

آزمون شماره (۱۲)

جمعه

۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۱

آزمون‌های سراسری کاج

گزینه درستی را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

دهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۷۰	مدت پاسخگویی: ۹۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
			از	تا	
۱	ریاضی ۱	۲۰	۱	۲۰	۴۵ دقیقه
	هندسه ۱	۱۰	۲۱	۳۰	
۲	فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۲۵ دقیقه
۳	شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۰ دقیقه

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...)، قبل و یا بعد از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقوقی و مقوق ممنوع است (متی با ذکر منبع) و متخلفین تمت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

ریاضیات



ریاضی (۱)

- ۱- اگر مجموعه $(A-B) \cup (B-A)$ متناهی باشد، چه تعداد از مجموعه‌های مقابل ممکن است نامتناهی باشد؟ $A, B, A \cap B, A \cup B$
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۲- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، مجموعه $((A-B) \cup (B'-A)) \cap ((A'-B) \cup (B-A))'$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر، به هیچ وجه نمی‌تواند برابر باشد؟
- ۱ (۱) B (۲) $A-B$ (۳) $\emptyset$ (۴)
- ۳- اگر M مجموعه مرجع باشد و $A \cap B = M$ و $C \cup A' = \emptyset$ ، آن‌گاه کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی نمی‌باشد؟
- ۱ (۱) $A \cap B \cap C$ (۲) $A' \cup B' \cup C$ (۳) $(A \cup B) - C'$ (۴) $C' - (A-B)$
- ۴- اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, \frac{63}{x} \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, \frac{A}{x} \in \mathbb{Z}\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟
- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴)
- ۵- اگر $A = [a+b, 3a+b]$ ، $B = (a, 2a+b]$ و $A \cap B = [5, 7]$ باشد، آن‌گاه $A \cup B$ شامل چند عدد طبیعی است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)
- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)
- ۶- به ازای چند مقدار طبیعی a ، اشتراک دو بازه $A = (-\infty, \frac{5}{a+2}]$ و $B = [\frac{2}{a-3}, +\infty)$ یک مجموعه متناهی است؟
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)
- ۷- اگر $n(A \cup B) = 3n(A \cap B) = 30$ باشد، نسبت $n(A-B)$ بر $n(B)$ حداکثر چقدر است؟
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴)
- ۸- اگر دنباله عددی $1, 3, 9, \dots$ را دنباله درجه دوم در نظر بگیریم، جمله دوازدهم آن برابر a و اگر دنباله مذکور را هندسی در نظر بگیریم، جمله m ام آن نیز برابر a خواهد بود. مقدار n کدام است؟
- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)
- ۹- جمله عمومی دنباله حسابی a_n به صورت $a_n = (n-2m)n^2 + (3m+1)n + 4$ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله چند برابر جمله پنجم آن است؟
- ۴۸ (۱) $\frac{99}{46}$ (۲) $\frac{49}{23}$ (۳) $\frac{97}{46}$ (۴)
- ۱۰- در یک دنباله حسابی، $a_m = n$ و $a_{m+n} = n-m$ می‌باشد، a_n کدام است؟ ($m, n \in \mathbb{N}$)
- ۱ (۱) $\frac{n^2 - mn + m^2}{m}$ (۲) $\frac{n^2 + mn - m^2}{m}$ (۳) $\frac{n^2 - mn + m^2}{n}$ (۴) $\frac{n^2 + mn - m^2}{n}$
- ۱۱- طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. اگر مساحت مثلث $\frac{3}{4}$ برابر محیط آن باشد، مساحت مثلث کدام است؟
- ۳۶ (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴)
- ۱۲- اگر مجموع سه جمله اول دنباله حسابی $a, b, c, \dots$ برابر ۲۷ باشد، جمله دهم دنباله هندسی $a-1, b+1, c+3, \dots$ کدام است؟
- ۵ (۱) ۱۰ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

محل انجام محاسبات



۱۳- در دنباله هندسی $\sin^2 \alpha, \cos \alpha, \tan^2 \alpha, \dots$ در صورتی که $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ باشد، مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ چند برابر قدرنسبت است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۴- مساحت یک دوزنقه متساوی الساقین که طول ساق آن برابر 20 و زاویه باز آن 150° است، برابر $180\sqrt{3}$ می باشد. محیط دوزنقه چقدر بیشتر از 40 است؟

- (۱) $32\sqrt{3}$ (۲) $36\sqrt{3}$ (۳) $40\sqrt{3}$ (۴) $44\sqrt{3}$

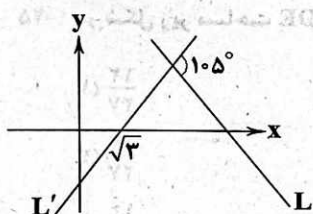
۱۵- اگر $180^\circ < \theta < 270^\circ$ و $\frac{5}{\sqrt{10}} = 2\sin \theta - \cos \theta$ باشد، مقدار $\cot \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) 3 (۴) 5

۱۶- اگر $1 - 2\sin \theta \cos \theta = (\sin \theta - \cos \theta)\sqrt{1 - 2\sin \theta \cos \theta}$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیه دایره مثلثاتی نمی تواند قرار گیرد؟

- (۱) چهارم (۲) دوم (۳) سوم (۴) اول

۱۷- در شکل زیر، معادله خط L به صورت $3x + 3y = 10$ می باشد، عرض از مبدأ خط L' کدام است؟



(۱) -1

(۲) -2

(۳) -3

(۴) $-2\sqrt{3}$

۱۸- اگر $-1 < a < 0$ باشد، کدام یک از اعداد زیر بزرگ تر است؟

- (۱) $\sqrt[3]{a^2}$ (۲) $\sqrt[5]{a^2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$

۱۹- مقدار عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{92} + \sqrt{520}}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

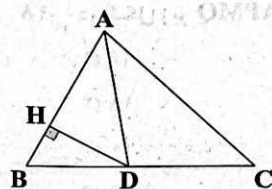
- (۱) $2, 1$ (۲) $3, 2$ (۳) $4, 3$ (۴) $5, 4$

۲۰- اگر $5 + \frac{a}{3}$ و $4 - \frac{b}{4}$ ریشه های متمایز چهارم عدد m و هم چنین $\frac{1-a}{4}$ و $4-b$ ریشه های متمایز ششم همان عدد باشند، ریشه سوم عدد m کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 8 (۳) 32 (۴) 16

هندسه (۱)

۲۱- در شکل زیر $AD = 17$ نیمساز زاویه A است. اگر $DH = 8$ و $AC = 21$ باشد، طول DC کدام است؟



(۱) 7

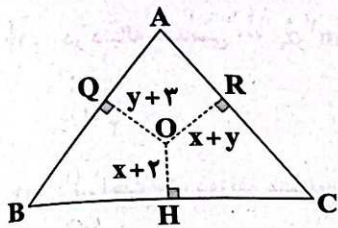
(۲) 9

(۳) 10

(۴) 12

محل انجام محاسبات

۲۲- در شکل زیر نقطه O محل هم‌رسمی نیم‌سازهای داخلی مثلث است. حاصل $2x+y$ کدام است؟



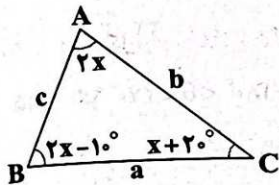
۶ (۱)

۸ (۲)

۷ (۳)

۹ (۴)

۲۳- با توجه به شکل، کدام گزینه صحیح است؟

 $a > b > c$ (۱) $a > c > b$ (۲) $c > a > b$ (۳) $b > a > c$ (۴)

۲۴- در مثلثی اندازه دو ضلع ۱۵ و ۱۰ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع برابر ارتفاع وارد بر ضلع سوم است. مثلث کدام است؟

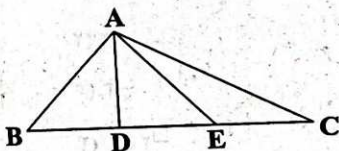
۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

۲۵- در شکل زیر مساحت ADE، $\frac{3}{4}$ مساحت ABD و $\frac{2}{3}$ مساحت AEC است. $\frac{BE}{DC}$ کدام است؟

 $\frac{12}{27}$ (۱) $\frac{13}{27}$ (۲) $\frac{14}{27}$ (۳) $\frac{15}{27}$ (۴)

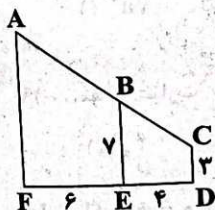
۲۶- در شکل زیر AF، BE و CD بر FD عمود هستند. طول AF کدام است؟

۱۰ (۱)

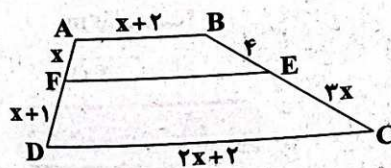
۱۳ (۲)

۱۲ (۳)

۱۴ (۴)



۲۷- در دوزنقه ABCD، EF موازی قاعده دوزنقه است. طول EF کدام است؟

 $4/5$ (۱) $4/8$ (۲) $5/2$ (۳) $5/4$ (۴)

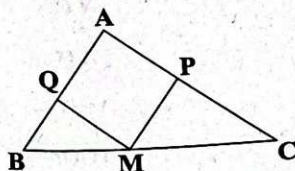
۲۸- در شکل زیر APMQ لوزی است. اگر $AB=6$ ، $AC=12$ و $BC=15$ باشد، محیط لوزی کدام است؟

۱۶ (۱)

۱۸ (۲)

۲۰ (۳)

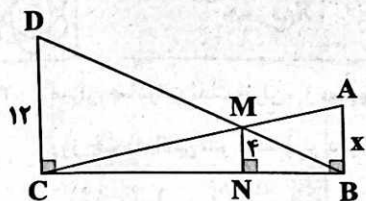
۲۴ (۴)



محل انجام محاسبات



۲۹- در شکل زیر، $MN=4$ و $CD=12$ است. طول AB کدام است؟



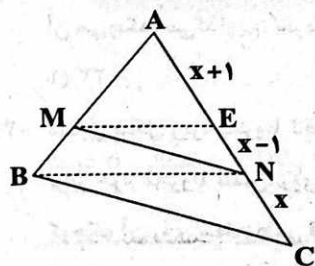
۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

۳۰- در شکل زیر، $MN \parallel BC$ و $ME \parallel BN$ است. طول AC کدام است؟



۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۱ (۳)

۱۲ (۴)

محل انجام محاسبات

فیزیک



۳۱- میزان صادرات نفت ایران، ۲ میلیون بشکه در روز می باشد. با دانستن این که هر بشکه معادل ۳۰۰L است، میزان صادرات نفت ایران در یک روز چند سانتی متر مکعب بر دقیقه می باشد؟

$$\frac{5}{12} \times 10^8 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{24} \times 10^{11} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{12} \times 10^9 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{24} \times 10^{12} \quad (۱)$$

۳۲- یک لیوان خالی استوانه‌ای شکل به قطر دهانه ۶cm و ارتفاع ۱۲cm را در زیر شیر آبی که در هر ثانیه ۳ قطره کروی شکل به قطر ۴mm از آن می چکد، می‌گذاریم. تقریباً در مدت چند دقیقه لیوان پر از آب می‌شود؟ ($\pi = 3$)

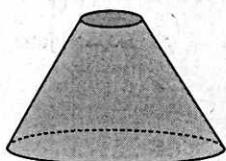
$$48 \quad (۴)$$

$$96 \quad (۳)$$

$$56 \quad (۲)$$

$$32 \quad (۱)$$

۳۳- مطابق شکل زیر، مخروط ناقصی روی سطح افقی قرار دارد. شعاع قاعده بزرگ مخروط، ۴ برابر شعاع قاعده کوچک آن است. جسمی با چند برابر جرم مخروط ناقص، روی آن قرار دهیم تا فشار حاصل از کل مجموعه روی سطح افقی با فشار حاصل از مخروط ناقص زمانی که قاعده کوچک آن روی سطح افقی قرار دارد، یکسان شود؟



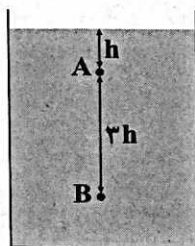
$$14 \quad (۲)$$

$$12 \quad (۱)$$

$$16 \quad (۴)$$

$$15 \quad (۳)$$

۳۴- در شکل زیر، درون ظرف، مایعی با چگالی $2000 \frac{kg}{m^3}$ قرار دارد. اگر فشار در نقطه B، ۲ برابر فشار در نقطه A باشد، نقطه B در چند متری از سطح مایع قرار دارد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$, $P_0 = 10^5 Pa$)



$$(g = 10 \frac{N}{kg}, P_0 = 10^5 Pa)$$

$$2/5 \quad (۱)$$

$$5 \quad (۲)$$

$$7/5 \quad (۳)$$

$$10 \quad (۴)$$

۳۵- دو ظرف استوانه‌ای شکل A و B را در اختیار داریم و ابعاد ظرف B، ۵ برابر ابعاد ظرف A است. درون ظرف A حجم V از مایع با چگالی ρ_1 و درون ظرف B حجم V از مایع با چگالی ρ_2 می‌ریزیم. اگر فشار حاصل از مایع در کف ظرف A، ۴ برابر فشار حاصل از مایع در کف ظرف B باشد، جرم مایع موجود در ظرف A چند برابر جرم مایع موجود در ظرف B است؟

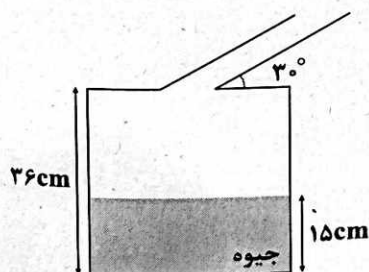
$$0/16 \quad (۴)$$

$$0/8 \quad (۳)$$

$$1/25 \quad (۲)$$

$$6/25 \quad (۱)$$

۳۶- در ظرف شکل زیر، سطح مقطع قسمت پهن ظرف برابر با $5 cm^2$ و سطح مقطع قسمت باریک ظرف برابر با $2 cm^2$ است و درون ظرف، جیوه وجود دارد. درون ظرف چند گرم آب بریزیم تا فشار حاصل از دو مایع در کف ظرف برابر با $20 cmHg$ شود؟ ($\rho_{آب} = 1 \frac{g}{cm^3}$, $\rho_{جیوه} = 13/6 \frac{g}{cm^3}$)



$$(P_{آب} = 1 \frac{g}{cm^3}, \rho_{جیوه} = 13/6 \frac{g}{cm^3})$$

$$293 \quad (۱)$$

$$188 \quad (۲)$$

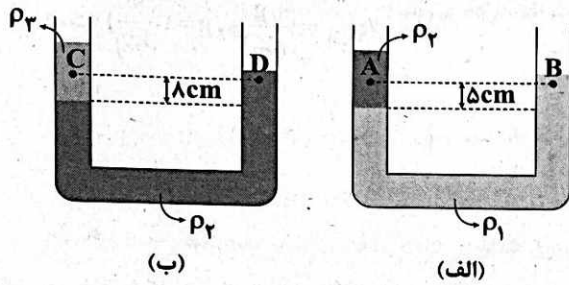
$$105 \quad (۳)$$

$$98 \quad (۴)$$

محل انجام محاسبات

۳۷- مطابق شکل زیر، دو لوله U شکل مشابه داریم. در شکل «الف» دو مایع با چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 و در شکل «ب» دو مایع با چگالی ρ_2 و ρ_3 قرار دارند.

