{cases} a+b=4 \\ 4b-a=4 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b=8 \rightarrow \underline{b=1.6}\ ,\ a=4-1.6=\underline{2.4}$

پس: $b-a = 1.6-2.4 = \underline{-0.8}$ ✓ ① گزینه

---

۱۲۲)



$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = 2\, S_{\text{مثلث}} = \cancel{2}\times\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times 3x \times 2x\right)\times \sin 150°$

$\Rightarrow 54 = 6x^2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 3x^2 = 54 \rightarrow x^2 = 18 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{18} = \underline{3\sqrt{2}}$

محیط متوازی الاضلاع $\Rightarrow 3x+2x+2x+3x = 10x = \underline{30\sqrt{2}}$ ✓ ④ گزینه

---

۱۲۳) $\alpha = 22.5°$

$A = \tan(157.5°) - 1 \Rightarrow \underbrace{\tan(180° - 22.5°)}_{-\tan 22.5°} - 1 = -(1+\tan 22.5°)$

$\tan 22.5° = A$

$\rightarrow \tan 45° = \frac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°} \Rightarrow 1 = \frac{2A}{1-A^2} \rightarrow 2A = 1-A^2 \rightarrow A^2+2A-1=0$

$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} \\ A = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} \times \end{cases} \Rightarrow$ پس: $A = -(1\cancel{-1}+\sqrt{2}) = \underline{-\sqrt{2}}$ ۲ گزینه

124) $\sin 2x = \cos(3x) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$

$\rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ ①

$\rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 3x \rightarrow -x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ②

①

x	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$
k	0	1	2	3

②

x	$-\frac{\pi}{2}$	$2\pi-\frac{\pi}{2}$	$4\pi-\frac{\pi}{2}$
k	0	-1	-2

$\rightarrow \{\frac{\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\}$

---

125) $\log_3 7 = 1.8$ $\quad \log_5 2 = 0.5$

$\log_{21} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_3 21} = \frac{1+\log_2 5}{1+\log_3 7}$

$\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{0.5}}{1+1.8} = \frac{1+2}{2.8} = \frac{3}{2.8} = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$

---

126) $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ?$

$\bar{x} = \frac{1.20 + 1.2 + 1}{5} = \frac{5.6}{5} = 1.12$

$\sigma^2 = \frac{(1-1.12)^2 + (1.08-1.12)^2 + (1.2-1.12)^2 + (1.16-1.12)^2 + (1.16-1.12)^2}{5}$

۱۲۶ ادامه $\Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{0/0144 + 0/0016 + 0/0016 + 0/0016 + 0/0064}{5} = \dfrac{0/0256}{5}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{0/0256}{5}} = \dfrac{0/16}{\sqrt{5}}$

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{\frac{0/16}{\sqrt{5}}}{\frac{5/6}{5}} = \dfrac{\overbrace{0/16 \times 5}^{0/8}}{5/6 \times \sqrt{5}} = \underbrace{\dfrac{0/8}{5/6}}_{\frac{1}{7}} \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{7\sqrt{5}}$ ②

---

۱۲۷ $x=2/5$ صفرکننده صورت و مخرج کسر ضابطه بالایی می‌باشد. یعنی:

$\dfrac{3x^2+ax+b}{4x-c} \Rightarrow \dfrac{75}{4} + \dfrac{5}{2}a + b = 0$

$\rightarrow 4(2/5) - c = 0 \Rightarrow \boxed{c=10}$

پس $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+ax+b}{4x-10} & x \geq 1 \\ 4-5x & x<1 \end{cases}$

پایینی
در پیوستگی
$x=1 \rightarrow 4-5(1) = -1$

در پیوستگی بالایی $x=1 \rightarrow \dfrac{3+a+b}{-6} = -1 \rightarrow a+b=3$

۱۲۸

حد چپ = حد راست

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = 2\underbrace{\left[\frac{2-(-2)^-}{2}\right]}_{\underbrace{\left[\frac{4.1}{2}\right]}_{2}} + a\underbrace{\left[\frac{(-2)^-+2}{3}\right]}_{\underbrace{\left[\frac{-0.1}{3}\right]}_{-1}} = 4-a$$

حد راست $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 2\underbrace{\left[\frac{2-(-2)^+}{2}\right]}_{\underbrace{\left[\frac{3.9}{2}\right]}_{1}} + a\underbrace{\left[\frac{(-2)^++2}{3}\right]}_{\underbrace{\left[\frac{0.1}{3}\right]}_{\text{صفر}}} = 2+0$$

