

آزمون شماره (۹)

جمعه

۱۴۰۴/۰۸/۰۹

دفترچه
شماره ۱آزمون‌های سراسر
کاج

گزینه درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۵۵	مدت پاسخگویی: ۸۵ دقیقه

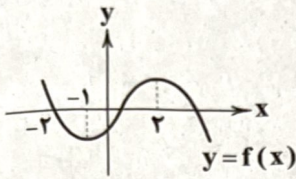
عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	حسابان ۲	اجباری	۱۰	۱	۸۵ دقیقه
	ریاضیات گسسته		۱۰	۱۱	
	هندسه ۳		۱۰	۲۱	
	ریاضی ۱		۵	۳۱	
	حسابان ۱		۵	۳۶	
	هندسه ۱		۵	۴۱	
	آمار و احتمال		۱۰	۴۶	

ریاضیات

مسئله (۲)

مودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. تابع $g(x) = 1 - 2f(3x + 1)$ در بازه $[\alpha, \beta]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $\beta - \alpha$ چقدر است؟



اگر نقطه $A(k, 2)$ روی تابع $g(x) = f(1 - 3x)$ و نقطه $A'(-k, 2m)$ نقطه متناظر با A روی تابع $h(x) = f(2x)$ قرار داشته باشد، $k + m$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

اگر توابع چندجمله‌ای $f(x) = 2\sqrt{11} - x^2$ و $g(x) = 2x - b$ یک‌دیگر را در ناحیه دوم قطع کنند، حداکثر مقدار صحیح b کدام است؟

-۸ (۴)

-۵ (۳)

-۷ (۲)

-۶ (۱)

اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^{n-n^2+10} + nx + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) حداکثر درجه را داشته باشد، $P(1)$ کدام است؟

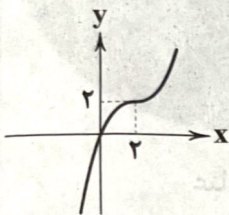
۶ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

اگر نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ به صورت شکل زیر باشد، در این صورت $f(3)$ کدام است؟



اگر a شامل چند عدد صحیح نیست؟ $y = 1 - 2(|a+3| - 2)^x$ اکیداً نزولی است.

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

تابع چندجمله‌ای اکیداً صعودی و $g(x)$ تابع چندجمله‌ای اکیداً نزولی باشد، چندتا از توابع زیر اکیداً یکنوا هستند؟

gof (د)

fog (ج)

f - g (ب)

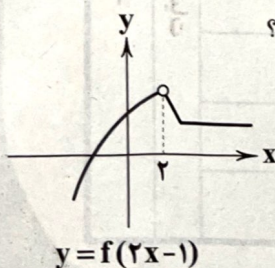
f + g

۳ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

زیر، مربوط به تابع $y = f(2x - 1)$ است. نمودار تابع $g(x) = f(\frac{x}{3})$ در نقطه‌ای با کدام طول ناپیوسته است؟





۹- تابع $f(x) = |2x-1| - 2|x| + 1$ چگونه تابعی است؟

- (۱) اکیداً نزولی (۲) نزولی (۳) اکیداً صعودی (۴) صعودی

۱۰- چند مقدار صحیح m وجود دارد تا تابع $y = \frac{2-m}{2+m} \sqrt{1-x}$ اکیداً نزولی باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) هیچ مقدار (۴) بی شمار

ریاضیات گسسته

۱۱- از بین اعداد طبیعی دورقمی کم‌تر از ۵۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی اگر عدد انتخابی را به جای n در

$$\text{عبارت } A = \frac{n^2(n+1)^2}{8} \text{ قرار دهیم، } 7|A \text{ باشد؟}$$

- (۱) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{35}$

۱۲- مجموعه $A = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ به دو مجموعه B و C افزاش شده است. اگر مجموعه B سه عضوی باشد، با چه احتمالی مجموع حاصل ضرب

اعداد هر یک از مجموعه‌های B و C ، یک عدد اول است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۳- کدام یک از اعداد زیر، شمارنده $12^{1404} + 12^{1405}$ نیست؟

- (۱) ۳۵۱ (۲) ۴۶۸ (۳) ۵۴۶ (۴) ۶۲۴

۱۱- معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} + \frac{3}{7} = 0$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰- میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی که مربع آن‌ها مضرب ۵۴ و مکعب آن‌ها مضرب ۳۲۰ باشد، کدام است؟

- (۱) ۴۸۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۵۲۱ (۴) ۵۴۰

۱- اگر برای دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم $(a, b) = \sqrt{40} + [a, b] + \sqrt{40} - [a, b]$ ، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی برابر ۲۱ و تفاضل مربعات این دو عدد، ۴۸۵۱ می‌باشد. تفاضل مقدار مجموع ارقام عدد

کوچک‌تر از مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n ، دو عدد به صورت $5n+3$ و $9n-2$ نسبت به هم اول هستند؟

- (۱) ۸۹ (۲) ۸۸ (۳) ۸۷ (۴) ۸۶

در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b ، $(b > 1)$ ، باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را دارد. اگر $b|a+3$ ، باقی‌مانده تقسیم a^{573} بر b^3 کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵

۱- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > 10$ بر ۱۳، ۵ واحد بیشتر از باقی‌مانده آن باشد، احتمال آن که $(a-9)$ بر عدد ۴۲ بخش پذیر باشد،

کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{13}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $\frac{6}{13}$ (۴) $\frac{7}{13}$

نام محاسبات

هندسه (۲)

۲۱- از معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل دترمینان ماتریس $M = \begin{bmatrix} 20x & 10 \\ -1 & -20y \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱۷۷ (۲) -۱۷۷ (۳) ۱۹۷ (۴) -۱۹۷

۲۲- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $(10A^T)(2 \times A^{-1})$ به صورت $10^m \times 2^n$ است. $2m - n$ کدام است؟ ($m, n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۳- اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر از مرتبه ۲ باشند و $AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $4B^{-1}A^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

۲۴- اگر α و β ریشه های معادله $\begin{vmatrix} -4x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = -4$ باشند، حاصل $\log_{10} 10\alpha + \log_{10} (-20\beta)$ چقدر از $\log_{10} 2$ بیشتر است؟ ($\alpha > \beta$)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۴ (۴) ۲

۲۵- اگر $A^3 - 2A = \bar{O}$ باشد، ماتریس A^{35} چند برابر ماتریس A است؟

- (۱) 2^{13} (۲) 2^{16} (۳) 2^{15} (۴) 2^{17}

۲۶- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & -y \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ درایه های واقع بر بالای قطر اصلی صفر هستند. اگر به درایه واقع بر سطر ۲ ستون ۲ ماتریس A چهار واحد اضافه کنیم، ماتریس B به دست می آید. اختلاف بزرگ ترین درایه و کوچک ترین درایه موجود در ماتریس $3B$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) ۱۲ (۴) $\frac{1}{9}$

۲۷- اگر $2A + 3B = I$ باشد، حاصل $3A + 12AB + 18B^2$ کدام است؟

- (۱) $2I - A$ (۲) $2I$ (۳) $2A$ (۴) $2A - 2I$

۲۸- از ماتریس های 3×3 $A = [2i - j]$ و $B = [i^2 + j]$ درایه های $a_{12}, a_{23}, a_{33}, b_{13}$ و b_{33} را در ماتریس C به شکل $C = \begin{bmatrix} a_{12} & b_{33} \\ b_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$ قرار

داده ایم، حاصل جمع درایه های ماتریس $C + 2I$ کدام است؟

- (۱) -۴۸ (۲) ۲۱ (۳) -۴۲ (۴) ۴۲

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ b & 4 \end{bmatrix}$ و $(A+B)^T = A^T + B^T + 2AB$ باشد، آن گاه $a \times b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

حل انجام محاسبات

۳۰- چند مورد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) اگر A, B و C سه ماتریس باشند: $B = C \Leftrightarrow A \times B = A \times C$.

(ب) اگر A یک ماتریس و k یک عدد حقیقی باشد، $(kA)^n = k^n \times A^n$.

(ج) اگر k یک عدد حقیقی باشد و A یک ماتریس وارون پذیر: $(kA)^{-1} = (\frac{1}{k}) \times A^{-1}$.

(د) اگر ماتریس‌های $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ باشند: $B \times A = D_{n \times n}$ و $A \times B = C_{m \times p}$.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

ریاضی (۱)

۳۱- یکی از ریشه‌های معادله $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)x^2 + (\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)x + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$ کدام گزینه است؟

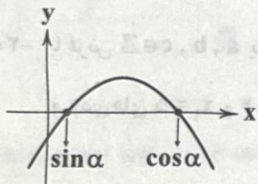
$$\frac{1-2\sin \alpha \cos \alpha}{1+2\sin \alpha \cos \alpha} \quad (۴)$$

$$\frac{1-2\sin \alpha \cos \alpha}{1+2\sin \alpha \cos \alpha} \quad (۳)$$

$$\frac{1-2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1-2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (۲)$$

$$\frac{1-2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1-2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (۱)$$

۳۲- اگر $0 < \alpha < 45^\circ$ و نمودار تابع $y = -x^2 + mx - 6$ به صورت زیر باشد، حاصل $\sqrt{\tan \alpha + \cot \alpha}$ کدام گزینه است؟



$$\sqrt{\frac{1}{m^2+1}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{1}{m^2-1}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{2}{m^2+1}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{2}{m^2-1}} \quad (۴)$$

۳۳- در مورد نقاط تلاقی دو سهمی به معادلات $y = -cx^2 - bx + c$ و $y = (a+b)x^2 + ax$ کدام گزینه صحیح است؟ ($a+b \neq -2c$)

(۱) در دو نقطه متقاطع و طول نقاط برخورد -1 و $\frac{-c}{a+b+c}$ هستند.

(۲) در یک نقطه متقاطع و طول نقطه برخورد $\frac{c}{a+b+c}$ است.

(۳) در دو نقطه متقاطع و طول نقاط برخورد -1 و $\frac{c}{a+b+c}$ هستند.

(۴) در یک نقطه متقاطع و طول نقطه برخورد $-\frac{c}{a+b+c}$ است.

۳۴- اگر خط $y = 9$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را روی خود سهمی قطع کند و سهمی از نقاط به مختصات $A(\frac{1}{2}, 5)$ و $B(\frac{1}{3}, 13)$ بگذرد، طر

رأس سهمی کدام گزینه است؟

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \quad (۴)$$

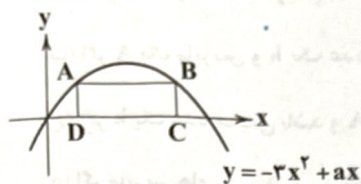
$$\frac{4}{3}, \frac{5}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3}, 2 \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3}, \frac{4}{5} \quad (۱)$$

محل انجام محاسبات

دو رأس یک مستطیل روی محور x ها و دو رأس دیگر آن روی سهمی به معادله $y = -3x^2 + ax$ قرار دارد. اگر به ازای $x=5$ محیط



مستطیل بیشترین مقدار باشد. مقدار $a^2 + a$ کدام است؟

(۱) ۱۰۸۰

(۲) ۱۰۱۰

(۳) ۱۰۲۴

(۴) ۱۰۵۶

حسابان (۱)

مساحت محدود به منحنی تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و محور x ها و خطوط $x=1$ و $x=2$ برابر A است. مساحت محدود به منحنی $g(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ و خط $y=1$ و خطوط $x=-1$ و $x=1$ کدام است؟

(۴) $2+A$

(۳) $2A$

(۲) $\frac{A}{2}$

(۱) $2-A$

با توجه به معادله $||10x|| = ||7x||$ ، حاصل $|x| + ||7x||$ در کدام بازه قرار ندارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۴) $[\frac{24}{7}, \frac{17}{5})$

(۳) $[0, \frac{1}{10})$

(۲) $[\frac{1}{7}, \frac{6}{5})$

(۱) $[\frac{16}{7}, \frac{23}{10})$

با فرض $a, b, c \in \mathbb{Z}$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر $\frac{b-a}{a}$ است. اگر $70 < f(8) < 80$ باشد، اختلاف مقادیر تابع به ازای

ورودی‌های $x_1=5$ و $x_2=4$ کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

(۲) ۱۰

(۱) ۹

حداقل یک عضو مخالف صفر x از اعداد حقیقی وجود دارد که در رابطه $\frac{\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x+1}} = k$ صدق می‌کند. برای $[36(k^2 - 2k)]$ چند مقدار

متمايز وجود دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۷

(۱) ۶

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 = x + 3$ باشند ($\alpha > \beta$) و $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{1-\beta} + [\alpha-1] \\ x_2 = \frac{-2\alpha}{3} + [-\beta] \end{cases}$ کدام معادله درجه چهار زیر، ریشه‌هایی به صورت $\pm x_1$ و $\pm x_2$ دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۴) $9x^4 + 9 = 17x^2$

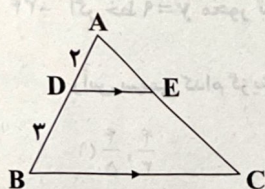
(۳) $7x^4 + 7 = 17x^2$

(۲) $7x^4 + 7 = 34x^2$

(۱) $9x^4 + 9 = 34x^2$

هندسه (۱)

شکل زیر، اگر پاره خط DE را به اندازه خودش امتداد دهیم تا به نقطه F برسیم، نسبت مساحت مثلث EFC به مساحت مثلث BEC کدام است؟



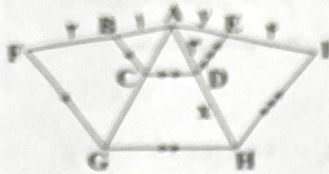
(۲) ۲

(۱) ۲/۵

(۳) ۵/۶

(۴) ۵/۷

محاسبات



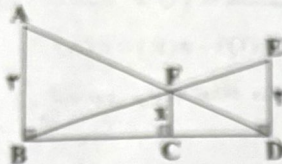
در شکل زیر، خطوط دوپاره موازی مشخص شده‌اند. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} (1)$$

$$2 (2)$$

$$\frac{5}{2} (3)$$

$$3 (4)$$



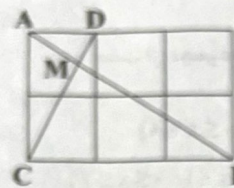
در شکل زیر، مقدار x کدام است؟

$$1 (1)$$

$$1/2 (2)$$

$$1/5 (3)$$

$$1/8 (4)$$



در شکل زیر، ۶ مربع به ضلع واحد کنار هم قرار دارند. در مثلث AMC اندازه $|MA|$ چند برابر $\sqrt{13}$ است؟

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{1}{4} (2)$$

$$\frac{2}{9} (3)$$

$$\frac{2}{3} (4)$$

در یک دوزنقه متساوی الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه قاعده بزرگ و قطر آن به ترتیب ۵ و ۴ باشد، اندازه محیط دوزنقه چند واحد است؟

$$12/8 (4)$$

$$11 (3)$$

$$12 (2)$$

$$12/4 (1)$$

آمار و احتمال

در چند زیرمجموعه حداقل دوعضوی از مجموعه $A = \{10, 11, 12, \dots, 15\}$ ، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو بر ۳ بخش پذیر است؟

$$72 (4)$$

$$78 (3)$$

$$37 (2)$$

$$39 (1)$$

اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 9\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع $M = \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$ باشند، متمم مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند زیرمجموعه دارد؟

$$256 (4)$$

$$32 (3)$$

$$1024 (2)$$

$$64 (1)$$

گر $M = \{1, 2, 3, 4\}$ و $N = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ باشند، به طوری که $M \cap N \subseteq A \subseteq M$ ، برای مجموعه A چند حالت وجود دارد؟

$$2 (4)$$

$$4 (3)$$

$$8 (2)$$

$$16 (1)$$

کدام مورد از گزاره‌های زیر درست است؟

$$\text{الف) } A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

$$\text{ب) } \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$\text{ج) } \forall x; (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B$$

$$\text{د) } A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

$$3 (4)$$

$$\text{صفر (3)}$$

$$2 (2)$$

$$1$$

۵- در مجموعه n عضوی A ، اگر ۳ عضو متمایز به سایر عضوهای این مجموعه به آن اضافه کنیم، ۴۴۸ زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی این مجموعه کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۵- اگر $A_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid i \leq x \leq 10-i\}$ باشد، حاصل ضرب تعداد عضوهای مجموعه $\bigcup_{i=1}^6 A_i$ در تعداد عضوهای $\bigcap_{i=2}^6 A_i$ کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۳۲ (۳) ۲۷ (۴) صفر

۴- اگر P, Q, R سه زیرمجموعه دوبه‌دو متمایز از مجموعه ۱۲۱ عضوی A باشند، به طوری که $n(P) + n(Q) + n(R) = n(A)$ و $P, Q, R \neq \emptyset$ ، $n(P) = 4n(Q) = 6n(R)$ ، اگر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه n عضوی برابر با تعداد عضوهای مجموعه P باشد، n کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۳۲ (۳) ۸ (۴) ۶

۱- چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{1, 3, 10, 12, 16, 18\}$ وجود دارد که مجموع اعضای آن‌ها زوج شود؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۸

۱- چند جفت از مجموعه‌های زیر، جدا از هم هستند؟

الف) $\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4x^2 - 3x - 7 = 0\} \\ B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - x = 0\} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} A = \left\{ \frac{3x+5}{x+1} \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{W} \wedge x < 4 \right\} \\ B = \left\{ \frac{2x+4}{3} \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 3 \right\} \end{cases}$ ج) $\begin{cases} A = \{m \in \mathbb{N} \mid m = \frac{x}{4} \wedge 0 \leq x \leq 8\} \\ B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k (k \in \mathbb{Z}) \wedge 0 \leq x \leq 4\} \end{cases}$

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۱- مجموعه $[A \cup (B - C')'] \cap [A \cup (C - B')]$ برابر مجموعه $\emptyset$ است. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

- (۱) $B \subseteq A$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

آزمون شماره (۹)

جمعه

۱۴۰۴/۰۸/۰۹

دفترچه
شماره ۲

آزمون‌های سراسری کاج

گزینه دروس را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۶۰	مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

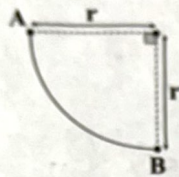
عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	فیزیک ۳	اجباری	۲۵	۵۶	۴۵ دقیقه
	فیزیک ۱	زوج کتاب	۱۰	۸۱	
	فیزیک ۲		۱۰	۹۱	
۲	شیمی ۳	اجباری	۱۵	۱۰۱	۲۵ دقیقه
	شیمی ۱	زوج کتاب	۱۰	۱۱۶	
	شیمی ۲		۱۰	۱۲۶	

فیزیک



۵۶- مطابق شکل زیر، متحرکی مسیر A تا B را در مدت زمان ۴s با تندی ثابت $\frac{1}{5} \frac{m}{s}$ می‌پیماید. اندازه سرعت متوسط این متحرک در این حرکت چند متر بر ثانیه بوده است؟ ($\pi = 3$)



- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) $\frac{1}{2}$

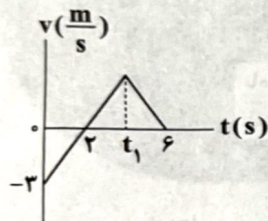
۵۷- معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور X حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^3 - 9t + 10$ است. اگر سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 برابر صفر باشد، اندازه سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی t_1 تا $2t_1$ چند واحد SI است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۵۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

۵۸- متحرکی فاصله بین دو نقطه A و B را در مدت t ثانیه با سرعت متوسط $15 \frac{m}{s}$ می‌رود و همان مسیر را در مدت زمان ۹s باز می‌گردد. اگر تندی متوسط این متحرک در کل مسیر رفت و برگشت برابر با $20 \frac{m}{s}$ باشد، t برابر چند ثانیه است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۲۲ (۴) ۱۸

۵۹- نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی که حرکت متحرک، تندشونده است، شتاب متوسط متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟



- (۱) $1/5$
(۲) $2/5$
(۳) ۲
(۴) ۳

۶۰- متحرکی در راستای محور X به مدت ۴s با سرعت ثابت $\vec{v}_1 = (\frac{4m}{s})\vec{i}$ و در ادامه به مدت ۳s با سرعت ثابت $\vec{v}_2 = (-\frac{4m}{s})\vec{i}$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط این متحرک در کل مدت زمان ۷s چند واحد SI است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) ۴

متحرکی بر روی یک مسیر مستقیم، نصف مسیر را با سرعت ثابت v_0 طی می‌کند، باقی‌مانده مسیر را در نصف زمان باقی‌مانده با سرعت ثابت v_1 و در نصفه زمانی دیگر با سرعت ثابت v_2 طی می‌کند. سرعت متوسط ذره در کل مسیر در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) $\frac{v_0 + v_1 + v_2}{3}$ (۲) $\frac{v_0(v_1 + v_2)}{v_0 + v_1 + v_2}$ (۳) $\frac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}$ (۴) $\frac{2v_0(v_0 + v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}$

۶۱- دو متحرک که با سرعت‌های ثابت $15 \frac{m}{s}$ و $20 \frac{m}{s}$ بر مسیری مستقیم، در یک جهت حرکت می‌کنند، هم‌زمان از نقطه A عبور کرده و به طرف نقطه B حرکت می‌کنند. اگر فاصله نقطه A تا نقطه B برابر با ۳۰۰m باشد، بیشترین فاصله این دو متحرک از یک‌دیگر در حرکت از نقطه A تا نقطه B چند متر است؟

- (۱) ۵۲۵ (۲) ۳۰۰ (۳) ۲۲۵ (۴) ۷۵

عام محاسبات

۶۳- دو متحرک (۱) و (۲)، همزمان به ترتیب از نقاط A و B با سرعتهای ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و در نقطه C به هم می‌رسند. پس از این، متحرک (۱) به نقطه B می‌رسد، چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرک (۲) از نقطه C به نقطه A برسد؟



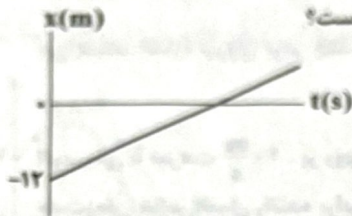
۱۸ (۱)

۱۲ (۲)

۶ (۳)

۹ (۴)

۶۴- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تسندی متوسط این متحرک در ۱۰ ثانیه اول



حرکتش، برابر با $2 \frac{m}{s}$ باشد، بردار مکان این متحرک به مدت چند ثانیه در خلاف جهت محور x بوده است؟

۰/۳ (۱)

۰/۶ (۲)

۱/۳ (۳)

۱/۸ (۴)

۶۵- معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = 2t^2 - 6t + 12$ می‌باشد. در بازه زمانی $t_1 = 0.5s$ تا $t_2 = 2s$ ، مسافتی که متحرک طی می‌کند، چند برابر بزرگی جابه‌جایی آن در همین بازه زمانی است؟

 $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۱)

۶۶- دو متحرک از حال سکون با شتاب‌های ثابت a_1 و $a_2 = \frac{9}{4}a_1$ همزمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین بر روی محور x به حرکت درمی‌آیند و با فاصله زمانی ۴s، به مقصد می‌رسند. مدت زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

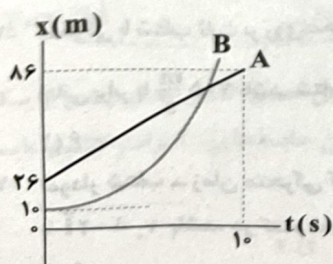
۶ (۲)

۵ (۱)

۶۷- دو متحرک A و B در لحظه $t = 0$ در یک مکان قرار دارند. متحرک A با سرعت ثابت و متحرک B با شتاب ثابت بر روی محور x در حال حرکت هستند. اگر در لحظه t_1 ، سرعت دو متحرک A و B با هم برابر باشد، در کدام لحظه دو متحرک دوباره به هم می‌رسند؟

 $4t_1$ (۴) t_1 (۳) $2t_1$ (۲) $\frac{t_1}{2}$ (۱)

۶۸- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. شتاب متحرک B ثابت و برابر با $2 \frac{m}{s^2}$ است. در



لحظه‌ای که متحرک B از متحرک A جلو می‌زند، نسبت سرعت متحرک B به سرعت متحرک A چقدر است؟

 $\frac{3}{8}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{2}{2}$ (۴)

معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = 2t^2 - 6t - 20$ است. بیشینه فاصله متحرک از نقطه شروع حرکت در ۹ ثانیه اول حرکتش، چند واحد SI است؟

۱۱۶ (۴)

۱۰۸ (۳)

۸۸ (۲)

۶۸ (۱)

انجام محاسبات

متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x در حال حرکت است. اگر در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 6s$ متحرک از مبدأ مکان عبور کند و در مکان $x = 8m$ جهت حرکت متحرک تغییر کند، معادله حرکت این متحرک بر حسب SI در کدام گزینه به درستی آمده است؟

$$x = -t^2 + 8t - 12 \quad (1)$$

$$x = t^2 - 8t + 12 \quad (2)$$

$$x = -2t^2 + 16t - 24 \quad (3)$$

$$x = 2t^2 - 16t + 24 \quad (4)$$

متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه $12 \frac{m}{s}$ بر روی محور x و در خلاف جهت آن شروع به حرکت می‌کند و پس از گذشت $8s$ ، سرعت آن

به $26 \frac{m}{s}$ در جهت محور x می‌رسد. جابه‌جایی این متحرک در بازه زمانی $t = 8s$ تا $t = 12s$ چند متر بوده است؟

$$42/75 \quad (1)$$

$$56/625 \quad (2)$$

$$21/375 \quad (3)$$

$$14/25 \quad (4)$$

اتومبیلی به وزن $12000N$ با سرعت $72 \frac{km}{h}$ بر روی محور x در حال حرکت است. راننده ترمز کرده و اتومبیل پس از طی مسافت $50m$ می‌ایستد. اندازه نیروی ترمز چند کیلو نیوتون بوده است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

$$0/3 \quad (1)$$

$$300 \quad (2)$$

$$4800 \quad (3)$$

$$4/8 \quad (4)$$

اتومبیلی با سرعت $40 \frac{m}{s}$ ، بر روی خط راست حرکت می‌کند. ناگهان راننده مانعی را در فاصله 74 متری از خود مشاهده می‌کند. اگر مدت زمان عکس‌العمل راننده برابر با $0/6s$ باشد و پس از آن راننده با شتاب ثابت ترمز بگیرد، با فرض متوقف شدن اتومبیل پیش از برخورد با مانع، حداکثر زمانی که راننده ترمز را فشرده است، چند ثانیه می‌باشد؟

$$3/5 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1/5 \quad (4)$$

دو متحرک A و B روی یک خط مستقیم با سرعت ثابت به سمت یکدیگر در حرکت هستند. تندی متحرک A برابر با $16 \frac{m}{s}$ و تندی متحرک B برابر با $8 \frac{m}{s}$ است. در لحظه‌ای که فاصله دو متحرک از یکدیگر برابر با $47m$ است، هر دو ترمز می‌کنند. اگر متحرک A با شتاب ثابتی به بزرگی $2 \frac{m}{s^2}$ و متحرک B با شتاب ثابتی به بزرگی $4 \frac{m}{s^2}$ ترمز کنند، پس از چند ثانیه از شروع به ترمز، دو متحرک با یکدیگر برخورد می‌کنند و تندی متحرک B در لحظه برخورد چند متر بر ثانیه است؟ (به ترتیب از راست به چپ)

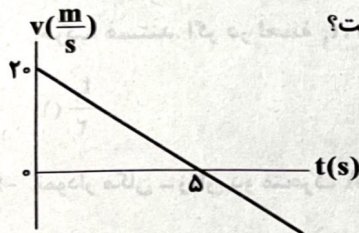
$$12 \text{ و } 5 \quad (1)$$

$$4 \text{ و } 3 \quad (2)$$

$$13/2 \text{ و } 0 \quad (3)$$

$$3 \text{ و } 0 \quad (4)$$

مودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت متوسط این متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 6s$ برابر صفر باشد، مسافت طی شده توسط این متحرک در این بازه زمانی چند متر است؟



$$27 \quad (1)$$

$$54 \quad (2)$$

$$18 \quad (3)$$

$$36 \quad (4)$$

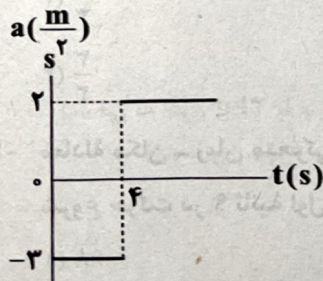
یکی با شتاب ثابت بر روی محور x در حرکت است. اگر سرعت متوسط این متحرک در چهار ثانیه دوم حرکت $6 \frac{m}{s}$ و تندی متوسط آن در همین بازه برابر با $7/5 \frac{m}{s}$ باشد، شتاب حرکت این متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟ (سرعت متحرک در لحظه $t = 0$ در جهت محور x می‌باشد).

$$4 \quad (1)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

شتاب - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت اولیه این متحرک بر حسب SI برابر $v_0 =$ باشد، در کدام لحظه بر حسب ثانیه جهت حرکت متحرک عوض می‌شود؟



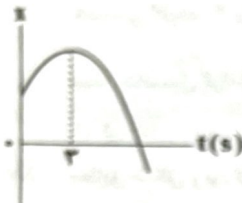
۷۸- اتومبیلی با سرعت ثابت ۷ در مسیر مستقیم در حال حرکت است. راننده اتومبیل ترمز می‌کند و اتومبیل با شتاب ثابت پس از ۲s متوقف می‌شود. اگر جابه‌جایی اتومبیل در ۴ ثانیه اول حرکت (پس از لحظه ترمز گرفتن) برابر با Δx_1 و بقیه جابه‌جایی آن تا لحظه توقف برابر با Δx_2 باشد، نسبت $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۷۹- متحرکی روی خط راست بدون تغییر جهت و با شتاب ثابت در حرکت است. اگر این متحرک در دو ثانیه دوم حرکتش ۶۰m و در ثانیه چهارم حرکتش ۳۲m را طی کند، شتاب حرکت این متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟

- ۲/۵ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۲

۸۰- نمودار مکان-زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط این متحرک در بازه زمانی $t=2s$ تا $t=6s$ برابر با $10 \frac{m}{s}$ باشد، سرعت این متحرک در لحظه $t=6s$ چند متر بر ثانیه است؟



- ۱۲ (۱)
۱۲ (۲)
-۲۴ (۳)
۲۴ (۴)

توجه: داوطلب گرامی، لطفاً از بین سؤالات زوج درس ۱ (فیزیک ۱)، شماره ۸۱ تا ۹۰ و زوج درس ۲ (فیزیک ۲)، شماره ۹۱ تا ۱۰۰، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

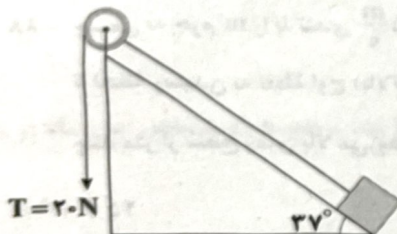
فیزیک (۱) (سؤالات ۸۱ تا ۹۰)

زوج درس ۱

۸۱- اگر تندی جسمی به جرم ۸۰۰g، $9 \frac{km}{h}$ افزایش یابد انرژی جنبشی آن $6/5$ تغییر می‌کند. تندی اولیه این جسم چند متر بر ثانیه بوده است؟

- ۲ (۲) $\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۳) ۴ (۴)

۸۲- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم ۳۰۰g در پایین سطح شیب‌دار، ساکن است. اگر این جسم از پایین سطح شیب‌دار توسط یک طناب با نیروی ثابت ۲۰N رو به بالا کشیده شود و پس از ۱۲m جابه‌جایی روی سطح شیب‌دار، طناب پاره شود، جسم با تندی چند متر بر ثانیه به زمین می‌رسد؟ ($g=10 \frac{m}{s^2}$ ، $\sin 37^\circ = 0/6$ و از کلیه نیروهای اتلافی صرف‌نظر کنید).