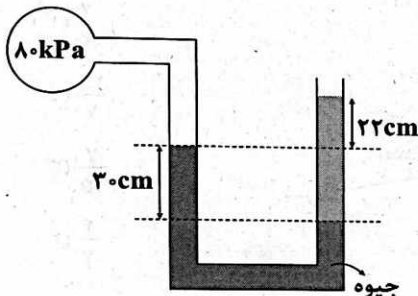
اگر اختلاف فشار در نقاط A و B و همچنین C و D به ترتیب 220 Pa و 160 Pa باشد، اختلاف ρ_1 و ρ_2 چند واحد SI است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) ۶۰
(۲) ۲۴۰
(۳) ۴۴۰
(۴) ۶۴۰

۳۸- مطابق شکل زیر، درون یک لوله U شکل که به مخزن محتوی گاز وصل شده است، جیوه به چگالی $13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و مایعی به چگالی ρ در حال

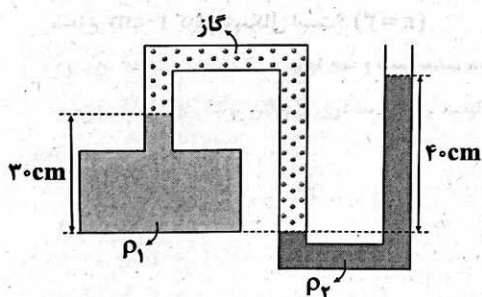
تعادل هستند. اگر به جای جیوه با همان حجم، مایعی با نصف چگالی جیوه بریزیم، اختلاف سطح دو مایع چند سانتی‌متر



می‌شود؟ ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۱۲
(۴) ۱۶

۳۹- در شکل زیر، دو مایع با چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 در حال تعادل هستند. اگر ρ_1 برابر ۲ باشد و همچنین فشار پیمانه‌ای وارد بر کف ظرف

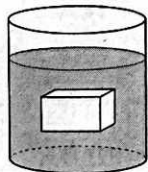


برابر 52000 Pa باشد، ρ_2 چند واحد SI است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- (۱) ۵۲۰۰
(۲) ۷۴۰۰
(۳) ۱۰۴۰۰
(۴) ۱۴۸۰۰

۴۰- مطابق شکل زیر، جسمی به شکل مکعب مستطیل درون مایعی، غوطه‌ور و در حال تعادل است. اگر تفاوت بیشترین اختلاف فشار بین

وجه‌های بالایی و پایینی جسم از کم‌ترین اختلاف فشار بین وجه‌های بالایی و پایینی جسم برابر با 4 kPa باشد، اختلاف طول بلندترین



ضلع مکعب از طول کوتاه‌ترین ضلع آن چند سانتی‌متر است؟ ($\rho_{\text{مایع}} = 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- (۲) ۲۰

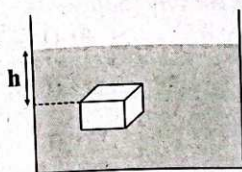
- (۴) ۴۰

- (۱) ۱۰

- (۳) ۳۰

محل انجام محاسبات

۴۱- با شیشه‌ای که حداکثر تحمل نیروی آن 0.3 N است، مکعبی به ضلع 1 cm ساخته و مطابق شکل زیر درون ظرف حاوی آب قرار می‌دهیم و مکعب حداکثر در عمق h که فاصله وجه بالایی مکعب تا سطح آب باشد، قرار می‌گیرد. h چند سانتی‌متر



است؟ $(\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

(۱) ۲۹

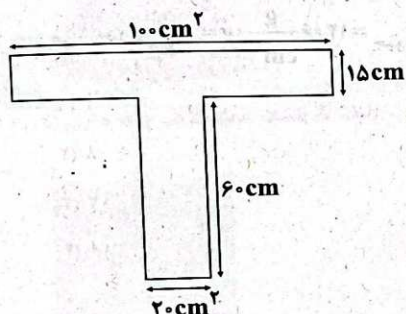
(۲) ۳۰

(۳) ۵۹

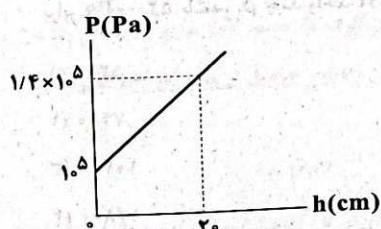
(۴) ۶۰

۴۲- در ظرف شکل زیر، که اندازه حداکثر نیروی قابل تحمل توسط قاعده کوچک ظرف از طرف مایع برابر با 14 N است. تا حداکثر مقدار ممکن (تا ظرف نشکند) درون ظرف آب می‌ریزیم. اگر ظرف را بر گردانیم، نسبت اندازه نیرویی که از طرف آب به کف ظرف در حالت دوم وارد می‌شود

چند برابر اندازه نیرویی است که از طرف مایع در حالت اول به کف ظرف وارد می‌شود؟ $(\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

(۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{25}{7}$ (۳) $\frac{7}{25}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۴۳- نمودار فشار کل در یک مایع بر حسب عمق از سطح آزاد مایع، مطابق شکل زیر است. فشار پیمانه‌ای 30 L از این مایع در کف استوانه‌ای به شعاع 20 cm کیلوپاسکال است؟ $(\pi = 3)$

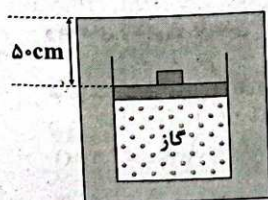


(۱) ۵۰

(۲) ۲۵

(۳) 5×10^4 (۴) 2.5×10^4

۴۴- پیستونی به سطح مقطع 5 cm^2 و جرم در پوش 5 kg درون محفظه‌ای پر از مایع، غوطه‌ور است. اگر فشارسنج به‌درون درون پیستون عدد $2 \times 10^5 \text{ Pa}$ را نشان دهد، چگالی مایع چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$



(۱) ۱۶

(۲) ۲۰

(۳) ۲۵

(۴) ۳۲

محل انجام محاسبات

۴۵- استوانه‌ای توپر به چگالی $500 \frac{kg}{m^3}$ با سطح مقطع $160 cm^2$ و ارتفاع $100 cm$ را در یک ظرف حاوی آب فرو برده و در کف ظرف نگه می‌داریم.

اگر استوانه را رها کنیم، استوانه با شتابی به بزرگی چند متر بر مجذور ثانیه به سمت بالا حرکت می‌کند؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{g}{cm^3}$, $g = 10 \frac{N}{kg}$)

۳۰ (۴)

۱۰ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

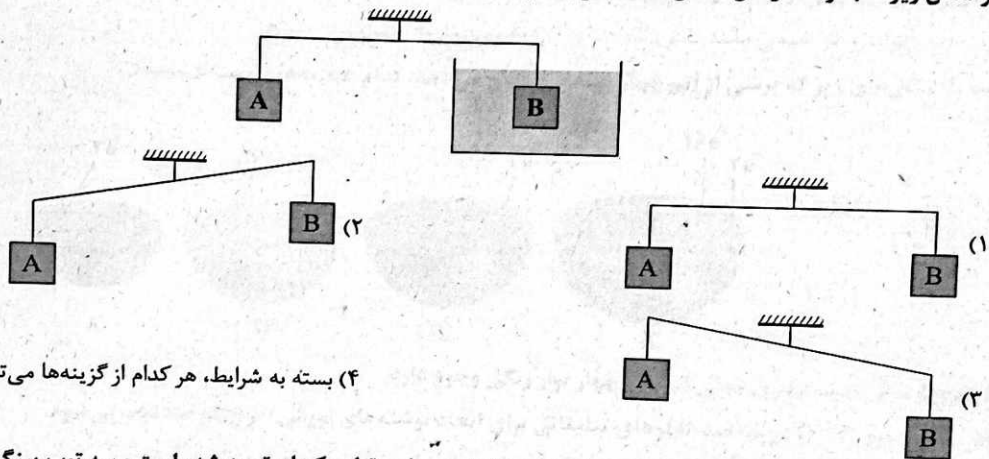
۴۶- یک کره توپر به جرم $6 kg$ و یک مکعب توپر در اختیار داریم. در حالت اول کره را به یک نیروسنج متصل کرده و درون مایعی به چگالی $5/6 \frac{g}{cm^3}$ فرو

می‌بریم و در حالت دوم مکعب را به نیروسنج متصل کرده و درون همان مایع فرو می‌بریم. اعداد نشان داده شده توسط نیروسنج در دو حالت، یکسان است. اگر اندازه نیروی شناوری وارد بر کره از طرف مایع، $20 N$ بیشتر از اندازه نیروی شناوری وارد بر مکعب از طرف مایع باشد، نسبت قطر کره به ضلع

مکعب در کدام گزینه به درستی آمده است؟ ($\pi = 3$, $g = 10 \frac{N}{kg}$) هم جنس هستند.

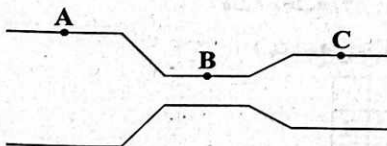
 $\sqrt[3]{3}$ (۴) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ (۱)

۴۷- در شکل زیر، مجموعه در حال تعادل است. اگر جسم B را از مایع خارج کنیم، کدام حالت رخ می‌دهد؟



(۴) بسته به شرایط، هر کدام از گزینه‌ها می‌تواند رخ دهد.

۴۸- در لوله‌ای به شکل زیر، در نقاط A، B و C سوراخ‌هایی با شکل و سطح مقطع یکسان تعبیه شده است و سه توپ پینگ‌پنگ مشابه و سبک را روی سوراخ‌ها قرار می‌دهیم. هنگامی که جریان پیوسته‌ای از هوا درون لوله برقرار می‌شود، کدام توپ، ارتفاع بیشتری از مکان اولیه خود می‌گیرد؟



A (۱)

B (۲)

C (۳)

(۴) در هر سه سوراخ، توپ‌ها کاملاً به لوله‌ها می‌چسبند.

۴۹- در لوله‌ای به شکل زیر، جریان لایه‌ای و پیوسته‌ای از آب درون لوله برقرار است. اگر تندی حرکت آب در نقطه A برابر با $3 \frac{m}{s}$ و تندی حرکت

آب در نقطه B برابر با $48 \frac{m}{s}$ باشد، شعاع سطح مقطع لوله در قسمت پهن لوله چند برابر شعاع سطح مقطع لوله در قسمت باریک آن



است؟ (سطح مقطع لوله دایره‌ای شکل است.)

۳ (۱)

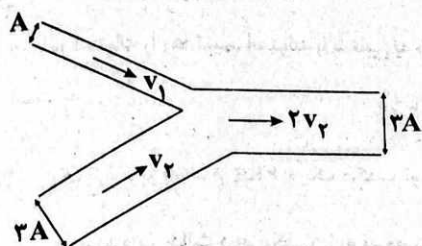
۴ (۲)

۹ (۳)

۱۶ (۴)

محل انجام محاسبات

۵۰- در شکل زیر، آب به صورت لایه‌ای و پیوسته درون لوله‌ها در جریان است. نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (A نشان دهنده سطح مقطع لوله‌ها است)



$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات



شیمی



۵۱- در دوره چهارم جدول تناوبی، شمار عنصرهایی که زیر لایه $3d$ اتم آن‌ها به طور کامل از الکترون پر شده است، چند برابر شمار عنصرهایی است که آرایش الکترونی اتم آن‌ها به زیر لایه‌ای شامل دو الکترون ختم می‌شود؟

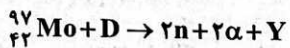
•/ΛΛ (F

०/२० (३)

0/25(2

o/Ao(1

۵۲- در واکنش هسته‌ای زیر، تفاوت شمار نوترون‌ها و پروتون‌های اتم Y کدام است؟ (n، نماد نوترون و ذره پرنرزی α از جنس هسته اتم



هلیوم (${}^4\text{He}$) بوده و D ایزوتوپ پایدار هیدروژن است که هسته آن شامل نوترون می باشد.

۱۳ (۴

 $\gamma(3)$

15 (2)

11 (1)

۵۳- کدام گزینه درست است؟

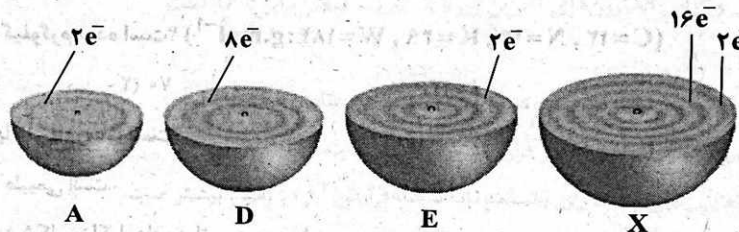
(۱) مجموع جرم الکترون‌های عنصر صدم جدول تناوبی در حدود ۵amu٪ است.

