



آزمون شماره ۲
۲۱ شهریور ۱۴۰۴
پایه دوازدهم
رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۱ از ۲

مدت پاسخگویی: ۵۵

تعداد سؤال: ۳۰

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان (به ترتیب الفبا)
حسابان	۱۳	۱	۱۳	۲۴ دقیقه	علیرضا رفیعی حسین شفیعزاده علیرضا ندافزاده
هندسه	۱۰	۱۴	۲۳	۱۸ دقیقه	علیرضا فعلی نصیر کریمی صبا مهدوی
گسسته	۷	۲۴	۳۰	۱۳ دقیقه	احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

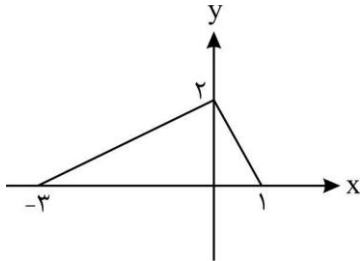


@Helli1_12

۱- اگر $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$ و $g(x) = x^3 + 2x + 10$ باشد، حاصل $g^{-1}(2f^{-1}(2) + 5)$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۵

۲- شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. مساحت محدود به نمودارهای دو تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ و $y = \left|f\left(\frac{x}{2}\right) - 2\right|$ کدام است؟



- (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

۳- حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} + \sqrt[3]{\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۴- اگر تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & , x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & , x < 2 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود k کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -4]$ (۲) $(-\infty, -2]$ (۳) $(-\infty, 0]$ (۴) $(-\infty, -6]$

۵- تابع f با دامنه $\mathbb{R}^+$ اکیداً نزولی است. مجموعه جوابهای نامعادله $f\left(\frac{1}{2x+4}\right) < f\left(\frac{2}{x}\right)$ چند عدد صحیح را شامل نمی شود؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶- اگر تابع $f = \{(2, 3m+1), (-1, 4m+2), (0, -2m), (3, -5)\}$ اکیداً نزولی باشد، حاصل $[m]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح می باشد)

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -۱ (۴) -۲

محاسبات

۷- تابع $f(x) = 2\sqrt{2x+3} + 3x$ مفروض است. اگر $(f \circ f)(a) = a$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{2}{a}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۸- نمودار تابع $y = 2\sqrt{2x-1} + 3$ را ابتدا دو واحد به سمت چپ جابه‌جا، سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه و در نهایت طول نقاط واقع بر آن را دو برابر می‌کنیم. نمودار حاصل خط $y = -\frac{3}{2}$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۶ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) -۶

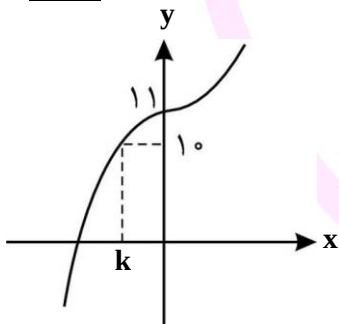
۹- اگر $x^3 - \frac{1}{x^3} = 4$ باشد، با فرض $x < 0$ حاصل $x + \frac{1}{x}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) -۲ (۴) $-\sqrt{5}$

۱۰- اگر چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 - mx + 2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده $(f \circ f)(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

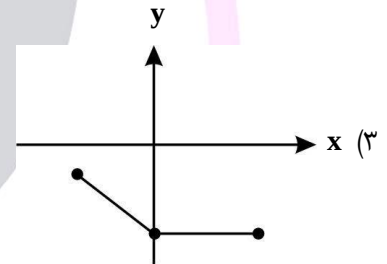
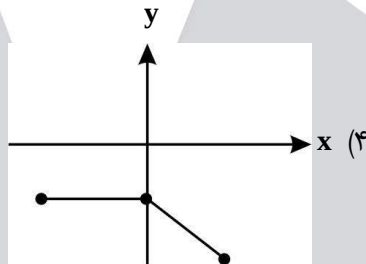
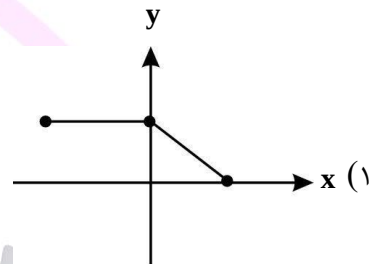
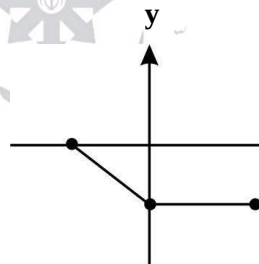
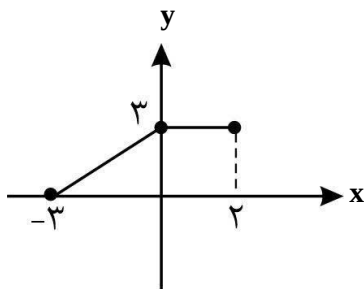
- (۱) ۱۱۴ (۲) ۱۱۶ (۳) ۱۲۲ (۴) ۱۲۸

۱۱- نمودار تابع $f(x) = a(x^2 + 3)(x + 3) + b$ به صورت زیر است. نمودار وارون تابع $g(x) = b(x-k)^3 - a$ از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟



- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

۱۲- اگر نمودار تابع $y = 2x - f(x)$ به صورت زیر باشد، کدام نمودار مربوط به تابع $y = x + f(-x)$ است؟



۱۳- باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x + f(x)$ بر $x + 1$ برابر ۳ و باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x - f(x)$ بر $x + 2$ برابر -۳ است. مجموع ضرایب باقی مانده تقسیم $xf(x)$ بر $x^2 + 3x + 2$ کدام است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

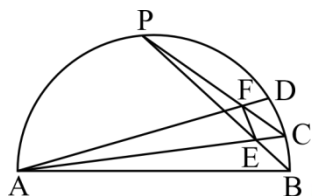
-۴ (۲)

-۸ (۱)

محاسبات

- ۱۴- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ مماس خارج‌اند. فاصله نقطه تماس دو دایره تا مماس مشترک خارجی کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{3}{6}$

- ۱۵- در شکل زیر AB قطر نیم‌دایره، $CD = BC = 30^\circ$ و P نقطه‌ای دلخواه بر محیط نیم‌دایره است. اندازه $\widehat{AFE}$ کدام است؟



- (۱) 80° (۲) 90° (۳) 105° (۴) 120°

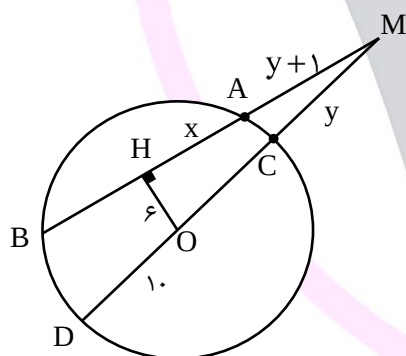


- ۱۶- اگر اضلاع مثلث $\triangle ABC$ برابر ۳ و ۴ و ۶ باشند، مجموع سه میانه مثلث $\triangle ABC$ در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $(\frac{45}{8}, \frac{15}{2})$ (۲) $(\frac{55}{4}, 16)$ (۳) $(\frac{39}{4}, 13)$ (۴) $(\frac{15}{4}, \frac{45}{8})$

- ۱۷- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ باشد به‌طوری‌که $A^2 - 2I = \bar{O}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{|A^2 + 9I|}{|3A + I|}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۹

- ۱۸- در شکل زیر، حاصل $x + 2y$ کدام است؟



- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۳۲

- ۱۹- اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر، $A + B = AB$ ، $|A| = 2$ و $|B| = 3$ باشد، آن‌گاه $|A^{-1} + B^{-1}|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۲۰- در مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ به راس A ، طول نیمساز زاویه B دو برابر طول نیمساز زاویه A است. اندازه زاویه A کدام است؟

(۱) 94°

(۲) 96°

(۳) 108°

(۴) 112°



پایه
دیرین

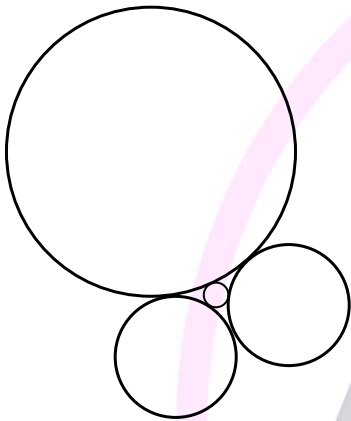
۲۱- چهار دایره به شعاع‌های ۳۲، ۹، ۹ و r با یکدیگر مماس خارجند. مقدار r کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{32}{17}$

(۳) $\frac{32}{15}$

(۴) ۳



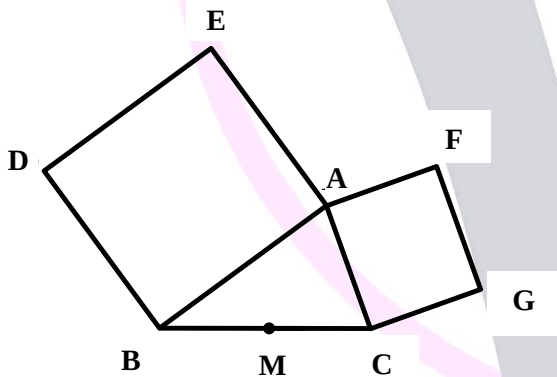
۲۲- در شکل زیر دو مربع بر دو ضلع مثلث ABC بنا شده‌اند. اگر $EF = 6$ باشد آن گاه طول میانه AM کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) ۳

(۴) $\frac{7}{2}$



۲۳- مساحت دایره‌ی محیطی دوزنقه‌ی $ABCD$ به قاعده‌های $AB = 12$ و $DC = 16$ و ساق $AD = \sqrt{104}$ برابر $k\pi$ است. k به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

(۴) ۷۹

(۳) ۷۷

(۲) ۷۵

(۱) ۷۴

محاسبات

۲۴- اگر a, b و c اعدادی صحیح باشند و بدانیم $a|b$ و $a|c$ ، آن گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- | | | | |
|-----------------|---------------|---------------------|------------------|
| (الف) $a b^2+c$ | (ب) $a^2 b+c$ | (ج) $a a^2+b^2+c^2$ | (د) $a^2 a^2+bc$ |
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |

۲۵- چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار تابع $y = \frac{8+5|x|}{|x|}$ وجود دارد به گونه‌ای که $y > x$ باشد؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۸ (۱) | ۷ (۲) | ۴ (۳) | ۱ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|

۲۶- چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم هر کدام از اعداد ۲۷۰ و ۲۰۰ بر آن، به ترتیب ۱۰ و ۵ باشد؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|

۲۷- اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن گاه برای $(6a+4, 12a-4)$ چند جواب وجود دارد؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|

۲۸- اگر $[a, 54] = 108$ ، چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|

۲۹- چند جفت عدد اول مانند p و q وجود دارد که در رابطه‌ی $16 = 13p - q^2$ صدق کنند؟

- | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) بیش‌تر از ۲ | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------------------|-------|-------|-------|

۳۰- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۴۸ باقی‌مانده برابر ۲۲ باشد، آن گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳۲ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۲ (۱) | ۳ (۲) | ۴ (۳) | ۶ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|

محاسبات



آزمون شماره ۲
۲۱ شهریور ۱۴۰۴
پایه دوازدهم
رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۲ از ۲

مدت پاسخگویی: ۵۰

تعداد سؤال: ۴۰

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان (به ترتیب الفبا)
فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۲۸ دقیقه	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری ابوالفضل علیدوست علی گندمی
شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۲ دقیقه	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمد رضا زهرهوند صمد صفوی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