- ۲۰ (۱)
۳۰ (۲)
۴۰ (۳)
۵۰ (۴)

۸۳- جعبه‌ای بر روی یک سطح افقی دارای اصطکاک به صورت ساکن قرار دارد. با اعمال نیروی افقی $\vec{F}$ به این جسم، تندی جسم پس از یک جابه‌جایی مشخص به ۷ می‌رسد. برای آن که بخواهیم دوباره تندی جسم را از حال سکون و پس از همان جابه‌جایی، ۲ برابر کنیم، باید نیروی $\vec{F}$ را نیز ۲ برابر کنیم. بزرگی نیروی $\vec{F}$ چند برابر بزرگی نیروی اصطکاک بین جسم و سطح است؟

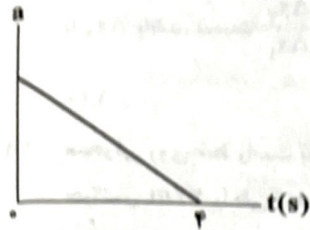
- $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) ۴ (۴)

۸۴- جسمی به جرم ۳kg با سرعت ثابت بر روی خط راست در حال حرکت است. اگر با انجام کار خالص ۱۵۰J بر روی این جسم، سرعت آن در مدت زمان ۴s، $2 \frac{m}{s}$ افزایش یافته و جهت آن تغییر کند، اندازه شتاب متوسط جسم در این مدت زمان چند متر بر مجذور ثانیه است؟

- ۰/۵ (۱) ۶ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴)

محل انجام محاسبات

شکل زیر، نمودار شتاب - زمانی متحرکی را نشان می‌دهد که از حال سکون بر روی خط راست شروع به حرکت کرده است. اگر کار خالص انجام شده بر روی این متحرک در ۲ ثانیه اول حرکتش برابر با ۴۵ باشد، کار خالص انجام شده بر روی این متحرک در ۲ ثانیه آخر حرکتش چند ژول است؟



- ۱۵ (۱)
۴۵ (۲)
۶۰ (۳)
۸۰ (۴)

گلوله‌ای را در شرایط خلأ از سطح زمین در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر پس از طی مسافت ۰.۷۵m برای دومین بار، انرژی جنبشی گلوله، ۲ برابر انرژی پتانسیل گرانشی آن شود، تندی پرتاب گلوله چند متر بر ثانیه بوده است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ ، سطح زمین را به عنوان مبدأ پتانسیل گرانشی در نظر بگیرید.)

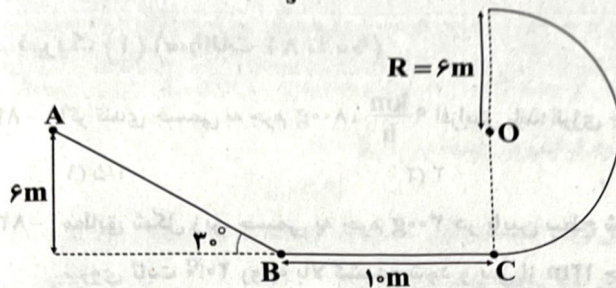
۲۵ (۴)

۱۵√۲ (۳)

۳۰ (۲)

۱۵√۵ (۱)

مطابق شکل زیر، گلوله‌ای به جرم ۲۰۰g از نقطه A رها شده و پس از پیمودن مسیر بدون اصطکاک AB، وارد مسیر دارای اصطکاک BC و پس از آن وارد یک مسیر دایره‌ای شکل بدون اصطکاک به شعاع ۶m می‌شود. اگر کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک بر روی این گلوله در مسیر BC برابر با ۶J باشد، گلوله پس از پیمودن مسافت چند متر از نقطه A برای اولین بار می‌ایستد؟ ($\pi = 3$ ، $g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- ۲۲ (۱)
۲۵ (۲)
۲۸ (۳)
۳۱ (۴)

سی به جرم m را با تندی $35 \frac{m}{s}$ از سطح زمین در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر ۲۱/۶ درصد از انرژی جنبشی اولیه گلوله حظه رسیدن به نقطه اوج (بالاترین نقطه از سطح زمین در طی حرکت)، صرف غلبه بر نیروی مقاومت هوا شود، جسم حداکثر تا ارتفاع ... متر از سطح زمین بالا می‌رود؟ ($g = 9.8 \frac{m}{s^2}$)

۵۶/۲۵ (۴)

۵۲/۵ (۳)

۴۹ (۲)

۴۰ (۱)

خودرویی به جرم ۹۰۰kg برابر با ۱۲۰hp است. خودرو در یک مسیر ۱۰۰ متری با شیب ۶° نسبت به افق رو به بالا حرکت می‌کند و در زمان ۸s تندی آن از $54 \frac{km}{h}$ به $126 \frac{km}{h}$ می‌رسد. بازده خودرو در هنگام انجام این کار چند درصد ($1hp = 745W$ ، $\sin 6^\circ = 0.1$ ، $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۷۰ (۲)

۶۰ (۱)

به جرم ۶۰۰g بر روی یک مسیر افقی با تندی $10 \frac{m}{s}$ پرتاب شده و پس از طی مسافت ۲۰m متوقف می‌شود. توان متوسط اتلافی در اثر حرکتش چند وات است؟

۱/۸۷۵ (۴)

۳/۷۵ (۳)

۷/۵ (۲)

سبابت

فیزیک ۲ (سؤالات ۹۱ تا ۱۰۰)

زوج درس ۲

۹۱- یک خازن تخت دایره‌ای شکل به شعاع $4/5 \text{ cm}$ که فاصله بین صفحات آن برابر با $1/5 \text{ mm}$ است و بین صفحات آن دی‌الکتریک با ثابت ۲ قرار گرفته است، در اختیار داریم. اگر صفحات این خازن را به اختلاف پتانسیل الکتریکی 20 V وصل کنیم، چند نانوکولن بار روی صفحات

این خازن ذخیره می‌شود؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

۷/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۱۵ (۱)

۹۲- یک خازن تخت که بین صفحات آن دی‌الکتریک با ثابت ۴ قرار دارد را به باتری وصل می‌کنیم. در این حالت اگر دی‌الکتریک را از بین صفحات این خازن خارج کرده، فاصله بین صفحات خازن را ۲۰ درصد کاهش و مساحت مشترک صفحات آن را ۶۰ درصد افزایش دهیم، انرژی ذخیره‌شده در این خازن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

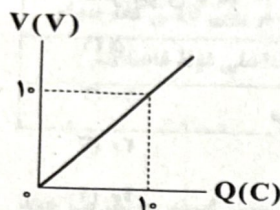
۵۰ و کاهش (۴)

۵۰ و افزایش (۳)

۲۵ و کاهش (۲)

۲۵ و افزایش (۱)

۹۳- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی بر حسب بار ذخیره‌شده برای یک خازن تخت، مطابق شکل زیر است. کار انجام‌شده برای باردار شدن کامل



این خازن چند ژول است؟

۲۵ (۱)

۵۰ (۲)

۱۰۰ (۳)

۲۰۰ (۴)

۹۴- چند تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

(الف) هر مجموعه‌ای از بارهای متحرک درون رسانا لزوماً جریان الکتریکی ایجاد می‌کنند.

(ب) در نبود اختلاف پتانسیل الکتریکی، الکترون‌های آزاد در طول یک سیم با تندی‌هایی از مرتبه $10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حرکت هستند.

(ج) در حضور میدان الکتریکی، مسیر زیگزاگ حرکت الکترون‌ها از پتانسیل الکتریکی بیشتر به پتانسیل الکتریکی کم‌تر سوق پیدا می‌کند.

(د) جهت قراردادی جریان الکتریکی در یک رسانا، هم‌جهت با میدان الکتریکی درون رسانا است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۹۵- نمودار جریان عبوری بر حسب زمان برای یک رسانا، مطابق شکل زیر است. بار خالص عبوری از یک سطح مقطع مشخص این رسانا در بازه

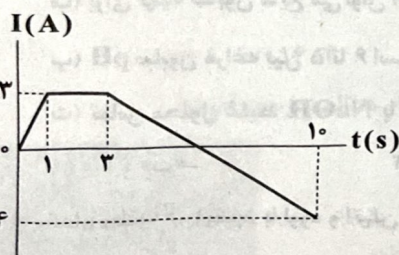
زمانی $t=0$ تا $t=10 \text{ s}$ چند میلی‌آمپر - ساعت است؟

۱۰/۹ (۱)

۵۰/۹ (۲)

۴ (۳)

۲۰ (۴)



۹۶- از یک سطح مقطع مشخص یک رسانای اهمی در هر دقیقه $1/5 \times 10^{21}$ الکترون عبور می‌کند. اگر این رسانا را به اختلاف پتانسیل

الکتریکی 20 V وصل کنیم، مقاومت الکتریکی این رسانا چند اهم است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

۵ (۴)

۲ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲ (۱)

محل انجام محاسبات

۹۷- اگر دو سر سیمی به جرم $4g$ ، طول $5cm$ ، چگالی $\frac{1}{6} \frac{g}{cm^3}$ و مقاومت ویژه $10^{-5} \Omega.m$ را به اختلاف پتانسیل الکتریکی $4V$ وصل کنیم، جریان چند آمپر از این سیم عبور می‌کند؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۰/۴ (۲)

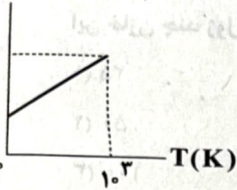
۰/۲ (۱)

۹۸- سیمی به مقاومت الکتریکی R را از ابزاری عبور می‌دهیم تا بدون تغییر جرم، شعاع سطح مقطع آن نصف شود، در این حالت مقاومت الکتریکی این سیم برابر R' می‌شود. سپس $\frac{3}{4}$ سیم را بریده و مجدداً از همان ابزار عبور می‌دهیم تا بدون تغییر جرم، طول سیم، ۳ برابر شود، در این حالت مقاومت الکتریکی سیم برابر R'' می‌شود. نسبت $\frac{R''}{R}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۳۶ (۴)

 $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۱)

۹۹- نمودار مقاومت ویژه برحسب دما برای یک رسانای اهمی، مطابق شکل زیر است. مقاومت الکتریکی این رسانا به ازای تغییرات دمای آن از صفر کلوین تا $10^3 K$ چند درصد تغییر می‌کند؟ ($\alpha = 10^{-4} K^{-1}$)

 $\rho(\Omega.m)$ 

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۲۰ (۳)

۴۰ (۴)

۱۰۰- سیمی از جنس یک نیم‌رسانا به حجم $40cm^3$ و طول $80cm$ در دمای $20^\circ C$ دارای مقاومت $3/2 \Omega$ است. اگر اندازه ضریب دمایی این سیم در SI برابر با 10^{-5} باشد، مقاومت ویژه این سیم در دمای $313K$ چند اهم - میلی‌متر است؟

 $2/0004 \times 10^{-4}$ (۴) $1/9996 \times 10^{-4}$ (۳)

۰/۲۰۰۰۴ (۲)

۰/۱۹۹۹۶ (۱)

شیمی



۱۰۱- کدام مطالب نادرست هستند؟

(آ) لکه‌های سفیدی که پس از شستن لباس با صابون روی آن باقی می‌ماند، می‌تواند نشانه‌ای از سختی آب باشد.

(ب) برای تهیه صابون مایع می‌توان اسید C_6H_5COOH را با KOH وارد واکنش کرد.

(پ) pH صابون مراغه بین ۵ تا ۶ است و از این صابون برای موهای چرب استفاده می‌شود.

(ت) تماس محلول غلیظ $NaOH$ با پوست و تنفس بخارات آن، آسیب جدی به دنبال دارد.

(۴) «پ» و «ت»

(۳) «آ» و «ت»

(۲) «ب» و «پ»

(۱) «آ» و «ب»

۱۰۲- کدام مطلب در ارتباط با اوره و اتیلن گلیکول نادرست است؟

(۱) در اوره برخلاف اتیلن گلیکول، پیوند $C-H$ وجود ندارد.

(۲) هر دو ترکیب به خوبی در آب حل می‌شوند.

(۳) نقطه انجماد مخلوط آب و اوره، بالاتر از نقطه انجماد مخلوط آب و اتیلن گلیکول است.

(۴) مجموع شمار اتم‌های موجود در یک مولکول اوره و یک مولکول اتیلن گلیکول، بیشتر از شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول تقریبی بنزین است.

حل انجام محاسبات



Handwritten text in Urdu script, likely a solution or explanation for a problem involving dice. The text is written in a cursive style and covers most of the page. It includes several lines of text, some of which are underlined or bolded. There are also some small diagrams or tables interspersed within the text.

- ۱۰۹- غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HX با درجه یونش ۰/۰۲ برابر 10^{-2} مول بر لیتر و غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HY با درجه یونش ۰/۱۰ برابر ۰/۰۸ مول بر لیتر است. نسبت غلظت تعادلی HX به غلظت تعادلی HY کدام است؟
- (۱) ۰/۶۸ (۲) ۰/۷۶ (۳) ۰/۶۱ (۴) ۰/۵۳

۱۱۰- کدام مورد درست است؟ ($H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1}$)

- (۱) براساس مدل آرنیوس، در دما و غلظت یکسان، محلول HF، اسیدی تر از محلول HCN است.
- (۲) اگر غلظت مولی آنیون در محلول اسید قوی HA و محلول اسید ضعیف HX، برابر باشد، غلظت مولی مولکول های آغازی حل شده نیز برابر است.
- (۳) برای افزایش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک می افزایند.
- (۴) اگر در دمای ثابت و در دو ظرف جداگانه با حجم یکسان، جرم فرمیک اسید حل شده، ۰/۹۲ برابر جرم استیک اسید حل شده باشد، شمار یون ها در محلول فرمیک اسید بیشتر است.

۱۱۱- صابون ماریسی ($M=304 g.mol^{-1}$) نوعی صابون جامد است که از روغن زیتون خالص تهیه شده است. اگر ۱۰ گرم از این صابون با مقدار کافی آب سخت که حاوی مقدار زیادی یون کلسیم است، مخلوط شود، حداکثر چند گرم رسوب تشکیل می شود؟

($Na=23, Ca=40: g.mol^{-1}$)

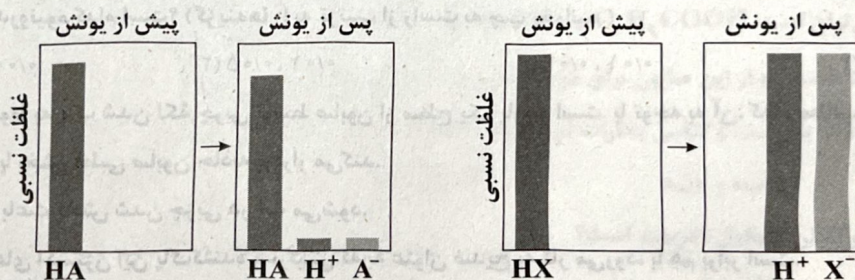
- (۱) ۹/۶۰ (۲) ۹/۹۰ (۳) ۱۰/۳ (۴) ۱۰/۷
- ۱۱۲- هنگامی که غلظت اولیه اسید ضعیف HA برابر ۰/۰۱ مولار است، مجموع غلظت مولی یون های حاصل از آن برابر ۰/۰۰۱ مولار است. در محلول دیگری از این اسید در همین دما مجموع غلظت مولی یون های حاصل برابر با 4×10^{-3} مولار باشد، غلظت اولیه اسید HA چند مولار بوده است؟

(۱) ۰/۰۹ (۲) ۰/۰۸ (۳) ۰/۱۶ (۴) ۰/۱۲

۱۱۳- کدام مطالب زیر درست است؟

- (آ) اگر رسانایی الکتریکی یک عنصر به وسیله الکترون ها انجام شود، می توان نتیجه گرفت که آن عنصر به یقین جریان گرما را از خود عبور می دهد.
- (ب) برخی از پاک کننده ها مانند سفیدکننده ها، به جای برهم کنش با آلاینده ها، با آن ها واکنش می دهند.
- (پ) به طور کلی بازها در سطح پوست همانند صابون، احساس لیزی ایجاد می کنند.
- (ت) دلیل سوزش معده که درد شدیدی در ناحیه سینه ایجاد می کند، برگشت مقداری از محتویات اسیدی معده به لوله مری است.
- (۱) «آ» و «ب» (۲) «آ» و «پ» (۳) «پ» و «ت» (۴) «ب» و «ت»

۱۱۴- نمودارهای زیر غلظت نسبی گونه های موجود در محلول دو اسید را پیش و پس از یونش نشان می دهد. کدام گزینه در ارتباط با آن ها درست است؟

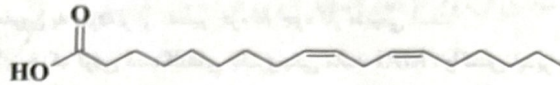


- (۱) HA و HX به ترتیب می توانند اسید حاصل از حل شدن گاز هیدروژن فلوئورید و جامد دی نیتروژن پنتوکسید در آب باشند.
- (۲) اگر غلظت مولی اولیه دو اسید با هم برابر باشد، سرعت واکنش آن ها با یک گرم از نوار منیزیم، یکسان خواهد بود.
- (۳) رسانایی الکتریکی محلول آبی اتانول و محلول HX، با فرض غلظت یکسان، با هم برابر خواهد بود.
- (۴) HA و HX به ترتیب می توانند هیدروسیانیک اسید و سولفوریک اسید باشند.

محل انجام محاسبات

۱۱۵- برای تهیه نوعی صابون با بوی بادام از واکنش لینولئیک اسید با مقدار اضافی سدیم هیدروکسید استفاده می‌شود. اگر بازده واکنش ۷۵ درصد و جرم هر قالب صابون ۱۰۰ گرم باشد، برای تهیه یک قالب صابون، چند گرم از لینولئیک اسید مورد نیاز است؟

($H=1, C=12, O=16, Na=23: g.mol^{-1}$)



لینولئیک اسید

۱۲۳/۶ (۴)

۱۱۲/۹ (۳)

۱۳۳/۳ (۲)

۱۴۱/۷ (۱)

توجه: داوطلب گرامی، لطفاً از بین سؤالات زوج درس ۱ (شیمی (۱)، شماره ۱۱۶ تا ۱۲۵) و زوج درس ۲ (شیمی (۲)، شماره ۱۲۶ تا ۱۳۵)، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

زوج درس ۱

شیمی (۱) (سؤالات ۱۱۶ تا ۱۲۵)

۱۱۶- در اتم‌های دو عنصر M و X، به ترتیب زیرلایه‌های الکترونی ۴s (با a الکترون) و ۳d (با b الکترون) در حال پر شدن است. اگر نسبت b به a برابر ۵ باشد، حداقل و حداکثر تفاوت عدد اتمی دو عنصر M و X کدام است؟

۱۰ و ۵ (۴)

۹ و ۵ (۳)

۱۰ و ۶ (۲)

۹ و ۶ (۱)

۱۱۷- کدام مورد درست است؟

(۱) در یک ترکیب یونی دوتایی دارای نافلز گروه هفدهم، هر یک از یون‌ها به آرایش گاز نجیب رسیده‌اند.

(۲) یونی که تنها از یک عنصر تشکیل شده باشد، به یقین یون تک‌اتمی است.

(۳) در یک ترکیب یونی، مجموع شمار یون‌های تشکیل‌دهنده در فرمول شیمیایی، همواره برابر مجموع قدرمطلق بار یون‌هاست.

(۴) اگر آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم یکی از عنصرهای سه دوره نخست جدول تناوبی، فاقد الکترون منفرد باشد، به یقین این عنصر در گروه ۱۸ جای دارد.

۱۱۸- اگر در اتم عنصر X، بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی، ns^2 و شمار الکترون‌های $l=1$ ، برابر ۱۲ باشد، کدام مورد درباره اتم X درست است؟

(۱) اگر شمار الکترون‌های $l=2$ ، دو واحد بیشتر از شمار الکترون‌های $l=0$ باشد، مجموع عدد اتمی و شماره گروه X، برابر با عدد اتمی دومین عنصر گروه ۶ است.

(۲) ۸ عنصر در جدول تناوبی دارای این ویژگی هستند.

(۳) شمار الکترون‌های $l=2$ ، می‌تواند حداکثر ۲۰ درصد شمار الکترون‌های $l=0$ باشد.

(۴) شمار الکترون‌های ظرفیتی X می‌تواند برابر شمار الکترون‌های ظرفیتی Se باشد.

۱۱۹- در مدل کوانتومی اتم، مدل اتمی بور است.

(۱) همانند - انرژی به صورت پیمانه‌ای (کوانتومی) نشر یا جذب می‌شود.

(۲) همانند - برای توصیف وضعیت الکترون از چند عدد کوانتومی استفاده می‌شود.

(۳) برخلاف - مکان دقیق الکترون‌ها مشخص است.

(۴) برخلاف - الکترون در مسیر دایره‌ای شکل به دور هسته گردش می‌کند.

۱۲۰- هر کدام از اعداد موجود در گزینه‌ها، مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر یا عنصرهایی از دوره چهارم

جدول تناوبی را نشان می‌دهد. کدام عدد را فقط به یک عنصر می‌توان نسبت داد؟

۳۳ (۴)

۲۹ (۳)

۲۳ (۲)

۱۸ (۱)

۱۲۱- کدام مطلب در ارتباط با طیف نشری خطی هیدروژن نادرست است؟

(۱) ناحیه مرئی طیف شامل چهار نوار رنگی است که نوارهای پراثری‌تر به هم نزدیک‌ترند.

(۲) تمامی نوارهای رنگی در ناحیه مرئی مربوط به انتقال به $n=2$ بوده و کم‌ترین طول موج این نوارها مربوط به انتقال از $n=6$ است.

(۳) اگر الکترون در اتم هیدروژن از $n=3$ به $n=1$ منتقل شود، پرتوی نامرئی تولید می‌شود که کنترل تلویزیون با آن کار می‌کند.

(۴) با تعیین دقیق طول موج نوارهای رنگی در ناحیه مرئی طیف، می‌توان به تصویر دقیقی از انرژی لایه‌های الکترونی و در واقع آرایش الکترونی اتم دست یافت.

محل انجام محاسبات

۱۳۴- در جدول تناوبی، عناصری هستند که به صورت فلز و به صورت نافلز در یک گروه قرار دارند. کدام یک از این عناصر فلز است؟

(۱) ۲۹۱

(۲) ۲۳۹

(۳) ۲۱۳

(۴) ۲۳۹

۱۳۵- کدام مطلب زیر در ارتباط با گاز هلیوم درست است؟

(۱) تهیه هلیوم از هوای مایع، مقرون به صرفه‌تر از تقطیر جزء به جزء گاز طبیعی است.

(۲) دلیل اصلی کاربرد هلیوم برای خنک کردن دستگاه‌های الکترونیکی مانند VCR، واکنش پایدار بودن آن است.

(۳) پس از آرگون، فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هواکره است.

(۴) هلیوم در لامپ‌های بالای هواکره همانند اکسیژن و هیدروژن به صورت گازیون تک‌اتمی با یک بار مثبت وجود دارد.

۱۳۶- دمای هوا در ارتفاع ۸ کیلومتری از سطح زمین برابر 3°C - است. با توجه به مطالب کتاب درسی و تغییرات دما در لایه تروپوسفر بر حسب ارتفاع، تغییر دما از سطح زمین تا ارتفاع ۸ کیلومتری، چند برابر دمای سطح زمین است؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۶

۱۳۷- کدام مطلب در ارتباط با تهیه هوای مایع و تقطیر جزء به جزء آن درست است؟

(۱) دومین گازی که در تقطیر جزء به جزء هوای مایع جدا می‌شود، در ساخت لامپ‌های رشته‌ای به کار می‌رود.

(۲) اولین مرحله برای تهیه هوای مایع، جدا کردن رطوبت هوا به صورت یخ است.

(۳) در فرایند تهیه هوای مایع، با استفاده از فشار، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند.

(۴) با توجه به این که نقطه جوش اکسیژن فقط 3°C پایین‌تر از نقطه جوش آرگون است، تهیه اکسیژن ۷۰٪ خالص در این فرایند دشوار است.

(۱) «ب» و «ت»

(۲) «آ» و «ب»

(۳) «آ» و «پ»

(۴) «پ» و «ت»

زوج درسی ۲

شیمی (۲) (سوالات ۱۳۶ تا ۱۳۸)

۱۳۶- اگر مخلوط گازهای پروپین و اتان به جرم ۱۰۰ گرم، در اثر واکنش با مقدار کافی برم مایع و تبدیل به فراورده(های) سیرو شده، ۸۰ درصد افزایش جرم داشته باشد، درصد کاهش حجم گازها در انتهای واکنش، نسبت به ابتدای واکنش در شرایط استاندارد کدام است؟

($H=1, C=12, Br=80; g.mol^{-1}$)

(۱) ۷/۷

(۲) ۱۲/۲

(۳) ۱۴/۹

(۴) ۱۹/۸

۱۳۷- فرمول مولکولی آلکان شاخه‌دار A با فرمول مولکولی C_4H_{10} - تری متیل پنتان یکسان اما ساختار آن متفاوت است. با توجه به این مطلب کدام عبارت نادرست است؟

(۱) اگر آلکان A دارای شاخه فرعی اتیل باشد، مجموع شماره شاخه(های) فرعی آن حداکثر برابر ۶ است.

(۲) اگر آلکان A فاقد شاخه فرعی اتیل باشد، مجموع شماره شاخه(های) فرعی آن حداکثر برابر ۱۰ است.

(۳) اگر زنجیر اصلی آلکان A شامل ۶ اتم کربن باشد، حداکثر ۶ ساختار می‌توان برای آن در نظر گرفت.

(۴) اگر آلکان A دارای پنج گروه متیل باشد، حداکثر ۳ ساختار می‌توان برای آن در نظر گرفت.

۱۳۸- اگر حلقه بنزنی از یک ضلع و به صورت پشت سر هم، مشابه با ساختار نفتالن به هم متصل شوند، کدام مطلب در ارتباط با ترکیب حاصل، نادرست است؟ ($H=1, C=12; g.mol^{-1}$)

(۱) مجموع شمار اتم‌های مولکول آن برابر با مجموع شمار اتم‌های هیچ آلکانی نیست.

(۲) شمار اتم‌های کربن مولکول آن برابر با شمار اتم‌های هیدروژن ۳- اتیل - ۲- متیل هپتان است.

(۳) جرم اتم‌های کربن موجود در آن، به تقریب ۱۷/۲ برابر جرم اتم‌های هیدروژن آن است.

(۴) شمار پیوندهای کربن - هیدروژن مولکول آن برابر با شمار همین پیوندها در مولکول ۲- اکتین است.

یا افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی این عنصر در آلکان‌ها، آلکین‌ها، به ترتیب چگونه تغییر می‌کند؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید و $H=1, C=12; g.mol^{-1}$)

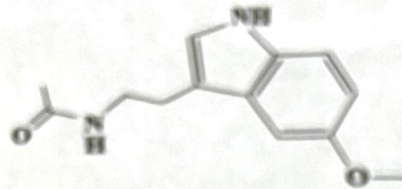
(۱) افزایش، ثابت، کاهش

(۲) افزایش، ثابت، افزایش

(۳) افزایش، افزایش، افزایش

(۴) کاهش، ثابت، کاهش

محاسبات



۱۳۰- کدام مطلب در ارتباط با ترکیبی با ساختار زیر نادرست است؟

- (۱) شمار پیوندهای دوگانه آن، برابر با شمار همین پیوندها در مولکول نفتالن است.
- (۲) مجموع شمار اتمهای هیدروژن و اکسیژن مولکول آن، برابر با شمار اتمهای کربن در فرمول تقریبی گریس است.
- (۳) مجموع شمار اتمهای مولکول آن، $\frac{4}{3}$ مجموع شمار اتمها در فرمول تقریبی والالین است.
- (۴) شمار پیوندهای یگانه در ساختار آن، ۵ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول آن است.

۱۳۱- کدام مطلب زیر درست هستند؟

- (آ) با توجه به واکنش‌پذیری بیشتر کربن در مقایسه با سیلیسیم، می‌توان از واکنش کربن با سیلیس، عنصر با ارزش سیلیسیم را به همراه کربن دی‌اکسید تولید کرد.
- (ب) ماده خام برای تولید کیسه پلاستیکی، نفت خام است که همانند فلزها یک منبع تجدیدناپذیر است.
- (پ) اگر مقدار متان در هوای معدن زغال‌سنگ به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد.
- (ت) در تولید کاغذ، مقدار کمی آب و برخی مواد شیمیایی مضر برای محیط زیست مصرف می‌شود.

(۱) «ب» و «پ» (۲) «آ» و «ت» (۳) «آ» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

۱۳۲- بر اثر سوختن کامل ۰/۴ مول از هیدروکربن خطی A، مقداری گاز تولید می‌شود که حجم آن در شرایط STP برابر با ۵۲/۷۶ لیتر است.

همچنین ۰/۳ مول از این هیدروکربن با ۱/۲ گرم گاز هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهد. هر مولکول از A شامل چند جفت‌الکترون پیوندی و هر

مول از آن برای سوختن کامل به چند مول گاز اکسیژن نیاز دارد؟ (گزینه‌ها را به ترتیب از راست به چپ بخوانید و $H=1\text{g.mol}^{-1}$)

۷، ۱۴ (۱) ۷، ۱۷ (۲) ۸، ۱۷ (۳) ۸، ۱۴ (۴)

۱۳۳- کدام یک از مطالب زیر در ارتباط با نفت سفید نادرست است؟

- (۱) نفت سفید، سنگین‌تر از بنزین و سبک‌تر از گازوئیل است.
- (۲) به طور گسترده در هواپیما و موتورهای جت استفاده می‌شود.
- (۳) درصد نفت سفید در نفت سنگین کشورهای عربی، بیشتر از نفت سنگین ایران است.
- (۴) هیدروکربن‌های $C_{10}H_{22}$ و $C_{12}H_{26}$ می‌توانند جزو مولکول‌های سازنده نفت سفید باشند.

