

## توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- حاصل عبارت  $\sqrt[4]{3^8} \times \sqrt[4]{16^2} \times \sqrt[4]{2^6}$  چند برابر  $\sqrt{6}$  است؟

۳ (۴)

۲ (۳)  $2\sqrt{6}$ ۳ (۲)  $3\sqrt{2}$ 

۲ (۱)

**حل:** برای ساده سازی میتونیم رادیکال اول رو به صورت  $2^{\frac{13}{12}}$  بازنویسی کنیم.

از این ویژگی  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = \sqrt[mn]{a^k} = a^{\frac{k}{mn}}$  استفاده کردیم. رادیکال دوم هم که برابر با  $\sqrt[4]{2 \times 81}$  میشه که ۸۱ برابر با  $3^4$  هست. پس  $2^{\frac{1}{4}} \times 3$  همچنین رادیکال سوم رو به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{2^2 \times 2^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{2^{2+\frac{1}{6}}} = \sqrt{2^{\frac{13}{6}}} = 2^{\frac{13}{12}}$$

مقادیر بدست آمده رو جایگزین میکنیم:

$$2^{\frac{1}{4}} \times (3 \times 2^{\frac{1}{4}}) \times 2^{\frac{13}{12}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{13}{12}} \times 3 = 2^{\frac{24}{12}} \times 3 = 2^2 \times 3$$

در صورت سوال گفته این مقدار چند برابر  $\sqrt{6}$  است. بنابراین باید مقدار بدست آمده را بر آن تقسیم کنیم.  
پس:

$$\frac{2^2 \times 3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

۱۱۲- به ازای چند مقدار طبیعی  $m$ ، اشتراک دو بازه  $A = [\frac{4}{m+1}, +\infty)$  و  $B = (-\infty, \frac{5}{m+2}]$  یک مجموعه متناهی

است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

**حل:** نباید اشتراک بازه‌های داده یک بازه شود، نهایتاً باید یک تک نقطه گردد. یعنی انتهای بازه  $B$  باید از ابتدای بازه  $A$  کوچکتر (یا نهایتاً مساوی) باشد. پس:

$$\frac{5}{m+2} \leq \frac{4}{m+1} \Rightarrow \frac{5}{m+2} - \frac{4}{m+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{5(m+1) - 4(m+2)}{(m+2)(m+1)} \leq 0$$

$$\frac{m-3}{(m+2)(m+1)} \leq 0$$

با تعیین علامت عبارت فوق متوجه میشیم که  $m$  باید در بازه‌های  $(-\infty, -2) \cup (-1, 3]$  باشد. ولی چون مقدار طبیعی خواسته فقط مقادیر ۱، ۲ و ۳ قابل قبول هستند.

**تذکره:** توجه کنید که به ازای  $m = 3$  این دو بازه به صورت  $A = [\varepsilon, \infty)$  و  $B = (-\infty, \varepsilon]$  می شوند که اشتراکشان تنها یک نقطه و بنابراین متناهی است. برای دو مقدار دیگر این دو بازه اشتراکی ندارند یا بیان دیگر اشتراک آن ها مجموعه تهی است که باز هم متناهی است.

۱۱۳- اگر  $a, b, c$  سه جمله نخست و متمایز یک دنباله حسابی بوده و  $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$  سه جمله نخست یک دنباله هندسی باشند، دو برابر قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

**حل:** چون این سه عدد تشکیل تصاعد حسابی می دهند پس:

$$2b = a + c$$

از طرفی سه جمله دیگر چون تشکیل تصاعد هندسی می دهند، پس:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b\left(\frac{1}{\varepsilon}c\right) \Rightarrow a^2 = bc$$

هدف محاسبه دو برابر قدرنسبت تصاعد هندسی است، یعنی  $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$  پس در رابطه اول کل عبارت را بر  $b$  تقسیم میکنیم و در عبارت دوم بر  $b^2$  تا بتوانیم نسبت  $\frac{a}{b}$  را مشاهده کنیم.

$$\frac{2b}{b} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{bc}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c}{b}$$

پس به جای  $\frac{c}{b}$  می توانیم مقدار  $\frac{a^2}{b^2}$  را در عبارت ما قبل جایگاری کنیم. یعنی

$$2 = \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow t + t^2 = 2 \Rightarrow t = 1, t = -2$$

$t = 1$  نمی تواند قابل قبول باشد، میتونی بگی چرا؟!