$\Rightarrow 4-a=2 \to \underline{a=2}$ $\xrightarrow{\text{گذاشته شد}}$ $\left[\frac{a}{3}\right]=\left[\frac{2}{3}\right]=$ صفر

۱۲۹)

$$x \to (-1)^- \Rightarrow \frac{1-k(-2)}{0^+} = \frac{\overset{\text{منفی باشد}}{1+2k}}{0^+} = -\infty \Rightarrow 2k < -1 \Rightarrow k < -\frac{1}{2}$$

$$x \to (-1)^+ \Rightarrow \frac{1-k(-1)}{0^-} = \frac{\overset{\text{مثبت باشد}}{1+k}}{0^-} = -\infty \Rightarrow k > -1$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < k < -0.5 \xrightarrow{\text{مثلا}} k = -0.7 \to \underbrace{\left(\overset{\ominus}{-0.7\pi}, \overset{\ominus}{\cos(0.7\pi)}\right)}_{\text{ناحیه سوم}}$$

تست ۱۲۰ مشتق‌پذیری و پیوستگی در یک نقطه $\Rightarrow$ حد چپ = حد راست = مقدار تابع

حالت بالایی   مرحله پایینی

2

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{x^2+mx+n}{a-x} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \Rightarrow \begin{cases} a^2+ma+n=0 \\ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[H.P]{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to a} \frac{2x+m}{-1} = \frac{2a+m}{-1} = -2a-m = 2 \rightarrow -(2a+m)=2$$

$x=2a$ پیوسته باشد $\Rightarrow \dfrac{4a^2+2am+n}{-a} = 0 \Rightarrow 4a^2+2am+n=0 \Rightarrow 2a\underbrace{(2a+m)}_{-2} = -n$

۱۳۰. ادامه حل $\Rightarrow \begin{cases} a^2+ma+n=0 \\ 2a+m=-2 \to m=-2-2a \\ -4a=-n \Rightarrow n=4a \end{cases} \to n-m=4a+2+2a$

$= 6a+2 = ?$

$* \rightsquigarrow a^2+a(-2-2a)+4a=0 \to a^2-2a-2a^2+4a=0$

$\to -a^2+2a=0 \to +a(-a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a+2=0 \to a=2 \end{cases}$

$\xrightarrow{a=2} 6(2)+2 = \underline{\underline{14}}$ ✓

---

۱۳۱. $y=-ax+2 \xrightarrow{x=4} \begin{cases} y(4)=f(4) \Rightarrow -4a+2=f(4) \\ \text{شیب مماس} = f'(4) \Rightarrow -a=f'(4) \end{cases}$

از طرفی $\Rightarrow (-4a+2)+(-a)=-1 \Rightarrow -5a=-3 \to a=\underline{\underline{\tfrac{3}{5}}}$

خواسته شد: $f'(4)=-a=\underline{\underline{-\tfrac{3}{5}}}$ ✓

---

۱۳۲. خط مماس $\to y=mx$ فرض کنیم خط مماس در نقطه α بر f مماس است. پس داریم:
$O(0,0)$

$\begin{cases} y(\alpha)=f(\alpha) \Rightarrow m\alpha=f(\alpha) \\ \text{شیب مماس} = f'(\alpha) \Rightarrow m=f'(\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \dfrac{m}{m\alpha} \Rightarrow \dfrac{2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2+3)+8x(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(4x^2+3)} = \dfrac{1}{\alpha}$

ادامه حل ۱۳۲ $\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{\sqrt{a}}(4a^2+3)+16a\sqrt{a}}{2\sqrt{a}(4a^2+3)} = \dfrac{1}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{4a^2+3+16a^2}{2a(4a^2+3)} = \dfrac{1}{a} \rightarrow (20a^2+3)(a) = 8a^3+6a$

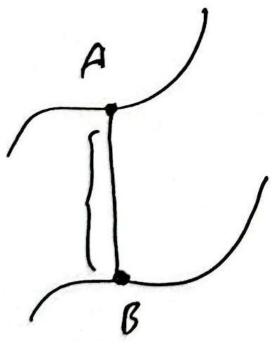
$\rightarrow 20a^3+3a = 8a^3+6a \rightarrow 12a^3-3a=0 \rightarrow 3a(4a^2-1)=0$