@Helli1_12

- ۳۱- معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، در SI به صورت $-9 = 5t + 2x$ است. سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی که از مکان $x_1 = -29m$ به مکان $x_2 = -44m$ می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟
- (۱) $2/5$ (۲) $-2/5$ (۳) 5 (۴) -5

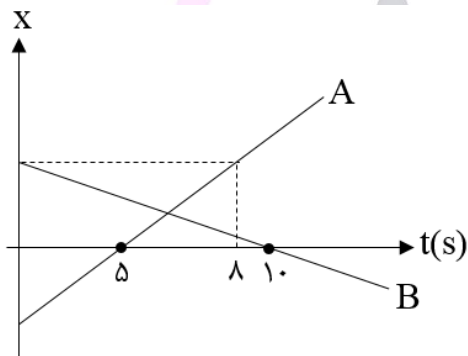
- ۳۲- متحرکی با سرعت ثابت V مسیر مستقیم 600 متری را طی می‌کند. اگر متحرک سرعت خود را $1 \frac{m}{s}$ کاهش دهد، 30 ثانیه دیرتر همین مسیر را طی خواهد کرد. V چند متر بر ثانیه است؟
- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

- ۳۳- دو متحرک هم‌زمان در لحظه $t = 0$ از نقاط A و B با سرعت ثابت به طرف هم حرکت می‌کنند و در لحظه $t = 12s$ از کنار هم عبور می‌کنند. اگر متحرک اول در لحظه $t = 48s$ به نقطه B برسد، متحرک دوم در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه به نقطه A می‌رسد؟



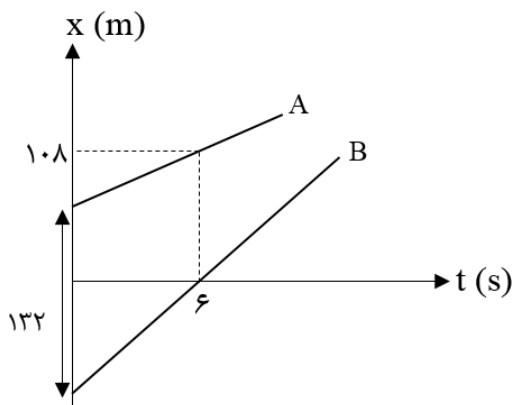
- (۱) 16
(۲) 24
(۳) 36
(۴) 96

- ۳۴- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی محور x در حرکت‌اند، مطابق شکل است. در 6 ثانیه اول حرکت، سرعت متوسط متحرک A چند برابر سرعت متوسط متحرک B است؟



- (۱) $\frac{10}{3}$
(۲) $\frac{5}{3}$
(۳) $\frac{10}{8}$
(۴) 2

- ۳۵- نمودار مکان - زمان دو متحرک روی خط راست مطابق شکل است. این دو متحرک در دو لحظه t_1 و t_2 در فاصله 72 متری از یکدیگر قرار می‌گیرند.



- $\frac{t_2}{t_1}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) $\frac{17}{5}$ (۳) $\frac{17}{9}$ (۴) $\frac{20}{3}$

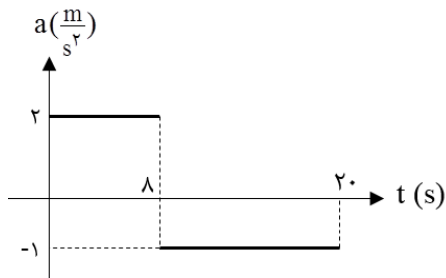
۳۶- متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت می‌کند. اگر متحرک پس از ۴۰ ثانیه و با سرعت $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به انتهای مسیر برسد، سرعت متحرک در نیمه مسیر چند کیلومتر بر ساعت است؟

- (۱) ۳۰ (۲) $30\sqrt{2}$ (۳) ۴۵ (۴) $45\sqrt{2}$

۳۷- متحرکی که با شتاب ثابت روی محور X حرکت می‌کند، در لحظه $t = 0$ با تندی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در جهت محور X از مکان $X = 12 \text{m}$ عبور می‌کند. اگر متحرک در $t = 2 \text{s}$ تغییر جهت دهد، با چه تندی‌ای از مکان $X = -18 \text{m}$ عبور خواهد کرد؟

- (۱) $4\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (۲) $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (۳) $10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (۴) $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

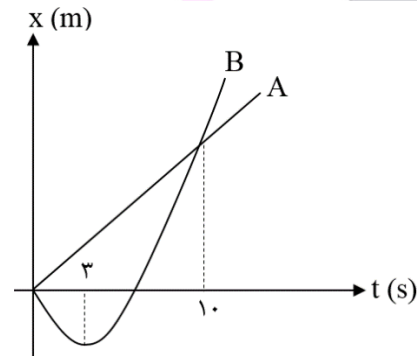
۳۸- نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور X در حرکت است، به صورت شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و در خلاف جهت محور X باشد، تندی متوسط متحرک در ۲۰ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۵/۶ (۲) ۵/۲ (۳) ۶/۲ (۴) ۶/۴

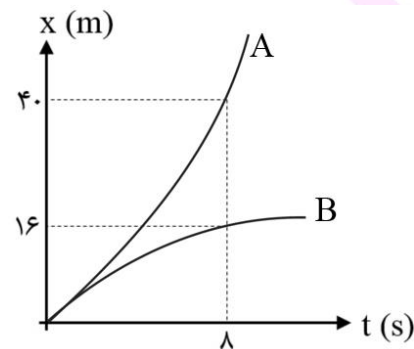
۳۹- متحرکی با سرعت اولیه V و با شتاب ثابت در مبدأ زمان و در جهت مثبت محور X از $X = 0$ عبور می‌کند. اگر تندی متحرک در $t = 3 \text{s}$ و $t = 5 \text{s}$ برابر باشد، تندی متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت چند برابر سرعت متوسط آن در همین بازه زمانی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) $\frac{13}{12}$ (۴) $\frac{5}{3}$



۴۰- شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان دو متحرک روی خط راست را نشان می‌دهد و منحنی B یک سهمی است. اگر تندی متوسط متحرک B در مدتی که دو متحرک به یک‌دیگر نزدیک می‌شوند، $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، سرعت متحرک A چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶



۴۱- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت روی محور X حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ به ترتیب از راست به چپ سرعت متحرک A و B در لحظه $t = 8 \text{s}$ باشند، حاصل $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ کدام است؟ (دو سهمی در $t = 0$ بر هم مماس هستند.)

- (۱) $6\vec{i}$ (۲) $3\vec{i}$ (۳) $-6\vec{i}$ (۴) $-3\vec{i}$

۴۲- از ارتفاع h از سطح زمین جسمی را در شرایط خلاء رها می‌کنیم. اگر جسم در ۳ ثانیه آخر حرکت ۶۰ متر را طی کند، با چه سرعتی بر حسب متر بر ثانیه به زمین برخورد می‌کند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

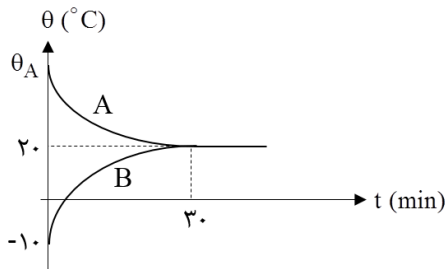
۴۳- دو جسم A و B را درون یک محفظه عایق قرار می‌دهیم و ۳۰ دقیقه طول می‌کشد که این دو جسم به تعادل گرمایی برسند. نمودار تغییرات دمای این دو جسم بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. اگر گرمای ویژه جسم A چهار برابر جسم B ، و جرم جسم B دو برابر جرم جسم A باشد، دمای اولیه جسم A چند درجه سلسیوس است؟

۲۵ (۱)

۳۰ (۲)

۳۵ (۳)

۴۰ (۴)



۴۴- کدام عبارت در خصوص روش‌های انتقال گرما درست نیست؟

(۱) رسانش گرمایی در شیشه به دلیل ارتعاش اتم‌ها است.

(۲) گرم شدن آب درون قابلمه نمونه‌ای از همرفت طبیعی است.

(۳) تابش گرمایی سطوح صاف و درخشان بیشتر از سطوح تیره و ناصاف است.

(۴) کلم اسکانک از طریق تابش فروسرخ برف اطرافش را ذوب می‌کند.

۴۵- درون ظرفی به حجم 400 cm^3 مقداری مایع به حجم 350 cm^3 در دمای 10°C وجود دارد. دمای ظرف و مایع را به چند درجه سانتی‌گراد برسانیم تا حجم قسمت خالی ظرف 30 cm^3 شود؟ (ضریب انبساط خطی ظرف $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ و ضریب انبساط حجمی مایع $\frac{1}{K} \times 10^{-4}$ است.)

۱۳۰ (۴)

۵۰ (۳)

۸۰ (۲)

۹۰ (۱)

۴۶- درون یک ظرف با ظرفیت گرمایی مشخص، ۴۰۰ گرم آب 10°C در تعادل گرمایی با ظرف قرار دارد. یک گرم‌کن با توان گرمایی 350 W در مدت ۳ دقیقه دمای مجموعه ظرف و آب را به 40°C می‌رساند. سپس گرم‌کن را قطع کرده و مقداری یخ صفر درجه درون ظرف می‌اندازیم. حداقل جرم یخ چقدر باشد تا دمای نهایی مجموعه صفر درجه سانتی‌گراد شود؟ ($L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, $c_w = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}}$)

۲۵۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

۴۷- چند مورد از جمله‌های زیر درست است؟

(الف) دماسنج سلسیوس دقیق‌تر از دماسنج فارنهایت است.

(ب) دماسنج گازی یکی از سه دماسنج معیار است.

(پ) کمیت دماسنجی در دماسنج مقاومت پلاتینی، ولتاژ است.

(ت) از آن‌جا که ترموکوپل در زمان طولانی با جسم مورد آزمایش به دمای تعادل می‌رسد، از دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شده است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۸- گرمای Q ، دمای ۳ گرم از ماده A را ۵ درجه سلسیوس و دمای ۲ گرم از ماده B را ۳ درجه سلسیوس بالا می‌برد. گرمای ویژه ماده A چند برابر گرمای ویژه ماده B است؟

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

۴۹- یک کره توپر به شعاع $3R$ در اختیار داریم. از درون این کره، کره‌ای به شعاع $2R$ را خارج می‌کنیم تا یک کره توپر کوچک‌تر به نام A و یک کره توخالی به نام B داشته باشیم. اکنون اگر به جسم‌های A و B به میزان برابر گرما بدهیم، نسبت تغییر حجم کره A به تغییر حجم کل کره B کدام است؟

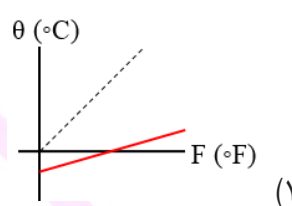
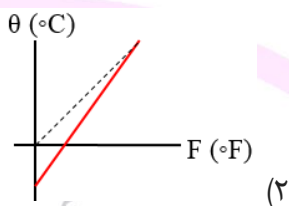
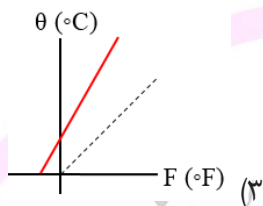
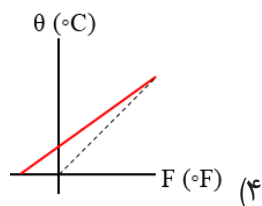
$$\frac{19}{27} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{19} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{27} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۵۰- نمودار تغییرات دما در مقیاس سانتی‌گراد برحسب مقیاس فارنهایت در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟
(خط‌چین، شیب با مقدار ۱ را نشان می‌دهد.)