۱۱۴- مجموعه جواب نامعادله  $(5-2m)x^2 - (2m+n-5)x < n$  به صورت بازه  $(-1, m-2)$  است. اگر  $m$  عدد طبیعی باشد، مقدار  $m+n$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

**حل:** با مرتب کردن معادله درجه دوم به صورت  $(5-2m)x^2 - (2m+n-5)x - n < 0$  متوجه میشیم که باید نمودار سهمی رو به بالا باشد، چرا که جواب این نامعادله به فرم بازه محدود  $(-1, m-2)$  است و همچنین  $-1$  و  $m-2$  نیز ریشه‌های آن هستند. پس در وهله اول  $5-2m > 0$  باید باشد و چون در صورت سوال قید شده که  $m$  عددی طبیعی است، فقط مقادیر  $1, 2$  قابل قبول هستند. اگر  $m=1$  باشد که بازه به فرم  $(-1, -1)$  تبدیل می شود که قابل قبول نیست، پس  $m=2$  است و بازه جواب  $(-1, 0)$  است و معادله باید به فرم  $x^2 + x < 0$  باشد، پس  $n=0$  است و لذا  $m+n=2+0=2$ .

۱۱۵- ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعده آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعده این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید  $4/5$  برابر مساحت مثلث اولیه می شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟

۲۸ (۴)

۱۶٫۵ (۳)

۱۴٫۵ (۲)

۸ (۱)

**حل:** اگر ارتفاع را با  $h$  وقاعده را با  $a$  نمایش دهیم، آنگاه  $h = 2 + 3a$  و همچنین مساحت مثلث اولیه برابر با  $S = \frac{1}{2}ah$  و مساحت مثلث ثانویه برابر با  $S = \frac{1}{2}(a + \varepsilon)(h + \varepsilon)$  خواهد بود. چون گفته مساحت مثلث ثانویه  $5/4$  برابر مساحت مثلث اولیه است، پس:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}(a + \varepsilon)(h + \varepsilon)}{\frac{1}{2}a(h)} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a + \varepsilon)(2 + 3a + \varepsilon)}{a(2 + 3a)} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a + \varepsilon) \times 3 \times (a + 2)}{a(3a + 2)} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a + \varepsilon)(a + 2)}{a(3a + 2)} = \frac{3}{2}$$

با حدس زدن  $a = 2$  و بنابراین  $h = 2 + 3(2) = 8$  و  $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(2)(8) = 8$

یه سوال: اگه نخوای حدس بزنی چطور باید این معادله حل کنی؟!

۱۱۶- اگر  $f$  تابع همانی و  $g$  تابع ثابت بوده و  $g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$  باشد، مقدار  $\frac{f(-1)}{g(4)}$  کدام است؟

 $-\frac{1}{3}$  (۴) $-\frac{1}{4}$  (۳) $\frac{1}{3}$  (۲) $\frac{1}{4}$  (۱)

**حل:** تابع  $f$  همانی است، یعنی هر چی بدی همون رو میگیری، پس نتیجتاً  $f(3+x) = 3+x$  و همچنین  $f(-1) = -1$  است. تابع  $g$  هم چون ثابت است، پس همواره برابر با  $k$  است. لذا:

$$k + 2(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow k = -3$$

پس:  $\frac{f(-1)}{g(4)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

۱۱۷- اگر  $f(x) = \sqrt{a-x}$  و  $g(x) = 3-x$  باشد، به ازای کدام مقدار  $a$ ، توابع  $f$  و  $g \circ f$  روی محور  $y$ ها متقاطع اند؟

۲/۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

**حل:** چون گفته این دو تابع بر روی محور  $y$ ها تلاقی دارند، یعنی عرض از مبدا یکسان دارند، پس:

$$g(f(\cdot)) = f(\cdot) \Rightarrow 3 - f(\cdot) = f(\cdot) \Rightarrow f(\cdot) = \frac{3}{2} = \sqrt{a} \Rightarrow a = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2/25$$