۱۳۴- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) گرما را می‌توان هم‌ارز با آن مقدار دمایی دانست که به دلیل تفاوت در انرژی گرمایی جاری می‌شود.
- (۲) نیم لیتر روغن زیتون 70°C ، دیرتر از نیم لیتر آب 70°C ، با محیط هم دما می‌شود.
- (۳) انرژی گرمایی یک نمونه ماده همانند دما، مستقل از جرم ماده است.
- (۴) گرما از ویژگی‌های یک نمونه ماده نیست و نباید برای توصیف آن به کار رود.

۱۳۵- اگر ظرفیت گرمایی ویژه مایع خالص A، دو برابر ظرفیت گرمایی ویژه مایع خالص X باشد، کدام مورد درباره نمونه‌هایی با جرم برابر از دو

مایع، نادرست است؟

- (۱) اگر پس از گرم کردن آن‌ها، تغییر دمای هر دو برابر شود، $Q_X = 2Q_A$ ، بوده است.
- (۲) اگر به آن‌ها گرمای یکسانی داده شود، تغییر دمای A، نصف تغییر دمای X، خواهد بود.
- (۳) اگر به آن‌ها گرمای یکسانی داده شود، نسبت ظرفیت گرمایی به ظرفیت گرمایی ویژه در A، برابر همین نسبت در X است.
- (۴) اگر در دمای یکسان، تخم‌مرغ در A در مدت ۵ دقیقه پخته شود، همان تخم‌مرغ در X، در مدت بیشتر از ۵ دقیقه می‌پزد.

انجام محاسبات



دفترچه شماره (۳)

نام خانوادگی: نام و نام خانوادگی:	نام درس: دین و زندگی، حابان	زمان آزمون: ۱۰۰ دقیقه
کد داوطلب:	سؤالات تشریحی دوازدهم ریاضی	

ردیف	نمره	سؤال
		دین و زندگی (۲)
۱	۰/۵	با توجه به آیه شریفه «أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَابَهُ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ» در چه صورت جا داشت که مردم در اعتقاد به توحید در شک بیفتند؟
۲	۱	براساس آیه مبارکه «يَسْأَلُهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ كُلُّ يَوْمٍ هُوَ فِي شَأْنٍ» به سؤالات زیر جواب دهید: الف) منظور از این که خداوند هر لحظه دست‌اندرکار امری است، چیست؟ ب) چرا موجودات از خداوند درخواست دارند؟
۳	۱	صحیح یا غلط بودن هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) افزایش معرفت انسان به خود، موجب افزایش بندگی خداوند است. ب) مهم‌ترین اعتقاد دینی که بدون اعتقاد به آن، هیچ اعتقاد دیگری اعتبار ندارد، معاد است.
۴	۰/۵	گزینه مناسب را انتخاب کنید. رابطه «جهان با خداوند»، «در بقا» مانند کدام یک از موارد است؟ الف) پرتو نور با منبع نور ب) میز با نجار
۵	۲	به سؤالات زیر به صورت کوتاه پاسخ دهید. الف) بزرگ‌ترین ضربه جریان تکفیری بر پیکره اسلام چه بود؟ ب) معنای این که خداوند پیامبر اکرم (ص) را ولی انسان‌ها معرفی می‌کند، چیست؟ ج) نور بودن خدا به چه معناست؟ د) علت نهی پیامبر (ص) در حدیث «در همه چیز تفکر کنید، اما در ذات خدا تفکر نکنید» چیست؟

ردیف	نمره	سوال
۶	۵	به سؤالات زیر به صورت کامل پاسخ دهید. الف) دلیل بیاورید که چرا خداوند در «آفرینش جهان» شریکی ندارد؟ ب) رابطه علیت میان پدیده‌های مادی و معنوی به چه معناست؟ مثال بزنید. ج) آگاهی انسان به نیازمندی خود به خداوند، چه نمره‌ای برای او به دنبال دارد؟
۷	۱	حسابان (۲) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر $r(x)$ باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه دوم $q(x)$ باشد، آن‌گاه درجه r است. ب) اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، به طوری که $p(a) = 1$، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر برابر با ۱ است.
۸	۱/۵	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) تابع $f(x) = 1 - \log_2 x$ در دامنه خود، یک تابع اکیدا یکنوا است. ب) نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه $(-8, 12)$ روی نمودار $y = \frac{1}{2}f(x)$ متناظر است. ج) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.
	۱/۵	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $(x+1)(x-2)$ بخش‌پذیر باشد.

رتبه	نمره	سوال
۱۱	۲	ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بیابید.
۱۱	۱	مقدار x را طوری بیابید که: $(0.5)^{2x-3} \geq \frac{1}{8}$
۱۱	۱	فرض کنید تابع f در یک فاصله، اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید $a \leq b$.
	۲	با رسم نمودار، نامعادله $ x+1 < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش دهید.
	۲۰	جمع نمرات

آزمونی شماره (۴)
جمعه
۱۴۰۴ / ۱۲ / ۱۹

دفترچه
شماره ۴

آزمون‌های سراسری کاج

گزارش در دسترس سراسری از نتایج کنکور

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵
پاسخنامه دوازدهم ریاضی
دوره دوم متوسطه



آماده باشو

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۱۵	مدت پاسخگویی: ۱۵۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایش علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

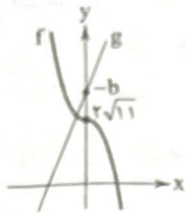
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۱۰	۱	۹۵ دقیقه
	حسابان ۲	۱۰	۱۱	
	ریاضیات گسسته	۱۰	۲۱	
	هندسه ۳	۵	۳۱	
	ریاضی ۱	۵	۴۱	
	حسابان ۱	۵	۴۲	
	هندسه ۱	۵	۴۱	
۲	فیزیک	۱۵	۵۶	۴۵ دقیقه
	فیزیک ۱	۱۰	۸۱	
	فیزیک ۲	۱۰	۹۱	
	فیزیک ۳	۱۵	۱۰۱	
۳	شیمی	۱۰	۱۱۱	۲۵ دقیقه
	شیمی ۱	۱۰	۱۱۶	
	شیمی ۲	۱۰	۱۲۶	

آزمودهای سراسر گاج

دورستان علمی	طراحان	دروس
مهدی وارسته ندا فرهنگتی - علی عرب مینا نظری - زهرا ساسانی	سیروس نصیری - حسین نادری مجید قره‌مندیپور - هایده جواهری رضا عاجدی - علی غلامی	ریاضیات
مروارید شاه‌حسینی پویا هدایتی - سارا دانایی	بهزاد کاویانی - ارسلان رحمانی مروارید شاه‌حسینی - فرشید کارخانه - محمد باغبان	فیزیک
امیرعلی برخورداریون محمدی ایمان زارعی - یاسر راش فاطمه عبدالله‌خانی	پویا الفتی	شیمی

آماده‌سازی آزمون	
مدیریت آزمون: ابوالفضل مزرعتی	
بازبینی و نظارت نهایی: سارا نظری	
برنامه‌ریزی و هماهنگی: سارا نظری	
بازبینی دفترچه: بهاره سلیمی	
ویراستاران فنی: ساناز فلاحي - مریم پارسائیان - سپیده‌سادات شریفی - نوشین تاکي	
صفحه‌آرا: فرهاد عبدی	
طراح شکل: آرزو گلفر	
حروف‌نگاران: ربابه الطافی - مهناز کاظمی - سحر فاضلی - حدیث فیض‌الهی - مریم قلی‌پور - فاطمه میرزایی	

۲ برای فهم بهتر نمودار f و g را ببینید:

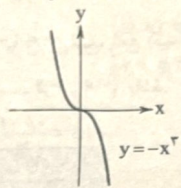
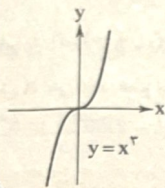


طبق شکل:

$$-b > 2\sqrt{11} \Rightarrow b < -\sqrt{44} \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} \max(b) = -4$$

دورسنامه

• نمودار توابع $y = x^3$ و $y = -x^3$ به صورت زیر است:



۳

$$\begin{cases} n - n^2 + 1 = \max \\ n \in \mathbb{N} \\ n - n^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n = 1$$

$$P(x) = x^1 + x + 1 \Rightarrow P(1) = 3 \quad \text{اگر } n = 1 \text{ باشد:}$$

دورسنامه

• توابع چندجمله‌ای: اگر n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$ ، آن‌گاه تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را تابع چندجمله‌ای درجه n می‌نامیم:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

۳ تابع موردنظر از تبدیل تابع x^3 به دست آمده است که مرکز تقارن آن به نقطه $(2, 2)$ تبدیل شده است، بنابراین:

$$f(x) = a(x-2)^3 + 2$$

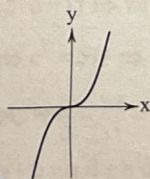
تابع $f(x)$ از مبدأ مختصات عبور کرده است، بنابراین:

$$f(0) = -8a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 + 2$$

$$f(2) = \frac{1}{4} + 2 = 2 \frac{1}{4}$$

دورسنامه

• تابع x^3 : نمودار تابع x^3 که به صورت زیر است و دارای مرکز تقارن $(0, 0)$ است.



ریاضیات

۲ برای ساخت تابع $g(x)$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{\text{افزایش افقی}} f(x+1) \xrightarrow{\text{با ضرب } \frac{1}{3}} f(3x+1) \\ &\xrightarrow{\text{انساز عمودی}} -2f(3x+1) \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} 1-2f(3x+1) \end{aligned}$$

و قرینه نسبت به محور x ها

ی‌های موردنظر به صورت زیر است:

$$f(x): [-1, 2] \Rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$f(x+1): [-2, 1] \Rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$f(3x+1): [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}] \Rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$g(x) = 1-2f(3x+1): [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}] \Rightarrow \text{نزولی اکید}$$

رایج حداکثر مقدار $\beta - \alpha$ برابر $1 - (-\frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$ است.

دورسنامه

تبدیل توابع:

۱ اگر $k > 0$ ، برای رسم نمودار $f(x-k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به راست انتقال دهیم و برای رسم $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به چپ انتقال دهیم.

۲ اگر $k > 0$ ، برای رسم $f(x)+k$ ، نمودار $f(x)$ را k واحد به بالا و برای رسم $f(x)-k$ ، نمودار $f(x)$ را k واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

۳ اگر $a > 0$ ، برای رسم $f(ax)$ نمودار $f(x)$ را در راستای افقی با $\frac{1}{a}$ منبسط یا منقبض می‌کنیم. (خا، $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود).

۴ اگر $a > 0$ ، برای رسم $af(x)$ نمودار $f(x)$ را در راستای قائم با a منبسط یا منقبض می‌کنیم.

ت:

اگر $f(x)$ اکیداً صعودی (نزولی) و $k < 0$ باشد، آن‌گاه $kf(x)$ اکیداً (صعودی) است و اگر $k > 0$ باشد، $kf(x)$ اکیداً صعودی (نزولی) است. نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها و $y = f(-x)$ قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است. قال توابع، رفتار تابع را از نظر یکنوایی تغییر نمی‌دهد.

$$\begin{cases} A \in g(x) \Rightarrow f(1-3k) = 2 \\ A' \in h(x) \Rightarrow f(-2k) = 2m \end{cases} \xrightarrow{\text{تعریف تابع}} \begin{cases} 2m = 2 \\ 1-3k = -2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = k = 1 \Rightarrow m + k = 2$$

دورسنامه

نقطه $A(p, q)$ روی $f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه $(\frac{p-b}{a}, q)$ روی $g(x) = f(ax)$ قرار دارد:

$$ax + b = p \Rightarrow x = \frac{p-b}{a}$$

$$f(p) = q \Rightarrow g(\frac{p-b}{a}) = f(p) = q$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ -x+2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



نمودار تابع رسم شده نزولی است.

۱-۱۰ تابع $\sqrt{x}$ اکیداً صعودی و تابع $\sqrt{1-x}$ اکیداً نزولی است. بنابراین برای این که تابع اکیداً نزولی باشد باید:

$$\frac{x-m}{x+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1, 0, 1\}$$

دروسنامه

نکات:

۱ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی (نزولی) باشد، $f(k-x)$ اکیداً نزولی (صعودی) است.

۲ اگر $f(x)$ اکیداً نزولی و $k \neq 0$ باشد، آن گاه $kf(x)$ دو حالت دارد:
الف) $k > 0$ باشد اکیداً نزولی است.
ب) $k < 0$ باشد اکیداً صعودی است.

۱۱-۳ اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{8} = vk \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{8} = vk$ است. بنابراین

ریشه سوم عدد A هم باید مضرب v باشد.

$$\frac{n(n+1)}{2} = vq \Rightarrow n(n+1) = 14q$$

بین دو عدد n و $(n+1)$ چون دو عدد متوالی هستند، حتماً یکی زوج است و مضرب ۲ هست. پس باید n یا $(n+1)$ یکی مضرب ۷ باشد، یعنی:

$$n = 12, 14, 20, 21, 27, 28, 34, 35, 41, 42, 48, 49$$

$$\Rightarrow n(A) = 12$$

$$10 \leq n \leq 49 \Rightarrow n(S) = 40$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{40} \Rightarrow P(A) = 0.3$$

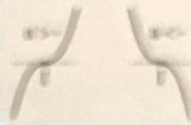
دروسنامه

اثبات با در نظر گرفتن همه حالات، یکی از روش‌های استدلال ریاضی است که در آن تمامی حالات ممکن برای یک گزاره بررسی می‌شود تا صحت آن تأیید شود. این روش معمولاً در مسائل شمارشی، ترکیبیات و نظریه اعداد به کار می‌رود و به کمک آن می‌توان نشان داد که یک حکم در تمامی شرایط برقرار است.

احتمال پیشامد A از فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

۱۱-۱۱ اگر مرکز تقارن تابع x^2 را به نقطه $(1, 0)$ منتقل کنیم، معادله آن $y = (x-1)^2 + 0$ خواهد بود و نمودار تابع $y = (x-1)^2 + 0$ یکی از اشکال زیر است.



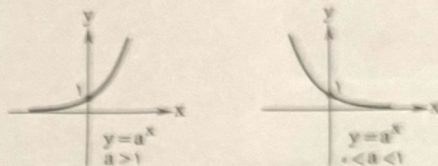
۲-۲

$$|a+3| - 2 > 1 \Rightarrow |a+3| > 3 \Rightarrow \begin{cases} a+3 > 3 \\ \text{یا} \\ a+3 < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \text{یا} \\ a < -6 \end{cases}$$

بنابراین اگر $a \in (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$ باشد، تابع اکیداً نزولی خواهد بود. پس a نمی‌تواند عضو مجموعه $\{-6, -5, \dots, 0\}$ باشد.

دروسنامه

• یکنواپی تابع نمایی: تابع نمایی $y = a^x$ برای حالت $a > 1$ اکیداً صعودی و برای حالت $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است.



۷-۴ f اکیداً صعودی و g نیز اکیداً صعودی است، بنابراین $f-g$ اکیداً صعودی است. $f \circ g$ و $g \circ f$ نیز اکیداً نزولی است.

دروسنامه

نکات:

۱ مجموعه دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است و همچنین مجموع تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است.

۲ اگر f و g اکیداً یکنوا باشند، ترکیب آن‌ها نیز اکیداً یکنوا خواهند بود.
۳ f و g اکیداً صعودی باشند ترکیب آن‌ها اکیداً صعودی، اگر f و g اکیداً $\downarrow$ باشند ترکیب آن‌ها اکیداً صعودی و اگر از f و g یکی اکیداً صعودی و f اکیداً نزولی باشد، ترکیب آن‌ها اکیداً نزولی است.

۲-روش اول: طبق نمودار $2 \in D_f(2x-1)$ است، بنابراین این حفره زیر به $g(x)$ می‌رسد.

$$f(2x-1) \rightarrow f(x-1) \rightarrow f(x) \rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 9$$

$$x=2 \Rightarrow 2x-1=3 \Rightarrow \text{نقطه ناپیوستگی } (3, f(3))$$

$$\frac{x}{2}=3 \Rightarrow x=6$$

دروسنامه

نکته: از ویژگی‌های عاد کردن داریم:

$$a|b \xrightarrow{nsZ} a|bn$$

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|mb+nc$$

۴ ۱۵

$$\begin{aligned} a^2 &= 24k \Rightarrow a^2 = 2^3 \times 3k \Rightarrow a^2 = 2^3 \times 2^2 \times k^2 \Rightarrow a = 2^2 \times 3k' \\ &\Rightarrow a = 12k' \Rightarrow 12|a \\ a^2 &= 20q \Rightarrow a^2 = 2^2 \times 5q \Rightarrow a^2 = 2^2 \times 5^2 \times q^2 \Rightarrow a = 2 \times 5q' \\ &\Rightarrow a = 10q' \Rightarrow 10|a \end{aligned}$$

$$[20, 12]|a \Rightarrow 60|a \Rightarrow a = 60n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_{\min} = 60 \\ n=5 \Rightarrow a_{\max} = 300 \end{cases}$$

$$\frac{a_{\min} + a_{\max}}{2} = \frac{60 + 300}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

دروسنامه

یادآوری: عددی مربع کامل است که در تجزیه آن عدد به عوامل اول، همه توان‌های عامل‌های اول زوج باشند و عددی مکعب کامل است که در تجزیه آن عدد به عوامل اول، همه توان‌های عوامل اول مضرب ۳ باشند.

نکات:

$$a|b, c|b \Rightarrow [a, c]|b$$

۱) ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) a و b را با $[a, b]$ نمایش می‌دهند. اگر $[a, b] = c$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$1) c|a, c|b$$

$$2) c'|a, c'|b \Rightarrow c' \geq c$$

۴ ۱۶ با فرض $(a, b) = d$ و $[a, b] = c$ داریم:

$$\sqrt{40+c} + \sqrt{40-c} = d \xrightarrow{\text{توان}} 40+c+40-c+2\sqrt{1600-c^2} = d^2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{1600-c^2} + 80 = d^2$$

$$c > 0 \Rightarrow 1600 - c^2 < 1600 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1600 - c^2} < 40$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{1600 - c^2} < 80 \Rightarrow 80 \leq 80 + 2\sqrt{1600 - c^2} < 160$$

$$\Rightarrow 80 \leq d^2 < 160 \Rightarrow 9 \leq d < 13$$

چون هم ۸۰ و هم $2\sqrt{1600 - c^2}$ هر دو زوج هستند، پس d^2 هم زوج است، یعنی d زوج است، پس $d = 10$ یا $d = 12$.

$$\text{اگر } d = 10 \Rightarrow 2\sqrt{1600 - c^2} + 80 = 100 \Rightarrow \sqrt{1600 - c^2} = 10$$

$$\Rightarrow c^2 = 1500 \Rightarrow c = \sqrt{1500}$$
 غ ق

$$\text{اگر } d = 12 \Rightarrow 2\sqrt{1600 - c^2} + 80 = 144 \Rightarrow \sqrt{1600 - c^2} = 32$$

$$\Rightarrow c^2 = 576 \Rightarrow c = 24$$

$$a'b' = \frac{c}{d} = \frac{24}{12} = 2 \Rightarrow a' = 2, b' = 1$$

$$a+b = a'd+b'd = d(a'+b') = 12(2+1) = 36$$

۱۲ ۱ عددی ۶ و ۸ باید در یک دسته باشند چون در این صورت حاصل ضرب عددهای دو مجموعه B و C زوج می‌شوند و امکان ندارد مجموعه‌شان عدد اول شود. همچنین باید اعداد ۳ و ۶ در یک دسته قرار گیرند چون در غیر این صورت حاصل ضرب عددهای هر دو دسته بر ۳ بخش‌پذیر و مجموعه‌شان هم مضرب ۳ می‌شود و نمی‌تواند عدد اول شوند. بنابراین تنها حالت ممکن به صورت $B = \{3, 6, 8\}$ و $C = \{5, 7\}$ است که:

$$n(A) = 1 \Rightarrow \text{عدد اول } 3 \times 6 \times 8 + 5 \times 7 = 144 + 35 = 179$$

$$n(S) = \binom{5}{2} \binom{2}{2} = 10$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

دروسنامه

یادآوری: اگر مجموعه A را به چند مجموعه تقسیم کنیم، به طوری که هر ۳ شرط زیر را داشته باشد، یک افراز از آن مجموعه انجام داده‌ایم.

- ۱) هیچ‌کدام از مجموعه‌ها تهی نباشند.
- ۲) اشتراک هر دو مجموعه دلخواه از آن‌ها تهی باشد.
- ۳) اجتماع همه مجموعه‌ها با هم برابر مجموعه A شود.

۳ ۱۳

$$12^4 + 12^4 \cdot 5 = 12^4(1+5) = (2^2 \times 3)^4 \times 6 = 2^8 \times 3^4 \times 6 = 2^8 \times 3^5$$

تجزیه عدد ۵۴۶ به صورت $546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$ است که چون $12^4 + 12^4 \cdot 5$ پس $7 | 12^4 + 12^4 \cdot 5$ و $13 | 12^4 + 12^4 \cdot 5$.

دروسنامه

عاد کردن: در ریاضیات گسسته به مفهوم بخش‌پذیری اشاره دارد. اگر a مقسوم‌علیه عدد b باشد، یعنی b مضرب a یا باقی‌مانده تقسیم عدد b بر a صفر باشد، می‌نویسیم $a|b$ و در این حالت $b = aq$ است و اگر باقی‌مانده تقسیم b بر عدد a صفر نشود، می‌نویسیم $a \nmid b$.

۳ ۱۴

$$\frac{1}{y} = \frac{-3}{7} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{-3x+3-7}{7x-7} = \frac{-3x-4}{7x-7} \Rightarrow y = \frac{-7x+7}{3x+4}$$

$$\begin{cases} 3x+4|-7x+7 \Rightarrow 3x+4|3(-7x+7) \Rightarrow 3x+4|-21x+21 \\ 3x+4|3x+4 \Rightarrow 3x+4|7(3x+4) \Rightarrow 3x+4|21x+28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x+4|49$$

$$3x+4 \in \{-1, 1, -7, 7, -49, 49\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-\frac{5}{3}, -1, -\frac{11}{3}, 1, -\frac{53}{3}, 15\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-1, 1, 15\}$$

این به ازای ۳ مقدار صحیح معادله جواب دارد.

۱۶ در قاعده تقسیم، حداکثر باقی مانده تقسیم عدد b بر $(b-1)$ است، پس داریم:

$$a = bq + b - 1 \Rightarrow a + 1 = b(q + 1) \\ \Rightarrow \begin{cases} b | a + 1 \\ b | a + 2 \end{cases} \Rightarrow b | 2 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}, b > 1} b = 2$$

چون $2 | a + 3$ ، بنابراین a یک عدد فرد است و می‌توانیم باقی مانده هر عدد فرد به توان زوج، بر عدد λ ($b^2 = 2^2 = \lambda$) برابر ۱ است، پس: $a^{2017} = \lambda q + 1$

دورنگاه

نکات:

- ۱ اگر عددی فرد به توان زوج برسد، همواره باقی مانده تقسیم این عدد بر عدد λ برابر ۱ است.
- ۲ اگر $n \geq 2$ باشد، حتماً $n!$ زوج است.
- ۳ در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، حداکثر مقدار باقی مانده $(b-1)$ است. زیرا همواره باقی مانده r ، در بازه $0 \leq r < b$ قرار دارد.

۱۷ بنا به قضیه تقسیم داریم:

$$a = 13q + r, 0 \leq r < 13 \Rightarrow n(r) = 13 \\ q = r + 5 \Rightarrow a = 13(r + 5) + r \Rightarrow a = 14r + 65 \Rightarrow a - 9 = 14(r + 4) \\ \text{برای این که } a - 9 \text{ مضرب } 42 \text{ باشد، باید } r + 4 \text{ مضرب } 3 \text{ باشد. } (0 \leq r < 13) \\ r + 4 = 3k \Rightarrow r = 3k - 4 \Rightarrow r \in \{2, 5, 8, 11\} \Rightarrow n(A) = 4 \\ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{13}$$

دورنگاه

قاعده تقسیم: اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، خارج قسمت و باقی مانده تقسیم، اعداد یکتا q و r هستند و داریم:

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

۲۱

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \xrightarrow{X \times A^{-1} \text{ از چپ}} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} A^{-1} X = A^{-1} B$$

$$\underbrace{A^{-1} \times A}_{I} \times X = A^{-1} \times B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2-18} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{6}{20} \\ \frac{3}{20} & -\frac{2}{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{6}{20} \\ \frac{3}{20} & -\frac{2}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{20} \\ \frac{11}{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{20} \\ y = \frac{11}{20} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 17 & 10 \\ -1 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow |M| = (17 \times (-11)) - (-1 \times 10) = -187$$

دورنگاه

نکات:

- ۱ به هم دو عدد a و b را با (a, b) نشان می‌دهیم که اگر $(a, b) = d \in \mathbb{N}$ باشد، دو شرط زیر برقرار است:
 - ۱- $d | b, d | a$
 - ۲- اگر عدد طبیعی مانند m وجود داشته باشد که $m | b, m | a$ ، آنجا $m \leq d$
 - ۳- اگر $(a, b) = d$ و $[a, b] = c$ باشد، هم d و c اعداد طبیعی و داریم: $a'b' = \frac{c}{d} = \frac{ab}{d^2}$ و $(a', b') = 1$ که $b' = \frac{b}{d}, a' = \frac{a}{d}$

۱۷ اگر $a > b$ ، $(a, b) = 41$ ، باشد، در این صورت $a = 41a'$ و $b = 41b'$ است که $(a', b') = 1$ و داریم:

$$a^2 - b^2 = 4851 \Rightarrow 441a'^2 - 441b'^2 = 4851 \xrightarrow{+441} a'^2 - b'^2 = 11 \\ \Rightarrow (a' - b')(a' + b') = 1 \times 11 \Rightarrow \begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 11 \end{cases} \Rightarrow a' = 6, b' = 5$$

$$\begin{cases} a = a'd = 6 \times 41 = 246 \Rightarrow a \text{ مجموع ارقام } = 1 + 2 + 6 = 9 \\ b = b'd = 5 \times 41 = 205 \Rightarrow b \text{ مجموع ارقام } = 1 + 0 + 5 = 6 \end{cases}$$

$$a - b = 46 = 9 - 6 = 3 \text{ تفاضل مجموع ارقام } b \text{ از مجموع ارقام } a$$

۲ اگر فرض کنیم $d = (9n - 2, 5n + 3)$ است، داریم:

$$\begin{cases} d | 9n - 2 \Rightarrow d | -5(9n - 2) \Rightarrow d | -45n + 10 \\ d | 5n + 3 \Rightarrow d | 9(5n + 3) \Rightarrow d | 45n + 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d | 27 \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} \begin{cases} d = 1 \\ d = 27 \end{cases}$$

فرض کنیم $d = 27$ است، داریم:

$$\begin{cases} 27 | 9n - 2 \Rightarrow 27 | -4(9n - 2) \Rightarrow 27 | -36n + 8 \\ 27 | 27 \Rightarrow 27 | 27n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 27 | n + 8 \Rightarrow n + 8 = 27k \Rightarrow n = 27k - 8$$

$$10 \leq n < 100 \Rightarrow 10 \leq 27k - 8 < 100 \Rightarrow 18 \leq 27k < 108$$

$$\Rightarrow \frac{18}{27} \leq k < \frac{108}{27} \Rightarrow k \in \{1, 2\} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow n = 19 \\ k = 2 \Rightarrow n = 46 \end{cases}$$

۱۸ مقدار از اعداد دو رقمی برای n ، دو عدد به ۵ و $9n - 2$ نسبت به هم اول هستند.

دورنگاه

۱۹ a و b را نسبت به هم اول (متباین) گوئیم که $(a, b) = 1$ است. درت $[a, b] = |ab|$ است.

$$\begin{vmatrix} -2x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = (-2x)(x) - (x+1)(x-1) = -2x^2 - x^2 + 1$$

$$\Rightarrow -5x^2 + 1 = -4 \Rightarrow -5x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\log_{1.1} 10 + \log_{1.2} 20 = \log_{1.2} 10 + \log_{1.2} 2 + \log_{1.2} 10$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \log_{1.2} 2 = \frac{3}{2} + \log_{1.2} 2$$

دوستنامه

از خواص لگاریتم می‌دانیم:

۱ $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

۲ $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$

۳ $\log_c a \times b = \log_c a + \log_c b$

$$A^T - 2A = \vec{0} \Rightarrow A^T = 2A \xrightarrow{\times A^{-1}} A^T = 2I$$

$$A^{25} = (A^T)^{14} \times A = (2I)^{14} \times A = 2^{14} \times A$$

دوستنامه

در سؤالات ماتریس گاهی اوقات توان‌هایی بزرگ از یک ماتریس را از ما می‌خواهند در این‌گونه سؤالات بهتر است که ماتریس خواسته شده را برحسب ماتریس که در فرض مسئله داده بنویسیم تا به فرم ساده‌تری از آن برسیم مثلاً:

$$A^T = A \Rightarrow A^{15} = ? \Rightarrow A^{15} = (A^T)^5 \times A = A^5 = (A^T)^4 = A^4 = (A^T)^3 = A^3 = (A^T)^2 = A^2 = A$$

۳ ۲۶

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & -y \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2}x & 4+x \\ 4 & 4-\frac{1}{2}y & 8-y \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

درایه‌های واقع بر بالای قطر اصلی صفر هستند:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+\frac{1}{2}x=0 \Rightarrow x=-4 \\ 4+x=0 \Rightarrow x=-4 \\ 8-y=0 \Rightarrow y=8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

چهار واحد به درایه a_{33} اضافه کنیم تا ماتریس B به دست آید:

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{کوچک‌ترین درایه} = 0 \\ \text{بزرگ‌ترین درایه} = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 12$$

دوستنامه

نکات:

۱ در معادلات ماتریسی به فرم $AB=C$ برای به دست آوردن ماتریس B باید طرفین معادله را از چپ در A^{-1} ضرب کرد:

$$B = A^{-1} \times C$$

توجه به این نکته ضروری است که A^{-1} حتماً باید از چپ در معادله ضرب گردد.