۵۱- کدام یک از عبارت‌های زیر درست است؟

- (آ) در شرایط STP، حاصل ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در محلول‌های آبی برابر 10^{-14} است.
 (ب) امکان صفر شدن غلظت یون هیدرونیوم در محلول آبی وجود ندارد.
 (پ) محلول خنثی در شرایطی ممکن است pH کمتر از ۷ داشته باشد.
 (ت) در دمای ثابت با افزایش حجم محلول آبی، حاصل عبارت $[H^+][OH^-]$ کاهش می‌یابد.
- (۱) آ - ت (۲) ب - پ (۳) پ - ت (۴) آ - ب

۵۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- (آ) در مخلوط آب و هگزان، برخلاف محلول الکل و آب اجزای مخلوط هیچ اختلاطی با هم ندارند.
 (ب) در مخلوط استون و آب، نیروی جاذبه بین مولکول‌های آب و استون بیشتر از نیروهای جاذبه در آب خالص و استون خالص است.
 (پ) در فرآیند انحلال یُد در هگزان، مانند انحلال الکل در آب ماده حل‌شونده ویژگی‌های ساختاری خود را حفظ می‌کند.
 (ت) با توجه به تعریف انحلال‌پذیری از اتانول همانند استون در دمای $25^\circ C$ می‌توان در آب محلول سیر شده تهیه کرد.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۳- کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- (۱) اسیدها، در محیط آبی می‌توانند با اغلب فلزها واکنش دهند.
 (۲) رفتار اسید و باز آرنیوس را می‌توان براساس غلظت یون‌های $H^+(aq)$ و $OH^-(aq)$ توصیف کرد.
 (۳) براساس مدل آرنیوس می‌توان در مورد میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهارنظر کرد.
 (۴) یک ترکیب نامحلول در آب، می‌تواند یک الکترولیت قوی باشد.

۵۴- در دمای $25^\circ C$ در دو ظرف (۱) و (۲) به ترتیب a لیتر محلول آبی اسید قوی با $pH = 5$ و a لیتر محلول آبی باز ضعیف با $pH = 9$ وجود دارد. با در نظر گرفتن افزودن ۹a لیتر آب خالص به هر یک از دو ظرف، کدام عبارت نادرست است؟

- (۱) هر دو محلول ۱۰ مرتبه رقیق می‌شوند.
 (۲) pH محلول در ظرف (۱) برابر ۶ می‌شود.
 (۳) pH محلول در ظرف (۲) برابر ۸ می‌شود.
 (۴) با افزودن دو محلول به هم، محلولی به دست می‌آید که $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ خواهد بود.

۵۵- در دمای $25^\circ C$ محلولی از باریم هیدروکسید ۰/۰۱ مولار و محلولی از استیک‌اسید با غلظت $0.001 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ و درصد یونش ۰/۲ درصد موجود است. تفاوت pH این دو محلول کدام است؟

- (۱) ۴/۳ (۲) ۵/۷ (۳) ۶/۶ (۴) ۱۱/۲

۵۶- کدام موارد در مقایسه دمای جوش ترکیبات زیر در شرایط یکسان نادرست هستند؟

- (الف) $C_3H_8O < C_3H_5OH < H_2O$ (استون)
 (ب) $HBr < AsH_3 < H_2S$
 (پ) $CH_4 < HCl < PH_3$
 (ت) $HF < HCl < HBr$

- (۱) پ - ت (۲) ب - ت (۳) الف - پ (۴) الف - ت

۵۷- کدام گزینه درست است؟

- (۱) در فرآیند اسمز در نهایت غلظت در دو سمت غشاء نیمه تراوا برابر می شود.
- (۲) در روش صافی کربن و اسمز معکوس برخلاف تقطیر میکروب های موجود در آب تصفیه می شوند.
- (۳) میزان آب استفاده شده در تهیه یک کیلوگرم چرم بیش از ۱۰ برابر یک کیلوگرم گوجه فرنگی است.
- (۴) در فرایند اسمز مولکول های آب در غشا نیمه تراوا از محیط غلیظ به رقیق جابه جا می شوند.

۵۸- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- (الف) آرنیوس نخستین کسی بود که ویژگی های اسیدها و بازها را شناخت و آنها را بر مبنای علمی توصیف کرد.
- (ب) $N_2O_5(s)$ خاصیت اسیدی دارد و هر مول از آن در آب ۴ مول یون ایجاد می کند.
- (پ) براساس مدل آرنیوس میزان اسدی بودن محلول HCl از HF بیشتر است.
- (ت) اسید آرنیوس دارای H و باز آرنیوس دارای OH در ساختار خود هستند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۵۹- در مورد واکنش کامل نوار منیزیم با اسید قوی HA و اسید ضعیف HB کدام گزینه به یقین درست است؟

- (۱) سرعت واکنش اسید HA با نوار منیزیم از اسید HB بیشتر است.
- (۲) حجم گاز هیدروژن تولید شده پس از پایان واکنش در دو واکنش برابر است.
- (۳) با گذشت زمان رسانایی الکتریکی محلول HA کاهش و محلول HB افزایش می یابد.
- (۴) در مدت زمان مشابه حجم گاز H_2 تولید شده در ظرف حاوی HA بیشتر از HB است.

۶۰- انحلال پذیری باز ضعیف BOH ، ۲۵ گرم در دمای اتاق است. اگر به هر لیتر از محلول آن ۹ لیتر آب اضافه کنیم، pH محلول نهایی ۱۰/۵ می شود. جرم

مولی باز BOH کدام است؟ ($K_b(BOH) = 10^{-6} \frac{mol}{L}$ و چگالی محلول ها $1 \frac{g}{ml}$ است)

۲۰۰ (۴)

۵۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

۶۱- در کدام گزینه تمام مواد ذکر شده جاذبه بین ذره ای مشابهی دارند؟

NH_3 ، KOH ، C_2H_5OH (۲)

(۱) استون ، متانول ، گلوکز

$C_{57}H_{114}O_6$ ، SO_3 ، C_6H_6 (۴)

HNO_3 ، $CH_3 - O - CH_3$ ، HF (۳)

((ن زی تون))

۶۲- در کدام گزینه رسانایی الکتریکی محلول ها درست مقایسه شده اند؟

(۱) محلول $NaOH$ با $pH = 8$ < محلول CH_3COOH با $pH = 5$

(۲) محلول کلسیم هیدروکسید $pH = 12$ = محلول سدیم هیدروکسید $pH = 12$

(۳) محلول ۰/۵ مولار نیترات > محلول ۰/۴ مولار کلسیم برمید

(۴) محلول 10^{-3} مولار HX با $K_a = 10^{-6}$ < محلول 10^{-4} مولار HY با $\alpha = 1$

۶۳- درون ۲۵ لیتر محلول نیتریک اسید با $pH = 1/7$ مقدار ۵۰۰ گرم محلول ۸/۲ درصد جرمی کلسیم نیترات با چگالی $1 \frac{g}{ml}$ مخلوط می کنیم، غلظت یون

نیترات در مخلوط نهایی به تقریب چند مول بر لیتر است؟ ($Ca = 40$, $N = 14$, $O = 16 g \cdot mol^{-1}$)

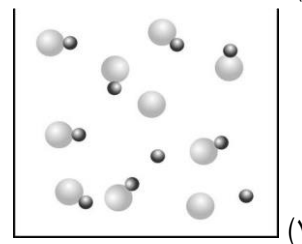
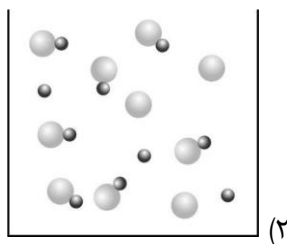
۰/۰۸ (۴)

۰/۰۶ (۳)

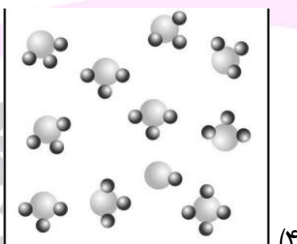
۰/۰۴ (۲)

۰/۰۲ (۱)

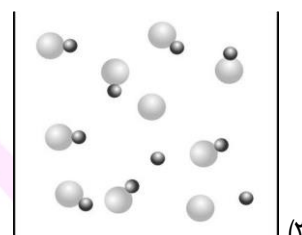
۶۴- با توجه به هر شکل در کدام گزینه کمیت خواسته شده درست محاسبه شده است؟ (هر ذره در شکل را 0.005 مول و حجم محلول‌ها برابر 100 میلی‌لیتر است)



$pH = 11/8$ محلول اسیدی

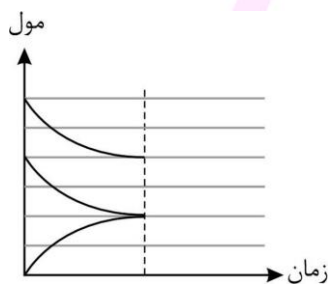


$[کل\ گونه‌ها] = 0.7 \frac{mol}{L}$ محلول اسیدی

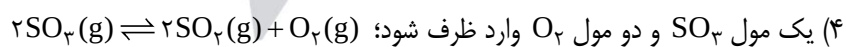
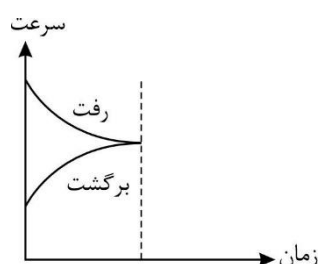
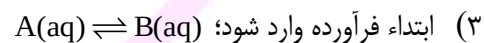
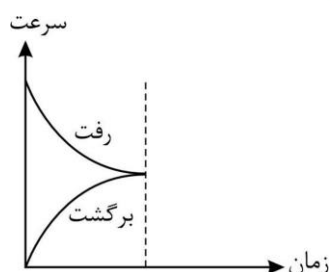
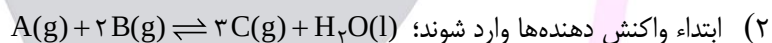
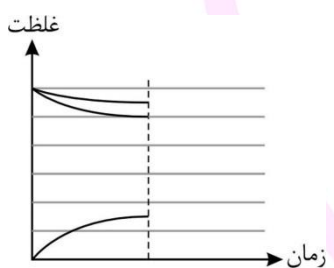
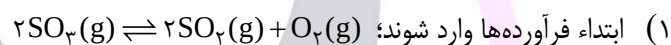


$pH = 11/7$ محلول بازی

$K_a = 2/5 \times 10^{-2}$ محلول اسیدی



۶۵- با توجه به تعادل ذکر شده کدام نمودار صحیح رسم شده است؟



۶۶- کدام یک از مقایسه‌های زیر درست انجام شده است؟

(آ) رسانایی الکتریکی محلول ۱ مولار: $\text{HCN} < \text{HNO}_3$

(ب) میزان چسبندگی مولکول چربی: پارچه پلی‌استر < پارچه نخی

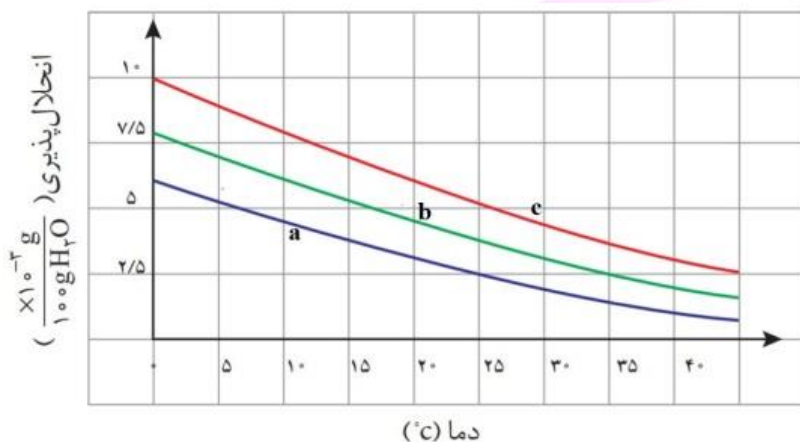
(پ) انحلال‌پذیری در دمای یکسان در آب: $\text{CO}_2 < \text{NO}$

(ت) نیروی جاذبه بین مولکولی: $\text{SO}_2 < \text{Br}_2$

(۱) آ - ب (۲) پ - ت (۳) آ - ب - ت (۴) آ - پ

۶۷- با توجه به نمودار روبه‌رو که انحلال‌پذیری سه گاز O_2 ، N_2 و NO (بدون ترتیب) نشان می‌دهد، تفاوت غلظت گاز اکسیژن در دمای 2°C و 35°C چند

ppm است؟ (چگالی محلول در هر دو دما برابر $1 \frac{\text{g}}{\text{ml}}$ است)



(۱) ۲/۵

(۲) ۵

(۳) ۲۵

(۴) ۵۰

۶۸- محلول اسید HA ($K_a = 4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) در دمای ثابت با غلظت M_1 و $\alpha = 0.1$ موجود است. اگر غلظت این اسید به 0.16 مولار تغییر کند،

نسبت درجه یونش جدید به M_1 کدام است؟

(۴) $1/33$

(۳) $1/25$

(۲) 0.8

(۱) 0.75

۶۹- کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟

(آ) صابون برخلاف محلول حاصل از N_2O_5 در آب، کاغذ pH را آبی می‌کند.