۱۱۸- مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله  $36x^2 - (m+14)x + 1 = 0$  برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله

$mx^2 + 2x + 2 = 0$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

**حل:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله اول باشند، آنگاه حاصل ضرب و حاصل جمع این دو ریشه به ترتیب برابر با  $\alpha + \beta = \frac{m+14}{36}$  و  $\alpha\beta = \frac{1}{36}$  است و همچنین مجموع مجدور این دو ریشه به صورت زیر قابل ساده سازی است:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{36}}} = 5 \Rightarrow \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{توان دو}} \beta + \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} = \frac{25}{36}$$

$$\frac{m+14}{36} + 2\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{25}{36} \Rightarrow \frac{m+14}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow m = -1$$

پس حاصل ضرب ریشه‌های معادله آخر که برابر با  $\frac{2}{m}$  است برابر با -۲ خواهد شد.

۱۱۹- تابع  $y = \frac{x}{|x|} \sqrt{a+bx^2}$  و وارون آن از نقطه  $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$  می‌گذرند. مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

-۱ (۴)

$-\frac{1}{2}$  (۳)

-۳ (۲)

$-\frac{1}{3}$  (۱)

**حل:** هم نقطه  $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$  و هم نقطه  $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$  باید در معادله تابع صدق کنند. می‌دونیم که تابع  $\frac{x}{|x|}$  صرفاً به عنوان یه ضریب عمل میکنه و برای مقادیر مثبت برابر با ۱ و برای مقادیر منفی برابر با -۱ است که در اینجا همواره برابر با -۱ است. پس:

$$-\frac{4}{5} = -\sqrt{a + b\left(\frac{9}{25}\right)} \Rightarrow \frac{16}{25} = a + \frac{9}{25}b$$

$$-\frac{3}{5} = -\sqrt{a + b\left(\frac{16}{25}\right)} \Rightarrow \frac{9}{25} = a + \frac{16}{25}b$$

با کم کردن طرفین این دو معادله از هم داریم:

$$\frac{16}{25} - \frac{9}{25} = b\left(\frac{9}{25} - \frac{16}{25}\right) \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1$$

۱۲۰- به ازای چند مقدار صحیح از  $m$ ، تابع  $f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (10, -10), (3, m-2)\}$  نزولی است؟  
 ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

**حل:** دقت کن که مولفه‌های صورت سوال و در ابتدا باید به صورت صعودی یا نزولی (از منظر مولفه اول) مرتب بشن تا بتونیم مولفه‌های دوم رو با هم مقایسه کنیم. یعنی:

$$f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (3, m-2), (10, -10)\}$$

چون تابع نزولی است، پس مقادیر عرض این نقاط با افزایش مولفه اول یا باید کم شود یا مساوی باقی بماند، لذا:

$$4-m \geq 2m+3 \geq m-2 \geq -10$$

پس باید سه نامعادله  $4-m \geq 2m+3 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$  و  $2m+3 \geq m-2 \Rightarrow m \geq -5$  و همچنین  $m-2 \geq -10 \Rightarrow m \geq -8$  اشتراک بگیریم که برابر با  $\frac{1}{3} \geq m \geq -5$  که شامل ۶ عدد صحیح می باشد، یعنی  $m = -5, -4, -3, -2, -1, 0$ .

۱۲۱- اگر  $(2, a+b) \cup (4b-a, 5)$  یک همسایگی محذوف ۴ باشد، مقدار  $b-a$  کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (۱)$$

**حل:** در اینجا باید  $4b-a = 4$  و  $a+b = 5$  باشد، پس باید یه دستگاه دو معادله - دو مجهولی حل کنیم:

$$\begin{cases} a + b = \varepsilon \\ -a + \varepsilon b = \varepsilon \end{cases} \Rightarrow 5b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{5}, a = \varepsilon - b = \varepsilon - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$$

$$b - a = \frac{8}{5} - \frac{12}{5} = -\frac{4}{5}$$

۱۲۲- در یک متوازی‌الاضلاع به مساحت ۵۴، نسبت دو ضلع مجاور ۲ به ۳ است. اگر زاویه بزرگ‌تر بین دو ضلع مجاور ۱۵۰ درجه باشد، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

