

آزمون شماره (۱۲)
جمعه
۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۱

آزمون‌های سراسر کاج

گزینه در سدر انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

یازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

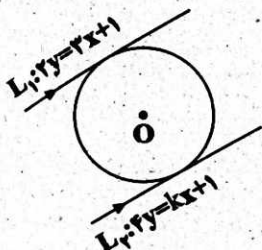
نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۸۰	مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	حسابان ۱	۱۰	۱	۴۵ دقیقه
	آمار و احتمال	۱۰	۱۱	
	هندسه ۲	۱۰	۲۱	
۲	فیزیک	۲۵	۳۱	۳۰ دقیقه
۳	شیمی	۲۵	۵۶	۲۵ دقیقه



۱- مطابق شکل، دایره‌ای بر دو خط موازی L_1 و L_2 مماس است. اگر S مساحت دایره باشد، مقدار $\left[\frac{\pi}{kS}\right]$ کدام است؟ [نماد جزء صحیح است]



(۱) ۳۴

(۲) ۱۷

(۳) ۳۲

(۴) ۱۶

۲- دو نقطه A و B به ترتیب با طول‌های ۳- و ۵ دو رأس مجاور مربعی هستند که معادله ضلع AB به صورت $y=2x+h$ است. مساحت مربع کدام است؟

(۴) $\frac{320}{3}$

(۳) ۳۲۰

(۲) $\frac{160}{3}$

(۱) ۱۶۰

۳- اگر α و β ریشه‌های مثبت معادله $x^6+1=6x^2$ باشند، دامنه و برد تابع $f(x)=\alpha\beta-\sqrt{2(\alpha+\beta)-x}$ به ترتیب D_f و R_f باشد، چند عدد صحیح در مجموعه D_f-R_f قرار دارد؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۴- اگر مجموع ریشه‌های دوم و مثبت جواب‌های معادله $x^2+46a+8=18ax$ برابر ۶ باشد، برای a چند مقدار وجود دارد؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

۵- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$

(۲) ۲

(۱) -۲

۶- اگر S_n مجموع n جمله ابتدایی دنباله $a_n=\frac{4n-3}{3^n}$ باشد، مقدار $\left[\frac{2}{3}S_{20}\right]$ کدام است؟ [نماد جزء صحیح است]

(۴) -۱

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۷- چند تابع غیر ثابت مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که رابطه $f(x)f(t)=f(x+t)+xt$ در آن‌ها برقرار باشد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

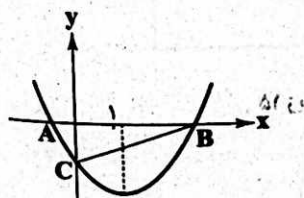
۸- نمودار تابع $f(x)=x^2-(k+1)x-k-2$ رسم شده است. حداقل مساحت مثلث ABC کدام عدد صحیح است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۱۱



محل انجام محاسبات

۹- مجموعه جواب معادله $|x+2|+|x-x^2|=x^2$ با شرط $x < 1$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

۱۰- توابع $f(x) = \sqrt{(x^2-6x+9)(x^2+5x-m^2-1)}$ و $g(x) = |x-3|\sqrt{x^2+5x-m^2-1}$ مساوی هستند. m دارای چند مقدار صحیح است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

آمار و احتمال

۱۱- اگر گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \vee r)$ یک گزاره نادرست باشد، ارزش گزاره‌های $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ و $(p \vee r) \Rightarrow q$ به ترتیب چگونه است؟

- (۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

۱۲- گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x, y)$ با کدام گزاره‌نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

- (۱) $y - 5x^2 = 7$ (۲) $x^2 + y^2 = 7$ (۳) $4x^2 - y^2 = 5$ (۴) $8x + 2y = 1$

۱۳- گزاره $p \wedge [(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]$ با کدام یک از گزاره‌ها هم‌ارز است؟