(۲) علت تشکیل رنگین کمان در آسمان، تجزیه نور خورشید به وسیله قطره‌های آب است.

(۳) اگر طول موج یک پرتو دو برابر شود، انرژی آن کم می‌شود، اما لزوماً نصف نمی‌شود.

۴) نقش عدد آووگادرو در شیمی مانند نقش ثانیه برای اندازه‌گیری زمان است.

۵۴- با توجه به شکل‌های زیر که برشی از اتم چهار عنصر را نشان می‌دهد، کدام عبارت‌ها درست هستند؟



(آ) در ناحیه مرئی طیف نشری خطی اتم A، چهار نوار رنگی وجود دارد.

(ب) از لامپ حاوی گاز D در ساخت تابلوهای تبلیغاتی برای ایجاد نوشته‌های نورانی سرخ‌فام استفاده می‌شود.

(پ) شمار ایزوتوپ‌های طبیعی عنصر E برابر با شمار ایزوتوپ‌های طبیعی عنصر برم است.

(ت) عنصر X در گروهی قرار دارد که مجموع اعداد اتمی سایر عنصرهای این گروه، ۹ برابر شمار عنصرهای ساختگی جدول دوره‌ای است.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «آ» و «پ»

(۲) «پ» و «ت»

(۱) «آ» و «ب»

۵۵- با توجه به شکل زیر که بخشی از جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ (نمادها فرضی هستند).

[illegible]

(۱) شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌های F و D با هم برابر است.

(۲) آرایش الکترونی اتم‌های F و C از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.

(۲) آرایش الکترونی اتم‌های F و C از قاعده آفا پیروی نمی‌کند.

(۴) در آرایش الکترونی نیمی از عنصرهای مشخص شده در جدول، زیرلایه نیمه پر وجود دارد.

محل انجام محاسبات



۶۴- هرگاه یک جریان الکتریکی متناوب و ۱۱۰ ولتی به یک خیارشور اعمال شود، خیارشور مانند شکل زیر شروع به درخشیدن می‌کند. علت ایجاد نور رنگی در کدام گزینه آمده است؟



- (۱) یون‌های سدیم در اثر تبدیل شدن به اتم سدیم، مقداری انرژی آزاد می‌کنند که به صورت نور ظاهر می‌شود.
- (۲) یون‌های کلرید در اثر تبدیل شدن به اتم کلر، مقداری انرژی آزاد می‌کنند که به صورت نور ظاهر می‌شود.
- (۳) یون‌های سدیم با جذب انرژی شروع به نشر نور مرئی می‌کنند.
- (۴) یون‌های کلرید با جذب انرژی شروع به نشر نور مرئی می‌کنند.

۶۵- برای تشکیل کدام ترکیب یونی، تعداد بیشتری الکترون میان اتم فلز و نافلز سازنده، مبادله می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ مول منیزیم اکسید (۲) $\frac{1}{5}$ مول کلسیم کلرید (۳) $\frac{1}{7}$ مول سدیم سولفید (۴) $\frac{1}{6}$ مول آلومینیم فلوئورید

۶۶- A ، X و D سه عنصر متوالی جدول تناوبی بوده و مجموع اعداد اتمی آن‌ها برابر با عدد اتمی دومین عنصر گروه سوم جدول است. کدام مطلب در ارتباط با این سه عنصر نادرست است؟

- (۱) D برخلاف A و X ، یون تک‌اتمی تشکیل نمی‌دهد.
- (۲) تفاوت شماره گروه D و A برابر با عدد اتمی A است.
- (۳) شمار الکترون‌های جفت‌نشده در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم D بیشتر از A و X است.
- (۴) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های آخرین زیرلایه اتم سه عنصر برابر با ۱۶ است.

۶۷- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) فراوان‌ترین عنصر سازنده سیاره زمین همانند نخستین عنصر ساخت بشر جزو عناصر دسته d است.
- (۲) دومین عنصر فراوان سیاره زمین، همان سومین عنصر فراوان سیاره مشتری است.
- (۳) ششمین عنصر فراوان سیاره‌های زمین و مشتری یکسانند، اما درصد فراوانی آن در زمین بیشتر است.
- (۴) در بین هشت عنصر فراوان سیاره زمین، آرایش الکترونی اتم نیمی از عنصرها به زیرلایه p ختم می‌شود.

۶۸- کدام عبارت‌ها در ارتباط با گازهای نجیب درست است؟

- (آ) از مدت‌ها پیش شیمیدان‌ها پی بردند که گازهای نجیب در طبیعت به شکل تک‌اتمی یافت می‌شوند.
- (ب) این گازها واکنش‌ناپذیر بوده یا واکنش‌پذیری بسیار کمی دارند، از این رو پایدارند.
- (پ) آرایش الکترون - نقطه‌ای نخستین گاز نجیب (He) مشابه عناصر گروه دوم جدول تناوبی است.
- (ت) ترتیب $Ar < Ne < He$ را می‌توان به درصد فراوانی این گازهای نجیب در سیاره مشتری نسبت داد.

- (۱) «آ» و «ب» (۲) «ب» و «پ» (۳) «پ» و «ت» (۴) «آ» و «ت»

۶۹- A ، X ، M ، D و E پنج عنصر متوالی جدولی تناوبی هستند که E بیشترین عدد اتمی را دارد. اگر در کلرید عنصر D با فرمول DCl_3 ، تفاوت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و جفت‌الکترون‌های ناپیوندی برابر با ۷ باشد، کدام گزینه به یقین درست است؟ (زیرلایه $1=2$ در اتم

تمامی عنصرها خالی از الکترون است.)

- (۱) هر پنج عنصر متعلق به یک دوره از جدول تناوبی هستند.

- (۲) A و M ترکیبی با فرمول A_3M_3 تشکیل می‌دهند.

- (۳) هر مولکول از اکسید X شامل ۳ اتم است.

۷۰- اگر در طیف نشری اتم هیدروژن، ترازهای انرژی بالاتر از $n=6$ را لحاظ نکنیم، با در نظر گرفتن تمام خطوط طیفی ممکن، چند درصد از آن‌ها را می‌توان با چشم غیرمسلح دید؟

(۴) ۶۶/۶۷

(۳) ۳۳/۳۳

(۲) ۲۶/۶۷

(۱) ۲۵

محل انجام محاسبات

نظر سنجی آزمون های سراسری گاج

دانش آموز گرامی؛

لطفا بعد از پایان آزمون، به سوالات ۱ تا ۱۰ در قسمت نظر سنجی با دقت پاسخ دهید.

۱. سطح سوالات آزمون را چطور ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۲. نظم و هماهنگی آغاز آزمون را چگونه دیدید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۳. آیا از کیفیت دفترچه ها رضایت دارید؟

۱- بله ۲- خیر

۴. آیا زمان بندی آزمون با حجم سوالات متناسب بود؟

۱- بله ۲- خیر

۵. طبق مقررات آزمون های گاج، باید دفترچه پاسخ تشریحی فقط پس از آزمون توزیع شود.

در حوزه شما، توزیع دفترچه پاسخ تشریحی به درستی انجام شد؟

۱- بله ۲- خیر

۶. عملکرد مراقبان آزمون را چگونه ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۷. آیا در حوزه شما، داوطلبان قبل از پایان زمان مجاز آزمون می توانستند محل را ترک کنند؟

۱- بله ۲- گاهی اوقات ۳- به ندرت ۴- خیر

۸. از چه طریقی با آزمون های گاج آشنا شده اید؟

۱- معرفی دوستان ۲- تبلیغات فضای مجازی ۳- مشاور تحصیلی ۴- ثبت نام مدارس

۹. تا به حال از کدامیک از خدمات گاج استفاده کرده اید؟

۱- گاج مارکت ۲- گاجینو ۳- دکتر IQ ۴- هر سه

۱۰. به طور کلی کیفیت برگزاری آزمون امروز را چطور ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

آزمون شماره (۱۲)
جمعه
۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۲

آزمون‌های سراسر گاج

گزینه درستی را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

پاسخنامه دهم ریاضی

دوره دوم متوسطه



برای ورود به
مدرسه مجازی گاج
اسکن کنید.

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۷۰	مدت پاسخگویی: ۹۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
			از	تا	
۱	ریاضی ۱	۲۰	۱	۲۰	۴۵ دقیقه
	هندسه ۱	۱۰	۲۱	۳۰	
۲	فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۲۵ دقیقه
۳	شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۰ دقیقه

خواصی از مجموعه‌ها

- ۱) $A - B = A \cap B'$
 ۲) $B' - A' = B' \cap A = A \cap B' = A - B$
 ۳) قانون جذب: $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$
 ۴) شرکت پذیری: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$
 ۵) قوانین دمورگان: $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$

در صورتی که M مجموعه مرجع باشد، داریم:

- ۱) $A \cup A' = M$
 ۲) $M \cap A = A$
 ۳) $M \cup A = M$
 ۴) $A \cup \emptyset = A$
 ۵) $A \cap \emptyset = \emptyset$
 ۶) $\emptyset' = M, M' = \emptyset$

بررسی گزینه‌ها:

از آنجایی که $A \cap B = M$ و M مجموعه مرجع است، در نتیجه $A = B = M$ می‌باشد، از طرفی دیگر چون $C \cup A' = \emptyset$ است، پس $C = A' = \emptyset$ می‌باشد. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $\frac{A \cap B \cap C}{M \cap \emptyset} = \emptyset$
 ۲) $\frac{A' \cup B' \cup C}{\emptyset \cup \emptyset} = \emptyset$
 ۳) $\frac{(A \cup B) - C'}{M - M} = \emptyset$
 ۴) $\frac{C' - (A - B)}{M - \emptyset} = M$

بنابراین جواب گزینه (۴) است.

دورسنامه

اگر M مجموعه مرجع باشد، داریم:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C \cap \dots &= M \Rightarrow A = B = C = \dots = M \\ A \cup B \cup C \cup \dots &= \emptyset \Rightarrow A = B = C = \dots = \emptyset \\ M \subseteq A &\Rightarrow A = M \\ A \subseteq \emptyset &\Rightarrow A = \emptyset \end{aligned}$$

۴) اعضای مجموعه A ، شمارنده‌های صحیح عدد ۶۳ و اعضای مجموعه B ، شمارنده‌های صحیح عدد ۸۱ است. ابتدا تعداد اعضای مشترک را پیدا می‌کنیم که در واقع شمارنده‌های صحیح مشترک دو عدد ۶۳ و ۸۱ است.

$$\begin{cases} 63 = 3^2 \times 7 \\ 81 = 3^4 \end{cases} \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک} = 3^2 = 9$$

$$3 \times 2 = 6 = \text{تعداد شمارنده‌های صحیح مشترک}$$

در واقع $\{ \pm 1, \pm 3, \pm 9 \}$ شمارنده‌های صحیح و مشترک دو عدد می‌باشند.

$$\begin{aligned} n(A) &= 3 \times 2 \times 2 = 12, n(B) = 5 \times 2 = 10, n(A \cap B) = 6 \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 12 + 10 - 6 = 16 \end{aligned}$$

ریاضیات

۴

چون $(A - B) \cup (B - A)$ متناهی است، پس هریک از مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ متناهی هستند. اما این دلیل نمی‌شود که لزوماً مجموعه‌های $A, B, A \cap B$ متناهی باشند؛ به عنوان مثال اگر A را مجموعه اعداد طبیعی و B را مجموعه اعداد حسابی در نظر بگیریم، هر دو مجموعه نامتناهی و اشتراک و اجتماعشان نیز نامتناهی می‌باشد، اما $A - B = \{0\}$ و $B - A = \emptyset$ متناهی‌اند. بنابراین هر ۴ مجموعه ذکر شده می‌توانند نامتناهی باشند.

دورسنامه

- مجموعه متناهی مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد. اگر مجموعه‌ای متناهی نباشد، نامتناهی است.
- اگر مجموعه $A \cup B$ متناهی باشد، هم A و هم B متناهی هستند.
- اگر مجموعه $A \cap B$ نامتناهی باشد، هم A و هم B نامتناهی هستند.
- اگر مجموعه $A \cup B$ نامتناهی باشد، حداقل یکی از مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند.
- اگر مجموعه $A \cap B$ متناهی باشد، مجموعه‌های A و B هر کدام ممکن است متناهی یا نامتناهی باشند.
- اگر مجموعه $A - B$ متناهی باشد، در صورتی که A متناهی باشد، B ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد و اگر A نامتناهی باشد، B قطعاً نامتناهی است.
- اگر مجموعه $A - B$ نامتناهی باشد، مجموعه A نامتناهی و مجموعه B ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.
- اگر $A \subseteq B$ ، در این صورت:
 - اگر A نامتناهی باشد، B نامتناهی است.
 - اگر B متناهی باشد، A متناهی است.
 - اگر A متناهی باشد، B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
 - اگر B نامتناهی باشد، A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۲

$$\begin{aligned} &((A - B) \cup (B' - A)) \cap ((A' - B) \cup (B - A'))' \\ &= \frac{A \cap B'}{A \cap B'} \cup \frac{B' \cap A}{B' \cap A} \cap \frac{A' \cap B}{A' \cap B} \cup \frac{B \cap A'}{B \cap A'} \\ &= \frac{B'}{B'} \cap \frac{(A \cup A')}{A'} \cap \frac{(A' \cap (B \cup B'))}{A'} = B' \cap A' = A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

(درستی گزینه ۳)

در صورتی که A و B هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند (جدا از هم)، $A - B = A$ خواهد بود. (درستی گزینه ۱)
 در صورتی که $A \subseteq B$ باشد، $A - B = \emptyset$ خواهد بود. (درستی گزینه ۴)
 بنابراین جواب گزینه (۲) است، زیرا اگر $A - B = B$ باشد، آن‌گاه $A = B = \emptyset$ خواهد بود که طبق فرض سؤال ($A, B \neq \emptyset$) این ممکن نیست.

دورسنامه

مجموعه مرجع

مجموعه‌ای است که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند و معمولاً آن را با M یا U نشان می‌دهند.