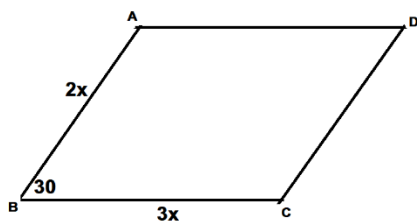
$$30\sqrt{2} \quad (4)$$

$$15\sqrt{2} \quad (3)$$

$$15 \quad (2)$$

$$30 \quad (1)$$

**حل:** میدونیم که مساحت متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  از رابطه  $S = AB \times AC \times \sin A$  بدست میاد که  $A$  زاویه بین این دو ضلع (که ۳۰ یا ۱۵۰ درجه است). پس:



$$S_{ABCD} = (2x)(3x) \sin 30^\circ = 3x^2 = 54 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

محیط این متوازی‌الاضلاع برابر است با  $2(2x + 3x) = 10x = 10(3\sqrt{2}) = 30\sqrt{2}$

۱۲۳- اگر  $\alpha = 22.5^\circ$  درجه باشد، حاصل  $A = -1 + \tan(7\alpha)$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \quad (4)$$

$$1 - \sqrt{2} \quad (3)$$

$$-\sqrt{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

**حل:** زاویه  $22.5^\circ$  درجه که همون  $\frac{\pi}{8}$  هست، پس ما باید حاصل  $-1 + \tan \frac{7\pi}{8}$  رو محاسبه کنیم که می‌دانیم برابر با  $-1 - \tan \frac{\pi}{8}$  است. چون زاویه‌های مکمل تانژانت قرینه دارن، زاویه را به  $\frac{\pi}{8}$  کاهش دادیم. پس هدف محاسبه  $\tan \frac{\pi}{8}$  است. طبق رابطه بسط تانژانت داریم:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1 - t^2} = 1 \Rightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$$

مقدار منفی قابل قبول نیست، چون زاویه حاده است و تانژانش باید مثبت باشد، پس:

$$A = -1 - (-1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

۱۲۴- در بازه  $[0, \pi]$  معادله مثلثاتی  $\sin 2x = \cos 3x$  چند جواب دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

**حل:** برای حل این معادله عبارت سمت راست تساوی رو میتونیم به صورت زیر ساده کنیم:

$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

پس جواب این معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{(4k+1)\pi}{10} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

رابطه دوم در محدوده داده شده جواب ندارد. رابطه اول به ازای  $k = 0, 1, 2$  در ربع اول و دوم جواب دارد.

۱۲۵- اگر مقادیر تقریبی  $\log_7 7 = 2/8$  و  $\log_5 2 = 0.5$  باشد، حاصل  $\log_{14} 10$  کدام است؟

 $\frac{9}{14}$  (۴) $\frac{11}{14}$  (۳) $\frac{10}{19}$  (۲) $\frac{15}{19}$  (۱)

**حل:** برای محاسبه این لگاریتم می توان طبق قاعده تغییر مبنا، مبنای ۲ یا ۵ (مبای اطلاعات مسئله) تبدیل کنیم که ما در اینجا به ۲ تبدیل می کنیم. پس:

$$\log_{14} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 14} = \frac{1 + \log_2 5}{1 + \log_2 7} = \frac{1 + \frac{1}{\log_5 2}}{1 + 2/8} = \frac{3}{3/8} = \frac{30}{38} = \frac{15}{19}$$

۱۲۶- ضریب تغییرات داده های  $1, 1.08, 1.2, 1.16, 1.16$  کدام است؟

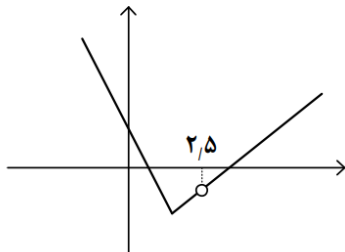
 $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (۴) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$  (۳) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$  (۲) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$  (۱)