- (۱) p (۲) q (۳) $p \vee q$ (۴) $p \wedge q$

۱۴- نقیض گزاره $(\forall x, y \in \mathbb{R}; (2x - y = 3 \Leftrightarrow x = 2 \vee y = 1))$ کدام است؟

- (۱) $\exists x, y \in \mathbb{R}; (2x - y = 2 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge y \neq 1)$ (۲) $\exists x, y \in \mathbb{R}; (2x - y \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge y \neq 1)$

- (۳) $\forall x, y \in \mathbb{R}; (2x - y = 3 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge y \neq 1)$ (۴) $\forall x, y \in \mathbb{R}; (2x - y \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge y \neq 1)$

۱۵- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که دقیقاً سه عضو آن اعداد متوالی باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۱۶- اگر ۳ عضو از مجموعه A کم کنیم از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۱۲ مجموعه کم می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعه A با

تعداد زیرمجموعه‌های x عضوی آن برابر است. x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷- اگر $A = \{5, x, \{3x+y\}\}$ و $B = \{3, z+1, \{2z+x\}\}$ در رابطه‌های $A \subseteq B$ و $A' \subseteq B'$ صدق کنند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۸- در مجموعه‌ها حاصل $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')]$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $B \cup A$ (۴) $A \cap B$

۱۹- برای دو مجموعه ناتهی A و B رابطه $A \times B = B \times A$ برقرار است. اگر ۵ عضو از مجموعه A حذف کنیم، مجموعه C حاصل می‌شود به

طوری که $B \times C = C \times B$ است. مجموعه B چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

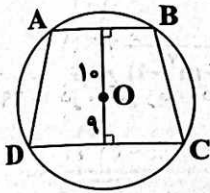
- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

۲۰- اگر $A \cap B$ دارای ۱۵ زیرمجموعه غیرتهی و $(A-B)$ دارای ۳ زیرمجموعه دو عضوی و $(A-B) \times (B-A)$ دارای ۲۷ عضو باشد، مجموعه B چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

- (۱) ۶۶ (۲) ۷۸ (۳) ۹۱ (۴) ۱۰۵

محل انجام محاسبات

هندسه (۲)



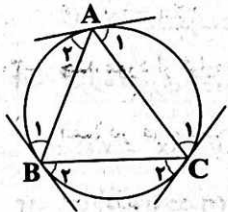
۲۱- در شکل زیر شعاع دایره برابر ۱۵ است. مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟

(۱) $278 + 95\sqrt{5}$

(۲) $278 + 90\sqrt{5}$

(۳) $245 + 90\sqrt{5}$

(۴) $228 + 95\sqrt{5}$



۲۲- در شکل زیر $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2$ چند درجه است؟

(۱) 360°

(۲) 180°

(۳) 240°

(۴) 210°

۲۳- در دایره‌ای به شعاع $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ، تفاضل طول اضلاع چهارضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی این دایره کدام است؟

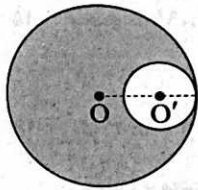
(۴) $3\sqrt{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{4})$

(۳) $3\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۱) $3\sqrt{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

۲۴- در شکل زیر مساحت ناحیه رنگی 55π و $OO' = 5/5$ است، نسبت شعاع دایره بزرگ‌تر به شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟



(۱) $\frac{43}{9}$

(۲) $\frac{51}{4}$

(۳) $\frac{31}{9}$

(۴) $\frac{31}{4}$

۲۵- اندازه ارتفاع‌های یک مثلث ۵، ۷، ۸ است. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

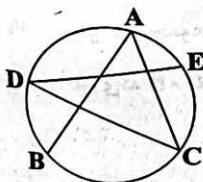
(۴) $\frac{31}{140}$

(۳) $\frac{51}{140}$

(۲) $\frac{280}{131}$

(۱) $\frac{131}{280}$

۲۶- در شکل زیر، شعاع دایره r است. اگر طول وتر BC برابر $r\sqrt{3}$ و طول وتر EC برابر $r\sqrt{2}$ باشد، $\hat{A} + \hat{D}$ چند درجه است؟