(ب) در دما و غلظت یکسان، $[\text{H}^+]$ در محلول شیشه پاک‌کن کمتر از محلول لوله‌بازکن است.

(پ) آمونیاک همانند هیدروژن فلوئورید الکترولیت ضعیف است و باعث بروز رنگ قرمز در گل آدریسی می‌شود.

(ت) غسل حاوی مولکول‌هایی است که در اثر انحلال در آب pH آب را افزایش می‌دهند.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) آ و ت

(۱) آ و پ

۷۰- در دمای 25°C محلول a از انحلال $12/4$ گرم سدیم اکسید به 800 میلی‌لیتر آب خالص و محلول b از انحلال $33/4$ گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید در 900

میلی‌لیتر آب خالص حاصل می‌شود. نسبت $\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]}$ در محلول b نسبت به a کدام است؟ (از تغییر حجم در اثر انحلال چشم‌پوشی کنید و

($N = 14$, $O = 16$, $Na = 23$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۴) $\frac{1}{4} \times 10^{-28}$

(۳) 9×10^{-28}

(۲) 4×10^{-28}

(۱) $\frac{1}{9} \times 10^{-28}$



آزمون شماره ۲

۲۱ شهریور ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

رشته ریاضی فیزیک

پاسخ تشریحی آزمون

صاحب امتیاز: دبیرستان علامه حلی (۱) تهران

مدیر گروه: پوریا دیارکجوری

ناظر محتوایی: نیما مهندس

نام درس	حسابان	هندسه	گسسته	فیزیک	شیمی
طراحان	حسین شفیعزاده علیرضا ندافزاده علیرضا رفیعی	علیرضا فعلی نصیر کریمی صبا مهدوی	احسان ایزدپناه محمد پیشنماز علیرضا شریف خطیبی	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری ابوالفضل علیدوست علی گندمی	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمد رضا زهرهوند صمد صفوی
ویراستاران	امیررضا عرب شهراب	امیرحسین ملازینل	امیررضا عرب شهراب امیرحسین ملازینل	محمدامین بلوردی امیرحسین قرقانی	بردیا اسدی ایلیا احمدی علی صادق تهرانی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



@Helli1_12

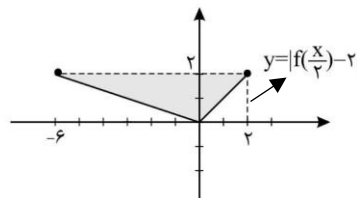
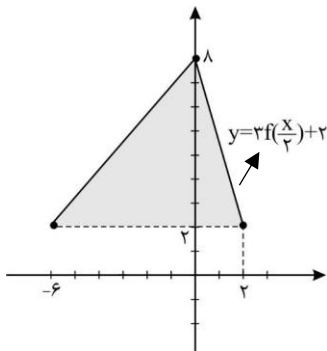
ابتدا $f^{-1}(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(2) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 2 \rightarrow \alpha + \sqrt[3]{\alpha} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

اکنون با جایگذاری مقدار $f^{-1}(2) = 1$ ، حاصل $g^{-1}(7)$ را می‌خواهیم:

$$g^{-1}(7) = \beta \rightarrow g(\beta) = 7 \rightarrow \beta^3 + 2\beta + 10 = 7 \Rightarrow \beta^3 + 2\beta + 3 = 0 \Rightarrow (\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 3) = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

ابتدا نمودار هر یک از توابع را با استفاده از قوانین تبدیلات رسم می‌کنیم:



اکنون با کنار هم قرار دادن نمودار این دو تابع مجموع مساحت نواحی رنگ‌شده برابر است با:

$$\frac{2 \times 8}{2} + \frac{6 \times 8}{2} = 8 + 24 = 32$$

ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} + 1)^3$$

$$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^3 \quad \text{به همین ترتیب}$$

حال برای محاسبه مقدار A می‌توان نوشت:

$$A = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$

ابتدا توجه کنید که هر یک از توابع $y = x^2 - 4x + k$ و $y = -x^2 + 6x + 3k$ روی بازه‌های در نظر گرفته شده (دامنه هر ضابطه) یک‌به‌یک هستند؛ حال برد هر یک از ضابطه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$y = x^2 - 4x + k \quad (x \geq 2, \text{ اکیدا صعودی}) \Rightarrow R_1 = [k - 4, +\infty)$$

$$y = -x^2 + 6x + 3k \quad (x < 2, \text{ اکیدا صعودی}) \Rightarrow R_2 = (-\infty, 8 + 3k)$$

چون اشتراک بردها باید تهی باشد داریم:

$$k - 4 \geq 8 + 3k \Rightarrow 2k \leq -12 \Rightarrow k \leq -6$$

چون تابع f در $\mathbb{R}^-$ اکیداً نزولی است پس:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : f(a) < f(b) \Rightarrow b < a < 0$$

در نتیجه:

$$f\left(\frac{1}{2x+4}\right) < f\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow \frac{2}{x} < \frac{1}{2x+4} < 0$$

حالا هر یک از شروط را جداگانه بررسی می کنیم:

$$\frac{1}{2x+4} < 0 \Rightarrow 2x+4 < 0 \Rightarrow x < -2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2x+4} > \frac{2}{x} \Rightarrow 2x+4 < \frac{x}{2} \Rightarrow 4x+8 < x \Rightarrow 3x < -8 \Rightarrow x < -\frac{8}{3} \quad (2)$$

اعداد $x = -1$ و $x = -2$ در مجموعه جواب قرار ندارند. $(1) \cap (2) \Rightarrow x < -2$

می دانیم اگر f اکیدا نزولی باشد، داریم:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

حال مؤلفه های اول زوج های مرتب را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

$$f = \{(-1, 4m+2), (0, -2m), (2, 3m+1), (3, -5)\}$$

پس داریم:

$$4m+2 > -2m > 3m+1 > -5 \Rightarrow \begin{cases} 4m+2 > -2m \\ -2m > 3m+1 \\ 3m+1 > -5 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 4m+2 > -2m &\rightarrow m > -\frac{1}{3} \\ -2m > 3m+1 &\rightarrow m < -\frac{1}{5} \\ 3m+1 > -5 &\rightarrow m > -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} -\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{5} \rightarrow [m] = -1$$

از آن جا که تابع f اکیدا صعودی است. می توان نوشت:

$$(f \circ f)(a) = a \Rightarrow f(f(a)) = a \Rightarrow f^{-1}(a) = f(a)$$

پس a طول نقطه برخورد توابع f و f^{-1} است. که روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. بنابراین:

$$f^{-1}(x) = f(x) = x \Rightarrow 2\sqrt{2x+3} + 3x = x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x+3} = -2x \Rightarrow \sqrt{2x+3} = -x$$

$$2x+3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$a = 3 \text{ یا } a = -1 \Rightarrow \text{فقط } a = -1 \text{ قابل قبول است} \Rightarrow a^2 + \frac{2}{a} = +1 - 2 = -1$$

روند تبدیلات نمودار را گام به گام دنبال می کنیم:

$$y = 2\sqrt[3]{2x-1} + 3 = f(x)$$

$$y_1 = f(x+2) = 2\sqrt[3]{2(x+2)-1} + 3 = 2\sqrt[3]{2x+3} + 3 = g(x)$$

حال برای به دست آوردن $g^{-1}(x)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$y = 2\sqrt[3]{2x+3} + 3 \Rightarrow y-3 = 2\sqrt[3]{2x+3} \Rightarrow \frac{y-3}{2} = \sqrt[3]{2x+3}$$

$$\Rightarrow 2x+3 = \left(\frac{y-3}{2}\right)^3 \Rightarrow 2x = \frac{1}{2}(y-3)^3 - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{16}(y-3)^3 - \frac{3}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{16}(x-3)^3 - \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$g^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}-3\right)^3 - \frac{3}{2} \xrightarrow{y = -\frac{3}{2} \text{ قطع با خط}} \frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}-3\right)^3 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{نکته: } a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 4$$

حالا با فرض $x - \frac{1}{x} = A$ می توان نوشت:

$$A^3 + 3A - 4 = 0$$

چون مجموع ضرایب صفر است، پس یکی از جوابها $A = 1$ خواهد بود. در نتیجه:

$$A^3 + 3A - 4 = 0 \Rightarrow (A-1)(A^2 + A + 4) = 0 \xrightarrow{A=1}$$

$$x - \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow \left|x + \frac{1}{x}\right| = \sqrt{5} \xrightarrow{x < 0} x + \frac{1}{x} = -\sqrt{5}$$

چون $f(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، می توان نوشت:

$$f(x) = (x-1)q_1(x) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 4 - m = 0 \Rightarrow m = 4$$

حالا قضیه تقسیم را برای fof و $x+1$ می نویسیم:

$$(fof)(x) = (x+1)q_r(x) + r \Rightarrow (fof)(-1) = r \xrightarrow{f(-1)=4} f(4) = 114 \Rightarrow r = 114$$

ضابطه f را کمی ساده تر می نویسیم:

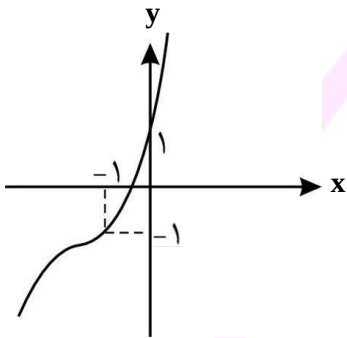
$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 9) + b \\ &= a(x+1)^3 + 8a + b \end{aligned}$$

حالا چون نمودار f از نقطه $(0, 11)$ عبور می کند. در نتیجه:

$$f(0) = 11 \Rightarrow 9a + b = 11$$

$$\begin{cases} k = -1 \\ f(-1) = 8a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = 2(x+1)^3 - 1$$

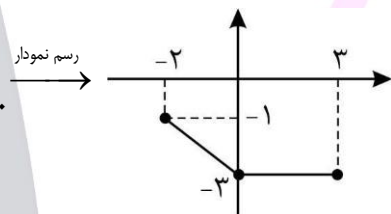
نمودار تابع $g(x) = 2(x+1)^3 - 1$ به صورت زیر است که از ناحیه چهارم عبور نمی کند. پس نمودار وارون آن که قرینه اش نسبت به $y = x$ خواهد بود، از ناحیه دوم عبور نمی کند.