**حل:** میانگین این ۵ عدد برابر است با  $1/12$ ، پس:

$$\sigma^2 = \frac{(\cdot/0.4)^2 + (\cdot/0.4)^2 + (\cdot/0.8)^2 + (\cdot/0.4)^2 + (\cdot/12)^2}{5} = \frac{\cdot/256}{5} \Rightarrow \sigma = \frac{\cdot/16}{\sqrt{5}}$$

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\cdot/16}{\sqrt{5}}}{1/12} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۱۲۷- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & x \geq 1 \\ 4x - c & x < 1 \end{cases}$  به صورت زیر رسم شده است. مقدار  $a + b$  کدام است؟



- (۱) ۴  
(۲) ۱  
(۳) -۱  
(۴) -۴

**حل:** ۲/۵ باید ریشه مخرج ضابطه اول باشد، پس  $c = 10 \Rightarrow 10 - c = 0$ . پس ضابطه پایینی به صورت  $4x - 10$  تبدیل میشود که به ازای  $x = 1$  برابر با -۱ خواهد شد. لذا این نقطه باید در ضابطه بالایی هم صدق کند. پس:

$$x = 1 \Rightarrow -1 = \frac{2 + a + b}{4(1) - 10} \Rightarrow a + b = 8$$

۱۲۸- تابع با ضابطه  $f(x) = 2\left[\frac{2-x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]$  در نقطه  $x = -2$  حد دارد. مقدار  $\left[\frac{a}{3}\right]$  کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۲      (۳) ۱      (۴) صفر

**حل:** مقدار حد چپ در نقطه  $x = -2$  یعنی  $x = (-2)^-$  برابر با  $2 - a$   $2\left[\frac{2+2/1}{2}\right] + a\left[\frac{-2/1+2}{3}\right] = 2 - a$  همیشه. حد راست هم برابر با  $2$   $2\left[\frac{2+1/1}{2}\right] + a\left[\frac{-1/1+2}{3}\right] = 2$  پس:

$$2 - a = 2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \left[\frac{0}{3}\right] = 0$$

۱۲۹- اگر  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = -\infty$  باشد، نقاط  $(k\pi, \cos k\pi)$  در کدام ناحیه محوره‌ای مختصات قرار دارند؟

- (۱) اول      (۲) دوم      (۳) سوم      (۴) چهارم

**حل:** حد راست و چپ این عبارت هر دو منفی شدن. پس باید بریم هر دو حالت رو بررسی کنیم. اول حد راست رو بدست بیاریم، یعنی  $x \rightarrow (-1)^+$ ، یعنی مثلاً  $(-0.9)$  که برابر با  $\frac{1+k}{-}$  میشه که صورت باید مثبت باشه، یعنی  $k < -1 \Rightarrow 1 + k > 0$ .

بریم حد چپ هم بررسی کنیم. در اینجا باید مثلاً تابع در  $-1/1$  بررسی کنیم. مخرج صفرِ حدی مثبت، یعنی  $0^+$  می‌شه. صورت هم باید منفی باشه، پس:

$$1 + 2k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2}$$

پس  $-\frac{1}{2} < k < -1$  می‌شه و در این بازه  $k\pi$  و همچنین  $\cos k\pi$  منفی می‌شه و ربع سوم می‌شه.

۱۳۰- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx + n}{a - x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است. اگر  $f(2a) = 0$  باشد، مقدار  $n - m$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

**حل:** ضابطه اول پس از رفع ابهام، حاصل حدش باید ۲ بشه، میتونیم هوپیتال بزنین، پس:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x + m}{-1} = 2 \Rightarrow 2a + m = -2$$

از طرفی هم  $a$  و هم  $2a$  ریشه های صورت هستن، پس ضربشون باید برابر با  $\frac{c}{a} = n$  و جمعشون برابر با  $-\frac{b}{a} = -m$  گردد. بنابراین:

$$\begin{cases} 2a + a = -m \\ 2a^2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = -m \\ 2a^2 = n \end{cases}$$