(۱) 105°

(۲) 150°

(۳) 75°

(۴) 95°

۲۷- یک ذوزنقه متساوی الساقین بر یک دایره به شعاع $\sqrt{6}$ محیط است. اگر قاعده کوچک این ذوزنقه ۴ باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

(۴) $5\sqrt{6}$

(۳) $4\sqrt{6}$

(۲) $5\sqrt{3}$

(۱) $10\sqrt{6}$

محل انجام محاسبات



۲۸- دوزنقهای با طول قاعده‌های ۶ و ۹ و طول یک ساق ۵ قابل محاط شدن در دایره است. طول قطعه مماس که از نقطه تلاقی امتداد دو ساق دوزنقه در بیرون دایره بر آن رسم می‌شود، کدام است؟

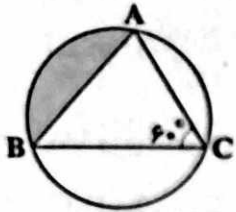
$$8\sqrt{6} \quad (۲)$$

$$6\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$5\sqrt{6} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{6} \quad (۱)$$

۲۹- در شکل زیر، اگر طول کمان AB برابر 2π باشد، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



$$12\pi - \sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\pi - \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\pi - \sqrt{3} \quad (۳)$$

$$12\pi - 9\sqrt{3} \quad (۴)$$

۳۰- چند مورد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) در هر مثلث شعاع دایره محاطی خارجی برابر است با: $r_a = \frac{S}{p-a}$ و $r_b = \frac{S}{p-b}$ و $r_c = \frac{S}{p-c}$.

ب) لوزی یک چهارضلعی محاطی است.

ج) گایت یک چهارضلعی محیطی است.

د) محل برخورد عمود منصف اضلاع یک چهارضلعی، مرکز دایره محیطی آن چهارضلعی است.

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

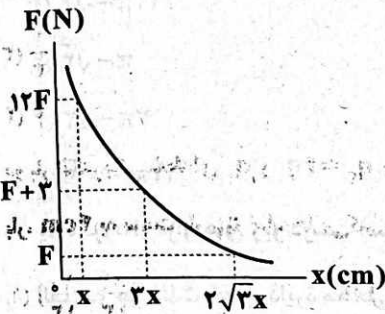
$$2 \quad (۱)$$

فیزیک



۳۱- دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 10 \mu C$ و $q_2 = 12 \mu C$ در اختیار داریم. اگر نمودار بزرگی نیروی الکتریکی که این دو ذره باردار به یکدیگر وارد می‌کنند برحسب فاصله بین آن‌ها مطابق شکل زیر باشد، x و F (به ترتیب از راست به چپ) برحسب SI در کدام گزینه به درستی

آمده‌اند؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$



(۱) 9 و $\frac{1}{10}$

(۲) 10 و 9

(۳) 3 و $\frac{1}{10}$

(۴) 10 و 3

۳۲- دو بار الکتریکی نقطه‌ای مشابه و مثبت در فاصله r از یکدیگر، نیروی الکتریکی به بزرگی F به هم وارد می‌کنند. تقریباً چند درصد از باریکی برداریم و به بار دیگری اضافه کنیم تا زمانی که دو بار در فاصله $\frac{1}{4}r$ از یکدیگر قرار می‌گیرند، بزرگی نیروی الکتریکی که به یکدیگر

وارد می‌کنند، 69 درصد افزایش یابد؟

(۴) 100

(۳) 75

(۲) 50

(۱) 25

۳۳- مطابق شکل زیر، دو کره مشابه با بارهای $1 \mu C$ و جرم $1 mg$ در حالت تعادل قرار دارند. اگر به کره (۲) نیروی عمودی تکیه‌گاه به بزرگی $6 \mu N$ وارد شود،

فاصله بین دو کره چند متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}, g = 10 \frac{N}{kg})$ و کره (۲) فقط با درب در تماس است.