۲ در هر ماتریس به فرم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۳ دترمینان ماتریس مربعی مرتبه دو $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$|A| = ad - bc$$

۲۲ ۳ روش اول:

$$|10 \times A^T \times 2 \times A^{-1}| = |20 \times \overbrace{A^T \times A^{-1}}^A| = |20 \times A| = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 40 \end{vmatrix} = 4000$$

$$= 2^2 \times 10^2 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow 2m-n = 2 \times 2 - 2 = 2$$

روش دوم:

$$|10 A^T \times 2 \times A^{-1}| = |20 A| = 20^2 \times |A| = 400 \times 10 = 4000$$

دوستنامه

نکات:

۱ دترمینان ماتریس‌های قطری برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن:

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m \times n$$

۲ اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، وارون آن را با A^{-1} نمایش می‌دهیم و همواره داریم:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

۳ اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، آن‌گاه:

$$|KA| = K^n |A|$$

۱ ۲۳

$$4B^{-1}A^{-1} = 4(AB)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{5 \times 2 - 3 \times 4} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4B^{-1}A^{-1} = 4(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$$

دوستنامه

نکته: اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند همواره داریم:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

در واقع نماد وارون اولویت ضرب ماتریس‌ها را برعکس می‌کند.

۱/۲۹ اگر بین دو ماتریس A و B اتحاد برقرار باشد، یعنی آن دو

ماتریس تعویض پذیرند، بنابراین داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+ab & 1+2a \\ 6+2b & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ b & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2a+2 \\ b+4 & ab+4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{AB=BA} \begin{cases} 2+ab=2a+2 \Rightarrow a=2 \\ b+4=6+2b \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow ab=2$$

دورسنامه

نکته: به طور کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد یعنی $AB \neq BA$ و اگر ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه جایی داشته باشد، می گوییم آن دو ماتریس تعویض پذیرند، در این صورت اتحادها هم بین آن دو ماتریس برقرار است.

$$AB=BA \Rightarrow \begin{cases} (A+B)^T = A^T + B^T + 2AB \\ A^T - B^T = (A-B)(A+B) \end{cases}$$

۲/۳۰ بررسی عبارت ها:

الف) نادرست

ب) درست

ج) درست

د) نادرست: $B \times A$ در این حالت تعریف نمی شود.

دورسنامه

نکته: به طور کلی برای ماتریس های A ، B و C داریم:

$$B=C \Rightarrow \begin{cases} A \times B = A \times C \\ B \times A = C \times A \end{cases}$$

(دقت کنید که این گزاره یک طرفه است و عکس آن لزوماً صحیح نیست.)

مگر آن که $|A| \neq 0$ باشد در این صورت با ضرب طرفین نامساوی در A^{-1} عکس رابطه هم برقرار است.

نکته: اگر عددی مثل k در یک ماتریس ضرب شود و سپس ماتریس حاصل به توان n برسد، نتیجه با حالتی که ابتدا آن عدد به توان برسد و در به توان رسیدن ماتریس ضرب شود، یکسان است یعنی:

$$(kA)^n = k^n \times A^n$$

نکته: در ضرب دو ماتریس به مرتبه ماتریس ها توجه کنید:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

ماتریس حاصل ضرب $A \times B$ ، تعداد سطرهايش برابر تعداد سطرهای ماتریس A و تعداد ستون هایش برابر تعداد ستون های ماتریس B است. در ضمن باید تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

دورسنامه

$$\text{ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ یا } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

دارند.

نکته: اگر A یک ماتریس و k یک عدد حقیقی باشد، ماتریس kA از ضرب همه درایه های ماتریس A در عدد k به دست می آید.

۱/۲۷

$$2A + 12AB + 18B^T = 2A + (12A + 18B) \times B$$

$$= 2A + 6 \underbrace{(2A + 2B)}_I \times B = 2A + 6B$$

$$= A + \underbrace{(2A + 2B)}_I + 2B = A + 2B + I$$

$$\xrightarrow{2B=I-2A} A + I - 2A + I = 2I - A$$

دورسنامه

نکته: می دانیم ضرب ماتریس ها در حالت کلی خاصیت جابه جایی ندارد یعنی $(AB \neq BA)$ بنابراین فاکتورگیری در عبارت های ماتریسی نیز به صورت جهت دار انجام می شود به مثال های زیر توجه کنید:

۱ $AB + CB \xrightarrow{\text{می توان از } B \text{ از سمت راست فاکتور گرفت}} (A+C) \times B$

۲ $AB + B^T \xrightarrow{\text{می توان از } B \text{ از سمت راست فاکتور گرفت}} (A+B) \times B$

۳ $AB + A \xrightarrow{\text{می توان از } A \text{ از سمت چپ فاکتور گرفت}} A(B+I)$

۲/۲۸

$$\begin{cases} a_{12} = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ a_{23} = 2 \times 2 - 3 = 1 \\ b_{33} = 3^2 + 3 = 12 \\ b_{13} = 1^2 + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{جمع درایه های ماتریس} = 2 + 3 + 12 + 4 = 21$$

دورسنامه

نکته: درایه های هر ماتریس مانند A را می توان با ضابطه یا ضابطه هایی

مشخص کرد. در این صورت ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

نمایش می دهیم. مثلاً در ماتریس $[2i+3j]_{3 \times 1}$

یعنی، $a_{ij} = 2i + 3j$ می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ 2 \times 3 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

درسنامه

نکته: برای به دست آوردن تعداد نقاط برخورد دو

سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و $y = a'x^2 + b'x + c'$ کافی است

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

$$\Rightarrow (a-a')x^2 + (b-b')x + c-c' = 0$$

سپس Δ معادله درجه دو را محاسبه می‌کنیم. اگر $\Delta > 0$ دو نقطه برخورد، $\Delta = 0$ یک نقطه برخورد و اگر $\Delta < 0$ باشد نقطه برخوردی ندارند.

۳۴ با توجه به توضیحات مسئله $y_0 = 9$ است. معادله سهمی به

شکل $y = a(x-h)^2 + 9$ است با جایگذاری مختصات نقاط A و B در معادله سهمی داریم:

$$\begin{cases} A(2, 5) \\ B(1, 13) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = a(-h)^2 + 9 \\ 13 = a(1-h)^2 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ah^2 = 16 \\ a(1-h)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{(1-h)^2} = 4 \Rightarrow \left| \frac{h}{1-h} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{1-h} = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{3} \\ \frac{h}{1-h} = -2 \Rightarrow h = 2 \end{cases}$$

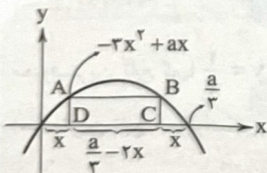
درسنامه

یادآوری: اگر S_k^h مختصات رأس سهمی معادله درجه دو باشد، معادله

سهمی به شکل $y = a(x-h)^2 + k$ نمایش داده می‌شود.

۳۵ با توجه به شکل و وجود تقارن در سهمی، طول پاره خط CD

برابر $\frac{a}{3} - 2x$ است.



$$ABCD \text{ محیط مستطیل} = 2\left(\frac{a}{3} - 2x - 2x^2 + ax\right)$$

$$= 2(-2x^2 + (a-2)x + \frac{a}{3}) = -4x^2 + 2(a-2)x + \frac{2a}{3}$$

محیط مستطیل یک عبارت درجه دو می‌باشد، در این صورت بیشترین محیط به ازای طول رأس سهمی به دست می‌آید. در این صورت:

$$x_s = \frac{-2(a-2)}{-4} = \frac{a-2}{2} = 5 \Rightarrow a-2=10 \Rightarrow a=12$$

$$\Rightarrow a^2 + a = (12)^2 + 12 = 144 + 12 = 156$$

درسنامه

نکته: اگر قرار باشد کمیت‌هایی مثل محیط و مساحت بیشترین مقدار یا

کمترین مقدار باشند کافی است آن کمیت به صورت معادله درجه

دو $y = ax^2 + bx + c$ نوشته شود و همان‌طور که می‌دانیم معادله درجه دو به ازای طول رأس سهمی، بیشترین یا کمترین مقدار خود را دارا خواهد

بود که این بیشترین مقدار و یا کمترین مقدار همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

۱ می‌دانیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\sin^2 \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

تصور داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha$$

نتیجه یکی از ریشه‌ها ۱- و ریشه دیگر $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ است.

درسنامه

یادآوری: در معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد،

یکی از ریشه‌ها ۱- و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

۳۶ به دلیل آن‌که $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ ریشه‌های معادله درجه ۲

باشد، طول رأس سهمی برابر $x_s = +\frac{m}{2} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2}$ می‌باشد، در

صورت $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ است.

$$\Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Rightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{m^2 - 1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m^2 - 1}}$$

درسنامه

۳۷ اگر دو نقطه روی سهمی قرار داشته باشند به طوری که دارای

های یکسان باشند طول رأس سهمی میانگین و طول آن دو نقطه

$$A\left(\frac{\alpha}{y}\right), B\left(\frac{\beta}{y}\right) \Rightarrow x_s = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

دو معادله را با هم برابر قرار می‌دهیم در این صورت داریم:

$$-cx^2 - bx + c = (a+b)x^2 + ax$$

$$\Rightarrow (a+b+c)x^2 + (a+b)x - c = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (a+b)^2 - 4(a+b+c)(-c)$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 + b^2 + 2ab + 4ac + 4bc + 4c^2$$

$$\xrightarrow{a+b \neq -2c} \Delta = (a+b+2c)^2 > 0$$

ت دو نمودار در دو نقطه متقاطع هستند.

$$x = \frac{-(a+b) \pm (a+b+2c)}{2(a+b+c)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{c}{a+b+c} \\ x_2 = -\frac{a+b+c}{a+b+c} = -1 \end{cases}$$

و چون k یک عدد حسی است، سه امکان وجود دارد: $k=0$ ، $k=1$ یا $k=2$

$$k=0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

دوستانه

اگر $k+1 < A < k+2$ (که عددی صحیح) در این صورت $[A]=k$

چون صحیح اعداد نامنفی، عددی حسی است.

$$A \geq 0 \Rightarrow [A] \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

۳۸ اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم باشند.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-b-a}{a} = -\frac{b}{a} - 1 \\ \beta \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} - 1 + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \beta = 1$$

یکی دیگر از ریشه‌ها برابر ۱ است. پس مجموع ضرایب در معادله درجه دو صفر است.

$$a+b+c=0 \Rightarrow c=-b-a$$

$$f(A) = 6A^2 + 8b + c = 6A^2 + 8b - b - a = 6A^2 + 7b - a = 7(9A + b)$$

$$7 < 7(9A + b) < 14 \Rightarrow 1 < 9A + b < 2 \Rightarrow \frac{1}{9} < 9A + b < 2 \Rightarrow 9A + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9A + b = 1$$

$$f(5) - f(4) = (25a + 5b + c) - (16a + 4b + c) = 9a + b = 1$$

دوستانه

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $a+b+c=0$ در این صورت

ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ و ۱ هستند.

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $a+c=b$ در این صورت

ریشه‌ها $\frac{-c}{a}$ و -۱ هستند.

۳۹ با توجه به دامنه جواب داریم: $x > 0$ و چون نسبت دو عبارت مثبت، مثبت است، پس $k > 0$.

$$\frac{\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}+1} = k \Rightarrow k(x+4\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{+\sqrt{x}} k(\sqrt{x}+4+\frac{1}{\sqrt{x}}) = 1$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 4 \geq 6 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow k(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 4) \geq 6k \Rightarrow 1 \geq 6k \Rightarrow k \leq \frac{1}{6} \Rightarrow 0 < k \leq \frac{1}{6}$$

چون هدف محاسبه عبارت $[36(k^2 - 2k)] = [36((k-1)^2 - 1)]$ است،

محدوده عبارت خواسته شده را ایجاد می‌کنیم:

$$\Rightarrow -1 < k-1 \leq -\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{25}{36} \leq (k-1)^2 < 1 \Rightarrow \frac{-11}{36} \leq (k-1)^2 - 1 < 0$$

$$\Rightarrow -11 \leq 36((k-1)^2 - 1) < 0$$

$$\Rightarrow [36(k^2 - 2k)] = -11 یا -10 یا -9 یا \dots یا -1$$

۱۱ مقدار متمایز وجود دارد.

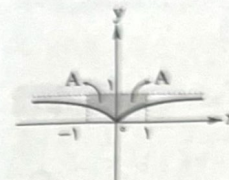
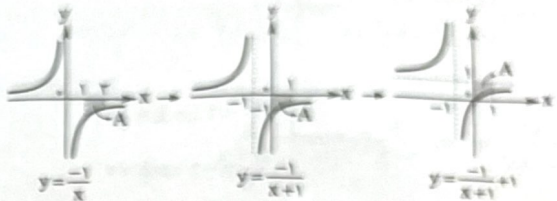
۳۶ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و مساحت A مشخص شده است.



تابع $y = \frac{x}{x+1}$ را رسم می‌کنیم.

$$y = \frac{x+1-1}{x+1} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{x+1}$$

تابع $y = \frac{-1}{x+1} + 1$ طبق مراحل زیر رسم می‌شود:

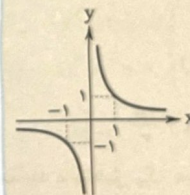


حال تابع $g(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ را رسم می‌کنیم.

به سبب تقارن ایجاد شده، مساحت بین تابع $g(x)$ و خط $y=1$ از $x=-1$ تا $x=1$ برابر $2A$ خواهد بود.

دوستانه

معروف‌ترین تابع گویا $y = \frac{1}{x}$ است که نمودار آن به صورت زیر است. (ساده‌ترین تابع هموگرافیک)



انتقال توابع به سمت چپ یا راست و بالا یا پایین مساحت‌های محصور در نواحی، تغییری نخواهند کرد.

۴ چون $|10x|$ و $|7x|$ اعدادی نامنفی هستند، پس می‌توان $k \in \mathbb{W}$ و $[10x] = [7x] = 1$ (اعداد حسابی)، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} [10x] = k \Rightarrow k \leq 10x < k+1 \Rightarrow \frac{k}{10} \leq x < \frac{k+1}{10} \\ [7x] = k \Rightarrow k \leq 7x < k+1 \Rightarrow \frac{k}{7} \leq x < \frac{k+1}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{7} \leq x < \frac{k+1}{10}$$

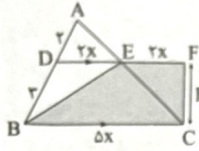
$$\Rightarrow \frac{k}{7} < \frac{k+1}{10} \Rightarrow 10k < 7k+7 \Rightarrow k < \frac{7}{3}$$

۴/۴۱

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DE = 2x \Rightarrow EF = 2x \\ BC = 5x \end{cases}$$

با توجه به آن که DF موازی BC است و فاصله دو خط موازی همواره یکسان است، پس ارتفاع دو مثلث مساوی است.

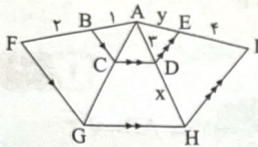


$$\frac{S_{EFC}}{S_{BEC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2x \times h}{\frac{1}{2} \times 5x \times h} = \frac{2}{5} = 0.4$$

درسنامه

هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث با هم برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده است.

۴/۴۲



$$BC \parallel FG \Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CG} \quad (1)$$

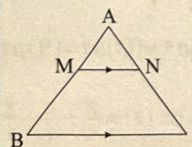
$$CD \parallel GH \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AD}{DH} \quad (2)$$

$$DE \parallel HI \Rightarrow \frac{AD}{DH} = \frac{AE}{EI} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} \frac{1}{2} = \frac{2}{x} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = 6, y = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{6}{2} = 3$$

درسنامه

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

در این صورت بنا به قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{NC}$$

روش اول: ۴۳/۲

$$\triangle ABD: AB \parallel FC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CD}{BD} = \frac{FC}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{x}{3} \quad (1)$$

$$\triangle BDE: FC \parallel ED \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BC}{BD} = \frac{FC}{ED} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{x}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \frac{CD}{BD} + \frac{BC}{BD} = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{CD+BC}{BD} = \frac{5x}{6}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{5}{6}x \Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1.2$$

درسنامه

نکته: با فرض $A > 0$ خواهیم داشت:

$$A + \frac{1}{A} \geq 2$$

زیرا:

$$(A-1)^2 \geq 0 \Rightarrow A^2 - 2A + 1 \geq 0 \Rightarrow A^2 + 1 \geq 2A \xrightarrow{A>0} A + \frac{1}{A} \geq 2$$

$$A + \frac{1}{A} \leq -2$$

و به همین ترتیب اگر $A < 0$ خواهیم داشت:

۴۰/۱

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 1 \\ P = \alpha\beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1^2 - 2(-3) = 7 \\ \alpha^2\beta^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - 4(-3) = 13 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.3 \Rightarrow [\alpha-1] = [\alpha]-1 \\ \beta = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1.3 \Rightarrow [-\beta] = [1.3] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{1-\beta} + [\alpha-1] = \frac{2}{1-(-1.3)} + 1 \Rightarrow x_1^2 = \frac{4}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha} + 1 \\ x_2 = \frac{-2}{\alpha} + [-\beta] = \frac{-2}{\alpha} + 1 \Rightarrow x_2^2 = \frac{4}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} + 1 \end{cases}$$

$$S' = x_1^2 + x_2^2 = 4\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + 4\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2$$

$$= 4\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right) + 4\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 2 = 4\left(\frac{7}{9}\right) + 4\left(\frac{1}{-3}\right) + 2 = \frac{24}{9}$$

$$P' = x_1^2 x_2^2 = \left(\left(\frac{2}{1-\beta} + 1\right)\left(\frac{-2}{\alpha} + 1\right)\right)^2 = \left(\frac{4}{\alpha\beta} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{4}{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 1\right)^2 = \left(\frac{4}{-3} + 2\left(\frac{1}{-3}\right) + 1\right)^2 = 1$$

$$x^2 - S'x^2 + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{24}{9}x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 9x^4 + 9 = 24x^2$$

درسنامه

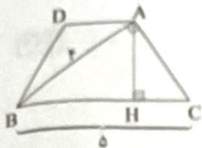
اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه روابط اصلی بین ریشه‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \\ \alpha^2\beta^2 = S^2 - 2PS \end{cases}$$

• معادله درجه چهارم به صورت $ax^4 + bx^2 + c = 0$ با تغییر متغیر $x^2 = t$ به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود که اگر این معادله درجه دوم دو ریشه مثبت داشته باشد ($t_1, t_2 > 0$) معادله درجه چهارم اولیه، چهار ریشه به صورت $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ خواهد داشت.

• تشکیل معادله درجه دوم: اگر S و P به ترتیب مجموع و ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، در این صورت آن معادله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 16 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$HC = BC - BH \Rightarrow HC = 1\frac{4}{5}$$

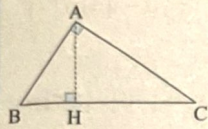
$$AD = BC - 2(HC) = 5 - 2 \times \frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$\text{محیط} = 5 + 1\frac{1}{5} + 2(3) = 12\frac{1}{5}$$

پس داریم:

درسنامه

در مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، داریم:



الف) $AB^2 = BH \times BC$

ب) $AC^2 = CH \times BC$

ج) $AH^2 = BH \times HC$

د) $AB \times AC = AH \times BC = 2S_{\text{مثلث}}$

باید زیرمجموعه‌ها را به گونه‌ای حالت‌بندی کنیم که حاصل ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن زیرمجموعه بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در مورد سایر اعضا در هر زیرمجموعه هر عضو دوحالت دارد (در زیرمجموعه باشد یا نباشد).

$$\{10, 11, 12, 13, 14, 15\} \Rightarrow 2^6 = 16$$

$$\{10, 11, 12\} \Rightarrow 2^3 = 8$$

$$\{11, 12, 13, 14, 15\} \Rightarrow 2^4 = 16$$

$$\{11, 12\} \Rightarrow 2^2 = 4$$

$$\{12, 13, 14, 15\} \Rightarrow 2^4 = 16$$

$$\xrightarrow{+} 37$$

$$\{12, 13, 14\} \Rightarrow 2^3 = 8$$

$$\{12, 13\} \Rightarrow 2^2 = 4$$

$$\{13, 14, 15\} \Rightarrow 2^3 = 8$$

$$\{14, 15\} \Rightarrow 2^2 = 4$$

درسنامه

(۱) ضرب دو عدد زمانی بر سه بخش‌پذیر است که حداقل یکی از آن دو عدد مضرب ۳ باشند.

(۲) تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی از رابطه 2^n می‌آید.

$$A = \{-9, -8, -7, \dots, 0, \dots, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{-1, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$= \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{-10, -1, 0, 1, 10\}$$

$$= 32$$

تعداد کل زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر است با:

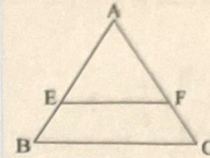
۳ ۴۷

روش دوم: بر اساس نکته درسنامه داریم:

$$x = \frac{AB \times ED}{AB + ED} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = \frac{4}{4} = 1$$

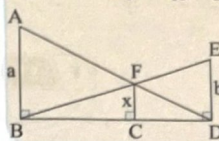
درسنامه

تعمیم قضیه تالس: اگر EF موازی ضلع BC از مثلث ABC رسم شده باشد بنا به تعمیم قضیه تالس می‌توان نوشت:



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

اگر خطوط AB، FC و ED موازی باشند، در این صورت داریم:

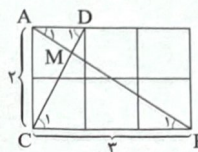


$$x = \frac{a \times b}{a + b}$$

۲ ۴۴

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow AM = x \Rightarrow MB = \sqrt{13} - x$$



$$AD \parallel BC \text{ و } AB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$AD \parallel BC \text{ و } CD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

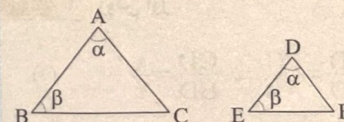
پس دو مثلث AMD و BCM با هم بنابر (ز ز) متشابه هستند.

$$\triangle AMD \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{13} - x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = \sqrt{13} - x \Rightarrow 4x = \sqrt{13} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

درسنامه

دو مثلث ABC و DEF را متشابه می‌گوییم، در صورتی که دو زاویه برابر داشته باشند، پس نسبت بین اضلاع برقرار است.



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} = \alpha \\ \hat{B} = \hat{E} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases}$$

بنابراین اگر هر سه ضلع دوه‌دو متناسب و یا دو ضلع متناسب و زاویه بین آن‌ها هم مساوی باشد باز هم می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث متشابه‌اند.

درسنامه

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با:
تعداد کل زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳/۵۱

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 9\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \\ A_2 &= \{2, 3, \dots, 8\} \\ A_3 &= \{3, 4, 5, 6, 7\} \\ A_4 &= \{4, 5, 6\} \\ A_5 &= \{5\} \\ A_6 &= \{\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=2}^6 A_i &= A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{4, 5, 6\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 3 \\ \bigcup_{i=1}^6 A_i &= A_1 = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 9 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 3 \times 9 = 27$$

درسنامه

• آشنایی با دو نماد مهم و کاربردی

۱) $\bigcup_{i=1}^n A_i$: هرگاه در سؤال چنین نمادی دیده شد، باید مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ با توجه به ضابطه داده شده برای A_i به صورت جداگانه نوشته شود و سپس بین همه آن‌ها اجتماع گرفته شود.

۲) $\bigcap_{i=1}^n A_i$: هرگاه در سؤال چنین نمادی دیده شد، باید مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ با توجه به ضابطه داده شده برای A_i به صورت جداگانه نوشته شود و سپس بین همه آن‌ها اشتراک گرفته شود.

۱/۵۲

$$2n(P) = 4n(Q) = 6n(R) = x \Rightarrow n(P) = \frac{x}{2}, n(Q) = \frac{x}{4}, n(R) = \frac{x}{6}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 121 \Rightarrow \frac{6x + 3x + 2x}{12} = 121 \Rightarrow \frac{11x}{12} = 121 \Rightarrow x = 132$$

$$n(P) = 66, n(Q) = 33, n(R) = 22$$

$$\binom{n}{2} = 66 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 66 \Rightarrow n(n-1) = 132 = 12 \times 11 \Rightarrow n = 12$$

درسنامه

یادآوری: از سال دهم می‌دانیم: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ حال برای به

دست آوردن زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی نیز از همین رابطه استفاده می‌کنیم. در حالت خاص تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

درسنامه

نکات:

$$B \subseteq A \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = A \\ A \cap B = B \end{cases}$$

یادآوری: مستم مجموعه A را با A' نمایش می‌دهیم و مجموعه عضوایی است که در مجموعه مرجع است و در مجموعه A نیست.



$$A' = \{x \in M | x \notin A\}$$

۳/۲۸

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3, 4\} \\ N &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \xrightarrow{M \cap N \subseteq A \subseteq M} \{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \\ M \cap N &= \{1, 2\} \\ \Rightarrow \begin{cases} A = \{1, 2, 3, 4\} \\ A = \{1, 2, 3\} \\ A = \{1, 2, 4\} \\ A = \{1, 2\} \end{cases} \end{aligned}$$

در واقع A اعضای ۱ و ۲ را دارد اما هر یک از عضوهای ۳ و ۴ می‌توانند در A باشند یا نباشند. (هر کدام ۲ حالت)

۴/۴۹ فقط مورد (ج) نادرست است.

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

درسنامه

نکات:

۱) برای این که نشان دهیم مجموعه A زیرمجموعه B است، باید نشان دهیم هر عضوی که در مجموعه A است، آن عضو در مجموعه B نیز وجود دارد، یعنی:

$$(\forall x; x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(دقت کنید که این قضیه دوطرفه است).

۲) برای بیان تساوی دو مجموعه مثل A و B باید نشان دهیم، مجموعه $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ یعنی: بالعکس است. (دقت کنید که این قضیه نیز دو طرفه است).

۳) می‌دانیم اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $B' \subseteq A'$ است.

$$\forall x; x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

$$(\forall x; x \in B' \Rightarrow x \in A')$$

نتیجه داریم:

$$B' \subseteq A'$$

یعنی:

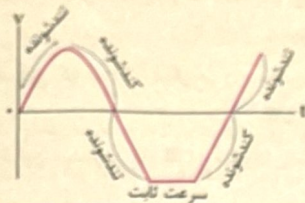
$$2^{n+3} - 2^n = 448 \Rightarrow 2^n \times 2^3 - 2^n = 448$$

$$\Rightarrow 2^n (2^3 - 1) = 448 \Rightarrow 2^n = \frac{448}{7} = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

مجموعه A ، یک مجموعه ۶ عضوی است.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی} = \binom{6}{3} = 20$$

۵ در بازه‌های زمانی که نمودار $v-t$ از محور افقی (محور زمان) دور می‌شود، اندازه سرعت متحرک در حال افزایش است. بنابراین حرکت متحرک تندشونده است و در بازه‌های زمانی که نمودار $v-t$ به محور افقی (محور زمان) نزدیک می‌شود، اندازه سرعت متحرک در حال کاهش است. بنابراین حرکت متحرک کندشونده است.



۳ با توجه به رابطه سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{(4 \times 4) + (-4 \times 3)}{4 + 3} = \frac{4}{7} \text{ m/s}$$

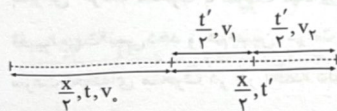
دورسنامه

اگر متحرکی در هر یک از بازه‌های زمانی متوالی $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ به صورت یکنواخت و با سرعت‌های v_1 و v_2 و ... و v_n حرکت کند، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_n \Delta t_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n}$$

۳ با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال داریم:



$$v_o = \frac{x}{t} \Rightarrow v_o = \frac{x}{2t} \Rightarrow t = \frac{x}{2v_o}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{x_1}{t} \Rightarrow \frac{t'}{2} = \frac{x_1}{v_1} \Rightarrow x_1 = v_1 \frac{t'}{2} \\ v_2 = \frac{x_2}{t} \Rightarrow \frac{t'}{2} = \frac{x_2}{v_2} \Rightarrow x_2 = v_2 \frac{t'}{2} \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{x}{2} \Rightarrow v_1 \frac{t'}{2} + v_2 \frac{t'}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow v_1 t' + v_2 t' = x \Rightarrow t' = \frac{x}{v_1 + v_2}$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در کل مسیر برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x}{t + t'} = \frac{x}{\frac{x}{2v_o} + \frac{x}{v_1 + v_2}}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{x}{\frac{x v_o + x v_o (v_1 + v_2)}{2v_o (v_1 + v_2)}} \Rightarrow v_{av} = \frac{2v_o (v_1 + v_2)}{v_1 + v_2 + 2v_o}$$

۵۸ ۲ با توجه به سرعت متوسط در مسیر رفت داریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow 15 = \frac{x}{t} \Rightarrow x = 15t \quad (*)$$

تندی متوسط متحرک در کل مسیر رفت و برگشت برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{2x}{t + 9}$$

$$(*) \Rightarrow 20 = \frac{2 \times 15t}{t + 9} \Rightarrow 20t + 180 = 30t \Rightarrow t = 18 \text{ s}$$

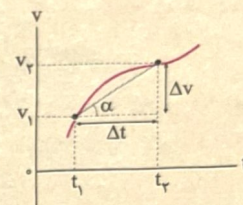
۵۹ ۱ حرکت متحرک در بازه زمانی $t = 2 \text{ s}$ تا t_1 تندشونده است. از طرفی می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه بر روی نمودار $v-t$ برابر با شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی است. از طرفی با توجه به نمودار داده‌شده در سؤال، شتاب متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا t_1 ثابت است. بنابراین:

$$a_{av} = \frac{v - (-3)}{t} = \frac{1 - (-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$

دورسنامه

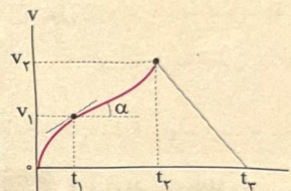
نمودار سرعت بر حسب زمان برای یک متحرک $(v-t)$

۱ شیب خط راستی که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان را به هم وصل می‌کند، برابر با شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی بین آن دو نقطه است.



$$a_{av} = \tan \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۲ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه برابر با شتاب متحرک در آن لحظه است.



شتاب متحرک در لحظه t_1 $\tan \alpha = a_1$

۳ در نمودار بالا شیب خط نمودار $v-t$ بین دو لحظه t_1 تا t_2 ثابت است. بنابراین شتاب متحرک در این بازه زمانی، ثابت است.

۴ اگر شیب نمودار $v-t$ ، مثبت باشد، علامت شتاب متحرک، مثبت است. شیب نمودار $v-t$ ، منفی باشد، علامت شتاب متحرک، منفی است.

۵ در نمودار بالا، شیب نمودار $v-t$ در بازه زمانی t_1 تا t_2 منفی است. علامت شتاب متحرک در این بازه زمانی، منفی است.