با جایگذاری رابطه  $3a = -m$  در رابطه اول داریم:

$$2a - 3a = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow m = -6$$

همچنین طبق رابطه سوم  $n = 2a^2 = 8$  پس  $n - m = 8 - (-6) = 14$

۱۳۱- خط  $y + ax = 2$  در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع  $f$  مماس است. اگر  $f(4) + f'(4) = -1$  باشد، مقدار  $f'(4)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $5/6$  (۳)  $-5/6$  (۴) -۱

**حل:** چون این خط بر منحنی در نقطه ۴ مماس است، یعنی شیب منحنی یا مشتقش برابر با شیب خط و همچنین مقدار تابع با مقدار این خط در ۴ برابر است. پس:

$$\begin{cases} f(4) = 2 - 4a \\ f'(4) = -a \end{cases} \Rightarrow 2 - 4a - a = -1 \Rightarrow 2 - 5a = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \Rightarrow f'(4) = -a = -\frac{3}{5}$$

۱۳۲- خط  $d$  از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع  $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$  مماس است. شیب خط  $d$  چقدر است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۶

(۲)  $8\sqrt{2}$ (۱)  $4\sqrt{2}$ 

**حل:** مشتق این تابع برابر است با:

$$f(x) = 8x^{\frac{5}{2}} + 6\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{20x^2 + 3}{\sqrt{x}}$$

معادله خط مماس بر این تابع در نقطه  $x = a$  برابر است با:

$$y - 2\sqrt{a}(4a^2 + 3) = \frac{20a^2 + 3}{\sqrt{a}}(x - a)$$

مبدأ باید در این خط صدق کند، پس:

$$y - 2\sqrt{a}(4a^2 + 3) = \frac{20a^2 + 3}{\sqrt{a}}(x - a) \Rightarrow -2\sqrt{a}(4a^2 + 3) = \frac{20a^2 + 3}{\sqrt{a}}(-a)$$

$$2(4a^2 + 3) = 20a^2 + 3 \Rightarrow 12a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{20(\frac{1}{4}) + 3}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 8\sqrt{2}$$

۱۳۳- نقاط  $A$  و  $B$  به ترتیب، روی منحنی‌های  $y = x^3 - 2x - 3$  و  $y = x^3 + x^2 + 1$  قرار دارند. اگر این نقاط روی خطی

به موازات محور  $y$ ‌ها باشند، کمترین مقدار طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

**حل:** چون پاره خط موازی محور  $y$ ‌ها است، پس این دو نقطه طول‌های یکسان داشته‌اند، یعنی مثلاً  $x = k$ . پس برای بدست آوردن فاصله (طول پاره خط) کافی است مقدار عرض این نمودار را در این نقطه پیدا کرده و از هم کم کرد، پس:

$$x = k \Rightarrow (k^3 + k^2 + 1) - (k^3 - 2k - 3) = k^2 + 2k + 4$$

کمترین مقدار این تابع (سه‌می) در راس آن (یعنی  $k = -1$ ) رخ می‌دهد که برابر است با  $3 = 1 - 2 + 4$

۱۳۴- با ارقام ۹، ۸، ۷، ۵، ۳، ۱، ۰ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت که از ۷۸۱ کوچک‌تر باشد؟

(۴) ۱۰۳

(۳) ۱۱۱

(۲) ۱۲۵

(۱) ۱۳۳

**حل:** کل اعداد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام برابر است با  $6 \times 6 \times 5 = 180$ .

حال میتوانیم اعداد بزرگتر از ۷۸۱ رو از کل کم کنیم. اعدادی که رقم صدگان آن‌ها ۸ یا ۹ باشد که قطعا بزرگتر است، پس  $60 = 6 \times 6 \times 5$ . همچنین اعداد ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۹ که ۴ عدد است و اگر صدگان ۷ و دهگان ۹ و یکان یکی از ۵ رقم دیگر باشد که مجموعاً ۵ عدد میشود باید از تعداد کل کم شود. پس:

$$180 - 60 - 9 = 111$$

۱۳۵- در یک کیسه کارت‌هایی به شماره ۱ تا ۸ وجود دارد. ۳ کارت به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال یکی از اعداد روی کارت‌ها شمارنده دوتای دیگر است؟