متمم مجموعه

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و با نماد A' نمایش می‌دهیم، به عبارت دیگر A' شامل عضوایی از U است که در A نیستند.

در صورتی که دنباله $1, 3, 9, \dots$ را دنباله درجه دوم در نظر بگیریم $(t_n = an^2 + bn + c, a \neq 0)$ داریم:

روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 9, \dots \\ 2, 6, \dots \\ 4, 16, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \\ t_2 = 3 \Rightarrow 4a + 2b + c = 3 \\ t_3 = 9 \Rightarrow 9a + 3b + c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 5a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2, b = -4, c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_n = 2n^2 - 4n + 3 \Rightarrow t_{12} = 2(12)^2 - 4(12) + 3 = 243$$

همچنین اگر دنباله مذکور، هندسی لحاظ شود، داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_1 = 1, \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = q \Rightarrow q = 3$$

$$\Rightarrow a_n = 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 243 = 3^5 \Rightarrow n-1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

دورسنامه

دنباله‌ای که جمله عمومی آن یک چندجمله‌ای درجه دوم به شکل $t_n = an^2 + bn + c$ باشد، دنباله درجه دوم گویند ($a \neq 0$).

نکته: در دنباله درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ ، تفاضلات $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 2a$ است، یعنی تفاضلات دنباله عددی ثابت است که هر جمله آن دو برابر ضرب n^2 است.

دنباله هندسی دنباله‌ای است که به جز جمله اول که غیرصفر است، هر جمله آن از ضرب کردن مقدار ثابت غیرصفر q در عدد قبلی به دست می‌آید که به آن مقدار ثابت، قدرنسبت دنباله هندسی گویند.

جمله عمومی دنباله هندسی: $t_n = t_1 q^{n-1} \quad (t_1, q \neq 0)$

با توجه به این که جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $t_n = an + b$ می‌باشد، در نتیجه ضرب n^2 باید صفر باشد:

$$8 - 2m = 0 \Rightarrow m = 4$$

$$\Rightarrow a_n = (2 \times 4 + 1)n + 4 = 13n + 4$$

$$\begin{cases} a_{11} = 13(11) + 4 = 147 \\ a_5 = 13(5) + 4 = 69 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_5} = \frac{147}{69} = \frac{49}{23}$$

دورسنامه

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عدد ثابت d به جمله قبل از خودش به دست می‌آید یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله گویند. جمله عمومی دنباله حسابی اگر t_1 جمله اول و d قدرنسبت باشد به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ می‌باشد.

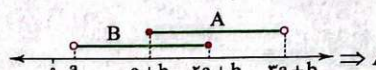
دورسنامه

اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته: تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد $X = a^n b^m \dots c^k$ که در آن $a, b, \dots, c$ اعداد اول باشند، برابر با $(n+1)(m+1)\dots(k+1)$ است و تعداد شمارنده‌های (مقسوم علیه‌های) صحیح عدد X دو برابر تعداد شمارنده‌های طبیعی است، یعنی $2(n+1)(m+1)\dots(k+1)$.

با توجه به این که اشتراک دو بازه A و B به صورت بازه‌ای بسته است، پس داریم:



$$A \cap B = [a+b, ra+b]$$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a+b=7 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=3$$

بنابراین $A = [5, 9)$ ، $B = (2, 7]$ و $A \cup B = (2, 9)$ می‌باشد که شامل ۶ عدد طبیعی است.

اگر اشتراک این دو مجموعه به صورت یک بازه باشد که بیش از یک عضو دارد، نامتناهی خواهد بود، پس اشتراکشان حداکثر یک عضو دارد:

$$\frac{5}{a+2} \leq \frac{2}{a-3}$$

$$\begin{cases} a > 3 \Rightarrow 5a - 15 \leq 2a + 4 \Rightarrow a \leq \frac{19}{3} \Rightarrow 3 < a \leq \frac{19}{3} \\ a < 3 \Rightarrow 5a - 15 \geq 2a + 4 \Rightarrow a \geq \frac{19}{3} \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

بنابراین $3 < a \leq \frac{19}{3}$ می‌باشد تا اشتراک دو بازه مذکور، متناهی شود، پس ۳ مقدار طبیعی برای a قابل قبول می‌باشد.

۱/۷

$$n(A \cup B) = 30, n(A \cap B) = 10 \Rightarrow \begin{cases} n(A \cup B) = 30 \\ n(A \cap B) = 10 \end{cases}$$

$$\frac{n(A \cup B)}{30} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{10} \Rightarrow n(A) + n(B) = 40$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A) - 10$$

$$\Rightarrow \frac{n(A - B)}{n(B)} = \frac{n(A) - 10}{n(B)}$$

از آن جایی که $n(A \cap B) = 10$ ، پس $n(B) \geq 10$ می‌باشد و کمترین مقدار آن برابر ۱۰ و بیشترین مقدار $n(A)$ برابر ۳۰ خواهد بود:

$$\xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} \frac{n(A - B)}{n(B)} = \frac{n(A) - 10}{n(B)} = \frac{30 - 10}{10} = 2$$

دورسنامه

اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) + n(B) = n(A \cup B)$$

با توجه به این که $\cos \alpha$ واسطه هندسی $\sin^2 \alpha$ و $\tan^2 \alpha$ است، داریم:

$$(\sin^2 \alpha)(\tan^2 \alpha) = \cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \xrightarrow{\substack{0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0}} \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ, \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

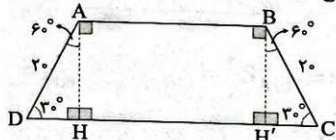
$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = 2 \quad (1)$$

$$\text{قدرنسبت دنباله هندسی} = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \xrightarrow{\sin \alpha = \cos \alpha} \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} \frac{\tan \alpha + \cot \alpha}{\text{قدرنسبت}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ابتدا از نقاط A و B ارتفاع های AH و BH' را رسم می کنیم:



$$\sin \hat{D} = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AH = AD \cdot \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

$$\cos \hat{D} = \cos 30^\circ = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = AD \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} AB = HH' = x \\ DH = CH' = 10\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = x \\ CD = 20\sqrt{3} + x \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AH \Rightarrow 180\sqrt{3} = \frac{1}{2}(20\sqrt{3} + 2x) \times 10$$

$$\Rightarrow 180\sqrt{3} = 100\sqrt{3} + 10x \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = x + x + 20\sqrt{3} + 20 = 36\sqrt{3} + 40$$

$$2 \sin \theta - \cos \theta = \frac{\Delta}{\sqrt{10}} \xrightarrow{(\cos \theta \neq 0)} 2 \tan \theta - 1 = \frac{\Delta}{\sqrt{10} \cos \theta}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} 2 \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1 = \frac{25}{10 \cos^2 \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 40 \tan^2 \theta - 40 \tan \theta + 10 = 25 \tan^2 \theta + 25$$

$$\Rightarrow 15 \tan^2 \theta - 40 \tan \theta - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 \theta - 8 \tan \theta - 3 = 0 \Rightarrow (\tan \theta - 3)(3 \tan \theta + 1) = 0$$

$$\xrightarrow{180^\circ < \theta < 270^\circ} \tan \theta = 3 \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{3}$$

(می توانستیم در ابتدا با تقسیم معادله بر $\sin \theta$ مستقیماً مقدار $\cot \theta$ را محاسبه کنیم.)

درباره

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

$$d = \frac{a_{m+n} - a_m}{m+n-m} = \frac{n-m-n}{n} = -\frac{m}{n}$$

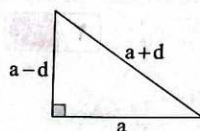
$$a_m = a_1 + (m-1)d \Rightarrow n = a_1 + (m-1)\left(-\frac{m}{n}\right)$$

$$\Rightarrow a_1 = n + \frac{m(m-1)}{n} \Rightarrow a_1 = \frac{n^2 + m^2 - m}{n}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \frac{n^2 + m^2 - m}{n} + (n-1)\left(-\frac{m}{n}\right)$$

$$= \frac{n^2 + m^2 - mn}{n}$$

با فرض $d > 0$ اضلاع را به ترتیب $a, a-d$ و $a+d$ در نظر می گیریم، طبق رابطه فیثاغورس خواهیم داشت:



$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$\Rightarrow a^2 = 2ad \xrightarrow{a \neq 0} a = 2d$$

در نتیجه اضلاع مثلث $2d, 2d$ و $3d$ هستند:

$$\begin{cases} \text{محیط} = 2d + 2d + 3d = 12d \\ \text{مساحت} = \frac{2d \times 2d}{2} = 2d^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2d^2}{12d} = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{d}{6} = \frac{r}{2} \Rightarrow d = 3r$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = 6 \times (3r)^2 = 54r^2$$

$$\begin{cases} a+b+c=27 \\ a+c=2b \end{cases} \Rightarrow 2b=27 \Rightarrow b=9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=9-d \\ c=9+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1=9-d-1=8-d \\ b+1=9+1=10 \\ c+3=9+d+3=12+d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (8-d)(12+d)=10^2$$

$$\Rightarrow -d^2 - 4d + 96 = 100 \Rightarrow d^2 + 4d + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (d+2)^2 = 0 \Rightarrow d = -2 \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=9 \\ c=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1=10 \\ b+1=10 \\ c+3=10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10, 10, 10, \dots$$

در نتیجه دنباله هندسی، دنباله ای ثابت است و جمله دهم آن، ۱۰ است.

درباره

- دنباله عددی ثابت غیر صفر، در واقع هم دنباله حسابی با قدرنسبت صفر و هم دنباله هندسی با قدرنسبت ۱ است.
- در دنباله های هندسی هر جمله از ضرب عدد ثابت q در جمله قبل خود به دست می آید:
- اگر a, b و c سه جمله متوالی (متساوی الفاصله) از دنباله حسابی باشند، واسطه حسابی a و c است، یعنی: $b = \frac{a+c}{2}$ یا $a+c=2b$
- اگر a, b و c سه جمله متوالی (متساوی الفاصله) از دنباله هندسی باشند، واسطه هندسی a و c است، یعنی: $b^2 = ac$ یا $b = \sqrt{ac}$

دوستنامه

مقایسه ریشه‌های مختلف یک عدد

اگر $a > 1$ باشد:

$$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots, a < a^2 < a^3 < \dots$$

اگر $0 < a < 1$ باشد:

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots, a > a^2 > a^3 > \dots$$

اگر $-1 < a < 0$ باشد، فرجه باید فرد باشد:

$$a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \dots$$

اگر $a < -1$ باشد، فرجه باید فرد باشد:

$$a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots$$

۱۹/۲

$$\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{92} < \sqrt[3]{125} \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{92} < 5$$

$$\sqrt[3]{243} < \sqrt[3]{520} < \sqrt[3]{1024} \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{520} < 4$$

$$\Rightarrow 7 < \sqrt[3]{92} + \sqrt[3]{520} < 9 \Rightarrow \sqrt{7} < \sqrt[3]{92} + \sqrt[3]{520} < 3$$

$$\sqrt{7} > 2 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{92} + \sqrt[3]{520} < 3$$

از آن جایی که عدد m دارای دو ریشه چهارم است، پس m عددی

مثبت است. هم‌چنین این ریشه‌ها قرینه هم هستند:

$$\begin{cases} \text{ریشه‌های چهارم عدد } m: \frac{a}{4} + \delta = -(\frac{b}{4} - \epsilon) \xrightarrow{\times 4} 2a = -3b - 6 \\ \text{ریشه‌های ششم عدد } m: \frac{1-a}{6} = -(-b-4) \Rightarrow a = -2b - 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(-2b-7) = -3b-6 \Rightarrow -4b-14 = -3b-6$$

$$\Rightarrow b = -8, a = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{m} = \frac{a}{6} + \delta = \frac{9}{6} + \delta = 1.5 + \delta \xrightarrow{\text{توان } 6} m = 1.5^6 = 11.39$$

بنابراین ریشه سوم عدد m برابر است با:

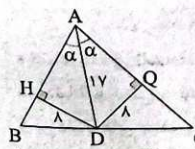
$$\sqrt[3]{11.39} = 2.24 = 16$$

دوستنامه

هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه چهارم است که قرینه یکدیگرند. عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشه سوم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه سوم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشه سوم آن منفی است.

۲۱/۳ می‌دانیم هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، بنابراین:

AD نیمساز زاویه $\Rightarrow DH = DQ = h$

$$\Delta ADQ: AD^2 = DQ^2 + AQ^2 \Rightarrow 289 = 64 + AQ^2$$

$$\Rightarrow AQ^2 = 225 \Rightarrow AQ = 15$$

$$QC = AC - AQ = 21 - 15 \Rightarrow QC = 6$$

$$\Delta DQC: DC^2 = DQ^2 + QC^2 \Rightarrow DC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$\Rightarrow DC = 10$$

۱۶/۲

$$\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2} = |\sin\theta-\cos\theta|$$

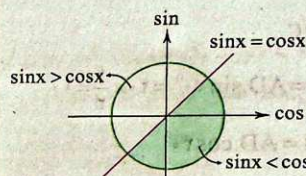
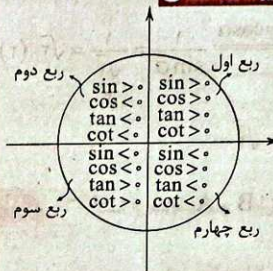
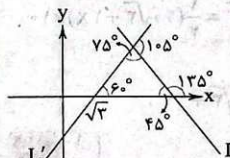
$$\Rightarrow \text{عبارت} = (\sin\theta-\cos\theta) \underbrace{|\sin\theta-\cos\theta|}_{\text{مثبت}} = \underbrace{-(\sin\theta-\cos\theta)^2}_{\text{نامثبت}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta - \cos\theta \leq 0 \Rightarrow \sin\theta \leq \cos\theta$$

از آن جایی که در ربع دوم دایره مثلثاتی، $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$ است، پس، استهای کمان θ در این ناحیه نمی‌تواند قرار گیرد.

