

پاسخ تشریحی سوالات کنکور تجربی سراسری - تیر ۱۴۰۴ (نوبت دوم)

سوال ۱۱۱: گزینه ۳

۱۱۱- حاصل عبارت $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{2^8} \times \sqrt[4]{162} \times \sqrt[4]{4}\sqrt[4]{2}$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

- (۱) ۲ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) ۳

$$\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{2^8} \times \sqrt[4]{162} \times \sqrt[4]{4}\sqrt[4]{2} = (2^8)^{\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{2} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{2}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} =$$

$$2^{\frac{2}{4}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 3 \times 2^{\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}} = 3 \times 2^{\frac{4}{4}} = 3 \times 2^1 = 12$$

$$\frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

سوال ۱۱۲: گزینه ۲

۱۱۲- به ازای چند مقدار طبیعی m ، اشتراک دو بازه $A = [\frac{4}{m+1}, +\infty)$ و $B = (-\infty, \frac{5}{m+2}]$ یک مجموعه متناهی

است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

چند مقدار به m می‌دهیم تا رفتار این بازه مشخص شود:

$$m = 1 \Rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{2}, +\infty\right) = \emptyset$$

$$m = 2 \Rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right) = \emptyset$$

$$m = 3 \Rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{4}, +\infty\right) \Rightarrow \left[\frac{4}{4}, \frac{5}{5}\right] = \{1\}$$

$$m = 4 \Rightarrow \left[\frac{4}{4+1}, \frac{5}{4+2}\right] = \left[\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right] \approx [0.8, 0.83]$$

مجموعه‌ی تهی هم یک مجموعه‌ی متناهی است.

با افزایش مقدار m ، اشتراک دو بازه، دوباره بازه می‌شود که یک مجموعه‌ی متناهی نیست.

سوال ۱۱۳: گزینه ۴

۱۱۳- اگر a, b, c سه جمله نخست و متمایز یک دنباله حسابی بوده و $\frac{1}{3}a, \frac{1}{4}b, \frac{1}{5}c$ سه جمله نخست یک دنباله هندسی

باشند، دو برابر قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

$$a + c = 2b$$

$$\frac{1}{5}bc = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow a^2 = bc \Rightarrow a^2 = (a+d)(a+2d) = a^2 + 3ad + 2d^2 \Rightarrow 3ad + 2d^2 = 0 \Rightarrow$$

$$3a + 2d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -\frac{3}{2}a}$$

$$2r = 2 \left(\frac{\frac{1}{4}a}{b} \right) = \frac{a}{b} = \frac{a}{a+d} = \frac{a}{a-\frac{3}{2}a} = \frac{a}{-\frac{1}{2}a} = -2$$

سوال ۱۱۴: گزینه ۳

۱۱۴- مجموعه جواب نامعادله $(5-2m)x^2 - (2m+n-5)x < n$ به صورت بازه $(-1, m-2)$ است. اگر m عدد طبیعی

باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$(5-2m)x^2 - (2m+n-5)x < n \Rightarrow (5-2m)x^2 + (5-2m+n)x - n < 0$$

❖ $m = 1 \Rightarrow 3x^2 + (3+n)x - n < 0$ و بازه $(-1, -1)$ ❌

❖ $\boxed{m=2} \Rightarrow x^2 + (1+n)x - n < 0 \Rightarrow$ بازه $(-1, 0)$ $\Rightarrow$

$$x^2 + (1+n)x - n = (x)(x+1) = x^2 + x \Rightarrow \boxed{n=0}$$

اگر به جای m ، عدد ۳ یا بیشتر بگذاریم، دهانه‌ی سهمی رو به پایین شده و نامساوی برقرار نخواهد شد.

سوال ۱۱۵: گزینه‌ی ۱

۱۱۵- ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعده آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعده این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید ۴٫۵ برابر مساحت مثلث اولیه می‌شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۴٫۵ (۳) ۱۶٫۵ (۴) ۲۸

$$a_1 = a, \quad h_1 = h, \quad h = 3a + 2$$

$$a_2 = a + 4, \quad h_2 = h + 4$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2} a_2 h_2}{\frac{1}{2} a_1 h_1} = \frac{(a+4)(h+4)}{(a)(h)} = \frac{(a+4)(3a+2+4)}{(a)(3a+2)} = \frac{(a+4)(3a+6)}{3a^2+2a} =$$

$$\frac{3(a+4)(a+2)}{3a^2+2a} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{a^2+6a+8}{3a^2+2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(3a^2+2a) = 3(a^2+6a+8) \Rightarrow$$

$$6a^2+4a-3a^2-18a-24=0 \Rightarrow 3a^2-14a-24=0 \Rightarrow a=6, a=-\frac{4}{3} \Rightarrow a=6, h=10 \Rightarrow S_1=30$$