$$\frac{25}{56} \quad (4)$$

$$\frac{9}{56} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

**حل:** تعداد کل برابر است  $n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1} = 56$ . حال باید تعداد کارت‌های را بیابیم که یکی از اعداد شمارنده دو عدد دیگر باشد. اگر یکی از اعداد ۱ باشد، همه حالت‌های ممکن برای انتخاب دو کارت دیگر قابل قبول است. پس تعداد  $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ . اگر یک کارت ۲ باشد، دو کارت دیگر باید از کارت‌های زوج، یعنی ۴، ۶ و ۸ انتخاب شود، یعنی  $\binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ . پس کل حالات مطلوب برابر با  $21 + 3 = 24$  خواهد شد و احتمال برابر است با:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

۱۳۶- در یک ظرف ۵ مهره سیاه و تعدادی مهره سبز وجود دارد. دو مهره به تصادف از ظرف خارج می‌شود، احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه باشد، برابر  $\frac{5}{6}$  است. تعداد مهره سبز چقدر از تعداد مهره سیاه کمتر است؟

$$1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

**حل:** چون احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه برابر با  $\frac{5}{6}$  است، احتمال متمم آن، یعنی هیچ مهره سیاهی انتخاب نشود، برابر با  $\frac{1}{6}$  است. اگر تعداد مهره های سبز رنگ برابر با  $n$  باشد، احتمال انتخاب مهره اول با رنگ سبز برابر با  $\frac{n}{n+5}$  و احتمال انتخاب مهره دوم با رنگ سبز هم برابر با  $\frac{n-1}{n+4}$  است. پس:

$$\frac{n}{n+5} \times \frac{n-1}{n+4} = \frac{1}{6}$$

برای حل این معادله می‌توانیم از گزینه‌ها کمک بگیریم، چون سبزه‌ها از سیاه‌ها کمتر هستند، پس تعدادشان، باید ۴، ۳ یا نهایتاً ۲ باشد (زیر ۲ نمی‌تواند باشد). با چک کردن این دو مقدار تعداد برابر با ۴ خواهد بود و بنابراین  $5 - 4 = 1$ .

۱۳۷- مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و  $x$  با مثلثی با اضلاع ۳، ۷ و  $y$  متشابه است. اختلاف کمترین و بیشترین مقادیر ممکن برای  $y$  کدام است؟

$$2,8 \quad (4)$$

$$3,15 \quad (3)$$

$$6,35 \quad (2)$$

$$7,2 \quad (1)$$

**حل:** باید حالت‌های مختلف رو بررسی کنیم. کلا ۶ حالت ممکن است ایجاد شود که ۲ حالت آن به صورت  $\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y}$  یا  $\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y}$  می شود که قابل قبول نیست، چون تناسب اول برقرار نیست. پس ۴ حالت دیگر را بررسی میکنیم.

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{35}{3}, y = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{y} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{28}{3}, y = \frac{15}{4} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

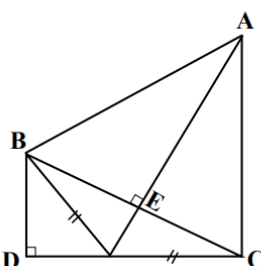
$$\frac{x}{y} = \frac{5}{y} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{15}{y}, y = \frac{28}{5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{y} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{12}{y}, y = \frac{35}{4}$$

$$\Delta y = \frac{35}{4} - \frac{28}{5} = 8/75 - 5/6 = 3/15$$

**تذکر:** در دو حالت اول و دوم همچنین مثلی نمی تواند وجود داشته باشد، چون در هر مثلث همواره مجموع دو ضلع باید از ضلع سوم بزرگتر باشد.