(۱) $75\sqrt{10}$

(۲) $7/5\sqrt{10}$

(۳) 750

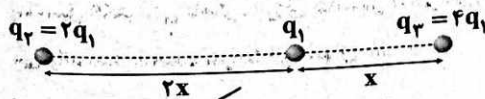
(۴) 75

۳۴- مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1, q_2, q_3 بر روی یک پاره خط ثابت شده‌اند. اگر بزرگی برایندهای الکتریکی حاصل از

بارهای q_1 و q_2 در محل بار q_3 برابر با E_3 ، بزرگی برایندهای الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_3 در محل بار q_2 برابر با E_2 و

بزرگی برایندهای الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_3 در محل بار q_1 برابر با E_1 باشد، حاصل $\frac{E_3 - E_1}{E_2}$ در کدام گزینه به درستی

آمده است؟



(۱) $1/43$

(۲) $2/21$

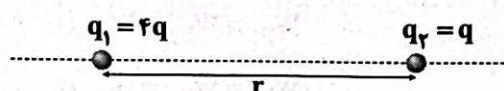
(۳) $2/38$

(۴) $3/28$

محل انجام محاسبات



۳۵- نقاط A و A' روی پاره خط خط واصل بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 هستند که اندازه میدان‌های الکتریکی حاصل از هر یک از بارهای q_1 و q_2 در آن نقاط، هم‌اندازه می‌باشند. فاصله بین دو نقطه A و A' چند برابر فاصله بین دو بار است؟



(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۳۶- دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و $q_2 = 4q_1$ به ترتیب در مختصات $(0, 5\text{cm})$ و $(12\text{cm}, 0)$ قرار دارند. حال بار q_1 را در راستای خط واصل بین دو بار، 4cm به سمت بار q_2 جابه‌جا می‌کنیم. در چه نقطه‌ای (برحسب سانتی‌متر) برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار، صفر می‌شود؟

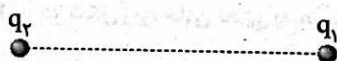
(۴) $(\frac{30}{13}, \frac{14}{13})$

(۳) $(\frac{30}{13}, \frac{72}{13})$

(۲) $(\frac{72}{13}, \frac{30}{13})$

(۱) $(\frac{84}{13}, \frac{30}{13})$

۳۷- دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r از یک‌دیگر قرار دارند. اگر بار q_1 خنثی شود، برآیند میدان‌های الکتریکی در وسط فاصله بین دو بار، ۲۵ درصد به سمت راست افزایش می‌یابد. نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟



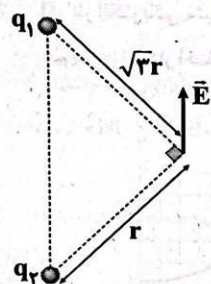
(۱) ۵

(۲) $\frac{1}{5}$

(۳) ۴

(۴) $\frac{1}{4}$

۳۸- مطابق شکل زیر، بردار برآیند میدان‌های الکتریکی ($\vec{E}$) حاصل از بارهای q_1 و q_2 به موازات خط واصل بین بارهای q_1 و q_2 است.



نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

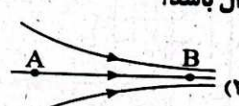
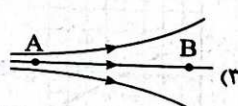
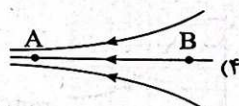
(۱) $-3\sqrt{3}$

(۲) $+3\sqrt{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

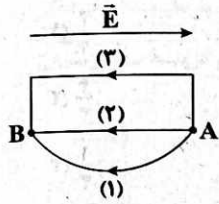
(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

۳۹- فرض کنید در یک میدان الکتریکی غیریکنواخت، یک بار الکتریکی منفی را از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌کنیم. در این جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی کاهش، انرژی پتانسیل الکتریکی افزایش و بزرگی میدان الکتریکی کاهش می‌یابد. شکل داده‌شده در کدام گزینه می‌تواند نشان‌دهنده شرایط این سؤال باشد؟



محل انجام محاسبات

۴۰- بار الکتریکی نقطه‌ای q را در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ از نقطه A تا نقطه B از سه مسیر (۱)، (۲) و (۳) مطابق شکل زیر جابه‌جا می‌کنیم. اگر کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی به ترتیب W_{E_1} ، W_{E_2} و W_{E_3} باشد، کدام رابطه درست است؟



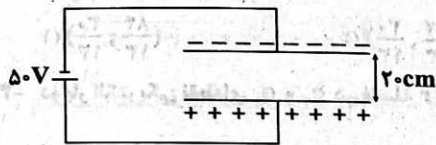
$$W_{E_1} > W_{E_2} > W_{E_3} \quad (1)$$

$$W_{E_1} = W_{E_2} = W_{E_3} \quad (2)$$

$$W_{E_1} > W_{E_2} = W_{E_3} \quad (3)$$

$$W_{E_1} = W_{E_2} > W_{E_3} \quad (4)$$

۴۱- در شکل زیر، ذره‌ی باردار به جرم m و بار $8nC$ در وسط فاصله‌ی بین دو صفحه‌ی یک خازن تخت به حالت تعادل قرار دارد. اگر جای پایانه‌های مثبت و منفی باتری را عوض کنیم، ذره پس از چند ثانیه به صفحه‌ی منفی می‌رسد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



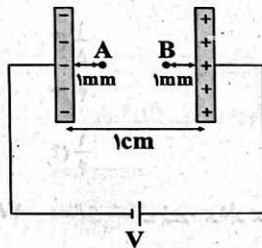
$$0.1 \quad (1)$$

$$0.2 \quad (2)$$

$$0.3 \quad (3)$$

$$0.4 \quad (4)$$

۴۲- در شکل زیر، خازن تختی به وسیله‌ی باتری شارژ شده است. نسبت $\frac{V_B}{V_A}$ و $\frac{E_B}{E_A}$ به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟



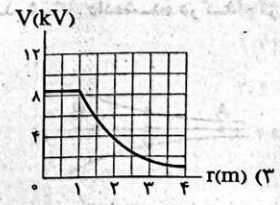
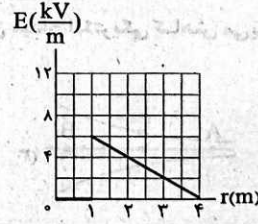
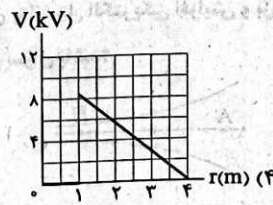
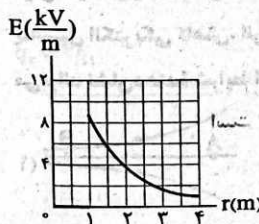
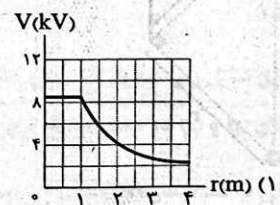
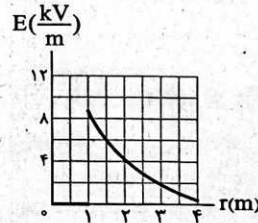
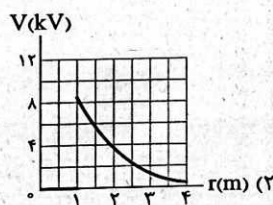
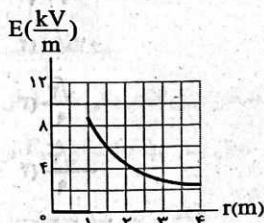
$$1 \text{ و } 9 \quad (1)$$

$$9 \text{ و } \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$1 \text{ و } \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$3 \text{ و } 1 \quad (4)$$