ابتدا ضابطه تابع داده شده را به صورت دو ضابطه ای می نویسیم تا f را تشکیل دهیم:

$$2x - f(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \leq x \leq 0 \\ 3 & 0 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-3 & -3 \leq x \leq 0 \\ 2x-3 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-x) = \begin{cases} -x-3 & 0 \leq x \leq 3 \\ -2x-3 & -2 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow x + f(-x) = \begin{cases} -3 & 0 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$



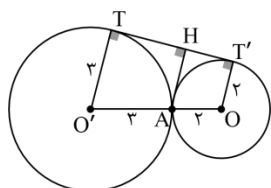
با استفاده از اطلاعات داده شده داریم:

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow -1 + f(-1) = 3 \Rightarrow f(-1) = 4 \\ x = -2 &\Rightarrow -2 - f(-2) = -3 \Rightarrow f(-2) = 1 \end{aligned}$$

حال قضیه تقسیم را می نویسیم و ریشه های مقسوم علیه را در آن جایگذاری می کنیم:

$$xf(x) = (x^2 + 3x + 2)g(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -f(-1) = -a + b \\ -2f(-2) = -2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -4 \\ -2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow a + b = -8$$



حالا طبق نتیجه تالس در ذوزنقه $OT'TO$ داریم:

$$AH = \frac{OA \times O'T + O'A \times OT'}{OA + O'A} = \frac{2 \times 3 + 3 \times 2}{2 + 3} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

از نقطه A به P وصل می کنیم:

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BPC} \rightarrow \text{محاطی APFE}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{APE} = \widehat{APB} = 90^\circ$$

$$\frac{3}{2}P < m_a + m_b + m_c < 2P$$

نکته:

P نشان دهنده نصف محیط است. در نتیجه برای مثلث ABC داریم:

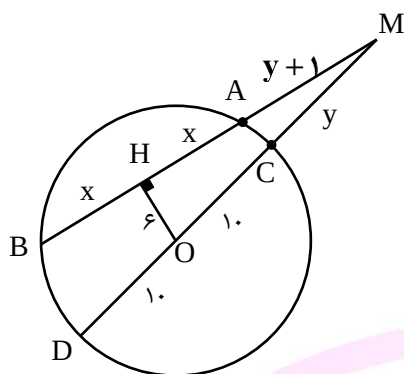
$$\frac{39}{4} < m_a + m_b + m_c < 13$$

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم:

$$A^2 = 3I \rightarrow |A^2| = 3^3 |I| \rightarrow |A| = 3$$

$$A^2 - 3I = \vec{0} \rightarrow A^2 = 3I \quad (*)$$

$$\frac{|A^2 + 9I|}{|3A + I|} = \frac{|A^2 + 3A^2|}{|3A + I|} = \frac{|A^2(I + 3A)|}{|3A + I|} = \frac{|A^2| |I + 3A|}{|3A + I|} = |A^2| = |A|^2 = 9$$



OH بخشی از قطر است و بر AB عمود است. بنابراین $BH=AH=x$

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OHB داریم:

$$x = \sqrt{HC^2 - OH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

حال داریم:

$$(y+1)(y+1+16) = y(y+20) \rightarrow y^2 + 18y + 17 = y^2 + 20y$$

$$\rightarrow 2y = 17 \rightarrow y = \frac{17}{2} \rightarrow x + 2y = 8 + 2 \times \frac{17}{2} = 25$$

باید $A^{-1} + B^{-1}$ را تشکیل دهیم. در نتیجه:

$$\xrightarrow{A^{-1} \times} A + B = AB \xleftarrow{\times B^{-1}}$$

$$\rightarrow A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = A^{-1}ABB^{-1}$$

$$\rightarrow B^{-1} + A^{-1} = I \rightarrow |B^{-1} + A^{-1}| = 1$$

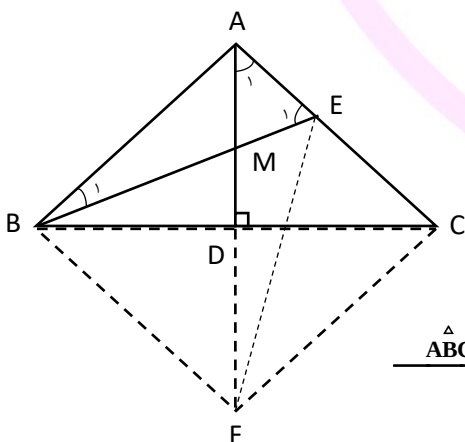
AD را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم. در نتیجه ABFC لوزی است، پس $BF \parallel AE$

از طرفی:

$$AF = 2AD = BE \rightarrow AEFB \text{ دوزنقه متساوی الساقین}$$

$$\rightarrow MA = ME \text{ و } \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \text{ و } \hat{B}_1 = 45 - \frac{\hat{A}_1}{2}$$

$$\xrightarrow{\triangle ABC} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 180^\circ \rightarrow 2\hat{A}_1 + 45 - \frac{\hat{A}_1}{2} + \hat{A}_1 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_1 = 54^\circ \text{ و } \hat{A} = 108^\circ$$

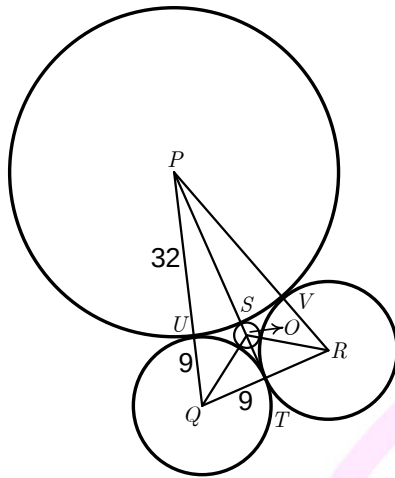


۲۱- گزینه ۲ مبحث: فصل ۱ یازدهم درجه دشواری: متوسط طراح: صبا مهدوی

مرکز دایره کوچکتر را O می‌نامیم. مثلث PQT قائم‌الزاویه $90^\circ - 40^\circ - 50^\circ$ می‌باشد، پس $PT = 40$. اگر $OT = x$ باشد آن‌گاه داریم:

$$PT = PS + SO + TO = 32 + r + x \Rightarrow x = 8 - r$$

در مثلث قائم‌الزاویه OQT با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

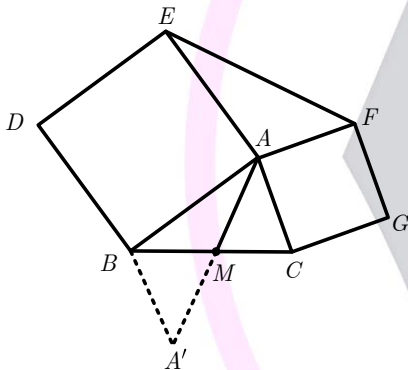


$$9^2 + x^2 = (9+r)^2 \xrightarrow{x=8-r} 9^2 + (8-r)^2 = (9+r)^2 \Rightarrow 9^2 = (9+r)^2 - (8-r)^2$$

$$\Rightarrow 81 = 17(2r+1) \Rightarrow r = \frac{22}{17}$$

۲۲- گزینه ۳ مبحث: فصل ۱ دهم درجه دشواری: دشوار طراح: صبا مهدوی

میان AM را تا A' طوری امتداد می‌دهیم که $AM = A'M$. در چهارضلعی $ABA'C$ قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع می‌باشد. در نتیجه $AC = BA'$ و $\angle ABA' = 180^\circ - \angle BAC$ از طرفی داریم:



$$\angle BAC + \angle CAF + \angle FAE + \angle EAB = 360^\circ \Rightarrow \angle BAC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle FAE = 180^\circ - \angle FAE$$

یا به عبارتی $\angle FAE = 180^\circ - \angle BAC$. پس، از $\angle ABA' = 180^\circ - \angle BAC$ نتیجه می‌شود که $\angle ABA' = \angle FAE$.

با توجه به اینکه $AFGC$ و $DEAB$ مربع می‌باشند، $FA = AC$ و $BA = AE$ می‌باشد و با توجه به

$AC = BA'$ نتیجه می‌شود که $BA' = AF$. پس دو مثلث ABA' و AEF به حالت دو ضلع و زاویه

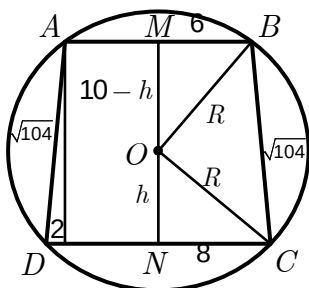
بین هم‌نهشت می‌باشند و از اجزای متناظر نتیجه می‌شود که $FE = AA'$ و در نهایت $AM = \frac{1}{2}FE = 3$.

۲۳- گزینه ۳ مبحث: فصل ۱ یازدهم درجه دشواری: دشوار طراح: صبا مهدوی

مساحت دایره برابر πR^2 است پس $k = R^2$. چون دوزنقه $ABCD$ محاطی می‌باشد، پس متساوی‌الساقین است و در نتیجه $BC = \sqrt{104}$. ابتدا

ارتفاع دوزنقه را حساب می‌کنیم. با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه کوچک که ساق AD وتر آن است، ارتفاع دوزنقه برابر

$$10 = \sqrt{104^2 - 2^2} \text{ می‌باشد. در دو مثلث } OMB \text{ و } ONC \text{ قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:}$$



$$\left. \begin{aligned} R^2 &= 6^2 + (10-h)^2 \\ R^2 &= h^2 + 2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6^2 + (10-h)^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow (10-h)^2 - h^2 = 28$$

$$\Rightarrow 10(10-2h) = 28 \Rightarrow 100 - 20h = 28 \Rightarrow h = \frac{18}{5} \Rightarrow k = R^2 = h^2 + 2^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 + 2^2 = \frac{1924}{25}$$

گزینه ۳- ۲۴
مبحث: ویژگی‌های رابطه عادی کردن درجه دشواری: ساده
طراح: احسان ایزدپناه
گزاره‌ی «الف»، «ج» و «د» درست هستند.

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|b^2 \\ a|c \end{array} \right\} \Rightarrow a|b^2+c \quad (\text{الف})$$

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|b^2 \\ a|c \Rightarrow a|c^2 \\ a|a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a|a^2+b^2+c^2 \quad (\text{ج})$$

$$\left. \begin{array}{l} a|b \\ a|c \end{array} \right\} \Rightarrow a^2|bc \left\{ \begin{array}{l} a^2|a^2+bc \end{array} \right. \quad (\text{د})$$

گزینه ۲- ۲۵
مبحث: بخش پذیری در اعداد صحیح درجه دشواری: دشوار
طراح: احسان ایزدپناه

$$y = \frac{8+5|x|}{|x|} = \frac{8}{|x|} + 5$$

۵ عددی صحیح است. پس برای آنکه $\frac{8+5|x|}{|x|}$ نیز صحیح باشد، لازم است $\frac{8}{|x|}$ صحیح شود؛ یعنی $|x|$ عدد ۸ را عادی کند. در این صورت داریم:

$$|x| = 1, 2, 4, 8$$

$$\begin{cases} |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow (1, 13), (-1, 13) \\ |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow (2, 9), (-2, 9) \\ |x|=4 \Rightarrow x=\pm 4 \Rightarrow (4, 7), (-4, 7) \\ |x|=8 \Rightarrow x=\pm 8 \Rightarrow (8, 6), (-8, 6) \end{cases}$$

در بین نقاط به دست آمده تنها در نقطه $(8, 6)$ ، $x \geq y$ است و در نتیجه ۷ نقطه با مشخصات مورد نظر بر روی این نمودار وجود دارد.