دوستنامه

علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

۱۷/۳ با توجه به معادله خط L ، شیب آن -1 می‌باشد و با جهت مثبتمحور x زاویه 135° می‌سازد، پس داریم:

$$L' \text{ شیب} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$L' \text{ معادله خط: } y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{(\sqrt{3}, 0)} 0 = 3 + b \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$

پس عرض از مبدأ خط L' برابر -3 است.

دوستنامه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی (محور x) می‌سازد، آن‌گاه: شیب خط $= \tan \alpha$

۱۸/۳

$$-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^2 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[4]{a^2} < \sqrt[5]{a^2} < \sqrt[6]{a^2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{a^2}} > \sqrt[4]{a^2} > \sqrt[5]{a^2}$$

۱/۲۴ اگر $a=15$ و $b=10$ باشد، داریم:

$$h_a + h_b = h_c \xrightarrow{+h_c} \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_b}{h_c} = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1$$

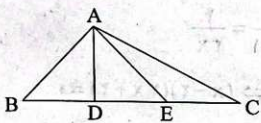
$$\Rightarrow \frac{c}{15} + \frac{c}{10} = 1 \Rightarrow \frac{2c}{30} = 1 \Rightarrow c = 15$$

دورنامه

نکته: در هر مثلث، نسبت ارتفاع‌ها، برابر با عکس نسبت اضلاع است.

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$

۲/۲۵



$$S_{ADE} = \frac{r}{f} S_{ABD} = \frac{r}{y} S_{AEC} = 6S$$

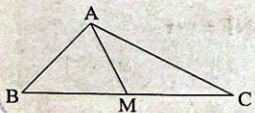
$$\Rightarrow \begin{cases} S_{ADE} = 6S \\ S_{ABD} = 18S \\ S_{AEC} = 21S \end{cases}$$

چون ارتفاع مثلث‌ها با رأس A با هم برابر هستند، داریم:

$$\frac{BE}{DC} = \frac{S_{ABE}}{S_{ADC}} = \frac{S_{ABD} + S_{ADE}}{S_{ADE} + S_{AEC}} = \frac{18S + 6S}{6S + 21S} = \frac{24S}{27S} = \frac{8}{9}$$

دورنامه

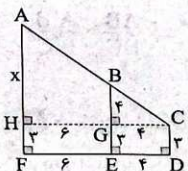
نکته: اگر ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت قاعده‌ها است.



$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{MC}$$

۲/۲۶ از نقطه C به AF عمود رسم می‌کنیم، واضح است

که $GC = ED = 4$ ، $BG = BE - EG = 7 - 3 = 4$ ، $EG = CD = 3$ و $HG = FE = 6$ ، حال اگر $AH = x$ باشد، داریم:



$$\triangle AHC : BG \parallel AH \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{CG}{CH} = \frac{BG}{AH}$$

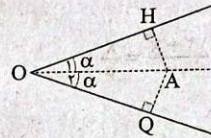
$$\Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 10$$

$$AF = FH + AH = 3 + 10 \Rightarrow AF = 13$$

دورنامه

خاصیت نیمساز

اگر نقطه‌ای مثل A روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس هر نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

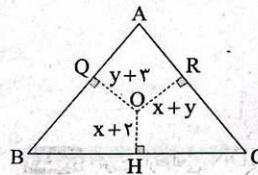


$$AH = AQ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \alpha$$

با توجه به همنهشت بودن دو مثلث OAH و OAQ (بنا به حالت وتر و یک زاویه حاده، داریم:

$$OH = OQ$$

۲/۲۲



بنا به خاصیت نیمساز داریم:

$$\hat{C} \text{ نیمساز } O: OH = OR \Rightarrow x + 2 = x + y \Rightarrow y = 2$$

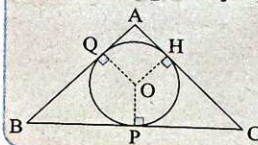
$$\hat{B} \text{ نیمساز } O: OH = OQ \Rightarrow x + 2 = y + 3$$

$$\xrightarrow{y=2} x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

$$2x + y = 2(3) + 2 = 8$$

دورنامه

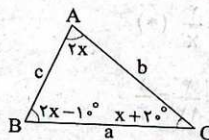
نکته: در هر مثلث، ۳ نیمساز هم‌رس هستند و نقطه هم‌رسی نیمسازها همواره داخل مثلث است و به این نقطه، مرکز دایره محاطی مثلث می‌گویند.



$$OP = OQ = OH$$

نقطه O محل هم‌رسی نیمسازها است.

۱/۲۳



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2x - 1^\circ + x + 2^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 17^\circ \Rightarrow x = 34^\circ$$

$$\hat{A} = 2x = 2(34^\circ) = 68^\circ$$

$$\hat{B} = 2x - 1^\circ = 2(34^\circ) - 1^\circ = 67^\circ$$

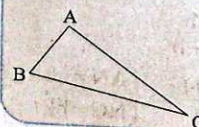
$$\hat{C} = x + 2^\circ = 36^\circ$$

$$\hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow a > b > c$$

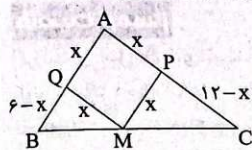
دورنامه

قضیه ضلع بزرگ‌تر و زاویه بزرگ‌تر در مثلث

در هر مثلث هر زاویه‌ای که بزرگ‌تر است، ضلع روبه‌رو به آن نیز بزرگ‌تر است و برعکس، در هر مثلث هر ضلعی که بزرگ‌تر است، زاویه روبه‌رو به آن نیز بزرگ‌تر است.



$$\hat{A} > \hat{C} \Leftrightarrow BC > AB$$

روش اول: اگر اندازه هر ضلع لوزی را برابر x فرض کنیم:

$$\triangle ABC: PM \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CP}{AC} = \frac{PM}{AB} \Rightarrow \frac{12-x}{12} = \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = 12 - x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

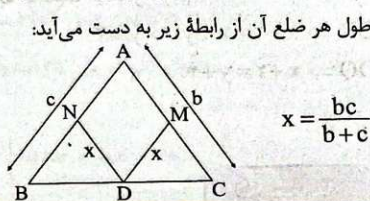
$$\text{محیط لوزی} = 4x = 4(4) = 16$$

روش دوم:

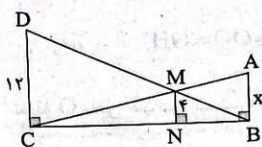
$$AP = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4$$

$$\text{محیط لوزی} = 4AP = 16$$

دروستگاه

نکته: اگر چهارضلعی AMDN لوزی باشد (یا چنانچه رأس A قائمه باشد، این چهارضلعی مربع است) طول هر ضلع آن از رابطه زیر به دست می آید:

روش اول: ۲/۲۹



$$\triangle ABC: MN \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{x}{12} \quad (*)$$

$$\triangle DCB: MN \parallel DC \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{DC} \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{x}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{BC - BN}{BC} = \frac{3-1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{(*)} \frac{x}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

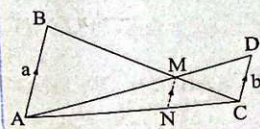
روش دوم:

$$MN = \frac{AB \cdot DC}{AB + DC} \Rightarrow 6 = \frac{12 \cdot x}{12 + x} \Rightarrow 48 + 4x = 12x$$

$$\Rightarrow 48 = 8x \Rightarrow x = 6$$

دروستگاه

نکته: در شکل زیر اگر $AB = a$ ، $DC = b$ ، $AB \parallel MN \parallel DC$ باشد، با دو بار استفاده از تالس جزء به کل در مثلث های ABC و ADC داریم:



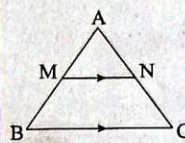
$$MN = \frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{AN}{a} = \frac{CN}{b} \Rightarrow \begin{cases} AN = ak \\ CN = bk \end{cases}$$

دروستگاه

قضیه تالس

اگر در مثلث ABC، پاره خط MN موازی BC باشد، داریم:



$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} & \text{جزء به جزء} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} & \text{جزء به کل} \end{cases}$$

۲/۲۷

$$AB \parallel EF \parallel DC \Rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{4}{3x}$$

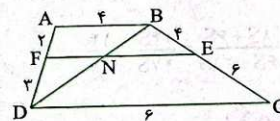
$$\Rightarrow 3x^2 = 4x + 4 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ غ قق}$$

روش اول:

$$EF = \frac{FD \times AB + AF \times DC}{AF + FD} = \frac{3 \times 4 + 2 \times 6}{2+3} = \frac{24}{5} = 4.8$$

روش دوم: قطر BD را رسم می کنیم:



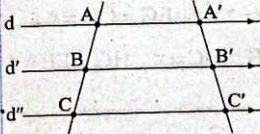
$$\triangle BDC: \frac{NE}{DC} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{NE}{6} = \frac{4}{10} \Rightarrow NE = 2.4$$

$$\triangle ABD: \frac{NF}{AB} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow \frac{NF}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow NF = 1.6$$

$$\Rightarrow EF = NE + NF = 2.4 + 1.6 = 4$$

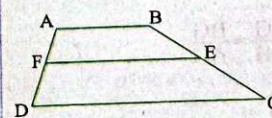
دروستگاه

۱ اگر چند خط موازی توسط دو خط قطع شوند، پاره خط های به وجود آمده متناسب هستند.



$$d \parallel d' \parallel d'' \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

۲ در دوزنقه ABCD، اگر EF موازی دو قاعده دوزنقه رسم شود، طول آن برابر است با:



$$EF = \frac{FD \times AB + AF \times DC}{AF + FD} = \frac{EC \times AB + BE \times DC}{BE + EC}$$

دورسنامه

فشار

فشار وارد بر یک سطح عبارت است از اندازه نیرویی که به صورت عمودی بر واحد سطح وارد می‌شود.

فرض کنید نیروی عمودی به اندازه $F_{\perp}$ به سطحی با مساحت A وارد می‌شود، فشار حاصل از این نیرو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{F_{\perp}}{A}$$

توجه: یکای فشار در SI برابر با نیوتون بر متر مربع $(\frac{N}{m^2})$ است که به اختصار پاسکال (Pa) گفته می‌شود.

نکته: اگر جسمی توپر به جرم m و با مساحت سطح مقطع A بر روی یک سطح افقی قرار گیرد، نیروی عمودی وارد بر سطح از طرف جسم برابر با وزن جسم است، بنابراین فشار حاصل از آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{mg}{A}$$

۳۲ ۴ فشار در نقاط A و B برابر است با:

$$\begin{cases} P_A = \rho gh_A + P_0 \\ P_B = \rho gh_B + P_0 \end{cases}$$

$$P_B = P_A \Rightarrow \rho gh_B + P_0 = \rho gh_A + P_0$$

$$\Rightarrow 2000 \times 10 \times 4h + 10^5 = 2 \times (2000 \times 10 \times h + 10^5)$$

$$\Rightarrow 2000 \times 10 \times 2h = 10^5 \Rightarrow h = 2.5m \Rightarrow 2h = 5m$$

دورسنامه

فشار در شاره‌ها

مایعات به دلیل وزن خود فشار ایجاد می‌کنند. در مایعاتی که در حال تعادل هستند و حرکت نمی‌کنند، فشار کل در عمق h از سطح آزاد مایع با چگالی ρ برابر است با:

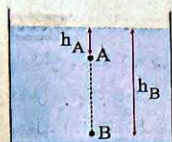
$$P_A = P_0 + \rho gh$$

توجه: فشار در سطح آزاد یک مایع، برابر فشار جو (هوا)، یعنی P_0 است.

توجه: اگر فقط فشار حاصل از مایع در عمق h از سطح آزاد مایع خواسته شود، مقدار آن برابر با ρgh می‌باشد و به آن فشار مطلق می‌گویند.

اختلاف فشار بین دو نقطه از شاره

اختلاف فشار بین دو نقطه A و B که در یک مایع قرار دارند، به فاصله قائم آن‌ها از یکدیگر بستگی دارد و برابر است با:



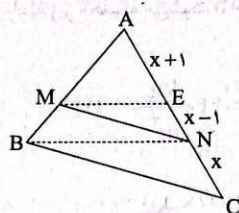
$$\begin{cases} P_A = P_0 + \rho gh_A \\ P_B = P_0 + \rho gh_B \end{cases} \Rightarrow P_B - P_A = \rho g(h_B - h_A)$$

نکات

۱ وقتی در یک مایع به اندازه h در راستای قائم، پایین می‌رویم، فشار به اندازه ρgh افزایش می‌یابد.

۲ اختلاف فشار بین دو نقطه از مایع، از فشار (P_0) مستقل است.