سوال ۱۱۶: گزینه‌ی ۲

۱۱۶- اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$ باشد، مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

$$f(x) = x, \quad g(x) = c$$

$$g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow c + 2(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow c + 6 + 2x = 3 + 2x \Rightarrow$$

$$c + 6 = 3 \Rightarrow c = -3$$

$$\frac{f(-1)}{g(4)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

سوال ۱۱۷: گزینه‌ی ۳

۱۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{a-x}$ و $g(x) = 3-x$ باشد، به ازای کدام مقدار a ، توابع f و $g \circ f$ روی محور y ها متقاطع‌اند؟

- (۱) ۱٫۲۵ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲٫۲۵ (۴) ۲٫۵

$$f(x) = \sqrt{a-x}, \quad g(x) = 3-x, \quad g \circ f(x) = 3 - \sqrt{a-x}$$

$$f(0) = g(f(0)) \Rightarrow \sqrt{a} = 3 - \sqrt{a} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4} = 2.25$$

سوال ۱۱۸: گزینه‌ی ۱

۱۱۸- مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $36x^2 - (m+14)x + 1 = 0$ برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله

$mx^2 + 3x + 2 = 0$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

$$A = \sqrt{\frac{1}{x_1}} + \sqrt{\frac{1}{x_2}} = 5$$

$$A^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2\sqrt{\frac{1}{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + 2\sqrt{\frac{1}{x_1 x_2}} = \frac{S}{P} + 2\sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{-b}{c} + 2\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{(m+14)}{1} + 2\sqrt{\frac{36}{1}} =$$

$$(m+14) + 2(6) = 25 \Rightarrow m + 26 = 25 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

$$P_{\text{جدید}} = \frac{2}{-1} = -2$$

سوال ۱۱۹: گزینه‌ی ۴

۱۱۹- تابع $y = \frac{x}{|x|} \sqrt{a+bx^2}$ و وارون آن از نقطه $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ می‌گذرند. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

-۱ (۴)

 $-\frac{1}{2}$ (۳)

-۳ (۲)

 $-\frac{1}{3}$ (۱)

$$y = \frac{x}{|x|} \sqrt{a+bx^2}$$

$$y\left(-\frac{3}{5}\right) = -\sqrt{a+b\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{a + \frac{9}{25}b = \frac{16}{25}}$$

$$y^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-4}{5} \Rightarrow y\left(-\frac{4}{5}\right) = -\sqrt{a+b\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{a + \frac{16}{25}b = \frac{9}{25}}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

سوال ۱۲۰: گزینه‌ی ۳

۱۲۰- به ازای چند مقدار صحیح از m تابع $f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (10, -10), (3, m-2)\}$ نزولی است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$4 - m \geq 2m + 3 \geq m - 2 \geq -10$$

$$4 - m \geq 2m + 3 \Rightarrow \boxed{m \leq \frac{1}{3}}$$

$$2m + 3 \geq m - 2 \Rightarrow \boxed{m \geq -5}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

$$m - 2 \geq -10 \Rightarrow \boxed{m \geq -8}$$

سوال ۱۲۱: گزینه‌ی ۱

۱۲۱- اگر $(2, a+b) \cup (4b-a, 5)$ یک همسایگی محذوف ۴ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (۱)$$

در واقع:

$$(2, a+b) \cup (-a+4b, 5) = (2, 5) - \{4\}$$

$$a+b=4, \quad -a+4b=4 \Rightarrow a=\frac{12}{5}, \quad b=\frac{8}{5} \Rightarrow b-a=\frac{8}{5}-\frac{12}{5}=-\frac{4}{5}$$