گزینه ۲- ۲۶
مبحث: قضیه تقسیم و کاربردها + ب.م.م درجه دشواری: متوسط
طراح: علیرضا شریف خطیبی
فرض کنید عدد مورد نظر را با b نمایش دهیم. طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 270 = bq + 10 \Rightarrow bq = 260, 10 < b \\ 200 = bq' + 5 \Rightarrow bq' = 195, 5 < b \end{array} \right\} \Rightarrow b > 10 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} bq = 260 \Rightarrow b|260 \\ bq' = 195 \Rightarrow b|195 \end{array} \right\} \Rightarrow b|(260, 195) \Rightarrow b|65 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow b = 13 \text{ یا } 65$$

۲۷- گزینه ۲ مبحث: بزرگترین مقسوم علیه مشترک درجه دشواری: دشوار طراح: احسان ایزدپناه

با استفاده از ویژگی‌های ب.م.م دو عدد می‌توان نوشت:

$$(6a+4, 12a-4) = 2(3a+2, 2a-2) \xrightarrow{a=-\frac{2}{3}} 2(3a+2, 6a-2) = 2(3a+2, 6 \times (-\frac{2}{3})-2) = 2(3a+2, 6)$$

$$\xrightarrow{(3a+2, 3)=1} 2(3a+2, 6) = 2(3a+2, 2) = 2 \quad \text{یا} \quad 4$$

۲۸- گزینه ۴ مبحث: کوچکترین مضرب مشترک درجه دشواری: ساده طراح: احسان ایزدپناه

نکته: برای محاسبه‌ی ک.م.م دو عدد ابتدا آن‌ها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با بزرگترین توان و عوامل غیرمشترک ک.م.م آن‌هاست.

$$[a, 54] = 108 \Rightarrow [a, 2 \times 3^3] = 2^2 \times 3^3$$

بنابراین با توجه به نکته‌ی بالا عدد a به فرم $a = 2^2 \times 3^r$ است که $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ ، بنابراین چهار مقدار طبیعی برای a وجود دارد.

۲۹- گزینه ۴ مبحث: اعداد اول درجه دشواری: متوسط طراح: محمد پیشنماز

کمی ظاهر فرض داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$q^2 - 13p = 16 \Leftrightarrow q^2 - 16 = 13p \Leftrightarrow (q-4)(q+4) = 13p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q-4=13 \\ q+4=p \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} q+4=13 \\ q-4=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=17 \\ p=21 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} q=9 \\ p=5 \end{cases}$$

پس هیچ دو جفت از اعداد اول با ویژگی گفته شده وجود ندارد.

۳۰- گزینه ۱ مبحث: قضیه تقسیم درجه دشواری: متوسط طراح: احسان ایزدپناه

قضیه تقسیم را برای a و ۴۸ می‌نویسیم:

$$a = 48q + 22 \Rightarrow a = 16(3q) + 22 = 16q' + 22$$

$$q' = 2t \Rightarrow a = 32t + 22$$

$$q' = 2t + 1 \Rightarrow a = 32t + 16 + 22 \Rightarrow a = 32t + 38 = 32(t+1) + 6(q, q', t \in \mathbb{Z})$$

پس $r=6$ یا $r=22$ است.

۳۱- گزینه ۲ مبحث: حرکت یکنواخت درجه دشواری: ساده طراح: ابوالفضل علیدوست

معادله مکان - زمان را مرتب می کنیم:

$$2x + 5t = -9 \Rightarrow x = -2/5t - 4/5$$

معادله فوق مربوط به متحرکی است که با سرعت ثابت $-2/5 \frac{m}{s}$ در حرکت است. بنابراین سرعت متوسط آن در تمام بازه ها $-2/5 \frac{m}{s}$ خواهد بود.

۳۲- گزینه ۳ مبحث: حرکت یکنواخت درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

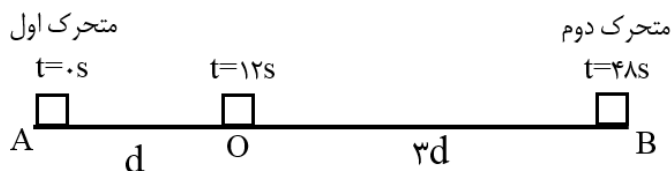
معادله دو حالت را می نویسیم:

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow \begin{cases} 600 = vt \\ 600 = (v-1)(t+30) \Rightarrow 600 = vt + 30v - t - 30 \Rightarrow t = 30(v-1) \end{cases}$$

اکنون از جایگذاری نتیجه معادله دوم در معادله اول داریم:

۳۳- گزینه ۱ مبحث: حرکت یکنواخت درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

اگر دو متحرک در لحظه $t = 12s$ در نقطه O به یکدیگر برسند، وضعیت مطابق شکل زیر است. از آنجا که سرعتها ثابت است، زمان حرکت با طول مسیر متناسب است و داریم:



$$\frac{AO}{OB} = \frac{12-0}{48-12} = \frac{1}{3}$$

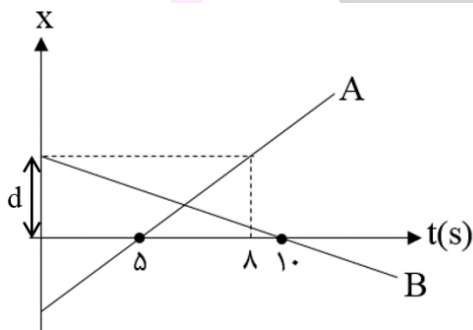
متحرک دوم در $t = 12s$ از B به O می رسد. باتوجه به ثابت بودن سرعت این متحرک می توان نوشت:

$$\frac{BO}{BA} = \frac{12}{t} \Rightarrow \frac{3d}{4d} = \frac{12}{t} \Rightarrow t = 16s$$

۳۴- گزینه ۱ مبحث: حرکت یکنواخت درجه دشواری: دشوار طراح: ابوالفضل علیدوست

مطابق نمودار ۱۰ ثانیه (از $t = 0$ تا $t = 10s$) طول می کشد تا متحرک B به میزان d جابجا شود. این جابه جایی برای متحرک A تنها ۳ ثانیه (از $t = 5s$ تا $t = 8s$) طول می کشد. از آنجا که سرعت دو متحرک ثابت است، نسبت سرعت متحرک A به B برابر است با:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{d}{3}}{\frac{d}{10}} = \frac{10}{3}$$



۳۵- گزینه ۲ مبحث: حرکت یکنواخت درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

مطابق نمودار فاصله دو متحرک در $t = 0$ برابر ۱۳۲ m و در $t = 6s$ برابر ۱۰۸ m است. یعنی متحرک B با سرعت $v = \frac{132-108}{6} = 4 \frac{m}{s}$ به متحرک A نزدیک می شود:

$$\Delta x = 132 - 72 = 60 \Rightarrow t_1 = \frac{60}{4} = 15s$$

$$\Delta x_2 = 132 + 72 = 204 \Rightarrow t_2 = \frac{204}{4} = 51s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{51}{15} = \frac{17}{5}$$

طراح: ابوالفضل علیدوست

درجه دشواری: ساده

مبحث: شتاب ثابت

گزینه ۴-۳۶

رابطه مستقل از زمان را برای نیمه اول مسیر و کل مسیر می نویسیم:

$$v^2 - 0 = 2a \times \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \left(\frac{v}{90}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 90 = 45\sqrt{2} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v^2 - 0 = 2a \times \Delta x \Rightarrow 90^2 - 0 = 2a \times \Delta x$$

طراح: ابوالفضل علیدوست

درجه دشواری: ساده

مبحث: شتاب ثابت

گزینه ۲-۳۷

سرعت متحرک در $t = 25$ صفر می شود.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 2 + 10 \Rightarrow a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

رابطه مستقل از زمان بین دو نقطه $x_1 = 12\text{m}$ و $x_2 = -18\text{m}$ را می نویسیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 10^2 = 2(-5)(-30) \Rightarrow v^2 = 100 + 300$$

$$v = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

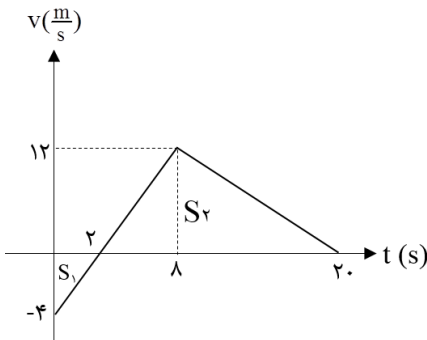
طراح: ابوالفضل علیدوست

درجه دشواری: متوسط

مبحث: شتاب ثابت

گزینه ۱-۳۸

با توجه به نمودار شتاب - زمان در ۸ ثانیه اول سرعت $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ افزایش و در 12s پس از آن $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کاهش می یابد. نمودار سرعت - زمان متحرک به صورت شکل زیر است.



$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{12 \times 18}{2}$$

$$\ell = 4 + 108 = 112\text{m} \Rightarrow s_{av} = \frac{112}{20} = 5.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

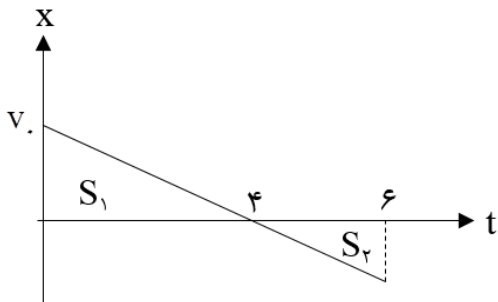
طراح: ابوالفضل علیدوست

درجه دشواری: دشوار

مبحث: شتاب ثابت

گزینه ۴-۳۹

اگر متحرک در $t = 4\text{s}$ تغییر جهت دهد، تندی متحرک در $t = 3\text{s}$ و $t = 5\text{s}$ برابر خواهد بود. نمودار سرعت - زمان این متحرک به صورت شکل مقابل است. اندازه جابه جایی در ۴ ثانیه اول $\Delta x_1 = S_1$ و در بازه $t_1 = 4\text{s}$ تا $t_2 = 6\text{s}$ ، $\Delta x_2 = S_2$ است. داریم:



$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \rightarrow S_1 = 4S_2$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{S_1 + S_2}{S_1 - S_2} = \frac{4S_2 + S_2}{4S_2 - S_2} = \frac{5}{3}$$

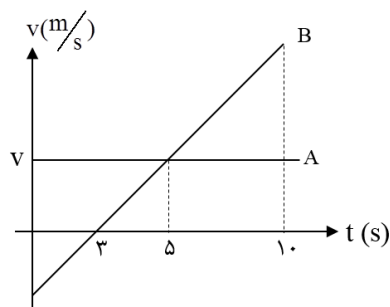
طراح: ابوالفضل علیدوست

درجه دشواری: دشوار

مبحث: شتاب ثابت

۴۰- گزینه ۲

نمودار سرعت - زمان دو متحرک مطابق شکل است. دو متحرک در لحظات $t = 0$ و $t = 10$ s در کنار هم بوده‌اند، پس در $t = 5$ s سرعت آن‌ها با یکدیگر برابر و مقدار v شده است.