۱ ۳۰



$$\begin{cases} \triangle ABN : ME \parallel BN \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC} \\ \triangle ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AN^2 = AE \cdot AC \Rightarrow (2x)^2 = (x+1)(3x) \Rightarrow 4x^2 = 3x^2 + 3x$$

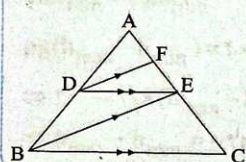
$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \xrightarrow{x \neq 0} x = 3$$

$$AC = 3x = 3(3) = 9$$

دورسنامه

تالس با دو خط موازی

هرگاه $DE \parallel BC$ و $DF \parallel BE$ باشد، با دو بار استفاده از تالس جزء به کل در مثلث‌های ABE و ABC و مقایسه کسرهای داریم:



$$AE^2 = AF \times AC$$

فیزیک

۲ ۳۱

$$\frac{2 \times 10^{-6}}{1 \text{ day}} \times \frac{1 \text{ day}}{24 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{300 \text{ L}}{1 \text{ بشکه}} \times \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ L}} \times \frac{1 \text{ cm}^3}{10^{-6} \text{ m}^3} = \frac{5}{12} \times 10^9 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

۲ ۳۲ حجم لیوان برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = 3 \times (3 \times 10^{-2})^2 \times 12 \times 10^{-2} = 3 \times 9 \times 12 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

حجم آب وارد شده به لیوان در هر ثانیه برابر است با:

$$V = 3 \times \frac{\pi}{4} R^2 = 4 \times 3 \times (2 \times 10^{-2})^2 = 4 \times 3 \times 4 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\Delta t = \frac{V}{V'} = \frac{3 \times 9 \times 12 \times 10^{-6}}{4 \times 3 \times 4 \times 10^{-4}} = 33.75 \text{ s} + 60 = 56 \text{ min}$$

بنابراین:

۳ ۳۳ اگر جرم مخروط را m در نظر بگیریم، فشار حاصل از مخروط زمانی که از طرف قاعده کوچک روی سطح قرار دارد، برابر است با:

$$P_1 = \frac{mg}{A_1}$$

اگر جرم جسمی که بر روی مخروط قرار گیرد را m' فرض کنیم، داریم:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{m+m'}{m} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1}{P_1} \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m+m'}{m} \Rightarrow 16 = 1 + \frac{m'}{m} \Rightarrow \frac{m'}{m} = 15$$

۴/۳۷ اختلاف فشار در دو نقطه هم تراز در دو مایع متفاوت در لوله U شکل از رابطه زیر محاسبه می شود. (h اختلاف ارتفاع تا سطح جدایی دو مایع است)

$$P_A - P_B = (\rho_1 - \rho_2)gh \quad (1)$$

$$\Rightarrow 220 = (\rho_1 - \rho_2) \times 10 \times \frac{\Delta}{100} \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 = 440 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1)$$

$$P_C - P_D = (\rho_2 - \rho_3)gh$$

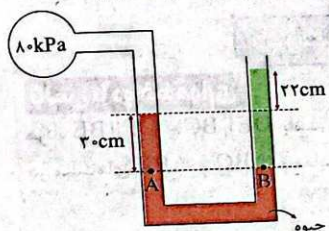
$$\Rightarrow 160 = (\rho_2 - \rho_3) \times 10 \times \frac{\Delta}{100} \Rightarrow \rho_2 - \rho_3 = 200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_2 - \rho_3) = 440 + 200 = 640 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow \rho_1 - \rho_3 = 640 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

۲/۳۸ با توجه به برابری فشار در نقاط هم تراز A و B داریم:



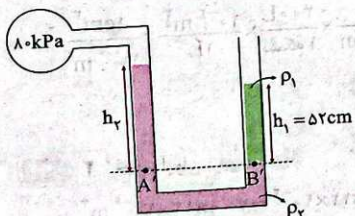
$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow P_{\text{مخزن}} + P_{\text{جیوه}}gh_{\text{جیوه}} = P_{\text{آب}} + \rho_{\text{مایع}}gh_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow 80 \times 10^3 + 13600 \times 10 \times \frac{20}{100} = 10^5 + \rho_{\text{مایع}} \times 10 \times \frac{52}{100}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = 4000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

برای حالت دوم داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{مخزن}} + \rho_2 gh_2 = P_{\text{آب}} + \rho_1 gh_1$$

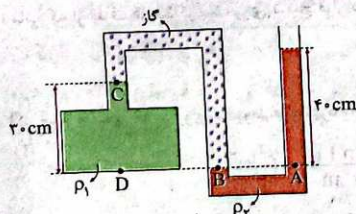
$$\Rightarrow 80 \times 10^3 + 6800 \times 10 \times h_2 = 10^5 + 4000 \times 10 \times \frac{52}{100}$$

$$\Rightarrow h_2 = 60 \text{ cm}$$

$$\Delta h = 60 - 52 = 8 \text{ cm}$$

اختلاف دو سطح را برابر است با:

۳/۳۹ با توجه به نقاط هم تراز A و B داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{آب}} + \rho_2 gh_2 = P_{\text{آب}} \quad (1)$$

$$P = \frac{mg}{A}$$

۴/۳۵ با توجه به رابطه فشار داریم:

$$\Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{A_B}{A_A} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{\pi r_B^2}{\pi r_A^2} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{5}{1}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{4}{25} = 0.16$$

درستنامه

اگر در ظرفی که سطح مقطع ظرف (A) در کل ارتفاع آن ثابت است، مایعی به جرم m بریزیم، فشار حاصل از مایع در کف ظرف از رابطه زیر به دست می آید:

$$P = \frac{mg}{A}$$

نکته: در ظرفی که سطح مقطع ظرف در کل ارتفاع آن ثابت است، اندازه نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع با وزن مایع درون ظرف، برابر است.

۱/۳۶ فشار آب اضافه شده به ظرف در کف ظرف برابر است با:

$$P_{\text{کف}} = P_{\text{جیوه}} + P_{\text{آب}}$$

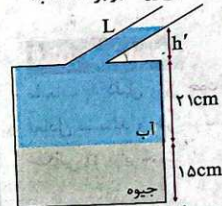
$$\Rightarrow P_{\text{آب}} = 20 - 15 = 5 \text{ cmHg}$$

ارتفاع آب اضافه شده برابر است با:

$$\rho_{\text{آب}}gh_{\text{آب}} = \rho_{\text{جیوه}}gh_{\text{جیوه}} \Rightarrow 1000 \times h_{\text{آب}} = 13600 \times \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow h_{\text{آب}} = 6.8 \text{ cm}$$

بنابراین ارتفاع ارتفاع قائمی از آب که در لوله باریک بالا می رود، برابر است با:



$$6.8 = 21 + h' \Rightarrow h' = 47 \text{ cm}$$

$$h' = L \sin 30^\circ \Rightarrow L = 47 \times 2 = 94 \text{ cm}$$

حجم کل آب اضافه شده برابر است با:

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{پهن}} + V_{\text{باریک}} \Rightarrow V_{\text{کل}} = A_1 h_1 + A_2 h_2 = 5 \times 21 + 2 \times 94$$

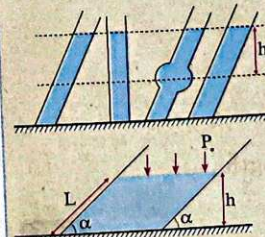
$$\Rightarrow V_{\text{کل}} = 293 \text{ cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1 = \frac{m}{293} \Rightarrow m = 293 \text{ g}$$

با توجه به رابطه چگالی داریم:

درستنامه

نکته:



یادتان باشد که برای محاسبه فشار در یک نقطه داخل مایع، منظور از ارتفاع h همیشه ارتفاع قائم از سطح مایع است. به طور مثال در شکل مقابل، فشار وارد بر کف ظرف برابر است با:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L \sin \alpha$$

$$P = P_{\text{آب}} + \rho gh \Rightarrow P = P_{\text{آب}} + \rho g L \sin \alpha$$

در نتیجه ۱۰cm از قسمت بالای ظرف را شامل می‌شود، بنابراین حجم کل آب برابر است با:

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = A_1 h_1 + A_2 h_2$$

$$\Rightarrow V = 20 \times 60 + 1000 \times 10 = 12000 + 10000 = 22000 \text{ cm}^3$$

اگر ظرف را برگردانیم، داریم:

$$V = V_1' + V_2' \Rightarrow 22000 = 15 \times 100 + x \times 20 \Rightarrow x = 35 \text{ cm}$$

بنابراین اندازه نیروی وارد بر کف ظرف برابر است با:

$$F_1 = PA = \rho g h A = 1000 \times 10 \times 5 / 5 \times 100 \times 10^{-4} = 50 \text{ N}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

در نتیجه:

دروسنامه

اندازه نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع

اگر مایعی با چگالی ρ درون ظرفی ریخته شود و ظرف تا ارتفاع h پر شود، بنابراین اندازه نیروی وارد بر کف ظرف با مساحت A از طرف مایع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} P_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} \\ P_{\text{مایع}} = \frac{F_{\text{مایع}}}{A} \end{cases} \Rightarrow F_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} A$$

نکته: فشار یک مایع فقط به ارتفاع مایع و چگالی مایع بستگی دارد، اما اندازه نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع علاوه بر ارتفاع مایع به چگالی مایع و مساحت کف ظرف هم بستگی دارد.

مساحت کف استوانه برابر است با:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3 \times (20)^2 = 1200 \text{ cm}^2$$

ارتفاع مایع درون استوانه برابر است با:

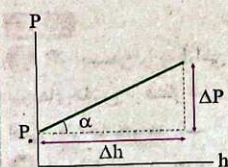
$$V = Ah \Rightarrow 30 \times 10^3 = 1200 \times h \Rightarrow h = 25 \text{ cm}$$

با توجه به نمودار داده شده در سؤال، فشار پیمانه‌ای در عمق ۲۰cm از مایع برابر با $4 \times 10^4 \text{ Pa}$ است، بنابراین:

$$\frac{\Delta P_1}{h_1} = \frac{\Delta P_2}{h_2} \Rightarrow \frac{4 \times 10^4}{20} = \frac{\Delta P_2}{25} \Rightarrow \Delta P_2 = \frac{25 \times 4 \times 10^4}{20} = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$$

دروسنامه

با توجه به این که چگالی مایع، تقریباً ثابت است، معادله فشار برحسب عمق از سطح آزاد مایع ($P = \rho g h + P_0$)، یک تابع خطی است، بنابراین نمودار فشار کل برحسب عمق مایع به شکل زیر است:



$$\tan \alpha = \frac{\Delta P}{\Delta h} = \rho g$$

نکته: عرض از مبدأ نمودار $P-h$ ، نشان‌دهنده فشار هوای محیط (P_0) است.

از طرفی فشار وارد بر نقطه C نیز همان فشار گاز است، بنابراین:

$$P_B = P_C = P_{\text{گاز}} \quad (2)$$

فشار وارد بر نقطه D برابر است با:

$$P_D = P_C + \rho_1 g h_1 \xrightarrow{(2), (1)} P_D = P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$$

$$\Rightarrow P_D - P_{\text{گاز}} = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$$

$$\Rightarrow 52000 = (\rho_2 \times 10 \times 40 \times 10^{-2}) + (\rho_1 \times 10 \times 30 \times 10^{-2})$$

$$\Rightarrow 52 \times 10^3 = 4 \rho_2 + 6 \rho_1 \Rightarrow 52 \times 10^3 = 10 \rho_1$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{52 \times 10^3}{10} = 52 \times 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

بنابراین:

$$\rho_1 = 2 \rho_2 \Rightarrow \rho_1 = 2 \times 52 \times 10^2 = 104 \times 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

۲ ۴۰

اختلاف فشار بین وجه‌های در بالایی و پایینی مکعب از رابطه $\rho g h$ محاسبه می‌شود، که h ارتفاع مکعب خواهد بود، بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta P_{\text{max}} = \rho g h_{\text{max}} \\ \Delta P_{\text{min}} = \rho g h_{\text{min}} \end{cases} \xrightarrow{\Delta P_{\text{max}} - \Delta P_{\text{min}} = 4 \text{ kPa}}$$

$$\rho g (h_{\text{max}} - h_{\text{min}}) = 4 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 2000 \times 10 \times (h_{\text{max}} - h_{\text{min}}) = 4 \times 10^3$$

$$\Rightarrow h_{\text{max}} - h_{\text{min}} = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

دروسنامه

جسم در حال تعادل در یک شاره

برای جسمی با چگالی ρ و ارتفاع h که سطح مقطع آن در طول ارتفاع آن، ثابت است و درون شاره در حال تعادل قرار دارد، اگر فشار در سطح بالایی جسم برابر با P_1 و فشار در سطح پایینی جسم برابر با P_2 باشد، اختلاف فشار بین سطوح بالایی و پایینی جسم برابر است با:

$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

توجه: چون جسم، درون شاره در حال تعادل است، بنابراین چگالی جسم با چگالی شاره برابر است.

۱ ۴۱ اگر فاصله وجه پایینی مکعب تا سطح آب برابر با h' باشد، در

این صورت داریم:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA \Rightarrow F = \rho g h' A$$

$$\Rightarrow 0.3 = 10^3 \times 10 \times h' \times 10^{-4} \Rightarrow h' = 0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

بنابراین:

$$h' = h + 1 \Rightarrow 30 = h + 1 \Rightarrow h = 29 \text{ cm}$$

۲ ۴۲ ابتدا محاسبه می‌کنیم تا چه ارتفاعی می‌توان درون ظرف آب ریخت:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow P = \frac{14}{30 \times 10^{-4}} = 7000 \text{ Pa}$$

$$P = \rho g h \Rightarrow 7000 = 1000 \times 10 \times h \Rightarrow h = 0.7 \text{ m} = 70 \text{ cm}$$

۴۴ عددی که نیروسنج برای هر جسم نشان می‌دهد، اختلاف وزن جسم و نیروی شناوری وارد بر جسم است، بنابراین اگر اطلاعات مربوط به مکعب را با اندیس (۱) و اطلاعات مربوط به کره را با اندیس (۲) نشان دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} F'_1 = W_1 - F_{b1} = m_1 g - F_{b1} \\ F'_2 = W_2 - F_{b2} = m_2 g - F_{b2} \end{cases} \\ F'_1 = F'_2 \rightarrow m_1 g - F_{b1} = m_2 g - F_{b2} \\ \Rightarrow F_{b2} - F_{b1} = m_2 g - m_1 g \\ \Rightarrow 20 = (m_2 - m_1) g \Rightarrow 20 = (6 - m_1) \times 10 \\ \Rightarrow 6 - m_1 = 2 \Rightarrow m_1 = 4 \text{ kg} \end{aligned}$$

با توجه به رابطه چگالی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{m_2}{m_1} \times \frac{V_1}{V_2} \quad \rho_2 = \rho_1 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2} \\ \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} &= \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} \xrightarrow{r=\frac{D}{2}} \frac{r}{a} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8}} \\ \Rightarrow \frac{r}{a} &= \frac{3a^3}{D^3} \Rightarrow \frac{a^3}{D^3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{D^3}{a^3} = 3 \Rightarrow D = \sqrt[3]{3}a \end{aligned}$$

دروستگاه

می‌دانیم نیروسنج وزن جسم را اندازه می‌گیرد.