۴۳- اگر بار الکتریکی مثبت q را روی کره‌ای رسانا به شعاع $1m$ توزیع کنیم، نمودار بزرگی میدان الکتریکی حاصل از کره برحسب فاصله از مرکز آن و همچنین نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی نقاط بر حسب فاصله از مرکز کره در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (۲ فاصله از مرکز کره است.)



محل انجام محاسبات



۴۴- اگر دو سر خازن تختی که مساحت هر یک از صفحات آن 3 cm^2 و فاصله بین صفحات آن 180° میکرون است و یک ورقه دی الکتریک فضای بین دو صفحه خازن را به طور کامل پر کرده است به یک باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی 150 V وصل کنیم، بار روی هر صفحه خازن برابر با 27 nC می شود. ثابت دی الکتریک این خازن چقدر است؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}$)

۱۲ (۴)

۱/۲ (۳)

۰/۶ (۲)

۶ (۱)

۴۵- خازن تختی با ظرفیت C که ثابت دی الکتریک بین صفحات آن K است، به یک باتری متصل می کنیم و بار خازن پس از شارژ برابر با q می شود. اگر در حالتی که خازن به باتری متصل است، مساحت صفحات خازن را ۲ برابر، فاصله بین آن ها را نصف کرده و دی الکتریک بین صفحات را برداریم، بار روی صفحات خازن، ۲۵ درصد افزایش می یابد. K در کدام گزینه به درستی آمده است؟

 $\frac{A}{5}$ (۴) $\frac{16}{5}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{5}{16}$ (۱)

۴۶- اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن تختی را n برابر کنیم، ظرفیت خازن و بار الکتریکی ذخیره شده روی هر یک از صفحات خازن چند برابر می شوند؟ (به ترتیب از راست به چپ)

 n^2 و $\frac{1}{n}$ (۴) n و ۱ (۳) n و $\frac{1}{n^2}$ (۲)۱ و $\frac{1}{n}$ (۱)

۴۷- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه یک خازن تخت با ظرفیت 320 nF را چند ولت و چگونه تغییر دهیم، تا تعداد بارهای بنیادی هر صفحه خازن 8×10^{12} افزایش یابد؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

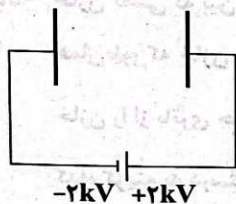
۴ (۴) و افزایش

۴ (۳) و کاهش

۲ (۲) و افزایش

۲ (۱) و کاهش

۴۸- انرژی ذخیره شده در خازن تخت شکل زیر برابر با $0.75 \times 10^{-7} \text{ MW.min}$ است. ظرفیت این خازن چند میکروفاراد است؟

 $\frac{18}{8}$ (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{8}{18}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴)

۴۹- ظرفیت خازن تختی $4 \mu\text{F}$ و فاصله بین صفحات آن هوا است. اگر فضای بین صفحات این خازن را از عایقی پر کنیم و خازن را با ولتاژ 40 V شارژ کنیم، انرژی ذخیره شده در آن برابر با 16 mJ می شود. ثابت دی الکتریک خازن نسبت به حالت اول چند درصد افزایش یافته است؟

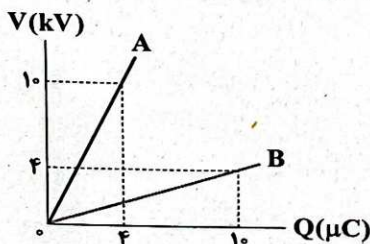
۴۰۰ (۴)

۳۰۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۸۰ (۱)

۵۰- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن های تخت A و B بر حسب بار ذخیره شده در آن ها مطابق شکل زیر است. چه تعداد از عبارت های زیر صحیح است؟



الف) ظرفیت خازن B از ظرفیت خازن A ، $2/1 \text{ nF}$ بیشتر است.