به کمک قضیه تالس، با توجه به شکل رسم‌شده، سرعت متحرک B در لحظه $t = 10$ s را بر حسب v تعیین می‌کنیم:

$$\text{برای متحرک B: } \frac{v_{10}}{v_5} = \frac{v}{\frac{v_5}{2}} \rightarrow v_{10} = 3/5v$$

دو متحرک در بازه زمانی $t = 5$ s تا $t = 10$ s به یکدیگر نزدیک می‌شوند و سرعت متوسط متحرک B در این بازه زمانی برابر $9 \frac{m}{s}$ است.

$$V_{av_{5-10}} = 9 \Rightarrow \frac{v + 3/5v}{2} = 9 \Rightarrow 18 = 4/5v \Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}$$

طراح: علی گندمی

درجه دشواری: دشوار

مبحث: شتاب ثابت

۴۱- گزینه ۳

راه حل اول: با توجه به رابطه مستقل از حرکت شتاب ثابت داریم:

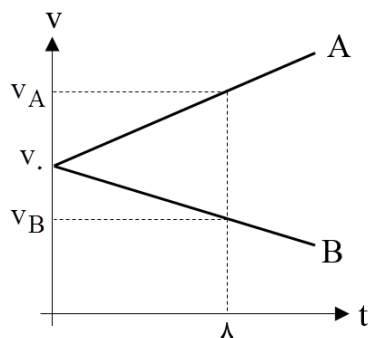
$$\frac{v_0 + v}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \begin{cases} A) \frac{v_0 + v_A}{2} = \frac{40}{8} \Rightarrow v_0 + v_A = 10 \\ B) \frac{v_0 + v_B}{2} = \frac{16}{8} \Rightarrow v_0 + v_B = 4 \end{cases}$$

حالا برای به‌دست آوردن $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = -6\vec{i}$$

راه حل دوم: استفاده از نمودار $v - t$

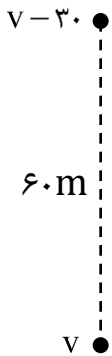
از آن‌جا که خط مماس بر نقطه شروع هر دو نمودار یکسان است. پس سرعت اولیه A و B یکسان می‌باشد، فقط حرکت A تندشونده و حرکت B کندشونده است.



$$\begin{cases} S_A = \frac{v_0 + v_A}{2} \times 8 = 40 \Rightarrow v_0 + v_A = 10 \\ S_B = \frac{v_0 + v_B}{2} \times 8 = 16 \Rightarrow v_0 + v_B = 4 \end{cases} \Rightarrow v_B - v_A = -6$$

۴۲- گزینه ۳ مبحث: سقوط آزاد درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

حرکت جسم در ۳S آخر را بررسی می کنیم. اگر سرعت در لحظه برخورد به زمین ۷ فرض شود، ۳S قبل از برخورد، با توجه به آن که شتاب حرکت $۱۰ \frac{m}{s^2}$ است، سرعت ۳۰- ۷ خواهد بود.



$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \times \Delta t$$

$$6.0 = \frac{v + v - 30}{2} \times 3 \Rightarrow 4.0 = 2v - 30 \Rightarrow v = 35 \frac{m}{s}$$

۴۳- گزینه ۳ مبحث: دما و گرما، دمای تعادل درجه دشواری: متوسط طراح: علی گندمی

با توجه به نمودار، دمای تعادل $20^\circ C$ داریم:

$$\theta_e = \frac{m_A C_A \theta_A + m_B C_B \theta_B}{m_A C_A + m_B C_B} \quad C_A = 4C_B, \quad m_B = 2m_A \rightarrow 20 = \frac{4\theta_A + 2(-10)}{4 + 2} \Rightarrow \theta_A = 35^\circ C$$

۴۴- گزینه ۳ مبحث: دما و گرما، دمای تعادل درجه دشواری: ساده طراح: ابوالفضل علیدوست

تابش گرمایی سطوح تیره و ناصاف بیشتر است.

۴۵- گزینه ۱ مبحث: دما و گرما، انبساط درجه دشواری: متوسط طراح: ابوالفضل علیدوست

در ابتدا 50 cm^3 از ظرف خالی است. اگر افزایش حجم مایع از ظرف 20 cm^3 بیشتر باشد، حجم قسمت خالی 30 cm^3 خواهد شد.

$$\Delta V_{\text{مایع}} - \Delta V_{\text{ظرف}} = 20 \Rightarrow \beta V_A \Delta \theta - 3\alpha V_A \Delta \theta = 20$$

$$(8 \times 10^{-4} \times 350 - 3 \times 2/5 \times 10^{-5} \times 400) \Delta \theta = 20 \Rightarrow (280 - 30) \times 10^{-3} \times \Delta \theta = 20 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{2000}{250} = 8^\circ C \Rightarrow \theta_f = 90^\circ C$$

۴۶- گزینه ۴ مبحث: دما و گرما، تغییر حالت درجه دشواری: دشوار طراح: ابوالفضل علیدوست

ابتدا ظرفیت گرمایی ظرف را تعیین می کنیم. گرم کن دمای مجموعه را $30^\circ C$ افزایش داده است.

$$P \times t = MC\Delta\theta + C\Delta\theta$$

$$350 \times 3 \times 60 = 0.4 \times 4200 \times 30 + C \times 30 \Rightarrow C = 450 \frac{J}{^\circ C}$$

جرم یخ باید مقداری باشد که تمام یخ ذوب شود و دمای مجموعه از $40^\circ C$ به $0^\circ C$ برسد.

$$ML_F = |MC\Delta\theta + C\Delta\theta|$$

$$M \times 336 = (0.4 \times 4200 + 420) \times 40 \rightarrow M = 250 \text{ g}$$

۴۷- گزینه ۱ مبحث: دما و گرما، دماسنجی درجه دشواری: ساده طراح: علی گندمی

بررسی گزینه ها:

(الف) نادرست: دماسنج فارنهایت فاصله نقطه تعادل آب و یخ و جوش آب را به ۱۸۰ قسمت تقسیم می کند، پس دقیق تر است.

(ب) درست: دماسنج گازی جزء دماسنج های معیار است.

(پ) نادرست: کمیت دماسنجی در دماسنج مقاومت پلاتینی، مقاومت الکتریکی است.

(ت) نادرست: دماسنج ترموکوپل به دلیل جرم کوچک محل اتصال خیلی سریع به تعادل گرمایی می رسد.

۴۸- گزینه ۱ مبحث: دما و گرما، تعادل گرمایی درجه دشواری: ساده طراح: محمدجواد حیدری

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$Q = 3 \times c_A \times 5 = 2 \times c_B \times 3 \Rightarrow \frac{c_A}{c_B} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۴۹- گزینه ۴ مبحث: دما و گرما، تعادل گرمایی درجه دشواری: دشوار طراح: پوریا دیارکجوری

ابتدا نسبت جرم جسم‌های A و B را حساب می‌کنیم:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{4}{3}\pi (2R)^3}{\frac{4}{3}\pi [(3R)^3 - (2R)^3]} = \frac{8R^3}{19R^3} = \frac{8}{19}$$

اکنون معادله گرما را برای دو جسم می‌نویسیم:

$$Q_A = Q_B = \frac{8}{19} m_A \cdot c \cdot \Delta\theta_A = m_B \cdot c \cdot \Delta\theta_B \Rightarrow \Delta\theta_A = \frac{19}{8} \Delta\theta_B$$

$$\frac{\Delta V_B}{\Delta V_A} = \frac{V_A (3\alpha) \Delta\theta_A}{V_B (3\alpha) \Delta\theta_B} = \frac{(2R)^3}{(3R)^3} \times \frac{19}{8} = \frac{8}{27} \times \frac{19}{8} = \frac{19}{27}$$

۵۰- گزینه ۱ مبحث: دما و گرما، دما و دماسنجی درجه دشواری: ساده طراح: پوریا دیارکجوری

رابطه دمای فارنهایت برحسب درجه سانتی‌گراد به صورت $F = \frac{9}{5}\theta + 32$ است. با مرتب‌کردن این رابطه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow \theta = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

که خطی با شیب کمتر از ۱ و عرض از مبدأ منفی است.

(آ) نادرست - در دمای 25°C حاصل ضرب $[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$ است. دما در شرایط STP برابر 0°C است.

(ب) درست - با توجه به این که حاصل ضرب $[\text{H}^+][\text{OH}^-]$ برابر صفر نمی شود امکان صفر شدن غلظت یون هیدرونیوم در محلول آبی وجود ندارد.

(پ) درست - pH محلول خنثی در دمای 25°C برابر ۷ است و این مقدار با تغییر دما، تغییر می کند.

(ت) نادرست - ثابت تعادل واکنش $\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{OH}^-$ برابر با K_w $[\text{H}^+][\text{OH}^-] = K_w$ است و ثابت تعادل تنها وابسته به دما است.

۵۲- گزینه ۳ مبحث: شرایط انحلال - قاعده انحلال - جاذبه میانگین درجه دشواری: دشوار طراح: مسعود خوش طینت

(آ) نادرست - در مخلوط های ناهمگن به حالت مایع، اجزای مخلوط به میزان ناچیزی در یکدیگر حل می شوند.

(ب) نادرست - در مخلوط استون و آب، نیروی جاذبه بین مولکول های آب و استون، بیشتر از میانگین نیروهای جاذبه در آب خالص و استون خالص است.

(پ) درست - انحلال ید در هگزان و الکل در آب هر دو از نوع انحلال مولکولی است. در این نوع از انحلال ماده حل شونده ویژگی های ساختاری خود را حفظ می کند.

(ت) نادرست - با توجه به تعریف انحلال پذیری، اتانول و استون به هر مقدار در آب حل می شوند و محلول سیر شده از آن ها تولید نمی شود.

۵۳- گزینه ۳ مبحث: ویژگی های عمومی اسیدها و بازها - الکترولیت درجه دشواری: ساده طراح: مسعود خوش طینت

(۴) AgCl یک ترکیب نامحلول در آب است که به میزان بسیار کم ($10^{-4} \text{ g}/100 \text{ g H}_2\text{O}$) در آب حل می شود. این مقدار از AgCl حل شده به طور کامل به یون تبدیل می شود. بنابراین الکترولیت قوی است.

۵۴- گزینه ۳ مبحث: رقیق سازی اسیدها - ترکیبی و مفهومی درجه دشواری: متوسط طراح: مسعود خوش طینت

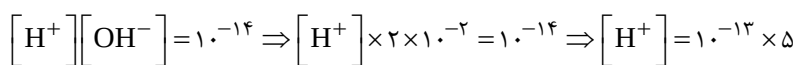
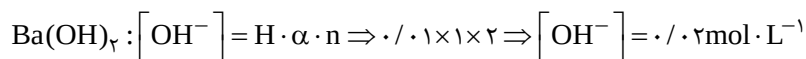
(۱) اگر با افزودن آب خالص به محلول اسید قوی یا باز قوی، حجم محلول را n برابر کنیم، محلول مورد نظر n مرتبه رقیق می شود. با افزایش a به a لیتر اولیه، حجم محلول را ۱۰ برابر کرده ایم، بنابراین محلول ها ۱۰ مرتبه رقیق می شوند.

(۲) در اسیدهای قوی: $\text{pH} = \log n$ تغییر $\text{pH} \rightarrow n$ برابر کردن حجم محلول (افزایش)

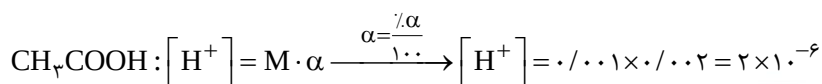
$\text{pH} = 5 + 1 = 6 \rightarrow \log 10 = 1 \rightarrow \text{pH} = 10$ برابر کردن حجم محلول

(۳) در بازها و اسیدهای ضعیف تغییر pH از رابطه $\Delta \text{pH} = \log n$ تبعیت نمی کند.

(۴) در دمای 25°C در محلول های آبی عبارت $[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$ همواره صادق است.