سوال ۱۲۲: گزینه‌ی ۴

۱۲۲- در یک متوازی‌الاضلاع به مساحت ۵۴، نسبت دو ضلع مجاور ۲ به ۳ است. اگر زاویه بزرگ‌تر بین دو ضلع مجاور ۱۵۰ درجه باشد، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$30\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$15\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$15 \quad (۲)$$

$$30 \quad (۱)$$

$$S = 3x \times 2x \times \sin 150^\circ = 6x^2 \times \frac{1}{2} = 3x^2 = 54 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow \boxed{x = 3\sqrt{2}}$$

$$P = 2(3x + 2x) = 10x = 10(3\sqrt{2}) = 30\sqrt{2}$$

سوال ۱۲۳: گزینه‌ی ۲

۱۲۳- اگر $\alpha = 22.5^\circ$ درجه باشد، حاصل $A = -1 + \tan(7\alpha)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ (۴) $1 - \sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$$\tan 45^\circ = \frac{2 \tan(22.5^\circ)}{1 - \tan^2(22.5^\circ)} = 1 \Rightarrow 2 \tan(22.5^\circ) = 1 - \tan^2(22.5^\circ) \Rightarrow$$

$$\tan^2(22.5^\circ) + 2 \tan(22.5^\circ) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\tan(22.5^\circ) = \sqrt{2} - 1}$$

$$A = -1 + \tan 7\alpha = -1 + \tan(4\alpha + 3\alpha) = -1 + \tan(90^\circ + 3\alpha) = -1 - \cot(3\alpha) =$$

$$-1 - \cot(3\alpha + \alpha) = -1 - \cot(45^\circ + \alpha) = -1 - \frac{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha}{\tan 45^\circ + \tan \alpha} = -1 - \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} =$$

$$= -\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} - \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{-1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} - \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{-2}{1 + \tan \alpha} = \frac{-2}{1 + \sqrt{2} - 1} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

سوال ۱۲۴: گزینه‌ی ۲

۱۲۴- در بازه $[0, \pi]$ معادله مثلثاتی $\sin 2x = \cos 3x$ چند جواب دارد؟

5 (۴) 4 (۳) 3 (۲) 2 (۱)

$$\sin 2x = \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\blacksquare 2x = (2k + 1)\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow$$

$$-x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \left(\frac{4k - 1}{2}\right)\pi} \Rightarrow \text{جوابی ندارد}$$

$$\blacksquare\blacksquare 2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = \left(\frac{4k + 1}{2}\right)\pi \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{4k + 1}{10}\right)\pi \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

سوال ۱۲۵: گزینه ۱

۱۲۵- اگر مقادیر تقریبی $\log_2 7 = 2,8$ و $\log_5 2 = 0,5$ باشد، حاصل $\log_{14} 10$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{19}$ (۲) $\frac{10}{19}$ (۳) $\frac{11}{14}$ (۴) $\frac{9}{14}$

$$\log_{14} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 14} = \frac{\log_2 5 + \log_2 2}{\log_2 7 + \log_2 2} = \frac{\log_2 5 + 1}{\log_2 7 + 1} = \frac{2 + 1}{2,8 + 1} = \frac{3}{3,8} = \frac{30}{38} = \frac{15}{19}$$

$$\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2} = \frac{1}{0,5} = 2$$

سوال ۱۲۶: گزینه ۴

۱۲۶- ضریب تغییرات داده‌های ۱، ۱,۰۸، ۱,۲، ۱,۱۶، ۱,۱۶ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{7\sqrt{5}}$

اضافه یا کم کردن مقداری ثابت به داده‌ها تغییری در میانگین و انحراف معیار ندارد (زیرا مثل شیفت دادن داده‌ها عمل می‌کند و تاثیری در پراکندگی ندارد). پس می‌توانیم ۱ واحد از هر داده کم کنیم:

$$0, 0, 0,8, 0,2, 0,16, 0,16$$

$$\bar{x} = \frac{0 + 0,8 + 0,2 + 0,16 + 0,16}{5} = \frac{0,6}{5} = \frac{6}{50} = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0 - 0,12)^2 + (0,8 - 0,12)^2 + (0,2 - 0,12)^2 + (0,16 - 0,12)^2 + (0,16 - 0,12)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0,12)^2 + (0,68)^2 + (0,08)^2 + (0,04)^2 + (0,04)^2}{5}} = \sqrt{\frac{10^{-4}(12^2 + 68^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2)}{5}}$$

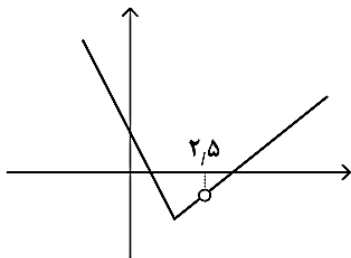
$$= 10^{-2} \sqrt{\frac{144 + 4624 + 64 + 16 + 16}{5}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{4720}{5}} = 10^{-2} \sqrt{944} = \frac{24}{100} \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{16}{100\sqrt{5}}$$