۱۳۸- در شکل زیر،  $BD=2$ ،  $CD=4$  و زاویه  $\hat{ACD}$  قائمه است. مساحت مثلث  $ABE$  کدام است؟

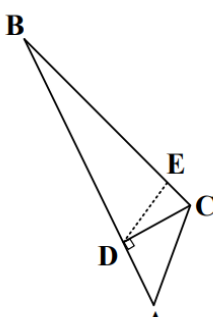


۱) ۱۰  
۲) ۷.۵  
۳) ۵  
۴) ۲.۵

**حل:** میدونیم که اگر فاصله نقطه‌ای از دو سر یه پاره خط به یه اندازه باشه، اون نقطه روی نیمساز زاویه تشکیل شده قرار داره، پس در اینجا  $AM$  نیمساز زاویه  $A$  است و مثلث های  $AEB$  و  $AEC$  هم نهشت هستند. حالا در مثلث  $BDC$  میدونیم که دو مثلث  $ECM$  و  $BDC$  متشابه هستن، از طرفی دو مثلث  $AEC$  و  $EMC$  هم متشابه هستن (چون ارتفاع وارد بر وتر هست و مثلث  $AMC$  رو به دو مثلث متشابه تقسیم میکنه)، پس دو مثلث  $AEC$  و  $BDC$  متشابه هستن و کافیه که نسبت تشابه رو بدست بیاریم. مساحت  $S_{BDC} = 4$  هست. کل  $BC$  هم که برابر با  $2\sqrt{5}$  میشه (فیثاغورس بزن) و بنابراین  $EC$  نصفش میشه، یعنی  $\sqrt{5}$ . پس حالا اگر دو مثلث  $AEC$  کل مثلث  $BDC$  رو در نظر بگیریم، نسبت تشابه برابر میشه با  $\frac{\sqrt{5}}{2} = k$ . پس مساحت برابر میشه با:

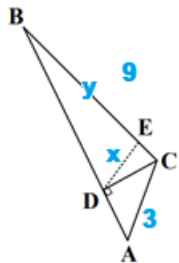
$$S = 4k^2 = 4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 5$$

۱۳۹- اگر  $AC=3$ ،  $BC=9$  و  $DE$  بر  $BC$  عمود باشد، طول  $BE$  کدام است؟ ( $\hat{C} = 90^\circ$ )



(۱)  $8/1$   
(۲)  $7/2$   
(۳)  $6/4$   
(۴)  $5/6$

**حل:** طبق تالس در مثلث زیر داریم:



$$\frac{x}{3} = \frac{y}{9} \Rightarrow y = 3x$$

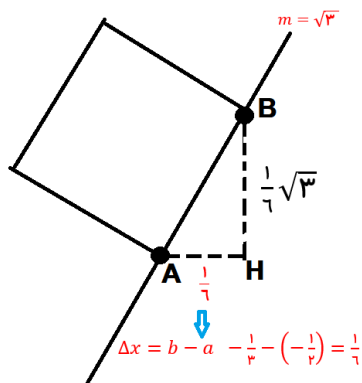
حالا در مثلث  $BDC$  که قائم الزویه است، میدانیم که ارتفاع وارد بر وتر  $(DE)$ ، واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است. یعنی:

$$x^2 = y(9 - y) = 3x(9 - 3x) \Rightarrow x = 27 - 9x \Rightarrow x = 2/7 \Rightarrow y = 3x = 3(2/7) = 6/7$$

۱۴۰- دو نقطه با مختصات  $(-\frac{1}{3}, b)$  و  $(-\frac{1}{4}, a)$  دو رأس مجاور یک مربع بوده و روی خط  $\Delta$  قرار دارند. اگر شیب خط  $\Delta$  برابر  $\sqrt{3}$  باشد، طول قطر این مربع کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$   
(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**حل:** اول ساختار کلی سوال رو رسم میکنیم. به صورت زیر:



چون شیب خط برابر با  $\sqrt{3}$  است، پس طول  $BH$  باید  $\sqrt{3}$  برابر طول  $AH$  باشد و طول وتر (طبق فیثاغورس) باید ۲ برابر طول  $AH$  باشد. پس پس طول وتر (ضلع مربع) برابر است با  $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$  و نتیجتاً قطر این مربع  $\sqrt{2}$  برابر آن است.

سید امید شفیعی

دانش آموخته دانشگاه علم و صنعت ایران

در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

نویسنده کتاب ریاضیات جامع تجربی (ریاضی سنجاب)

Instagram: [riazi.sanjob](https://www.instagram.com/riazi.sanjob)

ایمیل: [seyedomid.shafiei@gmail.com](mailto:seyedomid.shafiei@gmail.com)