۶ گاه سرعت متحرک، مثبت باشد (یعنی نمودار $v-t$ بالای محور

متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و هر گاه سرعت متحرک، منفی باشد (یعنی نمودار $v-t$ پایین محور افقی باشد)، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

۷ طی که نمودار $v-t$ محور زمان (محور افقی) را قطع می‌کند و از سرعت متحرک، صفر شده و علامت آن تغییر می‌کند، یعنی در جهت حرکت متحرک عوض می‌شود.

نمودار مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت

نمودار $x-t$ در حرکت با سرعت ثابت به صورت یک خط راست با شیب ثابت است.

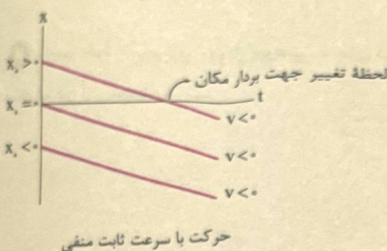
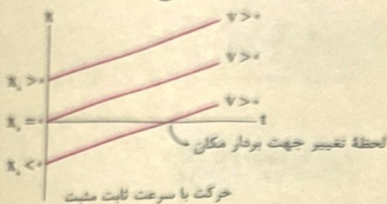
نکات:

۱) شیب خط مساوی به نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است.

۲) علامت سرعت متحرک، جهت حرکت متحرک را مشخص می‌کند. در بازه زمانی که شیب نمودار مکان - زمان مثبت است، یعنی متحرک در جهت محور x حرکت کرده است و در بازه زمانی که شیب نمودار مکان - زمان منفی است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

۳) در بازه زمانی که نمودار $x-t$ بالای محور افقی (محور زمان) است، بردار مکان متحرک در جهت محور x و در بازه زمانی که نمودار $x-t$ پایین محور محور افقی (محور زمان) است، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است.

۴) در لحظه‌ای متحرک از مبدأ مکان ($x=0$) عبور می‌کند، جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند، بنابراین در لحظه‌ای که نمودار $x-t$ محور زمان را قطع می‌کند، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.



۴۵ ۴) با مقایسه معادله مکان - زمان داده شده با فرم کلی معادله مکان - زمان

در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\begin{cases} a = 4 \frac{m}{s^2} \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = 2t^2 - 6t + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = -6 \frac{m}{s} \\ x_0 = 12m \end{cases}$$

لحظه تغییر جهت حرکت متحرک برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4t - 6 \xrightarrow{v=0} 0 = 4t - 6 \Rightarrow t = \frac{6}{4} = 1.5s$$

مکان متحرک را در ابتدا و انتهای بازه زمانی داده شده و همچنین مکان متحرک را در لحظه تغییر جهت حرکت به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = 0.5s \Rightarrow x_1 = 2(0.5)^2 - 6(0.5) + 12 = 9.5m \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 2(2)^2 - 6(2) + 12 = 8m \\ t_3 = 1.5s \Rightarrow x_3 = 2(1.5)^2 - 6(1.5) + 12 = 7.5m \end{cases}$$

۴۳ ۳) بی از عبور دو متحرک از نقطه A، چون متحرک سریع‌تر، در هر لحظه مسافت بیشتری را می‌پیماید، فاصله بین دو متحرک، پیوسته افزایش می‌یابد. به این ترتیب بیشترین فاصله دو متحرک در حرکت از نقطه A به نقطه B، مربوط به لحظه‌ای است که متحرک سریع‌تر به نقطه B می‌رسد. بنابراین مسافت بین متحرک سریع‌تر به نقطه B، وارو است با:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 300 = 20t \Rightarrow t = 15s$$

مساافتی که متحرک دیگر در این مدت‌زمان طی کرده است، وارو است با:

$$\Delta x' = v'\Delta t \Rightarrow \Delta x' = 15 \times 15 = 225m$$

بنابراین بیشترین فاصله دو متحرک از یکدیگر وارو است با:

$$300 - 225 = 75m$$

۴۴ ۴) دو متحرک در مدت‌زمان t به نقطه C می‌رسند، بنابراین:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} x_1 = v_1t \Rightarrow 0.4AB = v_1t \\ x_2 = v_2t \Rightarrow 0.4AB = v_2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{0.4AB}{0.4AB} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{t} (*)$$

بنابراین توجه به این که متحرک (۱) در مدت‌زمان $40s$ به اندازه $0.4AB$ و متحرک (۲) در مدت‌زمان t_2 به اندازه $0.4AB$ جابه‌جا می‌شود، داریم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} x_1' = v_1t_1 \Rightarrow 0.4AB = v_1 \times 40 \\ x_2' = v_2t_2 \Rightarrow 0.4AB = v_2 \times t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{0.4AB}{0.4AB} = \frac{v_1 \times 40}{v_2 \times t_2}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{t}{40} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{40}{t_2} \Rightarrow t_2 = 90s$$

۴۷ ۲) نمودار $x-t$ داده شده یک خط راست با شیب ثابت است، حرکت متحرک با سرعت ثابت بوده است. در این نوع حرکت، متحرک جهت نمی‌دهد و همچنین سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی، با لحظه‌ای متحرک در هر لحظه دلخواه برابر است، پس داریم:

$$|v_{av}| = s_{av}$$

$$\Rightarrow |v_{av}| = 20 \frac{m}{s} \xrightarrow{v_{av}=v} v = 20 \frac{m}{s}$$

این - زمان متحرک برابر است با:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{x_0 = -12m, v = 20 \frac{m}{s}} x = 20t - 12$$

علامت بردار مکان متحرک، همان لحظه برخورد نمودار با محور این:

$$x = 20t - 12 \xrightarrow{x=0} 0 = 20t - 12 \Rightarrow 20t = 12 \Rightarrow t = 0.6s$$

دورسنامه

۱ - زمان در حرکت با سرعت ثابت

۱) سرعت ثابت v در لحظه $t=0$ از مکان x_0 و در لحظه t از آن‌گاه معادله مکان - زمان این متحرک برابر است با:

$$x = vt + x_0$$

۲) حرکت (نقطه شروع حرکت) نیز می‌گویند.

۶۶ در معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، با توجه به ضرایب t^2 و t (که به ترتیب برابر با $\frac{1}{2}a$ و v_0 می باشند) می توان نوع حرکت را مشخص کرد.
الف) اگر ضرایب t^2 و t هم علامت باشند $\leftarrow$ حرکت همواره تندشونده است.
ب) اگر ضرایب t^2 و t هم علامت نباشند $\leftarrow$ حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۶۷ بدیهی است که متحرک (۲) چون شتاب بزرگ تری دارد، زودتر به مقصد می رسد. به این ترتیب اگر متحرک (۲) در مدت زمان t ثانیه به مقصد برسد، متحرک (۱) در مدت زمان $t + \tau$ ثانیه به مقصد خواهد رسید. اکنون از برابری جابه جایی دو متحرک استفاده می کنیم:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2} a_1 (t + \tau)^2 = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$\Rightarrow a_1 (t + \tau)^2 = \frac{9}{4} a_2 t^2 \Rightarrow (t + \tau)^2 = \frac{9}{4} t^2 \Rightarrow t + \tau = \frac{3}{2} t \Rightarrow t = 2\tau$$

متحرک B با شتاب ثابت حرکت می کند، بنابراین با توجه به معادله $v - t$ در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_B = a_B t + v_{B_0} \xrightarrow[t=t_1]{v_A = v_B} v_A = a_B t_1 + v_{B_0}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{v_A - v_{B_0}}{a_B} (*)$$

حال معادله مکان - زمان را برای هر کدام از متحرک ها می نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{A_0} \\ x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B_0} t + x_{B_0} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_A = x_B} v_A t + x_{A_0} = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B_0} t + x_{B_0}$$

$$\xrightarrow{x_{A_0} = x_{B_0}} v_A t = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B_0} t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B_0} t - v_A t = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} a_B t^2 + t(v_{B_0} - v_A) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{2(v_A - v_{B_0})}{a_B} (*) \rightarrow t = 2t_1$$

۶۸ نمودار $x - t$ برای متحرک A، خطی راست با شیب ثابت است، بنابراین متحرک A با سرعت ثابت حرکت کرده است. از طرفی شیب نمودار $x - t$ برابر با سرعت متحرک است، در نتیجه داریم:

$$v_A = \frac{86 - 26}{10} = \frac{60}{10} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

بنابراین معادله مکان - زمان متحرک A برابر است با:

$$x_A = v_A t + x_{A_0} \Rightarrow x_A = 6t + 26$$

متحرک B با شتاب ثابت حرکت کرده است، بنابراین معادله مکان - زمان متحرک B برابر است با:

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B_0} t + x_{B_0} \xrightarrow[v_{B_0} = 0, x_{B_0} = 10 \text{ m}]{a_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} x_B = \frac{1}{2} \times 2 t^2 + 0 + 10 \Rightarrow x_B = t^2 + 10$$

بنابراین، اندازه جابه جایی و مساحت طی شده برابر است با

$$\Delta x = |x_p - x_1| = |8 - 9/5| = 1/5 \text{ m}$$

$$I = |x_p - x_1| + |x_p - x_2| = 2/5 \text{ m}$$

$$\frac{I}{\Delta x} = \frac{2/5}{1/5} = \frac{2}{1}$$

در نتیجه نسبت خواسته شده برابر است با.

کوشش

حرکت با شتاب ثابت

زمانی می گویند که متحرک با شتاب ثابت حرکت می کند که در هر بازه زمانی دلخواه، شتاب متوسط متحرک، یعنی نسبت تغییرات سرعت به تغییرات زمان مقداری معین و ثابت باشد.

ویژگی های حرکت با شتاب ثابت

۱ جهت و اندازه بردار شتاب در تمام لحظه ها ثابت است.

۲ تغییرات سرعت متحرک در بازه های زمانی مساوی، یکسان است.

معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت

در حرکت با شتاب ثابت، شتاب متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه برابر با شتاب لحظه ای است، بنابراین برای متحرکی که با شتاب ثابت a حرکت می کند، اگر سرعت متحرک در لحظه $t = 0$ برابر با v_0 باشد، در این صورت سرعت متحرک در لحظه t از رابطه زیر به دست می آید:

$$v = at + v_0$$

نکته: می دانیم در لحظه ای که متحرک تغییر جهت می دهد، سرعت متحرک در آن لحظه صفر می شود، بنابراین لحظه تغییر جهت حرکت متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می کند، برابر است با:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=0} t = -\frac{v_0}{a}$$

توجه: در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، نوع حرکت متحرک قبل از لحظه تغییر جهت، کندشونده و پس از آن تندشونده است.

توجه: اگر حاصل $-\frac{v_0}{a}$ برابر با یک عدد منفی شود، حرکت متحرک همواره تندشونده است.

معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت

اگر متحرکی با شتاب ثابت a و سرعت اولیه v_0 از مکان x_0 شروع به حرکت کند، مکان این متحرک در لحظه t از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

کات:

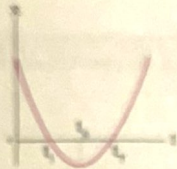
جابه جایی متحرک در t ثانیه اول حرکت، یعنی بازه زمانی $t = 0$ تا t از $\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$ به دست می آید.

اگر سرعت متحرک در لحظه t_1 برابر با v_1 باشد، جابه جایی متحرک Δ ثانیه بعد از لحظه t_1 از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 + v_1 \Delta t$$

تمرین ۱۰

می‌دانیم که نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، به شکل سهمی است. اگر نمودار مکان این متحرک در لحظات t_1 و t_2 تغییر جهت نکند، یعنی نمودار $x-t$ این متحرک در لحظات t_1 و t_2 محور زمان را قطع کند، در این صورت معادله مکان - زمان این متحرک برابر است با:



$$x = A(t-t_1)(t-t_2)$$

توجه: در رابطه بالا، A عددی ثابت است که با قرار دادن یکی از مختصات نقاط روی نمودار به دست می‌آید.

نکته:

اگر a شتاب حرکت این متحرک باشد ضریب A برابر است با:

$$A = \frac{1}{2}a$$

لحظه t_3 : لحظه‌ای است که سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند که برابر است با:

$$t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

۳ / ۷۱ شتاب حرکت متحرک برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{حرکت متحرک در ابتدا در خلاف جهت محور x بوده است.}$$

$$v_1 = -12 \frac{m}{s}, v_2 = 26 \frac{m}{s}, \Delta t = 8s$$

$$a = \frac{26 - (-12)}{8} = \frac{38}{8} = 4.75 \frac{m}{s^2}$$

با توجه به معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0 \quad \frac{v_0 = -12 \frac{m}{s}}{a = 4.75 \frac{m}{s^2}} \rightarrow v = 4.75t - 12$$

سرعت متحرک در لحظه $t = 5s$ برابر است با:

$$v_5 = 4.75 \times 5 - 12 = 11.75 \frac{m}{s}$$

با استفاده از معادله مستقل از شتاب داریم:

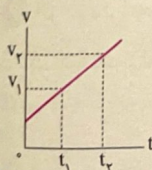
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_5 + v_1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{8} = \frac{11.75 + (-12)}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = 56.625 m$$

دورنامه

سرعت متوسط در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، در یک بازه زمانی برابر با میانگین سرعت ابتدا و انتهای آن بازه است:



$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

در لحظه t دو متحرک به صورت لحظه‌ای در یک مکان قرار دارند و این لحظه لحظه رسیدن متحرک B به متحرک A می‌باشد.

$$x_A = x_B \Rightarrow 2t + 26 = t^2 + 10$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2s \text{ (منفی)} \\ t = 8s \text{ (مثبت)} \end{cases}$$

حال سرعت متحرک B را در لحظه $t = 8s$ به دست می‌آوریم:

$$v_B = a_B t + v_{B0} \quad \frac{v_{B0} = 2 \frac{m}{s}}{a_B = 1 \frac{m}{s^2}} \rightarrow v_B = 2t + 2 = 2 \times 8 + 2 = 18 \frac{m}{s}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

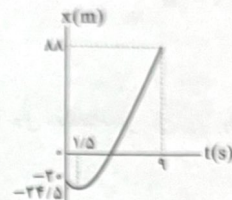
$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{18}{6} = \frac{3}{1}$$

۳ / ۶۹ نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3s$$

$$x_{min} = 2(-3) + 26 = -6 + 26 = 20m$$

$$x_1 = 2(9) + 26 = 18 + 26 = 44m$$



بنابراین:

$$\text{فاصله پیشینه} = 44 - (20) = 24m$$

دورنامه

نکته: هر گاه در سوالاتی، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ مکان در یک بازه زمانی معین خواسته شود، این اتفاق در یکی از لحظات زیر رخ می‌دهد:

۱ در ابتدا یا انتهای آن بازه زمانی

۲ در لحظات تغییر جهت حرکت متحرک در آن بازه زمانی

۲ / ۷۰ با توجه به این که $t_1 = 2s$ و $t_2 = 6s$ ریشه‌های معادله $x-t$ در

حرکت با شتاب ثابت هستند، داریم:

$$x = A(t-2)(t-6)$$

طرفی با توجه به ویژگی‌های سهمی می‌دانیم که اگر مکان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در دو لحظه t_1 و t_2 یکسان باشد، یعنی آن

ترک در لحظه $\frac{t_1 + t_2}{2}$ تغییر جهت می‌دهد، بنابراین مکان این متحرک در

$t = 4s$ برابر با $x = 8m$ می‌باشد، در نتیجه:

$$8 = A \times 2 \times (-2) \Rightarrow A = -2$$

$$x = -2(t-2)(t-6) \Rightarrow x = -2t^2 + 16t - 24$$

گوشه دانش

بررسی حرکت اتومبیل در طی ترمز کردن

از لحظه‌ای که راننده اتومبیل تصمیم به ترمز گرفتن می‌کند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را فشار دهد، مدت زمانی می‌گذرد که به آن مدت زمان واکنش و مسافتی که اتومبیل در این مدت زمان طی می‌کند را مسافت واکنش می‌گویند.

توجه: با توجه به این که حرکت اولیه راننده یا سرعت ثابت بوده یا با شتاب

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \quad \text{یا} \quad \Delta x = v_0 \Delta t$$

به دست می‌آید.

سپس از لحظه فشار پدال ترمز، سرعت متحرک با شتاب ثابت a کند می‌شود به طوری که پس از مدت زمانی متوقف می‌شود به این مدت زمان، زمان توقف و به مسافتی که در این مدت زمان طی می‌کند، مسافت توقف می‌گویند.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=0} t_{\text{توقف}} = -\frac{v_0}{a}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v=0} \Delta x_{\text{توقف}} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

بنابراین کل مسافتی که اتومبیل طی می‌کند تا متوقف شود، برابر است با:

$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_{\text{توقف}} + \Delta x_{\text{واکنش}}$$

۱ ۲۴ مدت زمان توقف متحرک B برابر است با:

$$v_B = a_B t_B + v_{0B} \Rightarrow 0 = -4t_B + 8 \Rightarrow 4t_B = 8 \Rightarrow t_B = 2s$$

اندازه جابه‌جایی متحرک B در این مدت زمان برابر است با:

$$v_B^2 - v_{0B}^2 = 2a_B \Delta x_B \Rightarrow 0 - 8^2 = 2 \times (-4) \times \Delta x_B$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = \frac{64}{8} = 8m$$

اندازه سرعت متحرک A، ۲ ثانیه پس از لحظه ترمز گرفتن برابر است با:

$$v_A = a_A t_A + v_{0A} \Rightarrow v_A = -2 \times 2 + 16 = 12 \frac{m}{s}$$

اندازه جابه‌جایی متحرک A در این ۲s برابر است با:

$$v_A^2 - v_{0A}^2 = 2a_A \Delta x_A \Rightarrow (12)^2 - (16)^2 = 2 \times (-2) \times \Delta x_A$$

$$\Rightarrow \Delta x_A = \frac{144 - 256}{-4} \Rightarrow \Delta x_A = 28m$$

در نتیجه دو متحرک در این لحظه با هم برخورد نمی‌کنند و باید ادامه حرکت متحرک A را بررسی کنیم و چون متحرک B در لحظه $t = 2s$ ، متوقف می‌شود، پس مکان برخورد دو متحرک همان مکان توقف متحرک B است، بنابراین:

$$\Delta x_A = 47 - 8 = 39m$$

اندازه سرعت متحرک A در لحظه رسیدن به متحرک B برابر است با:

$$v_A^2 - v_{0A}^2 = 2a_A \Delta x_A \Rightarrow v_A^2 - (16)^2 = 2 \times (-2) \times 39$$

$$\Rightarrow v_A^2 = 100 \Rightarrow v_A = 10 \frac{m}{s}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا متحرک A به متحرک B برسد، برابر است با:

$$v_A = a_A t_A + v_{0A} \Rightarrow 10 = -2 \times t_A + 16$$

$$\Rightarrow -6 = -2t_A \Rightarrow t_A = 3s$$

نکته: در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، سرعت متحرک در

لحظه $\frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر با سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 است.

به بیان دیگر می‌توان گفت که در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه، برابر با سرعت متحرک در لحظه وسط آن بازه زمانی است.

رابطه مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت

در همه انواع حرکت، سرعت متوسط از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین در حرکت با شتاب ثابت در بازه زمانی t_1 تا t_2 داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}} \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \times \Delta t$$

۱ ۲۲ ابتدا اندازه سرعت اتومبیل را بر حسب متر بر ثانیه به دست می‌آوریم:

$$72 \frac{km}{h} \div 3.6 = 20 \frac{m}{s}$$

حال با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، شتاب توقف اتومبیل را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (20)^2 = 2a \times 50 \\ \Rightarrow -400 = 100a \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$F = ma \Rightarrow F = 1200 \times 4 = 4800N = 4.8kN$$

۳ ۲۳ می‌دانیم مدت زمان عکس‌العمل راننده همان لحظاتی است که

طول می‌کشد پس از دیدن مانع، پدال ترمز فشرده شود. باید حساب کنیم در طی این زمان، خودرو چند متر به مانع نزدیک‌تر شده است:

$$v = 40 \frac{m}{s} \xrightarrow{\Delta t = 0.6s} \Delta x = v\Delta t = 40 \times 0.6 = 24m$$

در ابتدا مانع در فاصله ۷۴ متری اتومبیل قرار دارد که ۲۴m آن صرف عکس‌العمل راننده شده است، بنابراین باقی‌مانده مسیر، یعنی $50m = 74 - 24$ باید ترمز گرفته شود، در نتیجه داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$\Rightarrow 0 - (40)^2 = 2a \times 50$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1600}{2 \times 50} = -16 \frac{m}{s^2}$$

بنابر تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -16 = \frac{0 - 40}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{40}{16} = 2.5s$$

$$S_1 = 4 \times (-4) = -16 \Rightarrow \Delta S_1 = -16 \frac{m}{s} \Rightarrow v_1 - v_0 = -16$$

$$\Rightarrow v_1 - (-4) = -16 \Rightarrow v_1 = -12 \frac{m}{s}$$

$$S_2 = 4 \times \Delta t = \Delta S_2 = 4 \times 4 \Rightarrow v_2 - v_1 = 4 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{s} - (-12) = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 = -8 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \Delta t = 4s \Rightarrow \Delta t = t' - 4 \Rightarrow t' = 8s$$

تمرینات

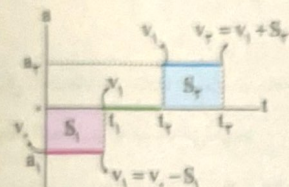
نمودار شتاب - زمان (a-t)

۱ هر نقطه از نمودار شتاب - زمان نشان می‌دهد که شتاب متحرک در هر لحظه چقدر است.

۲ علامت و جهت شتاب متحرک در بالای محور a مثبت و در پایین محور a منفی است.

۳ مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر با تغییرات سرعت متحرک است.

توجه: اگر مساحت محصور در نمودار $a-t$ ، بالای محور a باشد، علامت تغییرات سرعت، مثبت است و اگر مساحت محصور در نمودار $a-t$ ، پایین محور a باشد، علامت تغییرات سرعت، منفی است.



۴ با داشتن تغییرات سرعت متحرک در یک بازه زمانی می‌توانیم شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی را نیز محاسبه کنیم. برای مثال برای نمودار بالا داریم:

$$\begin{cases} a_{av}(-t_1) = \frac{\Delta v_1}{t_1 - 0} = \frac{-S_1}{t_1} \\ a_{av}(t_1 - t_2) = \frac{\Delta v_2}{t_2 - t_1} = 0 \\ a_{av}(t_2 - t_3) = \frac{\Delta v_3}{t_3 - t_2} = \frac{+S_2}{t_3 - t_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av\text{کل}} = \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{-S_1 + 0 + S_2}{t_3 - 0} = \frac{-S_1 + S_2}{t_3}$$

۷۸ حرکت اتومبیل را از آخر به اول تماشا می‌کنیم. در این صورت اتومبیلی داریم که از حال سکون به حرکت درآمده و در دو ثانیه اول به اندازه Δx_1 و در دو ثانیه بعد به اندازه Δx_2 جابه‌جا می‌شود، بنابراین:

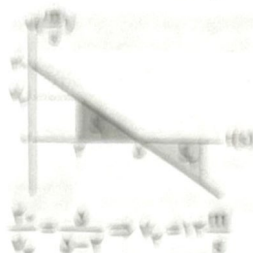
$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \times 2^2 = 2a \\ \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \times 4^2 = 8a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 + 2a = 8a \Rightarrow \Delta x_1 = 6a$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{2a}{6a} = \frac{1}{3}$$

۷۹ ابتدا سرعت متوسط متحرک در لحظه $t = 3s$ را به دست می‌آوریم.



برای این که سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 4s$ برابر v_p باشد، باید جابه‌جایی متحرک در این بازه زمانی صفر شود. بنابراین باید جمع مساحت‌های محصور در نمودار $v-t$ برابر صفر شود. بنابراین:

$$d = S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 (*)$$

$$l = |S_1| + |S_2| \xrightarrow{(*)} l = 2|S_1| = \frac{2 \times 12 \times 3}{2} = 36m$$

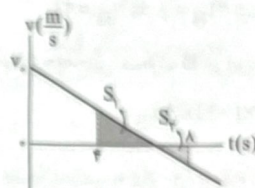
۷۶ سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 4s$ برابر با $\frac{6}{5} \frac{m}{s}$ است. بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 6 = \frac{\Delta x}{4-3} \Rightarrow \Delta x = 6m$$

تندی متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر با $7/5 \frac{m}{s}$ است. بنابراین:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 7/5 = \frac{l}{4-3} \Rightarrow l = 30m$$

با توجه به نمودار سرعت - زمان زیر داریم:



$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 30m \\ S_1 - S_2 = 6m \end{cases} \Rightarrow S_1 = 18m, S_2 = 6m$$

با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t-4}{4-t}\right)^2 \Rightarrow \frac{18}{6} = \left(\frac{t-4}{4-t}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{t-4}{4-t} \Rightarrow 24 - 3t = 4 - t \Rightarrow 4t = 20 \Rightarrow t = 5s$$

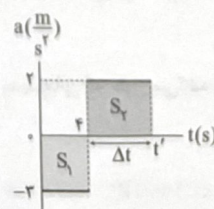
بنابراین:

$$S_1 = \frac{v_0 \times (t-4)}{2} \Rightarrow \frac{v_0 \times (5-4)}{2} = 18 \Rightarrow v_0 = 36 \frac{m}{s}$$

شیب خط نمودار $v-t$ برابر با شتاب متوسط متحرک است. بنابراین:

$$a_{av} = \frac{0-36}{5-4} = -36 \frac{m}{s^2}$$

۷۷ می‌دانیم که مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر با تغییرات سرعت است. از طرفی برای آن که متحرک تغییر جهت دهد باید $v=0$ باشد. بنابراین:



$$\begin{cases} l = 10x \\ s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{10x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 4m \end{cases}$$

با توجه به رابطه مستقل از شتاب داریم:

$$\frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{0 + v_1}{2} = \frac{-36}{3}$$

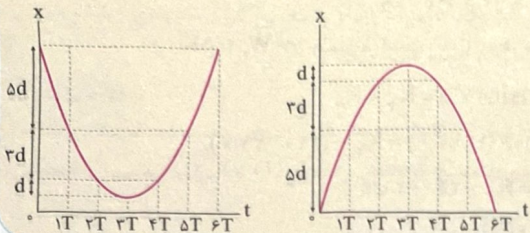
$$\Rightarrow v_1 = -24 \frac{m}{s}$$

دورسنامه

وقتی متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت بر روی خط راست شروع به حرکت می‌کند، جابه‌جایی آن در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، دنباله حسابی با قدر نسبت $2d$ را تشکیل می‌دهند. اگر متحرک در T ثانیه اول حرکتش به اندازه d جابه‌جا شود، در T ثانیه دوم حرکتش به اندازه $3d$ و در T ثانیه سوم حرکتش به اندازه $5d$ جابه‌جا می‌شود.

توجه: متحرکی را در نظر بگیرید که با شتاب ثابت بر روی خط راست، حرکتش کند شده و در نهایت متوقف می‌شود. اگر این متحرک در T ثانیه آخر به اندازه d جابه‌جا شود، در T ثانیه‌های قبلی به ترتیب به اندازه $3d$ ، $5d$ و ... جابه‌جا می‌شود.

نکته: اگر جابه‌جایی متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، T ثانیه قبل از لحظه تغییر جهت حرکت (نقطه رأس سهمی) و T ثانیه بعد از لحظه تغییر جهت حرکت برابر با d باشد، داریم:



تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر است با:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

$$\frac{9 \frac{km}{h} + 3/6 = 2/5 \frac{m}{s}}{\Rightarrow}$$

$$6/5 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 2/5 \times (v_1 + 2/5 + v_1)$$

$$\Rightarrow 6/5 = 0.4 \times 2/5 \times (2v_1 + 2/5) \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

دورسنامه

انرژی جنبشی

انرژی وابسته به حرکت جسم را انرژی حرکتی یا انرژی جنبشی می‌گویند. انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v در حال حرکت است، از رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ به دست می‌آید.

توجه: واحد SI انرژی جنبشی برابر با $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ است که به اختصار

ژول (J) گفته می‌شود.

توجه: انرژی جنبشی یک کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است.

دورسنامه

تکنیک معکوس کردن حرکت

گاهی اوقات در سوالات حرکت با شتاب ثابت، به جای سرعت اولیه، سرعت نهایی را به ما می‌دهند. در این حالت برای حل سؤال، حرکت را برعکس می‌کنیم، یعنی به حرکت از انتها به ابتدا نگاه می‌کنیم. در این حالت سرعت نهایی به سرعت ابتدایی تبدیل می‌شود. فقط حواسمان باشد که در این حالت، علامت شتاب را نیز باید قرینه کنیم.

جابه‌جایی در t ثانیه آخر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_{\text{ثانیه آخر } t} = v_{\text{ثانیه آخر } t} + \frac{1}{2}(-a)t_{\text{ثانیه آخر } t}^2$$

توجه: در این رابطه به علامت جابه‌جایی و سرعت دست نمی‌زنیم.

با توجه به رابطه جابه‌جایی در T ثانیه n ام در حرکت با شتاب

ثابت داریم:

$$\Delta x = (n - 0.5)aT^2 + v_0 T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1/5a \times 4) + 2v_0 = 60 \Rightarrow 6a + 2v_0 = 60 \\ (3/5a \times 1) + v_0 = 32 \Rightarrow 3/5a + v_0 = 32 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4m}{s^2}$$

دورسنامه

جابه‌جایی در T ثانیه n ام در حرکت با شتاب ثابت

برای متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، منظور از جابه‌جایی در t ثانیه n ام، جابه‌جایی در بازه زمانی $t_1 = (n-1)T$ (برحسب ثانیه) تا $t_2 = nT$ (برحسب ثانیه) است. برای محاسبه جابه‌جایی در این بازه زمانی باید مکان متحرک در لحظه t_1 را از مکان متحرک در لحظه t_2 کم کنید. جابه‌جایی در T ثانیه n ام برای متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta x = (n - 0.5)aT^2 + v_0 T$$

نکته: در حرکت با شتاب ثابت بر روی محور x ، جابه‌جایی در T ثانیه‌های متوالی، یک دنباله حسابی با قدر نسبت aT^2 را تشکیل می‌دهند.

جابه‌جایی در T ثانیه m ام

$$\Delta x_{T,n} - \Delta x_{T,m} = (n-m)aT^2$$

جابه‌جایی در T ثانیه n ام

مثال: اگر جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت برابر Δx_1 باشد، جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیه دوم حرکت برابر با $\Delta x_1 + aT^2$ و جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیه سوم حرکت برابر با $\Delta x_1 + 2aT^2$ خواهد بود.