در نوشتن CV باید از میانگین داده‌های اصلی استفاده کنیم، پس ۱ واحدی را که کم کردیم اضافه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{16}{100\sqrt{5}}}{0,12 + 1} = \frac{\frac{16}{100\sqrt{5}}}{\frac{112}{100}} = \frac{16}{112\sqrt{5}} = \frac{1}{7\sqrt{5}}$$

سوال ۱۲۷: گزینه‌ی ۱

۱۲۷- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + ax + b}{4x - c} & x \geq 1 \\ 4 - \frac{c}{2}x & x < 1 \end{cases}$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۴

$x = \frac{5}{2}$ ریشه‌ی صورت و مخرج است که بتواند ساده شود و یک تابع خطی در بازه‌ی $x \geq 1$ تولید شود:

$$4\left(\frac{5}{2}\right) - c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 10}$$

تابع در نقطه‌ی شکستگی ($x = 1$) پیوسته هم هست:

$$f(1^+) = f(1^-) \Rightarrow \frac{2 + a + b}{4 - 10} = 4 - 5 \Rightarrow a + b = 4$$

سوال ۱۲۸: گزینه‌ی ۴

۱۲۸- تابع با ضابطه $f(x) = 2\left[\frac{2-x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]$ در نقطه $x = -2$ حد دارد. مقدار $\left[\frac{a}{3}\right]$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$$

$$f(x) = 2\left[\frac{2-x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right] = 2\left[1 - \frac{x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(2\left[1 - \frac{x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]\right) = 2\left[1 - \frac{(-2)^+}{2}\right] + a\left[\frac{(-2)^+ + 2}{3}\right] = 2[1 - (-1)^+] + a\left[\frac{0^+}{3}\right]$$

$$= 2[2^-] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(2\left[1 - \frac{x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]\right) = 2[1 - (-1)^-] + a\left[\frac{(-2)^- + 2}{3}\right] = 2[2^+] + a\left[\frac{0^-}{3}\right] = 4 - a$$

$$\Rightarrow 4 - a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \left[\frac{a}{3}\right] = \left[\frac{2}{3}\right] = 0$$

سوال ۱۲۹: گزینه ۳

۱۲۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = -\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \cos k\pi)$ در کدام ناحیه محوره‌های مختصات قرار دارند؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1+k}{x^2-1} = \frac{1+k}{0^-} = -\infty \Rightarrow 1+k > 0 \Rightarrow \boxed{k > -1}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1+2k}{x^2-1} = \frac{1+2k}{0^+} = -\infty \Rightarrow 1+2k < 0 \Rightarrow \boxed{k < -\frac{1}{2}}$$

$$-1 < k < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\pi < k\pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \cos k\pi < 0$$

مولفه‌ی اول و دوم همواره منفی هستند، پس در ربع سوم.

سوال ۱۳۰: گزینه ۴

۱۳۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+mx+n}{a-x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر $f(2a) = 0$ باشد، مقدار $n-m$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

$f(2a) = 0$ است یعنی $x = 2a$ یکی از ریشه‌های صورت است. ریشه‌ی دیگر برابر با ریشه‌ی مخرج یعنی $x = a$ است.

و چون تابع پیوسته است نقطه‌ی $(a, 2)$ ناپیوستگی ضابطه را برطرف می‌کند. پس اگر بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-2a)}{-(x-a)} = -(x-2a)$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2a) & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$$

$$f(a) = -(a-2a) = \boxed{a=2}$$

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-2a)}{-(x-a)} = \frac{(x-2)(x-4)}{-(x-2)} = \frac{x^2-6x+8}{-(x-2)} = \frac{x^2+mx+n}{-(x-2)}$$

$$m = -6, \quad n = 8 \Rightarrow n - m = 8 - (-6) = 14$$

سوال ۱۳۱: گزینه ۳

۱۳۱- خط $y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f(4) + f'(4) = -1$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{6}{5}$ (۴) -۱

$$y = -ax + 2$$

$$f(4) = y(4) = -4a + 2, \quad f'(4) = -a$$

$$f(4) + f'(4) = -4a + 2 - a = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \Rightarrow f'(4) = -a = -\frac{3}{5} = -0.6$$