تا قبل از ورود نیروسنج به داخل مایع (شاره)، نیروسنج وزن واقعی جسم، یعنی $W = mg$ را نشان می‌دهد. وقتی جسم داخل مایع قرار می‌گیرد، به اندازه نیروی شناوری از وزن جسم کم می‌شود و نیروسنج مقدار $W - F_b$ را نشان می‌دهد، در واقع می‌توان گفت نیروسنج وزن ظاهری جسم در سیال را نشان می‌دهد:

$$W - F_b = \text{وزن ظاهری جسم}$$

۴۷ وقتی جسم B درون مایع قرار دارد، نیروی شناوری از طرف مایع به جسم به سمت بالا وارد می‌شود، بنابراین نتیجه می‌گیریم که جرم جسم B بیشتر از جرم جسم A است، پس با حذف مایع، جسم B به سمت پایین حرکت می‌کند.

دروستگاه

نیروی شناوری

وقتی تمام یا قسمتی از یک جسم، درون شاره (مایع یا گاز) قرار می‌گیرد، شاره نیرویی رو به بالا به آن وارد می‌کند که به آن نیروی شناوری (F_b) می‌گویند.

نکته: نیروی شناوری (سبک‌کننده) همواره عمود بر جسم و به سمت بالا می‌باشد، بنابراین در خلاف جهت نیروی وزن است و در نهایت باعث سبکی جسم می‌شود، بنابراین وقتی جسمی در یک شاره قرار می‌گیرد، شاره با نیروی شناوری که به جسم وارد می‌کند باعث می‌شود وزن جسم به اندازه F_b (نیروی شناوری) کاهش یابد.

۴۴ فشار درون مخزن برابر با مجموع فشار مایع، فشار هوا و فشار حاصل از درپوش پیستون است.

با توجه به این که فشارسنج بوردون، فشار پیمانه‌ای را اندازه می‌گیرد، در نتیجه عدد ذکر شده شامل فشار حاصل از مایع و درپوش پیستون است، بنابراین:

$$\begin{aligned} P_A &= \rho g h + \frac{mg}{A} \Rightarrow 2 \times 10^5 = \rho \times 10 \times \frac{50}{100} + \frac{50 \times 10}{5 \times 10^{-4}} \\ \Rightarrow 2 \times 10^5 &= \rho \times 10 + 10^5 \Rightarrow \rho \times 10 = 10^5 \\ \Rightarrow \rho &= 2 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

۴۵ نیروی وزن استوانه برابر است با:

$$\begin{aligned} W &= mg \xrightarrow{m=\rho V} W = \rho V g \\ V &= Ah \rightarrow W = \rho Ahg \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = 500 \times 160 \times 10^{-4} \times 1000 \times 10^{-2} \times 10 = 80 \text{ N}$$

اندازه نیروی شناوری وارد بر استوانه که به سمت بالا است، برابر است با:

$$F_b = PA = \rho_{\text{آب}} g h A = 1000 \times 10 \times 1000 \times 10^{-2} \times 160 \times 10^{-4} = 160 \text{ N}$$

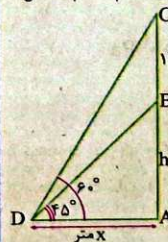
با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= ma \Rightarrow F_b - mg = ma \\ \Rightarrow 160 - 80 &= 80a \Rightarrow 80 = 80a \Rightarrow a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

دروستگاه

منشأ نیروی شناوری

مطابق شکل زیر، تویی داخل آب، غوطه‌ور است. نیروهای جانبی وارد بر توپ (برای مثال $\vec{F}_p$ و $\vec{F}_f$) هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند، پس یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. با توجه به این که قسمت پایین توپ در عمق بیشتری نسبت به بالای توپ قرار دارد، پس فشار حاصل از آب در قسمت پایینی توپ بیشتر از فشار حاصل از آب در قسمت بالایی آن است، به همین دلیل اندازه نیرویی که به سمت بالا از طرف آب به پایین توپ وارد می‌شود، بیشتر از اندازه نیروی به سمت پایینی است که از طرف آب به بالای توپ وارد می‌شود ($F_p > F_f$)، بنابراین نیروی خالص رو به بالایی به توپ وارد می‌شود که همان نیروی شناوری است، بنابراین: $F_b = F_p - F_f$



نکات:

- اگر جسمی را به آرامی در داخل شاره فرو کنیم و رهاش کنیم، برابند نیروهای ناشی از فشار شاره در راستای افقی صفر شده و جسم در راستای افقی جابه‌جا نخواهد شد.
- اندازه نیروی شناوری وارد بر یک جسم که تمام یا قسمتی از آن درون یک شاره فرو رفته است به چگالی جسم بستگی ندارد و تنها به چگالی شاره بستگی دارد.

با توجه به این که آب به صورت لایه‌ای و پیوسته درون لوله در جریان است، بنابراین آهنگ شارش حجمی شاره در طول لوله ثابت است، بنابراین با توجه به معادله پیوستگی داریم:

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = A_3 v_3$$

$$\Rightarrow A v_1 + 3 A v_2 = 3 A \times 2 v_2$$

$$\Rightarrow v_1 + 3 v_2 = 6 v_2 \Rightarrow v_1 = 3 v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$$

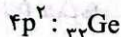
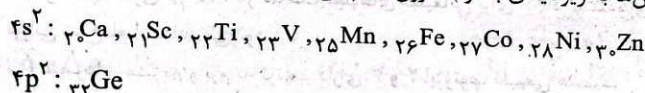
دورسنامه

اگر آب به صورت لایه‌ای و پیوسته درون لوله در جریان باشد، بنابراین آهنگ شارش حجمی شاره در طول لوله ثابت است، در نتیجه مجموع آهنگ شارش حجمی ورودی برابر با مجموع آهنگ شارش حجمی خروجی است.

شیمی

• در دوره چهارم جدول تناوبی، ۸ عنصر وجود دارد که زیرلایه $3d$ اتم آن‌ها به طور کامل از الکترون پر شده است. این عنصرها شامل 29Cu تا 36Kr هستند.

• در دوره چهارم جدول تناوبی ۱۰ عنصر وجود دارد که آرایش الکترونی اتم آن‌ها به زیرلایه‌ای با دو الکترون ختم می‌شود:



بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با:

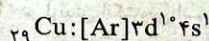
$$\frac{A}{10} = 0.8$$

دورسنامه

زیرلایه d

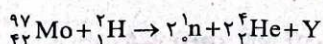
زیرلایه d با عدد کوانتومی فرعی $l=2$ ، گنجایش حداکثر ۱۰ الکترون را دارد.

در عنصرهای دسته d ، الکترون‌ها در حالی وارد زیرلایه $d(n-1)$ می‌شوند که زیرلایه ns پیش از آن‌ها و با انرژی کم‌تری پر شده است. اگر چه آرایش الکترونی این عنصرها به ns ختم می‌شود اما زیرلایه $d(n-1)$ همان بخشی است که در حال پر شدن است. برخی از عنصرهای دسته d از قاعده آفبا پیروی نمی‌کنند؛ مانند:



کروم و مس در بیرونی‌ترین زیرلایه خود ($4s$)، تنها یک الکترون دارند. زیرلایه d را از دوره چهارم جدول تناوبی می‌توان دید. عنصرهای دسته d هنگام تشکیل کاتیون، ابتدا از زیرلایه ns الکترون از دست می‌دهند و سپس از زیرلایه $d(n-1)$.

مطابق داده‌های سؤال، واکنش هسته‌ای داده‌شده را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:



با ایجاد جریان هوای پیوسته در لوله، فشار هوای درون لوله کاهش می‌یابد، بنابراین توپ‌ها کاملاً به لوله می‌چسبند.

دورسنامه

اصل برنولی

در مسیر حرکت شاره با افزایش تندی شاره، فشار شاره کاهش می‌یابد و بالعکس.

توجه: اصل برنولی حرفی از سطح مقطع لوله (شاره) نمی‌زند و تنها تندی و فشار شاره را مقایسه می‌کند.

نکته: اصل برنولی نه تنها برای مایعات بلکه برای گازها نیز برقرار است

با توجه به معادله پیوستگی داریم:

$$A_A v_A = A_B v_B$$

$$\Rightarrow \pi r_A^2 \times v_A = \pi r_B^2 \times v_B \Rightarrow r_A^2 \times v_A = v_B^2 \times r_B^2$$

$$\Rightarrow r_A^2 \times 3 = r_B^2 \times 48 \Rightarrow \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 = 16 \Rightarrow r_A = 4 r_B$$

دورسنامه

آهنگ شارش حجمی شاره

به مقدار حجمی از شاره که در واحد زمان از یک مقطع لوله عبور می‌کند، آهنگ شارش حجمی شاره می‌گویند.

اگر حجم V از شاره در مدت زمان t با تندی v از سطح مقطع A لوله عبور کند، آهنگ شارش حجمی شاره برابر است با:

$$Av = \text{آهنگ شارش حجمی شاره} \Rightarrow \frac{V}{t} = \text{آهنگ شارش حجمی شاره}$$

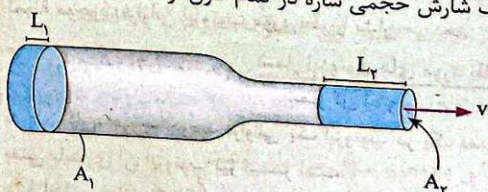
توجه: یکای آهنگ شارش حجمی شاره در SI برابر با متر مکعب بر

$$\left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)$$

ثانیه است.

معادله پیوستگی

اگر در یک لوله با سطح مقطع‌های متفاوت، شاره جریان لایه‌ای و یکپارچه داشته باشد، آهنگ شارش حجمی شاره در تمام طول لوله ثابت است.



آهنگ شارش حجمی شاره از سطح مقطع (۱)
آهنگ شارش حجمی شاره از سطح مقطع (۲)
آهنگ شارش حجمی شاره
 $\Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

به رابطه به دست آمده معادله پیوستگی می‌گویند.

نکته: با توجه به معادله پیوستگی، اگر سطح مقطع شاره کاهش یابد، تندی آن افزایش می‌یابد و بالعکس.

نکته: اگر سطح مقطع لوله، دایره‌ای شکل باشد، مساحت لوله با مجذور قطر و مجذور شعاع، متناسب است، بنابراین معادله پیوستگی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$A = \pi D^2 / 4$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{\pi D_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2 \Rightarrow D_1^2 \times v_1 = D_2^2 \times v_2$$

$$\xrightarrow{D=2r} r_1^2 \times v_1 = r_2^2 \times v_2$$

۵۸/۴) زیرلایه‌های با $l=0$ و $l=1$ به ترتیب زیرلایه‌های s و p هستند. آرایش الکترونی تمامی اتم‌ها و نسبت مورد نظر برای هر کدام در زیر آمده است:

پروسی گزیده‌ها:

- ۱) $\begin{cases} 10. \text{Ne}: 1s^2 2s^2 2p^6 \left(\frac{2}{2} = 1/5\right) \\ 15. \text{P}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3 \left(\frac{3}{2} = 1/5\right) \end{cases}$
- ۲) $\begin{cases} 12. \text{Mg}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 \left(\frac{2}{2} = 1\right) \\ 8. \text{O}: 1s^2 2s^2 2p^4 \left(\frac{4}{2} = 1\right) \end{cases}$
- ۳) $\begin{cases} 21. \text{Sc}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2 \left(\frac{1}{2} = 1/5\right) \\ 30. \text{Zn}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 \left(\frac{10}{2} = 1/5\right) \end{cases}$
- ۴) $\begin{cases} 25. \text{Mn}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2 \left(\frac{5}{2} = 1/5\right) \\ 33. \text{As}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^3 \left(\frac{15}{2} = 1/5\right) \end{cases}$

۵۹/۳) جرم اتمی کربن - ۱۲ برابر با 12amu است. بنابراین جرم اتمی کربن - ۱۳ برابر خواهد بود با:

$$12 \text{amu} \times 1/10 = 13/2 \text{amu}$$

واضح است که درصد فراوانی ^{13}C در این نمونه برابر $100 - 96 = 4$ درصد است. برای محاسبه جرم اتمی میانگین کربن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$+ (\text{جرم اتمی ایزوتوپ اول}) = (\text{تفاوت جرم اتمی ایزوتوپ‌ها}) \times (\text{درصد فراوانی ایزوتوپ دوم})$$

$$\bar{M} = 12 + \left(\frac{4}{100} \times (13/2 - 12)\right) = 12/048 \text{amu}$$

دوستانه

درصد فراوانی

نسبت شمار ایزوتوپ مورد نظر یک عنصر به تمام ایزوتوپ‌های آن عنصر در نمونه موجود، فراوانی ایزوتوپ مورد نظر را نشان می‌دهد.

$$\%F = \frac{\text{شمار ایزوتوپ‌های مورد نظر عنصر}}{\text{شمار کل ایزوتوپ‌های عنصر}} \times 100$$

به طور کلی، هر چه درصد فراوانی یک ایزوتوپ در یک نمونه بیشتر باشد، یعنی پایداری آن ایزوتوپ نیز بیشتر است. همه ایزوتوپ‌های یک عنصر، تنها یک خانه را در جدول دوره‌ای اشغال می‌کنند و هم‌مکان هستند. برای بیان جرم اتمی یک عنصر نیز باید براساس درصد فراوانی و جرم اتمی ایزوتوپ‌های آن، جرم اتمی میانگین آن عنصر را محاسبه کرد.

جرم اتمی میانگین:

$$\bar{M} = \frac{M_1 F_1 + M_2 F_2 + M_3 F_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots}$$

M_1 : جرم ایزوتوپ اول
 F_1 : فراوانی ایزوتوپ اول
 M_2 : جرم ایزوتوپ دوم
 F_2 : فراوانی ایزوتوپ دوم
 M_3 : جرم ایزوتوپ سوم
 F_3 : فراوانی ایزوتوپ سوم
 یکای جرم اتمی میانگین برحسب «amu» بیان می‌شود.
 روش دیگری برای محاسبه جرم اتمی میانگین:

$$\bar{M} = M_1 + \frac{F_2}{100} \times (M_2 - M_1) + \frac{F_3}{100} \times (M_3 - M_1) + \dots$$

برای عدد جرمی و عدد اتمی می‌توان نوشت:

$$97 + 2 = 2(1) + 2(4) + A \Rightarrow A = 89$$

$$42 + 1 = 2(0) + 2(2) + Z \Rightarrow Z = 39$$

بنابراین نماد شیمیایی Y به صورت $^{89}_{39}Y$ است:

$$n - p = (A - Z) - Z = (89 - 39) - 39 = 11$$

۵۳/۲) نور خورشید، اگرچه سفید به نظر می‌رسد اما با عبور از قطره‌های آب موجود در هوا که پس از بارش هنوز در هوا پراکنده است، تجزیه می‌شود و گستره‌ای پیوسته از رنگ‌ها را ایجاد می‌کند. این گستره رنگی، شامل بی‌نهایت طول موج از رنگ‌های گوناگون است.