متحرک در لحظه $t = 3s$ تغییر جهت داده است، بنابراین مسافت

پیموده شده توسط متحرک در بازه زمانی $t = 2s$ تا $t = 6s$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccccc} x & -x & -3x & -5x & & \\ 2s & 3s & 4s & 5s & 6s & \end{array}$$

۲ طبق قضیه کار - انرژی جنبشی، کار نیروی خالص بر روی یک جسم در طی یک حرکت فقط به تندی حرکت جسم در ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد.

توجه: تغییرات انرژی جنبشی یک جسم به مسیر حرکت جسم، بستگی ندارد و تنها به تندی اولیه و نهایی جسم وابسته است.

۳ اگر کار کل انجام شده بر روی جسم، مثبت باشد، انرژی جنبشی و تندی جسم افزایش می‌یابد و همچنین اگر کار کل انجام شده بر روی جسم، منفی باشد، انرژی جنبشی و تندی جسم کاهش می‌یابد.

۴ اگر تندی حرکت یک جسم در ابتدا و انتهای یک حرکت، یکسان باشد، کار نیروی خالص (کار کل) انجام شده بر روی جسم در طی این حرکت برابر صفر است.

۱/۸۳ ابتدا حالت اول را بررسی می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow Fd - f_k d = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \quad (1)$$

در حالت دوم، نیرو و تندی ۲ برابر شده‌اند، بنابراین:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow 2Fd - f_k d = \frac{1}{2} m ((2v)^2 - v_0^2) \quad (2)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} Fd - f_k d = \frac{1}{2} m v^2 \\ 2Fd - f_k d = 4(\frac{1}{2} m v^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2Fd - f_k d = 4(Fd - f_k d) \Rightarrow 2F - f_k = 4F - 4f_k \Rightarrow F = \frac{3}{2} f_k$$

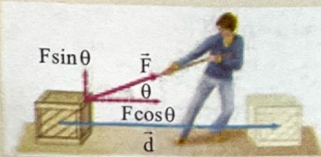
دوستانه

کار انجام شده توسط نیروی ثابت

اگر مطابق شکل زیر، نیروی ثابت $\vec{F}$ به جسمی وارد شود، کار کل انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ بر روی جسم در جابه‌جایی جسم به اندازه d از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_F = Fd \cos \theta$$

که منظور از θ زاویه بین نیروی $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ است.



توجه: یکای SI کار برابر با نیوتون در متر (N.m) است که به اختصار ژول (J) نامیده می‌شود.

نکته: با توجه به زاویه بین نیروی $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ علامت کار تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \Rightarrow W_F > 0 \\ \theta = 90^\circ \Rightarrow W_F = 0 \\ 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \Rightarrow W_F < 0 \end{cases}$$

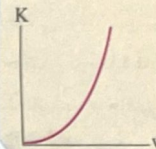
نکات:

۱ انرژی جنبشی یک جسم تنها به جرم و تندی جسم (اندازه سرعت جسم) بستگی دارد و به جهت حرکت جسم وابسته نیست.

۲ اگر بخواهیم رابطه انرژی جنبشی را به صورت مقایسه‌ای بنویسیم، داریم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

۳ اگر تندی جسمی به جرم m تغییر کند، با توجه به رابطه انرژی جنبشی، نمودار انرژی جنبشی جسم بر حسب تندی آن یک سهمی به شکل زیر است:



۲/۸۳ با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \text{مسیر رفت تا قبل از پاره شدن طناب}$$

$$\Rightarrow Td - mg(d \sin 37^\circ) = K_p - K_1$$

$$\Rightarrow 20 \times 12 - 0.3 \times 10 \times (12 \times 0.6) = K_p - 0$$

$$\Rightarrow 240 - 21.6 = K_p$$

$$\Rightarrow 240 - 21.6 = K_p \Rightarrow W_t = \Delta K$$

$$\Rightarrow mg(d \sin 37^\circ) = K_p - K_p$$

$$\Rightarrow 0.3 \times 10 \times (12 \times 0.6) = K_p - (240 - 21.6)$$

$$\Rightarrow 21.6 = K_p - 240 + 21.6$$

$$\Rightarrow K_p = 240 \text{ J}$$

با توجه به رابطه انرژی جنبشی داریم:

$$K_p = \frac{1}{2} m v_p^2 \Rightarrow 240 = \frac{1}{2} \times 0.3 \times v_p^2 \Rightarrow v_p = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

دوستانه

قضیه کار - انرژی جنبشی

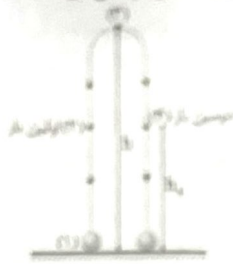
کار کل انجام شده بر روی یک جسم (مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم در یک جابه‌جایی معین) برابر با تغییرات انرژی جنبشی آن جسم در آن جابه‌جایی است. به عبارتی دیگر هرگاه در طی حرکت، تندی جسم از v_1 به v_2 برسد، در این صورت کار برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر است با:

$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{F_N} + W_{mg} + W_F + W_{\text{اصطکاک مقاومت هوا}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

نکات:

۱ کار نیروی خالص بر روی جسم یا کار کل انجام شده بر روی جسم در هر مسیری چه مستقیم و چه غیرمستقیم برابر با تغییرات انرژی جنبشی جسم است.

شکل زیر، مسیر حرکت توپ را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم در نقاط (۱) و (۲)، انرژی جنبشی گلوله، E برابر انرژی پتانسیل گرانشی آن است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgh_1 = U_2 + K_2$$

$$\Rightarrow mgh_1 = U_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow h_2 = \frac{h}{2}$$

مسافت طی شده از نقطه (۱) تا (۲) برابر با 7.5 m است. بنابراین داریم:

$$l = 7.5\text{ m} \Rightarrow h + \frac{1}{2}h = 7.5 \Rightarrow \frac{3}{2}h = 7.5 \Rightarrow h = 5\text{ m}$$

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh \Rightarrow v_1^2 = 2gh = 90 \Rightarrow v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

دستگاه

انرژی مکانیکی

انرژی مکانیکی یک جسم (E) برابر با مجموع انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U) آن جسم است.

$$E = K + U$$

توجه: در دستگاه شامل وزنه و فنر، انرژی پتانسیل دستگاه برابر با مجموع انرژی پتانسیل گرانشی وزنه (U_g) و انرژی پتانسیل کشسانی فنر (U_e) است.

اصل پایستگی انرژی مکانیکی

طبق پایستگی انرژی مکانیکی، اگر نیروهای مقاوم (مانند نیروی اصطکاک و نیروی مقاومت هوا) به جسم وارد نشوند، می‌توان نوشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow K_1 - K_2 = U_2 - U_1$$

$$\Rightarrow -(K_2 - K_1) = U_2 - U_1 \Rightarrow \Delta U = -\Delta K$$

این رابطه بیان می‌کند که همان اندازه که انرژی جنبشی جسم افزایش می‌یابد، انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد و برعکس.

۳ / ۸۷ سطح زمین را به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow E_A = E_B \Rightarrow \text{مسیر } AB \text{ بدون اصطکاک است}$$

$$\Rightarrow E_C - E_B = W_f \Rightarrow \text{در مسیر } BC \text{ اتلاف انرژی وجود دارد}$$

$$\Rightarrow E_D = E_C \Rightarrow \text{در مسیر دایره‌ای } CD \text{ اتلاف انرژی وجود ندارد}$$

نقطه D، یک نقطه فرضی است که گلوله تا آن نقطه بالا رفته است و تندی آن در این نقطه برای اولین بار صفر شده است.

$$E_C - E_B = W_f \xrightarrow{E_A = E_B, E_D = E_C} E_D - E_A = W_f$$

$$\Rightarrow mgh_D - mgh_A = W_f$$

$$\Rightarrow 0.2 \times 10 \times h_D - 0.2 \times 10 \times 6 = -6$$

$$\Rightarrow 2h_D - 12 = -6 \Rightarrow h_D = 3\text{ m}$$

کار نیروی اصطکاک

نیروی اصطکاک جنبشی همواره در خلاف جهت حرکت جسم است. بنابراین علامت کار نیروی اصطکاک همیشه منفی است.

$$W_{f_k} = -f_k d$$

نکته: در این رابطه منظور از d مسافت طی شده توسط جسم در حرکت مورد نظر است.

نکته: کار نیروی اصطکاک بر روی جسم در جبهه‌هایی آن بین دو نقطه به مسیر طی شده توسط جسم بستگی دارد. بنابراین اگر نیروی اصطکاک ثابت باشد، هرچه مسیر طی شده توسط جسم، بزرگ‌تر باشد، بزرگ‌تری کار نیروی اصطکاک نیز بیشتر است.

۴ / ۸۲ با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_f = \Delta K \Rightarrow 150 = \frac{1}{2} \times 2 \times (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow 100 = (v_f - v_i)(v_f + v_i) \Rightarrow 100 = 2 \times (2v_i + 2) \Rightarrow v_i = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

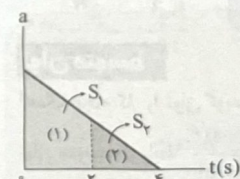
اندازه سرعت (تندی) جسم در حالت دوم برابر با $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است، اما چون جهت آن تغییر کرده است، بنابراین $\vec{v}_f = (-24\hat{i}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. بنابراین شتاب متوسط جسم در این مدت زمان برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{-24\hat{i} - (24\hat{i})}{4} = -\frac{48}{4}\hat{i} = -12\hat{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_{av} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

۲ / ۸۵ مساحت محدود به نمودار شتاب - زمان، بیانگر تغییرات سرعت

متحرک است، به کمک تشابه مثلث‌ها می‌توان دریافت که مساحت S_1 برابر مساحت S_2 است، اگر سرعت متحرک را در لحظه $t = 2\text{ s}$ ، v در نظر بگیریم، در این صورت داریم:



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times v}{\frac{1}{2} \times 4 \times v_f} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{v}{v_f} = \frac{1}{3} \Rightarrow v_f = 3v$$

توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_{f_1} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$W_{f_2} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_f^2) = \frac{1}{2}m((\frac{4}{9}v_f^2) - v_f^2) = \frac{1}{9}(\frac{1}{2}mv_f^2)$$

و این:

$$\frac{W_{f_2}}{W_{f_1}} = \frac{1}{9} \Rightarrow W_{f_2} = \frac{1}{9} \times 45 = 5\text{ J}$$

دورسنامه

نکته: جسمی را در نظر بگیرید که از سطح زمین در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. با فرض این که سطح زمین، مبدأ پتانسیل گرانشی است، جسم در لحظه پرتاب فقط دارای انرژی جنبشی است. در طی حرکت جسم و فاصله گرفتن از سطح زمین رفته رفته انرژی جنبشی جسم کاهش و انرژی پتانسیل گرانشی آن افزایش می‌یابد. تا نقطه‌ای که انرژی جنبشی جسم برای لحظه‌ای صفر شده و جسم در این نقطه برای لحظه‌ای توقف کرده و سپس جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد. به این نقطه، نقطه اوج گفته می‌شود، نقطه اوج، بیشینه ارتفاعی است که جسم در طی حرکت خودش از سطح زمین فاصله می‌گیرد. در نقطه اوج، انرژی پتانسیل گرانشی جسم، بیشینه است.

توجه: در طی حرکت از سطح زمین تا نقطه اوج، حرکت جسم، کندشونده است.

۸۹ ۳ به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی، کار انجام شده توسط ماشین را به دست می‌آوریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{ماشین}} + W_{mg} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{ماشین}} - mg\Delta h = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{ماشین}} = mg\Delta h + \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{ماشین}} = 900 \times 10 \times (d \sin 6^\circ) + \frac{1}{2} \times 900 \times (35^2 - 15^2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{ماشین}} = 900 \times 10 \times 100 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 900 \times 1000 = 54 \times 10^4 \text{ J}$$

توان خروجی ماشین برابر است با:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W_{\text{ماشین}}}{\Delta t} = \frac{54 \times 10^4}{8} = 67500 \text{ W}$$

بازده ماشین برابر است با:

$$\eta = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{67500}{120 \times 750} \times 100 = 75\%$$

دورسنامه

توان متوسط

آهنگ انجام کار را توان گویند. اگر کار W در مدت زمان Δt انجام شود، توان متوسط از رابطه $P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$ به دست می‌آید.

توجه: یکای توان در SI برابر با ژول بر ثانیه ($\frac{J}{s}$) است که به اختصار وات (W) گفته می‌شود.

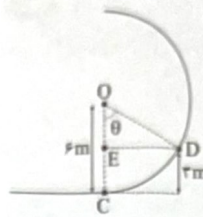
نکته: هر چه کار معینی در مدت زمان کوتاه‌تری انجام شود، توان انجام آن کار بیشتر است.

بازده (Ra)

هر سامانه بخشی از انرژی داده شده به آن را به انرژی‌های ناخواسته‌ای مانند گرما در قطعات داخلی سامانه تبدیل می‌کند. به آن بخش از انرژی ورودی سامانه که قابل استفاده است، انرژی خروجی یا انرژی مفید می‌گویند، بنابراین:

$$E_{\text{تلف شده}} = E_{\text{مفید (خروجی)}} + E_{\text{ورودی}}$$

با توجه به شکل زیر داریم:



$$\cos \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

حال مسافت طی شده را به دست می‌آوریم:

$$l = l_{AB} + l_{BC} + l_{CD} = 12 + 10 + \frac{2\pi R}{6} = 12 + 10 + 6 = 28 \text{ m}$$

دورسنامه

انرژی مکانیکی در شرایط ناپایسته

در صورت وجود نیروهای اتلافی (نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا)، دیگر انرژی مکانیکی جسم، پایسته نیست و کار نیروهای مقاوم بر روی جسم برابر با تغییرات انرژی مکانیکی جسم است.

$$W_f = \Delta E = E_f - E_i$$

توجه: منظور W_f کار نیروهای اتلافی بر روی جسم است. کار نیروهای اتلافی باعث افزایش انرژی درونی جسم و محیط اطراف آن می‌شود.

نکات:

۱ در صورت حضور نیروهای تلف‌کننده انرژی، مانند نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا، رابطه بین تغییرات انرژی پتانسیل (ΔU) و تغییرات انرژی جنبشی جسم (ΔK) برابر است با:

$$W_f = \Delta U + \Delta K$$

توجه: در رابطه $W_f = E_f - E_i$ همواره $E_f < E_i$ است، بنابراین کار نیروهای اتلافی (مقاوم) همواره منفی است.

۲ کار نیروی مقاوم مانند نیروی مقاومت هوا و نیروی اصطکاک به مسیر حرکت جسم وابسته است، یعنی بین دو نقطه معین در صورت ثابت بودن اندازه نیروی اتلافی، هر چه مسیر حرکت جسم طولانی‌تر باشد، اندازه کار نیروی اتلافی (مقاوم) بر روی جسم، بیشتر است.

انرژی درونی

انرژی درونی یک جسم، برابر با مجموع انرژی ذره‌های تشکیل‌دهنده آن جسم است.

نکته: انرژی درونی یک جسم به تعداد ذرات تشکیل‌دهنده جسم و انرژی هر ذره بستگی دارد.

۸۸ ۲ نقطه (۱) را سطح زمین و نقطه (۲) را ارتفاع اوج گلوله در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$E_f - E_i = W_{\text{اتلافی}} \Rightarrow U_f - K_i = -\frac{21/6}{100} K_i$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{78/4}{100} K_i \Rightarrow mgh_f = \frac{78/4}{100} \times \frac{1}{2} mv_i^2$$

$$\Rightarrow 9/8 h_f = \frac{78/4}{100} \times \frac{1}{2} \times (35)^2 \Rightarrow h_f = \frac{78/4 \times (35)^2}{9/8 \times 100 \times 2} = 49 \text{ m}$$

تاریخچه

قانون

قانون پتانسیل الکتریکی می‌باشد که می‌تواند بار الکتریکی و انرژی الکتریکی را از خود نامبرد کند و در مواقع ضروری آن را خیلی سریع در مدار تعقیب کند.

نکته: انرژی الکتریکی را با انرژی الکستاتیک در مدار تعقیب می‌کنند. ولی قانون باردار می‌باشد انرژی را با انرژی الکستاتیک در مدار تعقیب کند.

ظرفیت قانون

با تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن (V) بار ذخیره‌شده در آن به همان نسبت تغییر می‌کند. به طوری که نسبت بار ذخیره‌شده در خازن به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن ثابت می‌ماند. به این نسبت ظرفیت خازن می‌گویند.

بنابراین رابطه ظرفیت خازن به صورت زیر است:

$$C = \frac{Q}{V}$$

نکات:

۱. یکای ظرفیت خازن برابر با کولن بر ولت ($\frac{C}{V}$) است که فاراد (F) نامیده می‌شود.

توجه: قرار، یکای بسیار بزرگی است.

۲. ظرفیت خازن به ویژگی‌های هندسی و جنس عایق بین صفحه‌های خازن بستگی دارد و با تغییر بار یا اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن‌ها، تغییر نمی‌کند.

عوامل مؤثر در ظرفیت خازن

طبق آزمایش‌ها مشخص شده است که ظرفیت خازن به سه عامل بستگی دارد.

۱. ظرفیت خازن تحت با فاصله بین صفحات (d) آن رابطه عکس دارد.
۲. ظرفیت خازن تحت با مساحت مشترک صفحات خازن (A) رابطه مستقیم دارد.

توجه: مساحت مشترک صفحات خازن، مساحتی از یک صفحه خازن است که کاملاً رویه‌روی صفحه دیگر است.

۳. ظرفیت خازن با ضریب ثابتی که به جنس دی‌الکتریک (ماده عایق) به کاررفته در بین صفحه‌های خازن بستگی دارد، رابطه مستقیم دارد.

توجه: ضریب دی‌الکتریک خلأ برابر یک است و ضریب دی‌الکتریک سایر نارساها از یک بیشتر است.

رابطه ظرفیت خازن برحسب مشخصات ساختمانی آن به شکل زیر است:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

توجه: ϵ_0 همان ضریب گذردهی الکتریکی خلأ است و یکای آن در SI

برابر با فاراد بر متر ($\frac{F}{m}$) یا $\frac{C^2}{N.m^2}$ می‌باشد.

نکته: اگر مشخصات ظاهری (ساختمانی) خازن تختی تغییر کند، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

نسبت انرژی خودی از یک دستگاه به انرژی ورودی به آن دستگاه را بازده می‌گویند.

$$\eta = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100\%$$

بازده یک دستگاه بر حسب توان از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\eta = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100\%$$

نکات:

۱. بازده، یگانا ندارد.

۲. مقدار بازده بر حسب درصد همیشه عددی بین ۰ تا ۱۰۰ است.

۳. یکی دیگر از یگان‌های توان، اسب بخار (hp) است که هر اسب بخار برابر با ۷۴۶ W است.

۴. در مواقعی که سرعت متوسط جسم و نیروی محرک وارد بر جسم را می‌دهند، می‌توان برای محاسبه توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$P_{av} = \frac{W_E}{\Delta t} = \frac{F d \cos \theta}{\Delta t} \Rightarrow P_{av} = F v_{av} \cos \theta$$

۱۰/۳ شتاب حرکت جسم برابر است با:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (10)^2 = 2 \times a \times 20 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$$

با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow 0 - f_k = ma \Rightarrow -f_k = 0.6 \times (-\frac{5}{2}) = 1.5 N$$

از طرفی جابه‌جایی جسم در ۲ ثانیه آخر حرکتش برابر است با:

$$d = -\frac{1}{2}at^2 + v t \Rightarrow d = -\frac{1}{2} \times (-\frac{5}{2}) \times (2)^2 + 0 = 5 m$$

در نتیجه توان متوسط برابر است با:

$$P = \frac{|W_{f_k}|}{\Delta t} = \frac{f_k d}{\Delta t} = \frac{1.5 \times 5}{2} \Rightarrow P = \frac{1.5 \times 5}{2} = 3.75 W$$

۱۱/۳ ابتدا مساحت صفحات خازن را به دست می‌آوریم:

$$A = \pi r^2 = \pi \times 4/5 \times 4/5 cm^2$$

ضریب گذردهی الکتریکی خلأ برابر است با:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} N.m^2$$

حال می‌توان ظرفیت خازن را به دست آورد:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = 2 \times \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \times \frac{\pi \times 4/5 \times 4/5 \times 10^{-4}}{1/5 \times 10^{-3}} = 0.75 \times 10^{-10} F$$

بنابراین بار ذخیره‌شده روی صفحات خازن برابر است با:

$$Q = CV = 0.75 \times 10^{-10} \times 20 = 15 \times 10^{-11} C = 1.5 nC$$

۹۳ ۲ مساحت سطح زیر نمودار $V-Q$ برابر با کار انجام شده برای بارگذار شدن کامل خازن است بنابراین:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ J}$$

دکستایم

هنگامی که دو سر یک خازن تخت را به یک باتری متصل می‌کنیم، در هنگام شارژ شدن دائماً باری جزئی از یک صفحه خازن جدا و به همان اندازه به صفحه دیگر منتقل می‌شود. در این فرایند، باتری روی بار کار انجام می‌دهد که این کار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_{\text{خارجی}} = Q\Delta V$$

هر چه بار ذخیره شده بر روی صفحات خازن بیشتر می‌شود، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن نیز به آهستگی افزایش می‌یابد، بنابراین برای انتقال بارهای بعدی به کار بیشتری نیاز است و با توجه به این که در این فرایند ظرفیت خازن همواره مقدار ثابتی است، طبق رابطه $C = \frac{Q}{V}$ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن، تابعی خطی از بار ذخیره شده در آن می‌شود که به صورت یکنواخت از صفر تا V افزایش می‌یابد، بنابراین در هنگام باردار شدن خازن می‌توان اختلاف پتانسیل الکتریکی متوسطی را به صورت زیر برای دو صفحه خازن در نظر گرفت:

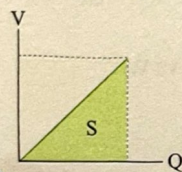
$$V_{\text{av}} = \frac{0+V}{2} = \frac{V}{2}$$

بنابراین کار انجام شده برای باردار شدن کامل خازن برابر است با:

$$W = QV_{\text{av}} = Q \times \frac{V}{2} = \frac{1}{2} QV$$

توجه: اگر خازنی را به باتری متصل کنید، انرژی ذخیره شده در خازن، نصف انرژی مصرف شده توسط باتری است.

نکته: مساحت سطح محصور در زیر نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن برحسب بار ذخیره شده در آن برابر با انرژی ذخیره شده در خازن است.



$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} QV \\ U = \frac{1}{2} QV \end{cases} \Rightarrow S = U$$

۹۴ ۲ تنها عبارت «د» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) هر مجموعه‌ای از بارهای متحرک لزوماً جریان الکتریکی ایجاد نمی‌کنند. در صورتی بارهای متحرک، جریان الکتریکی ایجاد می‌کنند که دو سر رسانا به اختلاف پتانسیل الکتریکی وصل شده باشد.

(ب) در نبود اختلاف پتانسیل الکتریکی، الکترون‌های آزاد در طول سیم با تندی‌هایی از مرتبه $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حرکت هستند.

(ج) در حضور میدان الکتریکی، الکترون‌ها در خلاف جهت میدان الکتریکی، یعنی از پتانسیل کم‌تر به پتانسیل بیشتر حرکت می‌کنند.

۹۳ ۲ ابتدا ظرفیت خازن را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2} \times \frac{100 A_1}{A_1} \times \frac{d_1}{\frac{d_1}{100}} = \frac{1}{2} \times 100 \times 100 = 5000$$

با توجه به این که خازن به باتری متصل است، بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن ثابت است، بنابراین نسبت انرژی ذخیره شده روی صفحات خازن در دو حالت برابر است با:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \times \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{1}{2} \times (1)^2 = \frac{1}{2}$$

درصد تغییرات انرژی ذخیره شده روی صفحات خازن برابر است با:

$$\frac{U_2 - U_1}{U_1} \times 100 = \frac{\frac{1}{2} U_1 - U_1}{U_1} \times 100 = -50\%$$

انرژی ذخیره شده در خازن ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

دکستایم

انرژی ذخیره شده در خازن

هنگامی که یک خازن را به باتری متصل می‌کنند، در هنگام شارژ شدن خازن، باتری بر روی بار Q کار انجام می‌دهد و آن را از یک صفحه خازن جدا کرده و به صفحه دیگر خازن منتقل می‌کند. کاری که باتری در این انتقال انجام می‌دهد به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی خازن ذخیره می‌شود. انرژی ذخیره شده در خازن تختی با ظرفیت C که دو سر آن به اختلاف پتانسیل الکتریکی V متصل است و بار Q بر روی صفحات آن ذخیره شده است، از رابطه‌های زیر قابل محاسبه است:

$$U = \frac{1}{2} QV$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

نکات:

۱ اگر خازن پس از شارژ شدن به باتری متصل باشد، در این صورت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ثابت است و هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت مستقیم در بار و انرژی خازن می‌شود.

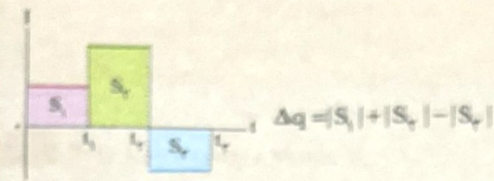
توجه: در این حالت برای بررسی تغییرات انرژی ذخیره شده در خازن بهتر است از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ استفاده کنیم.

۲ اگر خازن را پس از شارژ شدن از باتری جدا کنیم، در این صورت بار ذخیره شده در آن ثابت می‌ماند و هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت وارون در انرژی خازن می‌شود.

۳ در این حالت برای بررسی تغییرات انرژی ذخیره شده در خازن بهتر است از رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ استفاده کنیم.

نمودار I-t

در نمودار جریان عبوری از یک رسانا بر حسب زمان، مساحت محصور بین نمودار و محور افقی (زمان) برابر با بار الکتریکی شارش شده از یک سطح مقطع مشخص این رسانا در آن بازه زمانی است.



جریان الکتریکی عبوری از این رسانا برابر است با:

$$\begin{cases} q = ne \\ q = It \end{cases} \Rightarrow ne = It \Rightarrow 1/5 \times 10^{21} \times 1/6 \times 10^{-19} = I \times 6 \Rightarrow I = 2A$$

حال طبق قانون اهم داریم:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{12}{2} = 6\Omega$$

دروسنامه

مقاومت الکتریکی

اتم‌های رسانا در برابر حرکت الکترون‌های آزاد مقاومت می‌کنند، بنابراین در اصطلاح می‌گوییم که رسانا دارای مقاومت الکتریکی (R) است و با شکل مداری «—w—» نشان داده می‌شود.

قانون اهم

برای بیشتر فلزات و بسیاری از رساناهای غیرفلزی در دمای ثابت، نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر رسانا (V) به جریان عبوری از رسانا (I) مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی (R) می‌گویند و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \frac{V}{I}$$

توجه: یکای مقاومت الکتریکی در SI برابر ولت بر آمپر ($\frac{V}{A}$) است که به اختصار اهم (Ω) نامیده می‌شود.

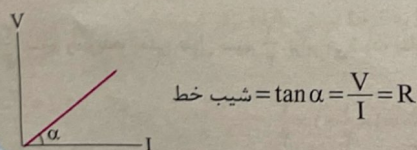
نکات:

۱) مقاومت الکتریکی یک رسانای اهمی به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن و جریان عبوری از آن بستگی ندارد.

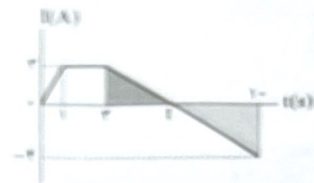
توجه: مقاومت الکتریکی یک رسانا به دمای رسانا و ویژگی‌های ساختمانی آن بستگی دارد.

۲) جریان عبوری از یک مقاومت اهمی همواره با اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمال شده به دو سر آن رابطه مستقیم دارد.

۳) شیب نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانا بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آن برابر با مقاومت الکتریکی آن رسانا است.



با استفاده از تشابه دو مثلث، لحظه t را بدست می‌آوریم:



$$\frac{3}{1-2} = \frac{4}{1-1} \Rightarrow 3-2 = 4-1 \Rightarrow 1 = 3 \Rightarrow I = 3A$$

مساحت سطح زیر نمودار I-t برابر است با بار خالص عبوری از رسانا، بنابراین:

$$S = \frac{(6+2) \times 3}{2} + \frac{-4 \times 4}{2} = 4As$$

حال آمپر - ثانیه را به میلی آمپر - ساعت تبدیل می‌کنیم:

$$4As \times \frac{1mA}{10^{-3}A} \times \frac{1h}{3600s} = \frac{10}{9}mAh$$

دروسنامه

جریان الکتریکی

اگر بار الکتریکی خالص Δq در بازه زمانی Δt از یک سطح مقطع رسانا عبور کند، در این صورت جریان الکتریکی متوسط از این رسانا برابر است با:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

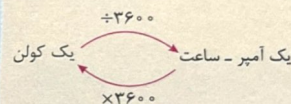
توجه: یکای جریان الکتریکی در SI بر حسب کولن بر ثانیه ($\frac{C}{s}$) است که به آن آمپر (A) می‌گویند.

نکات:

۱) جریان الکتریکی، یک کمیت نرده‌ای و اصلی است.
۲) جریان الکتریکی را به وسیله آمپرسنج (A) اندازه‌گیری می‌کنند که این آمپرسنج به صورت متوالی در مدار قرار می‌گیرد.
۳) با توجه به اصل کوانتیده بودن بار الکتریکی داریم:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta q = ne} I = \frac{ne}{\Delta t}$$

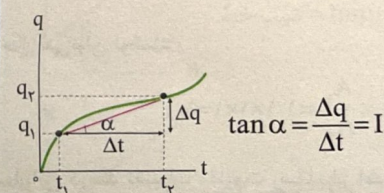
۴) واحد SI بار الکتریکی، کولن است، اما یکی دیگر از واحدهای رایج بار الکتریکی برابر با آمپر - ساعت (Ah) است.



توجه: یک آمپر - ساعت که معادل ۳۶۰۰ کولن است عموماً برای بیان ظرفیت باتری، به کار برده می‌شود.

نمودار q-t

شیب خط واصل بین دو لحظه t_1 و t_2 از نمودار بار خالص عبوری از رسانا بر حسب زمان، معادل با شدت جریان الکتریکی متوسط عبوری از رسانا بین دو لحظه است.



توجه: شیب خط مماس بر نمودار q-t در هر لحظه برابر با جریان ریکی عبوری از آن رسانا در آن لحظه است.