سوال ۱۳۲: گزینه ۲

۱۳۲- خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$ مماس است. شیب خط d چقدر است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) ۶ (۴) ۱۲

$$f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3) = 8x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

نقطه‌ی $(\alpha, d\alpha)$ را محل تماس خط و تابع در نظر می‌گیریم:

$$f(\alpha) = 8\alpha^2\sqrt{\alpha} + 6\sqrt{\alpha} = d\alpha$$

$$f'(\alpha) = 2 \cdot \alpha\sqrt{\alpha} + \frac{3}{\sqrt{\alpha}} = d \stackrel{\times \alpha}{\Rightarrow} 2 \cdot \alpha^2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\alpha} = d\alpha$$

$$d\alpha = 2 \cdot \alpha^2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\alpha} = 8\alpha^2\sqrt{\alpha} + 6\sqrt{\alpha} \Rightarrow$$

$$12\alpha^2\sqrt{\alpha} = 3\sqrt{\alpha} \stackrel{\div \sqrt{\alpha}}{\Rightarrow} 12\alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{4}$$

$\alpha = \frac{1}{4}$ را می‌پذیریم چون $\alpha = -\frac{1}{4}$ در دامنه‌ی تابع نیست.

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 \sqrt{\frac{1}{4}} + 6\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{d}{4} \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{4}} = \frac{d}{4} \Rightarrow d = \frac{16}{\sqrt{4}} = 8\sqrt{2}$$

سوال ۱۳۳: گزینه ۲

۱۳۳- نقاط A و B به ترتیب، روی منحنی‌های $y = x^3 - 2x - 3$ و $y = x^3 + x^2 + 1$ قرار دارند. اگر این نقاط روی خطی به موازات محور yها باشند، کمترین مقدار طول پاره خط AB کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

خطی را که ذکر شد $x = \alpha$ در نظر می‌گیریم، پس

$$|AB| = |(\alpha^3 - 2\alpha - 3) - (\alpha^3 + \alpha^2 + 1)| = |\alpha^2 + 2\alpha + 4| = |(x+1)^2 + 3| = (x+1)^2 + 3$$

کمترین مقدار ممکن برای عبارت بالا ۳ است.

سوال ۱۳۴: گزینه ۳

۱۳۴- با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، چند عدد سه رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت که از ۷۸۱ کوچک‌تر باشد؟

- ۱۳۳ (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۱۱ (۳) ۱۰۳ (۴)

کل سه رقمی‌های بدون تکرار: $6 \times 6 \times 5 = 180$

سه رقمی بدون تکرار با شروع ۹: $1 \times 6 \times 5 = 30$

سه رقمی بدون تکرار با شروع ۸: $1 \times 6 \times 5 = 30$

سه رقمی بدون تکرار با شروع ۷: $1 \times 1 \times 4 = 4$

سه رقمی بدون تکرار با شروع ۵: $1 \times 1 \times 5 = 5$

$$180 - (30 + 30 + 4 + 5) = 111$$

سوال ۱۳۵: گزینه ۱

۱۳۵- در یک کیسه کارت‌هایی به شماره ۱ تا ۸ وجود دارد. ۳ کارت به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال یکی از اعداد روی کارت‌ها شمارنده دوتای دیگر است؟

- $\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{9}{56}$ (۳) $\frac{25}{56}$ (۴)

حالت مطلوب: یکی از کارت‌ها ۱ و دوتای دیگر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یا ۸ باشند:

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{2} + \binom{1}{1}\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{21 + 4}{56} = \frac{3}{8}$$

سوال ۱۳۶: گزینه ۴

۱۳۶- در یک ظرف ۵ مهره سیاه و تعدادی مهره سبز وجود دارد. دو مهره به تصادف از ظرف خارج می‌شود، احتمال اینکه

حداقل یک مهره سیاه باشد، برابر $\frac{5}{6}$ است. تعداد مهره سبز چقدر از تعداد مهره سیاه کمتر است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

تعداد مهره‌های سبز را x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{x}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{x+5}{2}} = \frac{5x+10}{\frac{(x+5)(x+4)}{2}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2(x+2)}{(x+5)(x+4)} = \frac{1}{6} \Rightarrow (x+5)(x+4) = 12(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