ب) در اختلاف پتانسیل الکتریکی یکسان برای دو خازن، نسبت انرژی ذخیره شده در خازن A به انرژی ذخیره شده در خازن B برابر با 0.16 است.

ج) در بار ذخیره شده یکسان در دو خازن، نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن A به ولتاژ B برابر با $6/25$ است.

د) در یک ولتاژ یکسان برای دو خازن، نسبت بار ذخیره شده در خازن A به بار ذخیره شده در خازن B برابر با 0.16 است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

محل انجام محاسبات



۵۱- بار ذخیره شده در خازن تختی برابر با 20 mC است. اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو سر این خازن را 20% درصد کاهش دهیم، انرژی

ذخیره شده در خازن $252 \mu\text{J}$ کاهش می یابد. C تقریباً چند میلی فاراد است؟

(۴) ۲۸۵

(۳) ۲۸/۵

(۲) ۷۰۰

(۱) ۷۰

۵۲- بار ذخیره شده در خازن تختی با ظرفیت $3/75 \mu\text{F}$ برابر با q است. اگر 2 mC بار از صفحه مثبت خازن جدا کرده و به صفحه منفی آن

منتقل کنیم، انرژی ذخیره شده در خازن $8dJ$ افزایش می یابد. q چند میکروکولن است؟

(۴) ۲۰

(۳) ۲۰۰

(۲) ۵۰

(۱) ۵۰۰

۵۳- خازن تختی که مساحت صفحات آن 5 cm^2 است و در فضای بین صفحات آن هوا وجود دارد به یک باتری متصل می کنیم. اگر پس از شارژ

باتری، بار روی صفحات خازن برابر با 20 nC ، انرژی ذخیره شده در خازن برابر با $30 \mu\text{J}$ و بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن برابر

با $\frac{5 \text{ kV}}{\text{m}}$ باشد، فاصله بین صفحات خازن چند سانتی متر است؟

(۴) ۰/۰۶

(۳) ۶

(۲) ۶۰

(۱) ۰/۶

۵۴- خازن تختی داریم که مساحت صفحات آن برابر با 2 mm^2 و فاصله بین صفحات آن برابر با $0/125 \mu\text{m}$ است و بین صفحات آن هوا است.

اگر حداکثر انرژی که می توان در این خازن ذخیره کرد، برابر با $5 \mu\text{J}$ باشد، بزرگی حداکثر میدان الکتریکی بین صفحات خازن چند

مگاوات بر سانتی متر است؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2})$

(۴) $\frac{3}{10}$

(۳) $\frac{3}{30}$

(۲) $\frac{10}{3}$

(۱) $\frac{20}{3}$

۵۵- خازن تختی که بین صفحات آن دی الکتریکی با ثابت K قرار دارد به دو سر یک باتری متصل کرده و انرژی U در آن ذخیره می شود. اگر

همان طور که خازن به باتری متصل است، مساحت صفحات خازن را n برابر کنیم، تغییرات انرژی ذخیره شده در آن U' می شود. ولی اگر ابتدا

خازن را از باتری جدا کرده و سپس مساحت صفحات خازن را n برابر کنیم، تغییرات انرژی ذخیره شده در آن U'' می شود. نسبت $\frac{U''}{U}$ در

کدام گزینه به درستی آمده است؟

(۴) $-n$

(۳) $-\frac{1}{n}$

(۲) n

(۱) $\frac{1}{n}$



شیمی



۵۶- عنصرهای A و X دو عنصر متوالی دوره سوم جدول تناوبی بوده و حالت فیزیکی آن‌ها در دما و فشار اتاق، متفاوت است. کدام گزینه در

ارتباط با آن‌ها نادرست است؟ (عدد اتمی X بزرگ‌تر از عدد اتمی A است.)