سپس همین سیم را از تزاری عبور می دهیم تا طول سیم ۳ برابر شود، بنابراین:

$$\frac{R''}{R} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

$$\frac{R''}{R} = \frac{R''}{R} \times \frac{R'}{R'} \times \frac{R'}{R} = 9 \times \frac{1}{4} \times 16 = 36$$

بنابراین:

دوستانه

تغییرات مسافتار رسانای اهمی

مقاومت الکتریکی یک رسانا با مقاومت ویژه رسانا و طول آن رابطه مستقیم و با مساحت مقطع آن رابطه عکس دارد، بنابراین:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2}$$

نکات:

۱ اگر سطح مقطع رسانا، دایره‌ای به شعاع r باشد، داریم:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

۲ اگر رسانایی با طول L_1 و سطح مقطع A_1 که مقاومت الکتریکی آن R_1 است را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و این تکه‌ها را روی هم قرار دهیم، مقاومت الکتریکی رسانای جدید برابر است با:

$$R_2 = \frac{R_1}{n}$$

۳ اگر رسانایی با طول L_1 ، سطح مقطع A_1 و مقاومت الکتریکی R_1 را از تزاری عبور دهیم تا بدون آن که جرم آن تغییر کند، طولش کشیده شود، آن‌گاه داریم:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

بنابراین اگر طول یک سیم بدون آن که جرم آن تغییر کند، n برابر شود، مساحت سطح مقطع آن $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود. در نتیجه مقاومت الکتریکی در حالت نهایی برابر است با:

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

توجه: اگر سطح مقطع رسانا دایره‌ای شکل باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4$$

۱۹۹/۲ طبق رابطه زیر داریم:

$$\rho_2 = \rho_1(1 + \alpha \Delta T) \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \alpha \Delta T = 1 + (10^{-4} \times 10^3) = 1.1$$

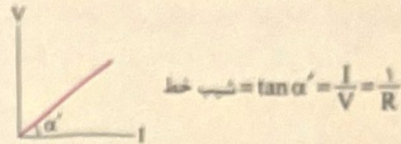
حال می‌توان نوشت:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} = 1.1 \times 1 \times 1 = 1.1$$

بنابراین درصد تغییرات مقاومت رسانا برابر است با:

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} \times 100 = (1.1 - 1) \times 100 = 10\%$$

شیب نمودار جریان عبوری از یک رسانا بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن برابر با معکوس مقاومت الکتریکی آن رسانا است.



۱۷/۴ با توجه به روابط زیر داریم:

$$\begin{cases} R = \rho \frac{L}{A} \\ \rho' = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL} \Rightarrow A = \frac{m}{\rho' L} \end{cases} \Rightarrow R = \rho \frac{L}{\frac{m}{\rho' L}} = \rho \rho' \frac{L^2}{m}$$

$$\Rightarrow R = 10^{-5} \times 1/6 \times 10^3 \times \frac{50 \times 50 \times 10^{-7}}{4 \times 10^{-3}} = 1 \Omega$$

طبق قانون اهم داریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 1 = \frac{4}{I} \Rightarrow I = 4 A$$

دوستانه

عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی

مقاومت الکتریکی یک رسانا به دمای رسانا و ساختمان آن وابسته است.

نکته: مقاومت الکتریکی یک رسانا در دمای ثابت به طول رسانا، مساحت سطح مقطع رسانا و جنس آن بستگی دارد.

توجه: مقاومت الکتریکی رسانا در دمای ثابت با طول رسانا (L) نسبت مستقیم و با مساحت سطح مقطع رسانا (A) نسبت عکس دارد. مقاومت الکتریکی یک رسانا در دمای ثابت براساس ویژگی‌های ساختمانی رسانا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

نکته: ρ مقاومت ویژه نام دارد و به ساختار اتمی (جنس) ماده و دمای آن بستگی دارد و یکی آن در SI بر حسب اهم - متر ($\Omega.m$) می‌باشد.

توجه: مقاومت ویژه رساناها کم، مقاومت ویژه عایق‌ها زیاد و مقاومت ویژه نیم‌رساناها مانند ژرمانیم و سیلیسیم بین مقاومت ویژه رساناها و نارساناها قرار دارد.

۹۸/۴ با عبور دادن سیم از ابزار و نصف شدن شعاع سطح مقطع آن

بدون تغییر جرم داریم:

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{r}{r'}\right)^4 = \left(\frac{r}{\frac{1}{2}r}\right)^4 = (2)^4 = 16$$

$\frac{3}{4}$ سیم را بریده، یعنی طول سیم $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود، بنابراین:

$$\frac{R''}{R'} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} = 1 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

۱- ابتدا مقاومت ویژه سیم را در دمای 20°C به دست می آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow R = \rho \frac{L}{\frac{V}{L}} = \rho \frac{L^2}{V} \\ V = AL \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} = \rho \times \frac{0.1 \times 0.1}{4 \times 10^{-6}} \Rightarrow \rho = 2 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$$

دمای ثانویه را به درجه سلسیوس تبدیل می کنیم:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow 212 = \theta_f + 273 \Rightarrow \theta_f = 40^{\circ}\text{C}$$

ضریب دمایی (α) برای نیم رساناها، منفی است، یعنی $\alpha = -10^{-5} \text{K}^{-1}$ است، بنابراین:

$$\rho_f = \rho_1 (1 + \alpha \Delta\theta) = 2 \times 10^{-7} \times (1 + (-10^{-5} \times (40 - 20)))$$

$$\Rightarrow \rho_f = 1.9996 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m} \Rightarrow \rho_f = 0.19996 \Omega \cdot \text{mm}$$

شیمی

۱-۲ بررشی عبارت های نادرست:

ب) زنجیر هیدروکربنی در اسید $\text{C}_4\text{H}_9\text{COOH}$ ، کوتاه بوده و برای تهیه صابون مناسب نیست.

پ) صابون مراغه خاصیت بازی دارد و pH آن بزرگ تر از ۷ است.

۴-۱۰۲ مولکول های اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2$) و اوره ($\text{CO}(\text{NH}_2)_2$) به ترتیب شامل ۱۰ و ۸ اتم هستند و مجموع شمار اتم های آن ها برابر با ۱۸ است. شمار اتم های هیدروژن در فرمول تقریبی بنزین (C_8H_{18}) نیز برابر با ۱۸ است.

۴-۱۰۳ بررشی گزینه ها:

۱) خاصیت اسیدی محلول HB بیشتر از دو محلول دیگر است، زیرا غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر است.

۲) برای محاسبه ثابت یونش HA می توان نوشت:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \frac{(\frac{2 \times 0.3}{1})(\frac{2 \times 0.3}{1})}{(\frac{3 \times 0.3}{1})} = 0.4$$

۳) رسانایی الکتریکی محلول HA کم تر از محلول HB است، زیرا شمار یون های موجود در محلول HA کم تر است.

۴) در محلول HA از ۵ ذره اسید، ۲ ذره آن یونیده شده است:

$$\alpha_{\text{HA}} = \frac{2}{5}$$

در محلول HB از ۷ ذره اسید، ۴ ذره آن یونیده شده است:

$$\alpha_{\text{HB}} = \frac{4}{7}$$

نسبت درجه یونش HB به درجه یونش HA برابر است با:

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{5}} = 1.42$$

فیزیک

تغییر مقاومت الکتریکی با دما

در رساناهای فلزی با افزایش دما مقاومت الکتریکی رسانا افزایش می یابد و مقاومت الکتریکی نیم رساناها با افزایش دما کاهش می یابد.

نکته: در رساناهای فلزی با افزایش دما، مقدار حاملان بار یا همان الکترون های آزاد تغییری نمی کنند ولی میزان ارتعاشات اتم ها بیشتر می شود، بنابراین تعداد برخوردهای حاملان بار با اتم ها افزایش می یابد، در نتیجه مقاومت الکتریکی رسانا افزایش می یابد.

نکته: در نیم رساناها با افزایش دما تعداد حاملان بار افزایش می یابد و به همین دلیل جریان مدار افزایش می یابد، در نتیجه با توجه به ثابت بودن اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر نیم رسانا و افزایش جریان، مقاومت الکتریکی کاهش می یابد.

آزمایش ها نشان می دهند که مقاومت ویژه فلزات و مقاومت الکتریکی آن ها در یک گستره دمایی نسبتاً بزرگ با دما تقریباً به صورت خطی تغییر می کند. اگر مقاومت ویژه و مقاومت الکتریکی یک رسانا در دمای T_1 به ترتیب برابر با ρ_1 و R_1 و مقاومت ویژه و مقاومت الکتریکی آن در دمای T_2 به ترتیب برابر با ρ_2 و R_2 باشد، داریم:

$$\rho_2 = \rho_1 (1 + \alpha(T_2 - T_1)) \Rightarrow \Delta\rho = \rho_1 \alpha(T_2 - T_1)$$

$$R_2 = R_1 (1 + \alpha(T_2 - T_1)) \Rightarrow \Delta R = R_1 \alpha(T_2 - T_1)$$

نکات:

۱) ضریب دمایی مقاومت ویژه نام دارد که یک ثابت فیزیکی است که به جنس ماده بستگی دارد و یکای آن در SI برابر با بر کلون ($\frac{1}{\text{K}}$) یا بر درجه سلسیوس ($\frac{1}{^{\circ}\text{C}}$) است.

۲) α برای رساناها و فلزات، مثبت و برای نیم رساناها، منفی است.

$$\alpha > 0 \xrightarrow{\Delta T > 0} \Delta\rho > 0, \Delta R > 0$$

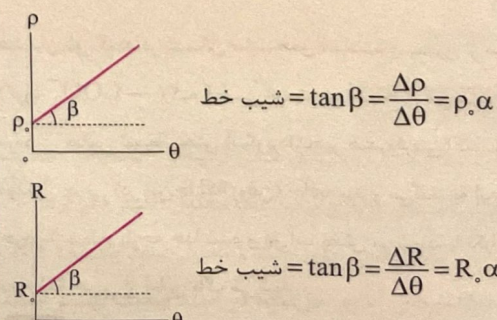
$$\alpha > 0 \xrightarrow{\Delta T < 0} \Delta\rho < 0, \Delta R < 0$$

۳) درصد تغییرات مقاومت الکتریکی و درصد تغییرات مقاومت ویژه در اثر تغییرات دما از رابطه های زیر به دست می آیند:

$$\text{درصد تغییرات مقاومت ویژه} = \frac{\Delta\rho}{\rho_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100$$

$$\text{درصد تغییرات مقاومت الکتریکی} = \frac{\Delta R}{R_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100$$

۴) نمودار مقاومت ویژه و مقاومت الکتریکی رساناها بر حسب دما به شکل زیر است:

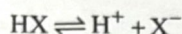


دروسنامه

• مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم، نوعی پاک‌کننده خورنده بودری را می‌سازد که از آن برای پاک کردن مجاری مسدودشده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود. معادله واکنش این پاک‌کننده بودری با آب به شکل زیر است:

گرما + $2\text{NaOH(s)} + 2\text{Al(s)} + 6\text{H}_2\text{O(l)} \rightarrow 2\text{H}_2\text{(g)} + 2\text{NaAl(OH)}_4\text{(aq)}$
همان‌گونه که از واکنش مشخص است، این فرایند گرماده بوده و همین گرما باعث ذوب شدن چربی‌ها و رسوبات شده و گرفتگی را رفع می‌کند. سدیم هیدروکسید موجود در این ترکیب، با اسیدهای چرب واکنش داده و صابون تولید می‌کند. گاز هیدروژن تولیدشده نیز با نفوذ در چربی‌ها و ایجاد فشار به رفع گرفتگی کمک می‌کند.

۲/۱۰۷



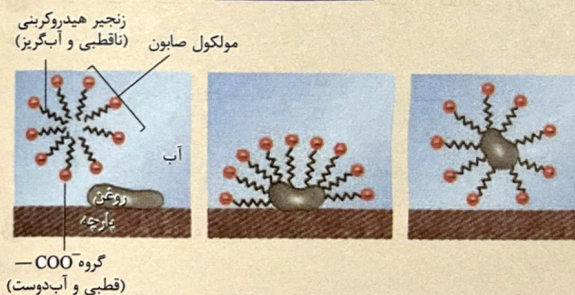
$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]}, K_a = 0.05[\text{H}^+]$$

$$0.05[\text{H}^+] = \frac{[\text{H}^+][\text{H}^+]}{0.2} \Rightarrow [\text{H}^+] = 0.01 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{[\text{HX}]} = \frac{0.01}{0.2} = 0.05$$

۲/۱۰۸ در صابون‌ها، چربی‌ها با بخش **ناقطبی** (زنجیر هیدروکربنی) صابون جاذبه برقرار کرده و به آن می‌چسبند و **گروه** COO^- که انتهای باردار پاک‌کننده را تشکیل می‌دهد، سبب پخش شدن چربی‌ها در آب می‌شود. شمار اتم‌های اکسیژن در صابون‌ها (RCOOX) و ضدیخ ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$) با هم برابر است.

دروسنامه



همان‌طور که در شکل مشخص است، صابون از سر آب‌دوست (گروه COO^-) که قطبی است، در آب حل می‌شود. از سویی دیگر ذره‌های صابون توسط بخش آب‌گریز (زنجیر هیدروکربنی) که ناقطبی است، با مولکول چربی (در این جا لکه روغن) جاذبه برقرار می‌کند. به این ترتیب ذره‌های چربی از سطح پارچه جدا شده و در آب پخش می‌شوند. با تکرار این مرحله‌ها، تمام لکه چربی از لباس پاک می‌شود.

نکته: با افزودن صابون به مخلوط آب و روغن، کلویید پایدار ایجاد می‌شود.

دروسنامه

• **خاصیت اسیدی:** خاصیت اسیدی به توانایی یک ماده برای آزاد کردن یون‌های هیدرونیوم در محلول آبی گفته می‌شود. هر چه غلظت یون هیدرونیوم (H_3O^+ یا H^+) حل‌شده در یک محلول بیشتر باشد، خاصیت اسیدی محلول بیشتر است.

توجه: خاصیت اسیدی با قدرت اسیدی تفاوت دارد.

• **ثابت یونش اسیده:** میزان پیشرفت فرایند یونش تا رسیدن به مرحله تعادل را نشان می‌دهد؛ به طوری‌که هر چه ثابت یونش اسیدی در دمای معین بزرگ‌تر باشد، آن اسید بیشتر یونیده می‌شود و غلظت یون‌های موجود در آن بیشتر است و آن اسید قوی‌تر خواهد بود. ثابت یونش از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

• **رسانایی الکتریکی:** هر چه میزان یون‌های حل‌شده در یک محلول آبی بیشتر باشد، رسانایی آن محلول بیشتر خواهد بود.

۴/۱۰۴ • رسوب آهن (III) اکسید خاصیت بازی دارد و برای پاک کردن

آن از جوهر نمک (HCl) که خاصیت اسیدی دارد، می‌توان استفاده کرد.

• برای پاک کردن چربی‌ها از سود سوزآور (NaOH) که خاصیت بازی دارد و در واکنش با چربی‌ها، صابون تولید می‌کند، می‌توان استفاده کرد.

• برای شستن لباس نوزاد، صابون در مقایسه با پاک‌کننده غیرصابونی، اولویت دارد، زیرا صابون منشأ طبیعی دارد و فاقد مواد پتروشیمیایی است.

۳/۱۰۵ حجم محلول اسید از ۳۰۰mL به ۱۸۰۰mL رسیده و ۶ برابر

می‌شود. در محلول اسیدهای ضعیف با n برابر شدن حجم، درجه یونش $\sqrt[n]{n}$ برابر می‌شود:

$$\sqrt[6]{6} \approx 2/45$$

دروسنامه

• **درجه یونش:** کمیتی است که برای بیان میزان یونش اسیده‌ها به کار می‌رود و از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\alpha = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌ها}} \quad (\text{درجه یونش})$$

درجه یونش نشان می‌دهد که از تمام ماده اولیه، چه مقدار به یون تبدیل شده است. هر چه درجه یونش بیشتر باشد، محلول رسانایی بیشتری خواهد داشت. در منابع علمی، گاهی از درصد یونش ($\alpha \times 100$) به جای درجه یونش استفاده شده است.

۴/۱۰۶ پاک‌کننده مورد نظر خاصیت بازی دارد و می‌تواند با آلاینده‌های

سیدی واکنش دهد و آن‌ها را از بین ببرد. این در حالی است که رسوبات ککی، خاصیت بازی دارند.

سایر گزینه‌ها:

چاک‌کننده مورد نظر به شکل پودر عرضه می‌شود.

گاز H_2 تولیدشده به صورت فیزیکی، آلاینده‌ها را از سطح جدا می‌کند.

سطح انرژی فرآورده‌های این واکنش، پایین‌تر از سطح انرژی می‌دهنده‌های آن است، زیرا واکنش انجام‌شده، گرماده ($\Delta H < 0$) است.

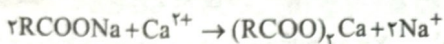
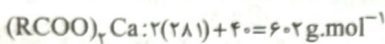
۴) جرم مولی فرمیک اسید (HCOOH) و استیک اسید (CH_3COOH) به ترتیب برابر ۴۶ و ۶۰ گرم بر مول است. مطابق داده‌های سؤال، اگر جرم استیک اسید ۳۳ گرم باشد، جرم فرمیک اسید برابر با ۰/۹۲۳۳ گرم است.

$$\text{CH}_3\text{COOH} : [\text{H}^+] = \frac{m}{p} \times \alpha_1 \times \frac{1}{V}$$

$$\text{HCOOH} : [\text{H}^+] = \frac{0/9233}{46} \times \alpha_2 = \frac{m}{60} \times \alpha_2 \times \frac{1}{V}$$

در شرایط یکسان، فرمیک اسید قوی‌تر از استیک اسید ($\alpha_2 > \alpha_1$) است. بنابراین غلظت یون H^+ در محلول فرمیک اسید، بیشتر از محلول استیک اسید است. با توجه به این که حجم دو محلول یکسان است، پس مول و شمار یون‌ها در محلول فرمیک اسید، بیشتر از محلول استیک اسید خواهد بود.

۱۱۱) با توجه به فرمول عمومی صابون‌های جامد (RCOONa) و فرمول رسوب کلسیم ($(\text{RCOO})_2\text{Ca}$) می‌توان جرم مولی رسوب را از روی جرم مولی صابون به دست آورد:



$$\frac{10 \text{ g صابون}}{2 \times 204} = \frac{x \text{ g رسوب}}{1 \times 402} \Rightarrow x = 9/90 \text{ g رسوب}$$

۱۱۲) ۳

$$[\text{H}^+] = [\text{A}^-] = \frac{1}{2} (0/001) = 5 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} = \frac{(5 \times 10^{-4})^2}{0/01 - (5 \times 10^{-4})} = 25 \times 10^{-6}$$

با توجه به ثابت ماندن دما، مقدار K_a تغییری نمی‌کند.

$$[\text{H}^+] = [\text{A}^-] = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-3}) = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$25 \times 10^{-6} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{M} \Rightarrow M \approx 0/16 \text{ mol.L}^{-1}$$

۱۱۳) بررسی عبارت‌های نادرست: ۳

۱) گرافیت یک رسانای الکترونی است، اما جریان گرما را از خود عبور نمی‌دهد.

۲) پاک‌کننده‌های خورنده مانند سفیدکننده‌ها، علاوه بر برهم‌کنش با ذره‌های آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش نیز می‌دهند.

۱۱۴) ۱) مطابق شکل HA یک اسید ضعیف تک‌پروتون‌دار و HX یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است.

۱۱۵) بررسی گزینه‌ها:

۱) اسیدهای HF و HNO_3 به ترتیب اسید ضعیف تک‌پروتون‌دار و اسید قوی تک‌پروتون‌دار هستند.

۲) سرعت واکنش اسید با فلزها به غلظت یون H^+ بستگی دارد.

۳) محلول آبی اتانول غیرالکترولیست است، در حالی که محلول HX، الکترولیت قوی است.

۴) H_2SO_4 یک اسید قوی دوپروتون‌دار است.

۱۱۶) ابتدا غلظت اولیه هر کدام از اسیدها را به دست می‌آوریم:

$$\text{HX} : [\text{HX}]_{\text{اولیه}} = \frac{[\text{H}^+]}{\alpha} = \frac{0/01}{0/02} = 0/5 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{HY} : [\text{HY}]_{\text{اولیه}} = \frac{[\text{H}^+]}{\alpha} = \frac{0/08}{0/1} = 0/8 \text{ mol.L}^{-1}$$

در ادامه غلظت تعادلی هر کدام از اسیدها را به دست می‌آوریم:

$$\text{HX} : [\text{HX}]_{\text{تعادلی}} = [\text{HX}]_{\text{اولیه}} (1 - \alpha) = 0/5 (1 - 0/02)$$

$$= 0/49 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{HY} : [\text{HY}]_{\text{تعادلی}} = [\text{HY}]_{\text{اولیه}} (1 - \alpha) = 0/8 (1 - 0/1)$$

$$= 0/72 \text{ mol.L}^{-1}$$

نسبت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{[\text{HX}]_{\text{تعادلی}}}{[\text{HY}]_{\text{تعادلی}}} = \frac{0/49}{0/72} = 0/68$$

دورسنامه

غلظت تعادلی

از ویژگی‌های سامانه‌های تعادلی در دمای ثابت، ثابت ماندن (نه برابر شدن) غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌هاست. یعنی سرعت تولید هر گونه با سرعت مصرف آن گونه برابر است (و بالعکس).

لرزش غلظت مواد در حال تعادل با هم برابر نیست، اما با برقراری تعادل، غلظت هرگونه ثابت می‌ماند و تغییر نمی‌کند.

ثابت تعادل در یک واکنش تعادلی در دمای ثابت برابر است با «حاصل ضرب غلظت تعادلی هر فراورده به توان ضریب استوکیومتری خودش به حاصل ضرب غلظت تعادلی هر واکنش‌دهنده به توان ضریب استوکیومتری خودش». برای مثال در معادله واکنش

$$K = \frac{[\text{C}]^c [\text{D}]^d}{[\text{A}]^a [\text{B}]^b}$$

برای به دست آوردن غلظت نهایی (تعادلی) یک اسید به کمک درجه یونش، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) محاسبه غلظت اولیه محلول اسید: $[\text{HA}]_{\text{اولیه}} = \frac{[\text{H}^+]}{\alpha}$

۲) محاسبه غلظت تعادلی: $[\text{HA}]_{\text{تعادلی}} = [\text{HA}]_{\text{اولیه}} (1 - \alpha)$

یادآوری: درجه یونش نشان‌دهنده نسبت شمار مولکول‌های یونیده شده به شمار کل مولکول‌ها است.

۱۱۷) ۴) بررسی گزینه‌ها:

۱) با این که می‌توان اسید و باز را براساس مدل آرنیوس تشخیص داد، اما

قمی توان درباره میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهار نظر کرد.

۲) اگر غلظت آنیون در محلول اسید قوی HA و محلول اسید ضعیف HX، برابر باشد، غلظت مولکول‌های آغازی حل شده در اسید ضعیف بیشتر است.

۳) برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک می‌افزایند.

۱۱۸ ۱ مطابق داده‌های سؤال آرایش الکترونی اتم X به صورت زیر است:



اگر عدد اتمی X برابر با ۳۰ باشد، شمار الکترون‌های $l=0$ و $l=2$ به ترتیب برابر با ۱۰ و ۸ است. در این صورت شماره گروه X برابر با ۱۲ خواهد بود. عدد اتمی دومین عنصر گروه ششم نیز برابر با $30+12=42$ است.

پرسش‌های گزینیه‌ها:

۲) ۹ عنصر در جدول تناوبی دارای این ویژگی هستند: از Ca تا Zn به جز Cr و Cu .

۳) همان‌طور که گفته شده، شمار الکترون‌های $l=2$ می‌تواند بیشتر از شمار الکترون‌های $l=0$ باشد.

۴) اتم Se دارای ۶ الکترون ظرفیتی است. از آن‌جا که Cr دارای ۶ الکترون ظرفیتی بوده و آرایش $4s^1$ به زیرلایه $4s$ ختم می‌شود، اتم X نمی‌تواند Cr باشد و در نتیجه شمار الکترون‌های ظرفیتی آن نمی‌تواند برابر با ۶ باشد.

دورسنامه

♦ عدد کوانتومی اصلی (n): عددی صحیح و مثبت که شماره لایه الکترونی را نشان می‌دهد.

$$n=1, 2, 3, \dots$$

مقدار مجاز برای n.

هر چه مقدار n بزرگ‌تر باشد، آن لایه از هسته اتم دورتر است و هر چه مقدار n کم‌تر باشد، الکترون به هسته نزدیک‌تر خواهد بود.

♦ عدد کوانتومی فرعی (l): در مدل کوانتومی اتم به هر زیرلایه، یک عدد کوانتومی نسبت می‌دهند. این عدد را با نماد l نشان می‌دهند.

$$l=0, 1, 2, \dots, n-1$$

مقادیر مجاز برای l.

هر زیرلایه را می‌توان با نماد nl نمایش داد. برای نمونه در زیرلایه $4d$ ، $n=4$ و $l=2$ است.

عدد کوانتومی اصلی	شمار زیرلایه‌ها	عدد کوانتومی فرعی	نماد زیرلایه
$n=1$	۱	$l=0$	۱s
$n=2$	۲	$l=0$	۲s
		$l=1$	۲p
$n=3$	۳	$l=0$	۳s
		$l=1$	۳p
		$l=2$	۳d

۱۱۹ ۱ مفهوم کوانتومی بودن انرژی با هر دو مدل اتمی بور و کوانتومی سازگار است. در واقع در هر دو مدل، انرژی به صورت پیمانه‌ای، نشر یا جذب می‌شود.

پرسش‌های گزینیه‌ها:

۲) در مدل بور، الکترون فقط با عدد کوانتومی اصلی (n) توصیف می‌شود.

۳) در هیچ‌کدام از دو مدل، مکان دقیق الکترون مشخص نیست.

۴) تنها در مدل اتمی بور، الکترون در مسیر دایره‌ای شکل به دور هسته گردش می‌کند.

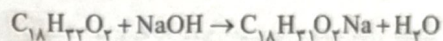
دورسنامه

♦ اسید تک‌پروتون‌دار: اسیدی است که پس از حل شدن در آب، هر مولکول آن حداکثر یک یون هیدرونیوم تولید می‌کند.

♦ اسید قوی: به اسیدهایی که در محلول آن‌ها اغلب یون‌ها آبیوشده شده‌اند و شمار مولکول‌های یونیده‌نشده نزدیک به صفر است، اسید قوی می‌گویند.

♦ اسید ضعیف: به اسیدهایی که در محلول آن‌ها، شمار کمی یون آبیوشده وجود دارد و شمار مولکول‌های یونیده‌نشده بسیار بیشتر است، اسید ضعیف می‌گویند. به دلیل وجود مولکول اسید در محلول پس از یونش، امکان برگشت‌پذیر بودن واکنش وجود دارد.

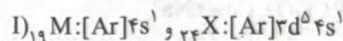
۱۱۵ ۴ فرمول شیمیایی اسید داده‌شده به صورت $C_{18}H_{33}O_7$ است.



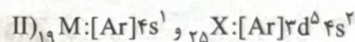
$$?g C_{18}H_{33}O_7 = 100g \times \frac{\text{صابون}}{302g} \times \frac{1 \text{ mol } C_{18}H_{33}O_7}{1 \text{ mol صابون}}$$

$$\times \frac{280g C_{18}H_{33}O_7}{1 \text{ mol } C_{18}H_{33}O_7} \times \frac{100}{75} = 123.6g C_{18}H_{33}O_7$$

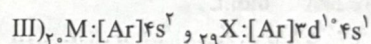
۱۱۶ ۴ برای M و X می‌توان حالت‌های زیر را در نظر گرفت:



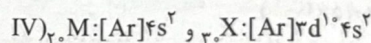
در این حالت تفاوت عدد اتمی دو عنصر برابر ۵ است.



در این حالت تفاوت عدد اتمی دو عنصر برابر ۶ است.



در این حالت تفاوت عدد اتمی دو عنصر برابر ۹ است.



در این حالت تفاوت عدد اتمی دو عنصر برابر ۱۰ است.

دورسنامه

♦ گنجایش زیرلایه‌های الکترونی: از رابطه $2l+1$ می‌توان گنجایش

الکترونی هر زیرلایه را مشخص کرد.

زیرلایه s ← حداکثر ۲ الکترون

زیرلایه p ← حداکثر ۶ الکترون

زیرلایه d ← حداکثر ۱۰ الکترون

زیرلایه f ← حداکثر ۱۴ الکترون

۱۱۷ ۴ پرسش‌های گزینیه‌ها:

۱) در بسیاری از ترکیب‌های یونی دوتایی دارای نافلز گروه هفدهم مانند $FeCl_3$ ، $CrBr_3$ ، CuI ، و... کاتیون‌ها به آرایش گاز نجیب نرسیده‌اند.

۲) یون O^{2-} با این‌که فقط شامل عنصر اکسیژن است، اما یک یون دواتمی محسوب می‌شود.

۳) در ترکیب یونی MgO مجموع قدرمطلق بار یون‌ها (Mg^{2+} و O^{2-}) برابر با ۴ است، در حالی‌که مجموع شمار یون‌های تشکیل‌دهنده برابر با ۲ است.

۱۳۲ بررسی گزینه‌ها:

ا. دوسن گازی که در نقطه جوش به جود هوای مایع جدا می‌شود Br_2 است که در ساخت لایحه‌های رشتانی به کار می‌رود.
ب. اولین مرحله برای تهیه هوای مایع، عبور هوا از مایه‌هایی است که تا گرد و غبار آن گرفته شود.
پ. بدون شرح

ت. نقطه جوش اکسیژن $3^{\circ}C$ بالاتر از نقطه جوش آرگون است.

۱. گاز اتان (C_2H_6) سوزنده است و با Br_2 واکنش نمی‌دهد.

گاز پروپین (C_3H_6) دارای یک پیوند سه‌گانه پیونده و هر مول از آن با ۲ مول Br_2 واکنش می‌دهد.