سوال ۱۳۷: گزینه ۳

۱۳۷- مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و x با مثلثی با اضلاع ۳، ۷ و y متشابه است. اختلاف کمترین و بیشترین مقادیر ممکن برای y

کدام است؟

۲,۸ (۴)

۳,۱۵ (۳)

۶,۳۵ (۲)

۷,۲ (۱)

نامساوی مثلث را هم چک می‌کنیم:

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{7} = \frac{5}{y} \Rightarrow x = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}, \quad y = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \quad \times$$

$$\frac{4}{7} = \frac{x}{3} = \frac{5}{y} \Rightarrow x = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}, \quad y = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4} \quad \checkmark$$

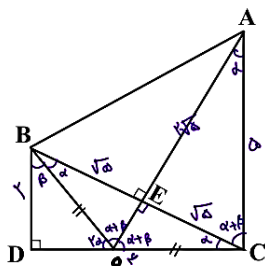
$$\frac{5}{3} = \frac{x}{7} = \frac{4}{y} \Rightarrow x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}, \quad y = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \quad \times$$

$$\frac{5}{7} = \frac{x}{3} = \frac{4}{y} \Rightarrow x = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}, \quad y = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5} \quad \checkmark$$

$$\frac{35}{4} - \frac{28}{5} = \frac{175 - 112}{20} = \frac{175 - 112}{20} = \frac{63}{20} = 3\frac{3}{4}$$

سوال ۱۳۸: گزینه ۳

۱۳۸- در شکل زیر، $BD=2$ ، $CD=4$ و زاویه $\hat{ACD}$ قائمه است. مساحت مثلث ABE کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۷٫۵

(۳) ۵

(۴) ۲٫۵

اطلاعاتی که از شکل به دست می آید:

مثلث BOC متساوی الساقین است و زوایای برابر را α را می نامیم. OE میانه، نیمساز و عمود منصف است.

بعد از اینکه گرفتیم $DBO = \beta$ داریم: $2\alpha + \beta = 90^\circ$ و سایر زوایا را طبق همین نام گذاری می کنیم.

$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} = 2BE = 2EC$$

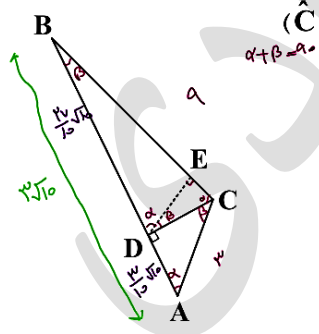
$$\Rightarrow BE = EC = \sqrt{5}$$

مثلث AEC و BCD متشابه هستند، پس:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{AE} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow AE = 2\sqrt{5} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{AE \times EC}{2} = \frac{(2\sqrt{5})(\sqrt{5})}{2} = 5$$

سوال ۱۳۹: گزینه ۱

۱۳۹- اگر $AC=3$ ، $BC=9$ و DE بر BC عمود باشد، طول BE کدام است؟ ($\hat{C} = 90^\circ$)



(۱) ۸٫۱

(۲) ۷٫۲

(۳) ۶٫۴

(۴) ۵٫۶

زوایای مثلث CDE را α و β می نامیم و سایر زوایا را هم به همین ترتیب نام گذاری می کنیم.

$$\begin{array}{l} ABC: \quad 3 \quad 9 \quad 3\sqrt{10} \\ BCD: \quad CD \quad \text{BD} \quad 9 \\ BDE: \quad DE \quad \text{BE} \quad \text{BD} \end{array} \Rightarrow BD = \frac{9 \times 9}{3\sqrt{10}} = \frac{27}{\sqrt{10}} \Rightarrow BD = \frac{\frac{27}{\sqrt{10}} \times 9}{3\sqrt{10}} = \frac{27 \times 9}{30} = 8.1$$

سوال ۱۴۰: گزینه‌ی ۱

۱۴۰- دو نقطه با مختصات $(-\frac{1}{3}, a)$ و $(-\frac{1}{3}, b)$ دو رأس مجاور یک مربع بوده و روی خط Δ قرار دارند. اگر شیب خط

Δ برابر $\sqrt{3}$ باشد، طول قطر این مربع کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (۱)$$

$$\Delta = \frac{a-b}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 6(b-a) = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{b-a = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

طول ضلع مربع:

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

طول قطر مربع:

$$\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

«در نظر بگیرید پاسخ‌ها برای شفافیت، در طولانی‌ترین حالت نوشته شده است»

© NastaranVandadi