$\rightarrow \begin{cases} a=0 \; \times \\ a^2=1/4 \rightarrow a=1/2 \; ✓ \\ \qquad\qquad\; a=-1/2 \; \times \end{cases}$

$f'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}(4a^2+3)+16a\sqrt{a} \xrightarrow{a=1/2} \dfrac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left(8\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$= 8\sqrt{2}$ ✓

۱۳۳



$AB = x^2+2x+4 \xrightarrow{x=-1} 1-2+4 = 3$

---

۱۳۴ $0, 1, 3, 5, 7, 8, 9$

① حالت : $\underset{\substack{1\\3\\5}}{\underline{\;3\;}} \times \underline{\;6\;} \times \underline{\;5\;} = 90$

۱۳۴) ادامه حل ۱۳۴ ⇐ ③ حالت: $\frac{\text{۱ حالت}}{\text{۷}} \times \frac{\text{۴}}{\text{۰,۱,۲,۵}} \times \frac{\text{۵}}{} = \text{۲۰}$

④ حالت: $\frac{\text{۱ حالت}}{\text{۷}} \times \frac{\text{۱ حالت}}{\text{۸}} \times \frac{\text{۱ حالت}}{\text{۰}} = \text{۱}$

کل = ۹۰ + ۲۰ + ۱ = ۱۱۱ ④

---

۱۳۵) ۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ ,۶ ,۷ و ۸

همه حالات: $n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

حالات مطلوب

$n(A) = \begin{cases} \text{① حالت: } \underline{1}\ \text{O}\ \text{O} \text{ دلخواه} \Rightarrow \binom{7}{2} = 21 \\ \text{② حالت: } \underline{2}\ \text{OO} \text{ زوج} \Rightarrow \binom{3}{2} = 3 \\ \text{③ حالت: } \underline{3}\ \times \end{cases} \Rightarrow 21 + 3 = 24$

خواسته: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3\times8}{7\times8} = \frac{3}{7}$ ④

---

۱۳۶) ۵ سیاه، n سبز $\Rightarrow \begin{cases} n(S) = \binom{n+5}{2} \\ n(A) = \text{حداقل یک سیاه باشد} \end{cases}$ ⇐ از متمم سوال را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم: احتمال مهره‌های سیاه نباشند. پس داریم:

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow 1 - \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\frac{n(n-1)}{\cancel{2}}}{\frac{(n+5)(n+4)}{\cancel{2}}} = \frac{1}{6}$

if $n = 4 \Rightarrow \frac{12}{9\times8} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ ④

۱۳۶) ادامه حل ۱۳۶ ⇒ $\begin{cases} \text{سفید} = ۴ \\ \text{سیاه} = ۵ \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{اصلاً}}$ کلی

---

۱۳۷) $\frac{4}{3} = \frac{5}{y} = \frac{x}{7}$

$\begin{cases} y = \frac{15}{4} = 3/75 \\ x = \frac{28}{3} \simeq 9/3 \end{cases}$

×

$\frac{4}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{7}$

$\begin{cases} y = \frac{12}{5} = 2/4 \\ x = \frac{35}{3} \simeq 11/6 \end{cases}$

×

$\frac{4}{7} = \frac{5}{y} = \frac{x}{3}$

$\begin{cases} y = \frac{35}{4} = 8/7 ✓ \\ x = \frac{12}{7} = 1/7 \end{cases}$

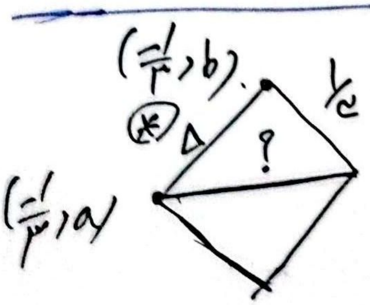
$\frac{4}{y} = \frac{5}{7} = \frac{x}{3}$

$\begin{cases} x = \frac{15}{7} = 2/1 \\ y = \frac{28}{5} = 5/6 ✓ \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جواب}} \frac{35}{4} - \frac{28}{5} = \frac{175-112}{20} = \frac{63}{20} = 3/15$ ✓

---

۱۴۰) سوال از مبحث تکمیلی است:



$m_\Delta = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{b-a}{\frac{1}{6}} = b-a = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(*) اندازه ضلع $= \sqrt{(\frac{1}{6})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6})^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

قطر مربع $\Rightarrow \sqrt{2} \times$ اندازه ضلع $= \frac{\sqrt{2}}{3}$ ✓