مطلق داده‌های سؤال، اگر شمار مول‌های اتان و پروپین را به ترتیب با a و b نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$4a + 4b = 100 \quad (I)$$

از طرفی افزایش جرم مخلوط واکنش که برابر 80 گرم است، مربوط به مصرف Br_2 است:

$$? \text{ mol } Br_2 = 80 \text{ g } Br_2 \times \frac{1 \text{ mol } Br_2}{160 \text{ g } Br_2} = 0.5 \text{ mol } Br_2$$

به این ترتیب شمار مول‌های پروپین (b) برابر با 0.25 بوده است:

$$3(a) + 4(0.25) = 100 \Rightarrow a = 3$$

شمار مول‌های گازی در ابتدای واکنش 3.25 مول و در انتهای واکنش برابر ۳ مول بوده است. درصد کاهش حجم گازها برابر است با:

$$\frac{3.25 - 3}{3.25} \times 100 \approx 7.7\%$$

دوستانه

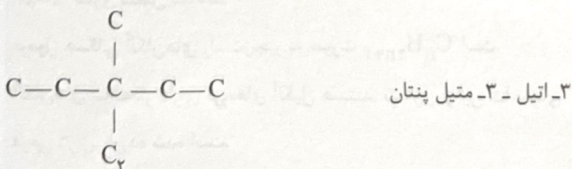
شرایط استاندارد (STP)

حجم یک نمونه گاز به مقدار، دما و فشار آن وابسته است. برای یافتن رابطه بین حجم و مقدار یک نمونه‌گازی باید دما و فشار ثابت باشد. بر پایه یک قرارداد، شیمی‌دان‌ها دمای صفر درجه سلسیوس و فشار یک اتمسفر را به عنوان شرایط استاندارد (STP) در نظر گرفته‌اند.

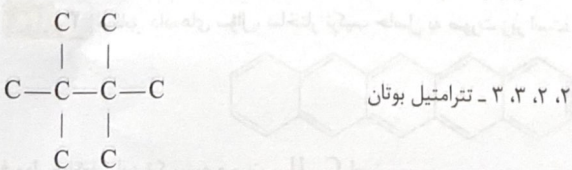
۱۳۷ فرمول مولکولی «۲، ۲، ۴-تری‌متیل پنتان» به صورت C_8H_{18} است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) اگر آلکان A دارای شاخه اتیل باشد، مجموع شماره شاخه‌های فرعی آن حداکثر برابر ۶ و ساختار آن به صورت زیر است:



۲) اگر آلکان A فاقد شاخه اتیل باشد، مجموع شماره شاخه‌های فرعی آن حداکثر برابر ۱۰ و ساختار آن به صورت زیر است:



۱۳۳ ۳.۹۹ فقط مربوط به CP است.

۳۹۹ $(3+9) \times (3+9) = 144$ و $(3+9) \times 3 = 36$ و $(3+9) \times 9 = 108$ و $(3+9) \times 27 = 2916$ و $(3+9) \times 81 = 864$ و $(3+9) \times 243 = 2592$ و $(3+9) \times 729 = 8748$ و $(3+9) \times 2187 = 26244$ و $(3+9) \times 6561 = 77760$ و $(3+9) \times 19683 = 221760$ و $(3+9) \times 56181 = 618000$ و $(3+9) \times 15849 = 174240$ و $(3+9) \times 43841 = 482256$ و $(3+9) \times 118809 = 1306896$ و $(3+9) \times 313827 = 3452100$ و $(3+9) \times 815781 = 8973594$ و $(3+9) \times 2125481 = 23379294$ و $(3+9) \times 5473701 = 60210714$ و $(3+9) \times 14134203 = 155476236$ و $(3+9) \times 36235509 = 398590600$ و $(3+9) \times 92088771 = 1013076482$ و $(3+9) \times 235221927 = 2587441194$ و $(3+9) \times 593054817 = 6523602984$ و $(3+9) \times 1482637041 = 16309007442$ و $(3+9) \times 3706592601 = 40772518614$ و $(3+9) \times 9266481501 = 101931296514$ و $(3+9) \times 23166203751 = 254828241262$ و $(3+9) \times 57915509377 = 637070603148$ و $(3+9) \times 144788773441 = 1592666507842$ و $(3+9) \times 361971933601 = 3981691269614$ و $(3+9) \times 904929834001 = 9954228174018$ و $(3+9) \times 2262324585001 = 24885570435018$ و $(3+9) \times 5655811462501 = 62213926087518$ و $(3+9) \times 14139528656251 = 155534815218762$ و $(3+9) \times 35348821640625 = 388837038026876$ و $(3+9) \times 88372054101563 = 972102595117198$ و $(3+9) \times 220930135253907 = 2430231487792978$ و $(3+9) \times 552325338134768 = 6075578719482448$ و $(3+9) \times 1380813345336921 = 15188946798706132$ و $(3+9) \times 3452033363342303 = 37972367006765336$ و $(3+9) \times 8630083363342303 = 94930917516655370$ و $(3+9) \times 215752083363342303 = 237327212699656630$ و $(3+9) \times 5393802083363342303 = 593318023019166670$ و $(3+9) \times 134845052083363342303 = 1482295575222601670$ و $(3+9) \times 3371126302083363342303 = 3708241530556504170$ و $(3+9) \times 842781576302083363342303 = 9269607136716259170$ و $(3+9) \times 210695394026302083363342303 = 23176493340965623170$ و $(3+9) \times 526738485066302083363342303 = 58341734755416558170$ و $(3+9) \times 1316846212666302083363342303 = 145354331888541395170$ و $(3+9) \times 3292115531666302083363342303 = 362166268226353487170$ و $(3+9) \times 823028882666302083363342303 = 9054167205663837170$ و $(3+9) \times 205757220666302083363342303 = 22831917516664195170$ و $(3+9) \times 514393051666302083363342303 = 56578266791665495170$ و $(3+9) \times 128598262666302083363342303 = 141445669479166595170$ و $(3+9) \times 32149565666302083363342303 = 35364568791666595170$ و $(3+9) \times 80373914666302083363342303 = 88411421916666595170$ و $(3+9) \times 20093478666302083363342303 = 223028224791666595170$ و $(3+9) \times 50233696666302083363342303 = 552570554791666595170$ و $(3+9) \times 12558424666302083363342303 = 1381451394791666595170$ و $(3+9) \times 31396061666302083363342303 = 345362847916666595170$ و $(3+9) \times 78490154666302083363342303 = 863391619166666595170$ و $(3+9) \times 19622538666302083363342303 = 2179879147916666595170$ و $(3+9) \times 49056346666302083363342303 = 5406204247916666595170$ و $(3+9) \times 12264086666302083363342303 = 1359451147916666595170$ و $(3+9) \times 30660216666302083363342303 = 3392602647916666595170$ و $(3+9) \times 76650546666302083363342303 = 8430753147916666595170$ و $(3+9) \times 19162636666302083363342303 = 2128165747916666595170$ و $(3+9) \times 47906596666302083363342303 = 5279741947916666595170$ و $(3+9) \times 11976646666302083363342303 = 1327145247916666595170$ و $(3+9) \times 29941616666302083363342303 = 3309325947916666595170$ و $(3+9) \times 74854036666302083363342303 = 8270006479166666595170$ و $(3+9) \times 187135096666302083363342303 = 2078976747916666595170$ و $(3+9) \times 467837736666302083363342303 = 5146228479166666595170$ و $(3+9) \times 116959436666302083363342303 = 1286516147916666595170$ و $(3+9) \times 292398596666302083363342303 = 3256391479166666595170$ و $(3+9) \times 730996476666302083363342303 = 8040876479166666595170$ و $(3+9) \times 182749116666302083363342303 = 2030242947916666595170$ و $(3+9) \times 456872736666302083363342303 = 5025608479166666595170$ و $(3+9) \times 114218196666302083363342303 = 1256402147916666595170$ و $(3+9) \times 285545396666302083363342303 = 3141004947916666595170$ و $(3+9) \times 713863476666302083363342303 = 7852609479166666595170$ و $(3+9) \times 178465896666302083363342303 = 1962727479166666595170$ و $(3+9) \times 446164736666302083363342303 = 4907659479166666595170$ و $(3+9) \times 111541196666302083363342303 = 1226839479166666595170$ و $(3+9) \times 278852996666302083363342303 = 3067469479166666595170$ و $(3+9) \times 697132476666302083363342303 = 7667299479166666595170$ و $(3+9) \times 174283096666302083363342303 = 1917042947916666595170$ و $(3+9) \times 435707736666302083363342303 = 4795097479166666595170$ و $(3+9) \times 108926996666302083363342303 = 1200142947916666595170$ و $(3+9) \times 272317476666302083363342303 = 3005997479166666595170$ و $(3+9) \times 680793476666302083363342303 = 7517197479166666595170$ و $(3+9) \times 170198396666302083363342303 = 1892022947916666595170$ و $(3+9) \times 425495996666302083363342303 = 4685464947916666595170$ و $(3+9) \times 106373996666302083363342303 = 1170164947916666595170$ و $(3+9) \times 265934996666302083363342303 = 2925369479166666595170$ و $(3+9) \times 664837476666302083363342303 = 7306019479166666595170$ و $(3+9) \times 166209396666302083363342303 = 1834622947916666595170$ و $(3+9) \times 415523996666302083363342303 = 4579524947916666595170$ و $(3+9) \times 103880996666302083363342303 = 1144729479166666595170$ و $(3+9) \times 259701996666302083363342303 = 2876649479166666595170$ و $(3+9) \times 649254996666302083363342303 = 7140849479166666595170$ و $(3+9) \times 162313476666302083363342303 = 1785439479166666595170$ و $(3+9) \times 405783996666302083363342303 = 4465464947916666595170$ و $(3+9) \times 101445996666302083363342303 = 1120014947916666595170$ و $(3+9) \times 253613996666302083363342303 = 2816649479166666595170$ و $(3+9) \times 634027996666302083363342303 = 7001749479166666595170$ و $(3+9) \times 158506996666302083363342303 = 1745594947916666595170$ و $(3+9) \times 396267996666302083363342303 = 4359949479166666595170$ و $(3+9) \times 99066996666302083363342303 = 1099749479166666595170$ و $(3+9) \times 247667996666302083363342303 = 2744849479166666595170$ و $(3+9) \times 61916996666302083363342303 = 6812049479166666595170$ و $(3+9) \times 154791996666302083363342303 = 1702649479166666595170$ و $(3+9) \times 386983996666302083363342303 = 4277849479166666595170$ و $(3+9) \times 96746996666302083363342303 = 1076649479166666595170$ و $(3+9) \times 241867996666302083363342303 = 2676649479166666595170$ و $(3+9) \times 60466996666302083363342303 = 6692049479166666595170$ و $(3+9) \times 151167996666302083363342303 = 1672649479166666595170$ و $(3+9) \times 377919966666302083363342303 = 4197849479166666595170$ و $(3+9) \times 94499966666302083363342303 = 1052649479166666595170$ و $(3+9) \times 236247996666302083363342303 = 2617649479166666595170$ و $(3+9) \times 59049966666302083363342303 = 6492049479166666595170$ و $(3+9) \times 147623996666302083363342303 = 1632649479166666595170$ و $(3+9) \times 369079966666302083363342303 = 4077849479166666595170$ و $(3+9) \times 92269966666302083363342303 = 1022649479166666595170$ و $(3+9) \times 230673996666302083363342303 = 2557649479166666595170$ و $(3+9) \times 57669966666302083363342303 = 6342049479166666595170$ و $(3+9) \times 144173996666302083363342303 = 1602649479166666595170$ و $(3+9) \times 355423996666302083363342303 = 3947849479166666595170$ و $(3+9) \times 88869966666302083363342303 = 9822649479166666595170$ و $(3+9) \times 222173996666302083363342303 = 2477649479166666595170$ و $(3+9) \times 555423996666302083363342303 = 6142049479166666595170$ و $(3+9) \times 138869966666302083363342303 = 1522649479166666595170$ و $(3+9) \times 346673996666302083363342303 = 3827849479166666595170$ و $(3+9) \times 86669966666302083363342303 = 9522649479166666595170$ و $(3+9) \times 216673996666302083363342303 = 2427649479166666595170$ و $(3+9) \times 54169966666302083363342303 = 6022049479166666595170$ و $(3+9) \times 135423996666302083363342303 = 1502649479166666595170$ و $(3+9) \times 339973996666302083363342303 = 3777849479166666595170$ و $(3+9) \times 84999666666302083363342303 = 9422649479166666595170$ و $(3+9) \times 212473996666302083363342303 = 2377649479166666595170$ و $(3+9) \times 53169966666302083363342303 = 5872049479166666595170$ و $(3+9) \times 132423996666302083363342303 = 1472649479166666595170$ و $(3+9) \times 329973996666302083363342303 = 3677849479166666595170$ و $(3+9) \times 82999666666302083363342303 = 9122649479166666595170$ و $(3+9) \times 207473996666302083363342303 = 2327649479166666595170$ و $(3+9) \times 51669966666302083363342303 = 5722049479166666595170$ و $(3+9) \times 128423996666302083363342303 = 1422649479166666595170$ و $(3+9) \times 319973996666302083363342303 = 3577849479166666595170$ و $(3+9) \times 80999666666302083363342303 = 9022649479166666595170$ و $(3+9) \times 202473996666302083363342303 = 2277649479166666595170$ و $(3+9) \times 50669966666302083363342303 = 5572049479166666595170$ و $(3+9) \times 126423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 314973996666302083363342303 = 3477849479166666595170$ و $(3+9) \times 79999666666302083363342303 = 8922649479166666595170$ و $(3+9) \times 200473996666302083363342303 = 2227649479166666595170$ و $(3+9) \times 50169966666302083363342303 = 5522049479166666595170$ و $(3+9) \times 125423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 312973996666302083363342303 = 3477849479166666595170$ و $(3+9) \times 79999666666302083363342303 = 8922649479166666595170$ و $(3+9) \times 200473996666302083363342303 = 2227649479166666595170$ و $(3+9) \times 50169966666302083363342303 = 5522049479166666595170$ و $(3+9) \times 125423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 312973996666302083363342303 = 3477849479166666595170$ و $(3+9) \times 79999666666302083363342303 = 8922649479166666595170$ و $(3+9) \times 200473996666302083363342303 = 2227649479166666595170$ و $(3+9) \times 50169966666302083363342303 = 5522049479166666595170$ و $(3+9) \times 125423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 312973996666302083363342303 = 3477849479166666595170$ و $(3+9) \times 79999666666302083363342303 = 8922649479166666595170$ و $(3+9) \times 200473996666302083363342303 = 2227649479166666595170$ و $(3+9) \times 50169966666302083363342303 = 5522049479166666595170$ و $(3+9) \times 125423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 312973996666302083363342303 = 3477849479166666595170$ و $(3+9) \times 79999666666302083363342303 = 8922649479166666595170$ و $(3+9) \times 200473996666302083363342303 = 2227649479166666595170$ و $(3+9) \times 50169966666302083363342303 = 5522049479166666595170$ و $(3+9) \times 125423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 312973996666302083363342303 = 3477849479166666595170$ و $(3+9) \times 79999666666302083363342303 = 8922649479166666595170$ و $(3+9) \times 200473996666302083363342303 = 2227649479166666595170$ و $(3+9) \times 50169966666302083363342303 = 5522049479166666595170$ و $(3+9) \times 125423996666302083363342303 = 1402649479166666595170$ و $(3+9) \times 3129$

پرسش گزینه‌ها:

- (۱) هر مولکول از ترکیب شامل ۳۶ اتم است و هر مولکول از آلکان با فرمول C_nH_{2n+2} شامل $2n+2$ اتم است. تساوی $2n+2=36$ به‌ازای هیچ عدد صحیحی برقرار نیست.
- (۲) فرمول مولکولی ۳- اتیل - ۲- متیل هپتان به صورت $C_{11}H_{24}$ بوده و هر مولکول آن شامل ۲۲ اتم هیدروژن است.
- (۳) نسبت جرم کربن به جرم هیدروژن در ترکیب حاصل برابر است با:

$$\frac{C \text{ جرم}}{H \text{ جرم}} = \frac{22 \times 12}{14 \times 1} = 18/7$$

- (۴) هر کدام از هیدروکربن‌های $C_{22}H_{44}$ و ۲- اکتین (C_8H_{14}) شامل ۱۴ اتم H و در نتیجه دارای ۱۴ پیوند C—H هستند.
- ۱/۱۲۹ • با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها (C_nH_{2n+2})، درصد جرمی کربن از ۷۵٪ شروع شده و افزایش می‌یابد.
- با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها (C_nH_{2n})، درصد جرمی کربن از ۸۵٪ شروع شده و ثابت می‌ماند.
- با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکین‌ها (C_nH_{2n-2})، درصد جرمی کربن از ۹۲٪ شروع شده و کاهش می‌یابد.

پرسش گزینه‌ها: ۴/۱۳۰

- (۱) مولکول داده‌شده همانند مولکول نفتالن شامل ۵ پیوند دوگانه است.
- (۲) شمار اتم‌های کربن در فرمول تقریبی گریس ($C_{18}H_{38}$) برابر با ۱۸ بوده و در مولکول داده‌شده ($C_{13}H_{16}N_4O_7$)، مجموع شمار اتم‌های هیدروژن و اکسیژن نیز برابر با ۱۸ است.
- (۳) مجموع شمار اتم‌های مولکول داده‌شده و فرمول تقریبی وازلین ($C_{25}H_{52}$) به ترتیب برابر با ۳۳ و ۷۷ است:

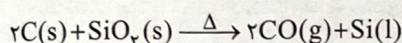
$$\frac{33}{77} = \frac{3}{7}$$

- (۴) در مولکول مورد نظر، ۶ جفت الکترون ناپیوندی (هر اتم O: ۲ جفت و هر اتم N: یک جفت) وجود دارد. شمار پیوندهای یگانه در این مولکول برابر با ۲۹ است:

$$\frac{29}{6} \neq 5$$

پرسش عبارت‌های نادرست: ۱/۱۳۱

- (آ) با توجه به واکنش‌پذیری بیشتر کربن در مقایسه با سیلیسیم، می‌توان از واکنش کربن با سیلیس، عنصر با ارزش سیلیسیم را به همراه کربن مونوکسید تولید کرد.



(ت) در تولید کاغذ، آب به مقدار زیاد مصرف می‌شود.

- ۳/۱۳۲ از سوختن کامل هر مول هیدروکربن با فرمول C_xH_y ، به مقدار

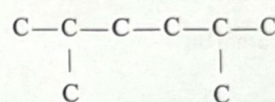
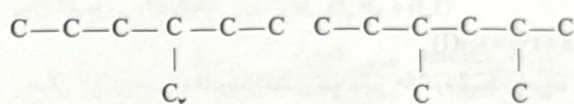
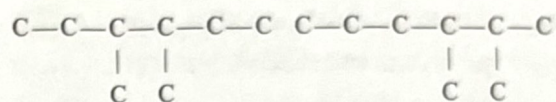
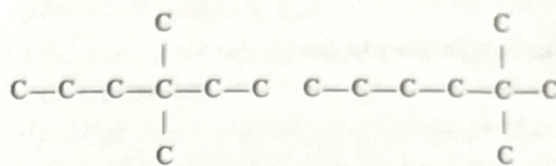
$$x \text{ مول } CO_2 \text{ و } \frac{y}{4} \text{ مول } H_2O \text{ تولید می‌شود.}$$

در شرایط STP، فقط CO_2 به حالت گاز است.

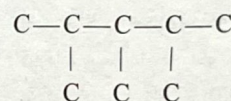
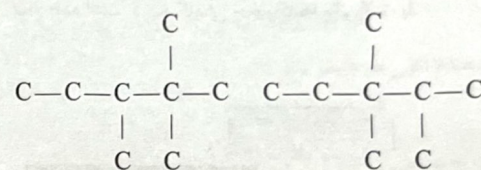
$$? \text{mol } CO_2 = 53/76 \text{ L } CO_2 \times \frac{1 \text{mol } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} = 2/4 \text{mol } CO_2$$

$$x = \frac{2/4}{0/4} = 6 \Rightarrow A \text{ فرمول: } C_6H_6$$

- (۳) اگر زنجیر اصلی آلکان A شامل ۶ اتم کربن باشد، حداکثر ۷ ساختار می‌توان برای آن در نظر گرفت:



- (۴) اگر آلکان A دارای پنج گروه متیل باشد، حداکثر ۳ ساختار می‌توان برای آن در نظر گرفت.



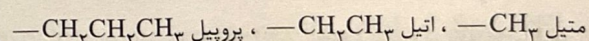
درسنامه

آلکان‌ها

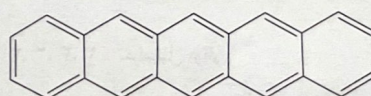
دسته‌ای از هیدروکربن‌ها هستند که هر اتم کربن با چهار پیوند یگانه به اتم‌های کناری متصل شده‌اند.

فرمول همگانی آلکان‌های راست‌زنجیر به صورت C_nH_{2n+2} است.

آلکان‌های شاخه‌دار دارای گروه‌های آلکیل هستند. شماری از این شاخه‌های فرعی در زیر آورده شده است.



- ۳/۱۲۸ مطابق داده‌های سؤال، ساختار ترکیب حاصل به صورت زیر است:



فرمول مولکولی این ترکیب به صورت $C_{22}H_{44}$ است.

هر مول آلکن و هر مول آلکین به ترتیب با ۱ و ۲ مول گاز H_2 یعنی معادل ۲ و ۴ گرم هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهند.

با توجه به نسبت $\frac{1/2}{2/3} = 4$ می‌توان نتیجه گرفت که A یک آلکین است.

C_nH_{2n-2} فرمول A

هر مول آلکین یا فرمول کلی C_nH_{2n-2} شامل $2n-1$ مول جفت‌الکترون

پیوندی بوده و برای سوختن کامل به $\frac{2n-1}{2}$ مول گاز اکسیژن نیاز دارد.

$2n-1 = 3(6) - 1 = 17$: شمار جفت‌الکترون پیوندی

مول اکسیژن لازم: $\frac{2n-1}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$

۱۳۳ ۳ درصد نفت سفید در نفت سنگین کشورهای عربی، کم‌تر از نفت

سنگین ایران است.

بررسی منابع گزیده‌ها:

(۱) مقایسه میان نقطه جوش و چگالی بنزین، نفت سفید و گازوئیل به صورت

زیر است: بنزین > نفت سفید > گازوئیل: چگالی و نقطه جوش

۲ و ۴) سوخت هواپیما و موتورهای جت به طور عمده از نفت سفید که شامل

آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ کربن است، تهیه می‌شود.

۱۳۴ ۴ بررسی منابع گزیده‌ها:

(۱) گرما را می‌توان هم‌ارز با آن مقدار انرژی گرمایی دانست که به دلیل تفاوت

در دما جاری می‌شود.

(۲) نیم لیتر روغن زیتون $70^\circ C$ ، زودتر از نیم لیتر آب $70^\circ C$ با محیط

هم‌دما می‌شود، زیرا ظرفیت گرمایی آن کم‌تر از آب است.

(۳) انرژی گرمایی یک نمونه ماده برخلاف دما، به جرم ماده بستگی دارد.

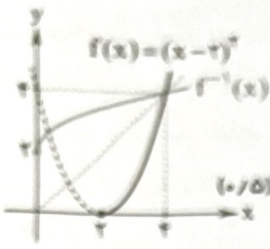
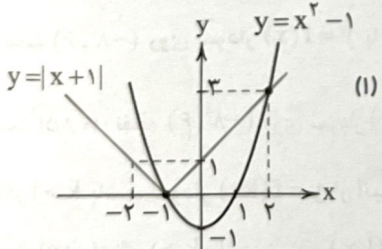
۱۳۵ ۱

$$c_A = 2c_X, m_A = m_X, \Delta\theta_A = \Delta\theta_X$$

$$\frac{Q_A}{Q_X} = \frac{m_A \cdot c_A \cdot \Delta\theta_A}{m_X \cdot c_X \cdot \Delta\theta_X} = \frac{m_A \cdot 2c_X \cdot \Delta\theta_A}{m_A \cdot c_X \cdot \Delta\theta_A} = 2 \Rightarrow Q_A = 2Q_X$$

نمره	راهنمای تصحیح	صف
	دین و زندگی (۲)	
۰/۵	با توجه به آیه شریفه «أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَابَهُ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ» در چه صورت جا داشت که مردم در اعتقاد به توحید در شک بیفتند؟ در صورتی که آن‌ها شریک‌هایی برای خدا قرار دهند که آن شریکان مثل خداوند آفرینی داشته باشند. (۰/۵)	۲
۱	براساس آیه مبارکه «يَسْأَلُوهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ كُلُّ يَوْمٍ هُوَ فِي شَأْنٍ» به سؤالات زیر جواب دهید: الف) منظور از این‌که خداوند هر لحظه دست‌اندرکار امری است، چیست؟ یعنی هر لحظه به موجودات هستی می‌بخشد. (۰/۵) ب) چرا موجودات از خداوند درخواست دارند؟ زیرا موجودات همواره به خدا نیازمند هستند. (۰/۵)	۳
۱	صحیح یا غلط بودن هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) افزایش معرفت انسان به خود، موجب افزایش بندگی خداوند است. صحیح (۰/۵) ب) مهم‌ترین اعتقاد دینی که بدون اعتقاد به آن، هیچ اعتقاد دیگری اعتبار ندارد، معاد است. غلط (۰/۵)	۳
۰/۵	گزینه مناسب را انتخاب کنید. رابطه «جهان با خداوند»، «در بقا» مانند کدام یک از موارد است؟ الف) پرتو نور با منبع نور ب) میز با نجار پرتو نور با منبع نور (۰/۵)	۴
۲	به سؤالات زیر به صورت کوتاه پاسخ دهید. الف) بزرگ‌ترین ضربه جریان تکفیری بر پیکره اسلام چه بود؟ سبب تنفر برخی از مردم جهان از دین اسلام شد. (۰/۵) ب) معنای این‌که خداوند پیامبر اکرم (ص) را ولی انسان‌ها معرفی می‌کند، چیست؟ بدین معناست که ایشان را واسطه ولایت خود و رساننده فرمان‌هایش قرار داده است. (۰/۵) ج) نور بودن خدا به چه معناست؟ یعنی تمام موجودات، وجود خود را از او می‌گیرند، به سبب او پیدا و آشکار شده و پا به عرصه هستی می‌گذارند. (۰/۵) د) علت نهی پیامبر (ص) در حدیث «در همه چیز تفکر کنید، اما در ذات خدا تفکر نکنید» چیست؟ زیرا نمی‌توانیم ذات و چیستی خدای نامحدود را دریابیم. (۰/۵)	۵
۵	به سؤالات زیر به صورت کامل پاسخ دهید. الف) دلیل بیاورید که چرا خداوند در «آفرینش جهان» شریکی ندارد؟ اولاً: هر کدام از آن خدایان، محدود و ناقص هستند (۰/۲۵) و به تنهایی نمی‌توانند کل جهان را خلق کنند. (۰/۲۵) ثانیاً: هر یک از خدایان کمالاتی دارند که دیگری آن کمالات را ندارد، (۰/۲۵) چنین خدایان ناقصی، خود، نیازمند هستند و هر یک از آن‌ها به خالق کامل و بی‌نیازی احتیاج دارند که نیازش را برطرف نماید. (۰/۲۵)	۵

نمره	راهنمای تصحیح	تف
	(ب) رابطه علیت میان پدیده‌های مادی و معنوی به چه معناست؟ مثال بزنید. خداوند رابطه علیت را میان پدیده‌های جهان حاکم کرده است. (۰/۵) آتش موجب گرما و روشنی و دارو سبب شفا و بهبودی است. پزشک وسیله درمان، معمار عامل بنای ساختمان و معلم نیز وسیله تعلیم و تربیت است. (۰/۵) در امور معنوی نیز همین‌گونه است دعا سبب آمزش، صدقه موجب دفع بلا و صلّه رحم موجب افزایش طول عمر است. (۰/۵) همه این روابط توسط خود خداوند طراحی شده و به اذن و اراده او صورت می‌گیرد. (۰/۵) بنابراین، کسی که برای آموختن نزد معلم می‌رود یا برای درمان به پزشک مراجعه می‌کند، نه تنها معلم و پزشک را شریک خداوند قرار نداده، بلکه به قانون الهی عمل کرده است. (۰/۵) (ج) آگاهی انسان به نیازمندی خود به خداوند، چه ثمره‌ای برای او به دنبال دارد؟ انسان‌های آگاه دائماً سایه لطف و رحمت خدا را احساس می‌کنند (۰/۲۵) و خود را نیازمند عنايات پیوسته او می‌دانند (۰/۲۵). هر چه معرفت انسان به خود و رابطه‌اش با خدا بیشتر شود (۰/۵) نیاز به او را بیشتر احساس و عجز و بندگی خود را بیشتر ابراز می‌کند (۰/۵)	
	حسابان (۲)	
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) اگر $r(x)$ باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه دوم $q(x)$ باشد، آن‌گاه درجه r است. حداکثر یک (۰/۵) (ب) اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، به طوری که $p(a)=1$، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر برابر با ۱ است. $x-a$ (۰/۵)	
۱/۵	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. (الف) تابع $f(x)=1-\log_5 x$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یکنوا است. درست (۰/۵) (ب) نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطه $(-8, 12)$ روی نمودار $y=\frac{1}{4}f(x)$ متناظر است. نادرست (۰/۵)؛ نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطه $(-8, 3)$ روی نمودار $y=\frac{1}{4}f(x)$ متناظر است. (ج) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. خادرست (۰/۵)؛ اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.	
۱/۵	تقدیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $(x+1)(x-2)$ بخش پذیر باشد. $\begin{cases} P(-1)=0 \quad (0/25) \Rightarrow -1+a-b+1=0 \Rightarrow a-b=0 \quad (0/25) \\ P(2)=0 \quad (0/25) \Rightarrow 8+4a+2b+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9 \quad (0/25) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2a-2b=0 \\ 4a+2b=-9 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2} \quad (0/25), b=-\frac{3}{2} \quad (0/25)$	

نوع سوال	راهنمای تصحیح	نمره
۲	ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بیابید. نمودار $y = x^2$ را به واحد به راست انتقال می دهیم و با شرط $x \geq 2$ داریم:  بنابراین تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ یک به یک بوده، پس وارون پذیر است. (۰/۵) $y = (x-2)^2 \Rightarrow x-2 = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y} \quad (۰/۵)$ $\Rightarrow x = 2 + \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}; (x \geq 0) \quad (۰/۵)$	۲
۱	مقدار x را طوری بیابید که: $(۰/۵) \quad 2x-2 \geq \frac{1}{8}$ $(۰/۵) \quad 2x-2 \geq \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (۰/۵)$ $y = a^x$, $a < 1$ نزولی اکید $\rightarrow 2x-2 \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \quad (۰/۵)$	۱۱
۱	فرض کنید تابع f در یک فاصله، اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند، اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید $a \leq b$. به کمک برهان خلف داریم: $\sim (a \leq b) \Rightarrow a > b \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} f(a) > f(b) \Rightarrow$ خلاف فرض (۰/۷۵) (۰/۷۵) (۰/۷۵) (۰/۷۵) (۰/۷۵)	۱
۲	با رسم نمودار، نامعادله $x+1 < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش دهید. باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y = x+1$ پایین تر از نمودار $y = x^2 - 1$ قرار دارد.  $\Rightarrow$ مجموعه جواب $= \{x < -2 \text{ یا } x > 2\} \quad (۰/۵) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \quad (۰/۵)$	۱
۲۰	جمع نمرات	