$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log[5 \times 10^{-13}] = 12.3$$



$$\text{pH} = -\log(2 \times 10^{-6}) = 5.7$$

$$12.3 - 5.7 = 6.6$$

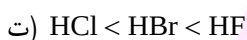
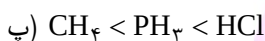
طراح: محمدرضا زهرهوند

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فصل ۳ دهم (نیروی بین مولکولی)

۵۶- گزینه ۱

مقایسه درست برای موارد (پ) و (ت)



طراح: محمدرضا زهرهوند

درجه دشواری: ساده

مبحث: فصل ۳ دهم

۵۷- گزینه ۳

بررسی موارد نادرست:

(۱) در نهایت الزاماً غلظت‌ها برابر نمی‌شود.

(۲) در هیچ کدام از این سه روش میکروب‌ها جدا نمی‌شوند.

(۴) در فرآیند اسمز آب از محیط رقیق به محیط غلیظ می‌رود.

طراح: محمدرضا زهرهوند

درجه دشواری: دشوار

مبحث: فصل ۱ دوازدهم اسید و باز آرنیوس

۵۸- گزینه ۱

بررسی موارد نادرست:

(الف) قبل از آرنیوس دانشمندان برخی از ویژگی‌های اسیدها و بازها را می‌شناختند.

(پ) براساس مدل آرنیوس نمی‌توان میزان اسیدی بودن را مقایسه کرد.

(ت) الزامی به وجود H و OH در ساختار اسید و باز آرنیوس نیست.

طراح: محمدرضا زهرهوند

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فصل ۱ دوازدهم مفهومی ثابت یونش

۵۹- گزینه ۳

غلظت محلول‌های HA و HB و حجم آنها می‌تواند برابر نباشند.

سرعت واکنش اسیدها با فلز Mg وابسته به غلظت یون H_3O^+ است. و مقدار گاز هیدروژن تولید شده به مقدار مول واکنش دهنده‌ها وابسته است. درمورد رسانایی الکتریکی با گذر زمان هر ۲ mol یون در HA به ۱ mol یون در MgA_2 تبدیل می‌شود که یعنی از ۴ mol یون به ۳ mol یون تبدیل

می‌شود، پس رسانایی الکتریکی به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

$$\text{غلظت مولی اسید} = \frac{10 \times \frac{s}{100+s} \times 100 \times d}{M_w}$$

پس از ۱۰ برابر کردن حجم محلول PH به اندازه $\frac{1}{2} \log 10$ کاهش یافته است پس PH محلول قبل از رقیق شدن برابر ۱۱ بوده است.

$$\Rightarrow \text{ph} = 11 \Rightarrow (\text{OH}^-) = 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$\Rightarrow k_b \approx \frac{(\text{OH}^-)^2}{M} \Rightarrow M = \frac{10^{-6}}{10^{-6}} = 1 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

با جایگذاری در رابطه اولیه M_w برابر $200 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ است.

۶۱- گزینه ۴ مبحث: نیروهای بین مولکولی درجه دشواری: متوسط طراح: صمد صفوی

نیروی بین ذره‌ای مواد ذکر شده به صورت زیر است:

(۱) استون (واندروالسی)، متانول و گلوکز هر دو هیدروژنی

(۲) $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ (هیدروژنی)، KOH (یونی)، NH_3 (هیدروژنی)

(۳) HF (هیدروژنی)، $\text{CH}_3-\text{O}-\text{CH}_3$ (واندروالسی)، HNO_3 (هیدروژنی)

(۴) C_6H_6 ، SO_3 ، $\text{C}_{57}\text{H}_{104}\text{O}_6$ هر سه واندروالسی

۶۲- گزینه ۳ مبحث: رسانایی الکتریکی محلول‌ها درجه دشواری: متوسط طراح: صمد صفوی

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست - در اسیدهای تک پروتونه هر اسیدی که pH کمتر دارد رساناتر است.

(۲) نادرست - برای مقایسه رسانایی الکتریکی محلول‌ها باید غلظت یون‌های محلول را مقایسه کرد.

$$\text{Ca}(\text{OH})_2 \Rightarrow \text{pH} = 12 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-2}, [\text{Ca}^{2+}] = \frac{10^{-2}}{2} \Rightarrow [\text{کل یون}] = 10^{-2} + \frac{10^{-2}}{2} = 1.5 \times 10^{-2}$$

$$\text{NaOH} \Rightarrow \text{pH} = 12 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-2}, [\text{Na}^+] = 10^{-2} \Rightarrow [\text{کل یون}] = 10^{-2} + 10^{-2} = 2 \times 10^{-2}$$

با توجه به این که مجموع غلظت یون‌ها متفاوت است، رسانایی الکتریکی دو محلول متفاوت است.

(۳) درست

$$\text{رسانایی الکتریکی: } \text{CaBr}_2 \Rightarrow [\text{یون‌ها}] = 0.4 \times 3 = 1.2 \text{ M} > \text{LiNO}_3 \Rightarrow [\text{یون‌ها}] = 0.5 \times 2 = 1 \text{ M}$$

(۴) نادرست - رسانایی محلول HY بیشتر است.

$$\text{HY: } [\text{یون‌ها}] = 2 \text{ M} \alpha_{\text{HY}} = 2 \times 10^{-4} \times 1 = 2 \times 10^{-4}$$

$$\text{HX: } [\text{یون‌ها}] = 2 \sqrt{K_a \cdot M} = 2 \left(\sqrt{10^{-6} \times 10^{-3}} \right) = 2 \times 10^{-4.5}$$

۶۳- گزینه ۲ مبحث: مسائل فصل ۱ دوازدهم درجه دشواری: متوسط طراح: صمد صفوی

هر دو ماده، نیتریک اسید (HNO_3) و کلسیم نیترات ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$) حاوی یون نیترات هستند.

$$\text{pH} = 2/7 \Rightarrow [\text{H}^+] = 2 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \quad [\text{H}^+] = [\text{NO}_3^-] = 2 \times 10^{-2}$$

$$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \Rightarrow \text{M} = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 8 / 2 \times 1}{164} = 0/5 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$[\text{NO}_3^-] = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{V_{\text{کل}}} = \frac{2 \times 10^{-2} \times 25 + 0/5 \times 2 \times 0/5}{25/5}$$

$$\frac{0/5 + 0/5}{25/5} = \frac{1}{25/5} \approx 0/04$$

۶۴- گزینه ۳ مبحث: مسائل فصل ۱ دوازدهم درجه دشواری: متوسط طراح: صمد صفوی

محاسبات صحیح هر گزینه به صورت زیر است:

$$۱) [\text{کل گونه‌ها}] = \text{M} + [\text{H}^+] = \frac{10 \times 5 \times 10^{-3}}{0/1} + \frac{2 \times 5 \times 10^{-3}}{0/1} = 0/6$$

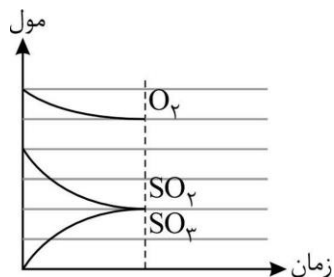
$$۲) [\text{H}^+] = \frac{3 \times 5 \times 10^{-3}}{0/1} = 0/15 \Rightarrow \text{pH} = -\log 15 \times 10^{-2} = -\log 3 \times 5 \times 10^{-2} = 2 - (0/5 + 0/7) = 0/8$$

$$۳) K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3} \times 2 \times 5 \times 10^{-3}}{8 \times 5 \times 10^{-3} \times 0/1} = 2/5 \times 10^{-2}$$

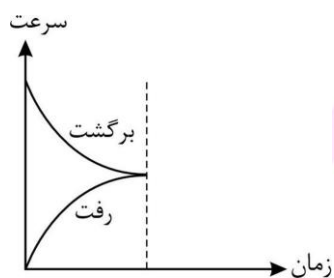
$$۴) [\text{OH}^-] = \frac{5 \times 10^{-3}}{0/1} = 5 \times 10^{-2} \Rightarrow \text{pOH} = 1/3 \Rightarrow \text{pH} = 12/7$$

شکل صحیح نمودارها به شکل زیر است:

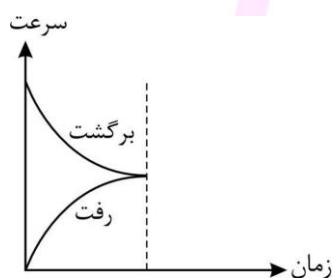
گزینه ۱: البته حالت صحیح دیگری نیز با توجه به ضرایب قابل رسم است.



گزینه ۳:



گزینه ۴:



موارد آ، ب و ت درست هستند. در مورد عبارت (پ) لازم به ذکر است که CO_2 با وجود ناقطبی بودن، به دلیل انجام واکنش شیمیایی با آب، انحلال پذیری بیشتری نسبت به NO دارد.

انحلال پذیری گاز اکسیژن (نمودار وسط) در دمای 2°C برابر $7/5 \times 10^{-3}$ گرم در 100 گرم آب و در دمای 35°C برابر $2/5 \times 10^{-3}$ گرم در 100 گرم آب است. اختلاف این دو مقدار برابر 5×10^{-3} گرم در 100 گرم آب است.

$$\text{ppm} = \frac{5 \times 10^{-3}}{100} \times 10^6 = 50$$

در دمای ثابت مقدار K_a ثابت است.

$$K_a = 4 \times 10^{-4} = M_1 \alpha_1^2 = M_1 \times (0.1)^2 \Rightarrow M_1 = 4 \times 10^{-2} \text{ mol/Lit}$$

$$K_a = 0.16 \times \alpha_2^2 \Rightarrow 4 \times 10^{-4} = 0.16 \times \alpha_2^2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} \times 10^{-1} = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2}{M_1} = \frac{0.05 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-2}} = 1/25$$

۶۹- گزینه ۴ مبحث: حفظیات و مفاهیم فصل ۱ دوازدهم درجه دشواری: متوسط طراح: حسن ایزدی

عبارت‌های ب و ت نادرست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) محلول شیشه پاک‌کن خاصیت بازی و $[OH^-]$ کمتری نسبت به لوله‌بازکن دارد و در نتیجه $[H^+]$ در آن بیشتر است.

ت) مولکول‌های سازنده عسل حاوی گروه‌های $-OH$ (هیدروکسیل) هستند ولی عسل انحلال مولکولی دارد و در آب یون هیدروکسید ایجاد نمی‌کند.

۷۰- گزینه ۳ مبحث: مسائل فصل ۱ دوازدهم درجه دشواری: دشوار طراح: حسن ایزدی

از انحلال هر مول Na_2O در آب ۲ مول OH^- و از انحلال هر مول N_2O_5 در آب ۲ مول H^+ ایجاد می‌شود.

$$Na_2O = \frac{12/4}{62} = 0.2 \text{ mol} \Rightarrow \text{mol } OH^- = 0.2 \times 2 = 0.4 \text{ mol } OH^-$$

$$[OH^-] = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2} \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{\frac{1}{2}} = 2 \times 10^{-14}$$

$$\Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times 10^{-14}} = \frac{1}{4 \times 10^{-14}}$$

$$N_2O_5 = \frac{32/4}{108} = 0.3 \text{ mol} \Rightarrow \text{mol } H^+ = 0.3 \times 2 = 0.6 \text{ mol } H^+$$

$$\Rightarrow [H^+] = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3} \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{10^{-14} \div \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{10^{-14}}{\frac{4}{9}} = \frac{9 \times 10^{-14}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت در محلول b به a} = \frac{\frac{9 \times 10^{-14}}{4}}{\frac{1}{4 \times 10^{-14}}} = 9 \times 10^{-28}$$