پروسی گزیده‌های نام‌ست:

۱) مجموع جرم الکترون‌های عنصر صدم جدول تناوبی در حدود 0.05amu است.

۲) اگر طول موج یک پرتو دو برابر شود، انرژی آن نصف می‌شود.

۳) عدد آووگادرو برای شمارش ذره‌ها به کار می‌رود. نقش N_A در شیمی مانند نقش شانه در شمارش تخم‌مرغ‌هاست.

۵۴/۴) عنصرهای A, D, E و X به ترتیب ^{10}Ne ، ^{12}Mg و ^{28}Ni هستند.

پروسی عبارات‌ها:

۱) در ناحیه مرئی طیف نشری خطی اتم هلیوم، ۶ نوار رنگی وجود دارد.
 ۲) از لامپ حاوی گاز Ne در ساخت تابلوهای تبلیغاتی برای ایجاد نوشته‌های نورانی سرخ‌فام استفاده می‌شود.

۳) عنصرهای منیزیم و برم به ترتیب دارای ۲ و ۳ ایزوتوپ طبیعی هستند.
 ۴) عنصر ^{28}Ni در گروه دهم جدول دوره‌ای جای دارد. عدد اتمی سه عنصر دیگر این گروه به ترتیب ۷۸، ۴۶ و ۱۱۰ است:

$$46 + 78 + 110 = 234$$

شمار عنصرهای ساختگی جدول دوره‌ای برابر با ۲۶ است:

$$\frac{234}{26} = 9$$

۵۵/۴) عنصرهای A, B, C, D و E به ترتیب ^{24}Cr ، ^{3}Li ، ^{26}Fe ، ^{29}Cu و ^{16}S هستند.

پروسی گزیده‌ها:

۱) اتم هر کدام از عنصرهای ^{24}Cr و ^{16}S شامل ۶ الکترون ظرفیتی است.
 ۲) آرایش الکترونی اتم‌های ^{24}Cr و ^{29}Cu از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.
 ۳) شعله فلزهای ^{3}Li و ^{29}Cu به ترتیب سرخ و سبزرنگ است. اگر نور حاصل از شعله‌های دو فلز لیتیم و مس را از منشور عبور دهیم، نور مربوط به شعله فلز مس با زاویه بیشتری منحرف می‌شود. زیرا انرژی نور سبز بیشتر از نور سرخ است.
 ۴) در آرایش الکترونی اتم چهار عنصر لیتیم ($1s^1$)، کروم ($3d^5, 4s^1$)، منگنز ($3d^5$) و مس ($4s^1, 3d^9$) زیرلایه نیمه‌پر وجود دارد.

۵۶/۱) اگر 100°C گرم از این ترکیب داشته باشیم، 60°C گرم آن را A و 40°C گرم دیگر را M تشکیل می‌دهد. از آن‌جا که نسبت جرم A به جرم M برابر با نسبت جرم مولی A به جرم مولی M است، به‌ازای هر اتم A در ترکیب مورد نظر یک اتم M وجود دارد.

۵۷/۲) پایدارترین رادیوایزوتوپ ساختگی هیدروژن ^3H بوده که شامل یک پروتون، یک الکترون و ۴ نوترون است.

بنابراین تفاوت شمار ذره‌های باردار (p و e) و بدون بار (n) برابر با ۲ است.

۳/۶۴ وجود نمک خوراکی (یون‌های Na^+ و Cl^-) در خیارشور می‌تواند باعث رسانایی الکتریکی شود، زیرا یون‌ها به سوی قطب‌های ناهمنام حرکت می‌کنند، پس از مدتی حرکت انتقالی یون‌ها در بافت گیاه محدود شده اما با وجود میدان الکتریکی، یون‌های سدیم با جذب انرژی شروع به نشر می‌کنند. این فرایند باعث ایجاد رنگ زرد درخشان می‌شود. (نشر یون‌های کلرید در گستره فرابنفش است و مرئی نیستند.)

۴/۶۵ برای تعیین شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده میان اتم فلز و نافلز سازنده یک ترکیب یونی دوتایی، به‌ازای یک مول از آن ترکیب، کافیت تعداد کاتیون در فرمول شیمیایی ترکیب یونی را در بار کاتیون ضرب کنیم.

پرسش‌های گزینیه‌ها:

۱) $\text{MgO} : 0/8 \times 1 \times 2 = 1/6 \text{ mol } e^-$

۲) $\text{CaCl}_2 : 0/5 \times 1 \times 2 = 1 \text{ mol } e^-$

۳) $\text{Na}_2\text{S} : 0/7 \times 2 \times 1 = 1/4 \text{ mol } e^-$

۴) $\text{AlF}_3 : 0/6 \times 1 \times 3 = 1/8 \text{ mol } e^-$

۴/۶۶ عدد اتمی دومین عنصر گروه سوم برابر با ۳۹ است.

بنابراین عدد اتمی سه عنصر A، X و D به ترتیب برابر با ۱۲، ۱۳ و ۱۴ است:

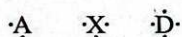
$12A, 13X, 14D$

پرسش‌های گزینیه‌ها:

۱) D یا همان ^{14}Si یون تک‌اتمی تشکیل نمی‌دهد. در حالی که A و X یا همان ^{12}Mg و ^{13}Al به ترتیب کاتیون‌های Mg^{2+} و Al^{3+} تشکیل می‌دهند.

۲) A و D به ترتیب در گروه‌های ۲ و ۱۴ جدول دوره‌ای جای دارند.

۳) آرایش الکترون - نقطه‌ای سه اتم به صورت زیر است:



۴) آرایش الکترونی اتم‌های A، X و D به ترتیب به زیرلایه‌های $3p^1$ ، $3s^2$ و $3p^2$ ختم می‌شود:

$3s^2 : (n+1) = 2(3+0) = 6$

$3p^1 : (n+1) = 1(3+1) = 4$

$3p^2 : (n+1) = 2(3+1) = 8$

$6 + 4 + 8 = 18$

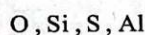
پرسش‌های گزینیه‌ها:

۱) فراوان‌ترین عنصر سازنده سیاره زمین (Fe) و نخستین عنصر ساخت بشر (Tc) جزو عناصر دسته d هستند.

۲) دومین عنصر فراوان سیاره زمین (O)، همان چهارمین عنصر فراوان سیاره مشتری است.

۳) گوگرد در هر کدام از سیاره‌های زمین و مشتری، رتبه ششم را از نظر درصد فراوانی دارد؛ البته که درصد فراوانی گوگرد در زمین بیشتر است.

۴) در بین هشت عنصر فراوان سیاره زمین، آرایش الکترونی اتم نیمی از عنصرها به زیرلایه p ختم می‌شود:



۳/۶۵ تعداد اتم‌های موجود در ۳/۴g فلز W برابر است با:

$$? \text{ atom } W = 3/4 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol } W}{184 \text{ g}} \times \frac{N_A \text{ atom } W}{1 \text{ mol } W} = \frac{1/4}{92} \times N_A \text{ atom}$$

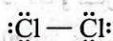
اکنون حساب می‌کنیم این تعداد اتم در پتاسیم سیانید، معادل چند میلی‌گرم از این ماده کشنده است.

$$? \text{ mg KCN} = \frac{1/4}{92} \times N_A \text{ atom} \times \frac{1 \text{ mol KCN}}{2 N_A \text{ atom}} \times \frac{65 \text{ g KCN}}{1 \text{ mol KCN}} \\ \times \frac{1000 \text{ mg KCN}}{1 \text{ g KCN}} = 400 \text{ mg KCN}$$

بنابراین وزن شخص مورد نظر برابر است با:

$$400 \text{ mg KCN} \times \frac{\text{وزن انسان}}{5 \text{ mg KCN}} = 80 \text{ kg}$$

۴/۶۱ کلر (Cl_2) گازی زردرنگ مایل به سبز است. ساختار لوویس Cl_2 به صورت زیر است:

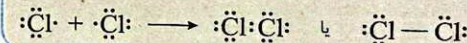


دوستانه

کلر (Cl)

کلر با نماد شیمیایی Cl و آرایش الکترونی $^{17}\text{Cl} : [\text{Ne}] 3s^2 3p^5$ دومین عنصر موجود در گروه ۱۷ جدول تناوبی است که در دوره سوم این جدول جای دارد.

کلر نافلزی گازی شکل است همان‌گونه که در شکل ۲۵ صفحه ۳۶ مشخص است، این گاز، زردرنگ (مایل به سبز) بوده و به صورت مولکول‌های دواتمی یافت می‌شود. پیوند میان دو اتم کلر در گاز کلر، از نوع اشتراکی (کووالانسی) است:



۴/۶۲ عدد اتمی عنصر X برابر با ۲۷ بوده و آرایش الکترونی اتم آن به صورت زیر است:

$^{27}\text{X} : [18 \text{ Ar}] 3d^5 4s^2$

در ترکیب X_2O_3 ، فرمول کاتیون این عنصر به صورت X^{3+} است.

$^{27}\text{X}^{3+} : [18 \text{ Ar}] 3d^6$
 $(n+1) : 6(3+2) = 30$

۱/۶۳ مطابق داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$^{79}\text{Y}^{2-} - \begin{cases} p_y + n_y = 79 \\ e_y = p_y + 2 \end{cases} \Rightarrow e_y + n_y = 81$$

$$\text{X}^{3+} - \begin{cases} e_x = p_x - 3 \\ e_x = e_y - 12 \end{cases} \Rightarrow e_y - p_x = 9$$

$$\begin{cases} n_x = n_y - 13 \\ n_y = 81 - e_y \end{cases} \rightarrow n_x = 68 - e_y$$

$$\Rightarrow n_x = 59 - p_x \quad (\text{I})$$

از طرفی مطابق رابطه $A = 3Z - 22$ برای عنصر X می‌توان نوشت:

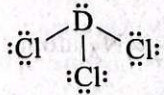
$A - Z = 3Z - 22 \Rightarrow n_x = 2p_x - 22 \quad (\text{II})$

اگر معادله‌های (I) و (II) را به طور هم‌زمان حل کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \text{I) } n_x = 59 - p_x \\ \text{II) } n_x = 2p_x - 22 \end{cases} \Rightarrow 2p_x = 81 \Rightarrow p_x = 40.5$$

بنابراین عنصر X در خانه بیست و هفتم جدول تناوبی جای دارد و همان M است.

۶۹/۱ با توجه به داده‌های سؤال، ساختار مولکول DCl_3 به صورت زیر است:



به این ترتیب D متعلق به گروه ۱۵ جدول تناوبی است.

عنصر	A	M	X	D	E
گروه	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

واضح است که این عناصر همگی متعلق به دوره دوم یا دوره سوم جدول تناوبی هستند.

پرسش‌گزینده‌های نادرست:

(۲) اگر A و M، دو فلز Mg و Al باشند، بر هم بی‌اثر هستند.

(۳) اگر عنصر X همان C باشد، هر مولکول از اکسید آن (CO)، می‌تواند شامل دو اتم باشد.

(۴) اگر پنج عنصر متعلق به دوره سوم جدول تناوبی باشند، هیچ‌کدام از آن‌ها در دما و فشار اتاق، گازی شکل نیستند.

۷۰/۲ تعداد تمام خطوط طیفی ممکن را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

از بین این ۱۵ خط، ۴ مورد که مربوط به انتقال از لایه‌های بالاتر به $n=2$ است، مرئی بوده و با چشم غیرمسلح می‌توان آن‌ها را دید:

$$\frac{4}{15} \times 100 = 26.67\%$$

۶۸/۱ بررسی عبارات‌های نادرست:

پ) آرایش الکترون - نقطه‌ای هلیوم (He) و اتم عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی (X) در زیر آمده است:

X: He:

ت) ترتیب $\text{Ne} < \text{Ar} < \text{He}$ را می‌توان به درصد فراوانی این گازهای نجیب در سیاره مشتری نسبت داد.

دوستنامه

گازهای نجیب

به هجدهمین گروه از عنصرهای جدول دوره‌ای که گازی شکل هستند، گازهای نجیب می‌گویند.

این گازها تمایلی به انجام واکنش با دیگر عناصر ندارند و بی‌رنگ، بی‌بو، بدون مزه و غیرقابل اشتعال هستند. آرایش الکترونی گازهای نجیب (به جز

هلیوم) به $ns^2 np^6$ ختم می‌شود. گازهای نجیب عبارتند از:

${}^2\text{He}$, ${}^{10}\text{Ne}$, ${}^{18}\text{Ar}$, ${}^{36}\text{Kr}$, ${}^{54}\text{Xe}$, ${}^{86}\text{Rn}$, ${}^{118}\text{Og}$

ویژگی‌ها و کاربردهای گازهای نجیب:

۱) از آرایش الکترونی گازهای نجیب برای نوشتن آرایش الکترونی فشرده دیگر عناصر استفاده می‌شود.

۲) از لامپ حاوی گاز نئون برای ایجاد نوشته‌های سرخ فام در تابلوهای تبلیغاتی استفاده می‌شود.

۳) هلیوم، آرگون و نئون به ترتیب در جایگاه ۲، ۷ و ۸ فراوان‌ترین عنصرهای سازنده سیاره مشتری قرار دارند.

۴) هلیوم از اولین عنصرهایی بود که با به عرصه جهان گذاشت.

۵) نماد شیمیایی همه گازهای نجیب دوحرفی است.

۶) فلزهای اصلی با از دست دادن الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب دوره پیش از خود و نافلزها با گرفتن الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسند.

۷) گازهای نجیب به شکل تک‌اتمی در طبیعت یافت می‌شوند.