(۱) در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

(۲) A در طبیعت به حالت آزاد یافت می‌شود.

(۳) هر دو عنصر تمایل به تشکیل آنیون تک‌اتمی دارند ولی میزان تمایل A بیشتر است.

(۴) نقطه جوش A بالاتر از نقطه جوش X است.

۵۷- واکنش‌پذیری پتاسیم در مقایسه با کلسیم و روبیدیم به ترتیب چگونه است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)

(۱) بیشتر، بیشتر (۲) بیشتر، کم‌تر (۳) کم‌تر، کم‌تر (۴) کم‌تر، بیشتر

۵۸- عنصرهای X و Y، شبه‌فلزهای گروه چهاردهم جدول تناوبی هستند. کدام مطالب در ارتباط با آن‌ها درست است؟

(آ) در آرایش الکترونی اتم یکی از آن‌ها، زیرلایه با $l=2$ ، خالی از الکترون است.

(ب) سطح هر دو عنصر صیقلی بوده و هر دو در برابر ضربه خرد می‌شوند.

(پ) رسانایی الکتریکی کمی دارند اما رسانایی الکتریکی آن‌ها بیشتر از رسانایی الکتریکی نافلز گروه چهاردهم است.

(ت) مانند سایر عنصرهای این گروه، تمایلی به تشکیل یون تک‌اتمی ندارند.

(۱) «آ» و «ب» (۲) «آ» و «پ» (۳) «پ» و «ت» (۴) «ب» و «ت»

۵۹- دو عنصر A و X هم‌دوره بوده و A در سمت چپ X قرار دارد. کدام عبارت در ارتباط با این دو عنصر نادرست است؟

(۱) اثر جاذبه هسته X بر الکترون‌های آن، بیشتر از اثر جاذبه هسته A بر الکترون‌های آن است.

(۲) اگر X شبه‌فلز باشد، A نمی‌تواند نافلز باشد.

(۳) در شرایطی که A گازی شکل است، X نیز به یقین گازی شکل است.

(۴) در شرایطی که A جامد است، X یا جامد، یا گازی شکل است.

۶۰- کدام مطلب در ارتباط با متان و اتان، نادرست است؟

(۱) تفاوت نقطه جوش این دو آلکان، بیشتر از تفاوت نقطه جوش هر دو آلکانی است که تنها در یک اتم کربن با هم اختلاف دارند.

(۲) درصد جرمی کربن در اتان، بیشتر از درصد جرمی کربن در متان است.

(۳) در معادله موازنه‌شده واکنش سوختن کامل متان، مجموع ضرایب واکنش‌دهنده برابر با مجموع ضرایب فراورده‌ها است.

(۴) در فرمول پیوند - خط اتان، از دو خط استفاده می‌شود.

۶۱- کدام عبارت‌ها درست هستند؟

(آ) تمامی عنصرهای سه دوره نخست جدول تناوبی جزو عنصرهای اصلی هستند.

(ب) بر اثر تخمیر هوازی گلوکز، علاوه بر سوخت سبز، یک گاز گلخانه‌ای نیز تولید می‌شود.

(پ) رفتار فیزیکی فلزها به میزان توانایی اتم آن‌ها به از دست دادن الکترون وابسته است.

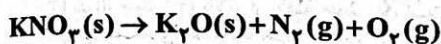
(ت) به طور کلی هر چه واکنش‌پذیری یک فلز بیشتر باشد، استخراج آن فلز دشوارتر است.

(۱) «آ» و «ب» (۲) «پ» و «ت» (۳) «آ» و «ت» (۴) «ب» و «پ»

محل انجام محاسبات

۶۲- کدام یک از مطالب زیر در ارتباط با فلز آهن نادرست است؟ (عدد اتمی آهن برابر با ۲۶ است).

- (۱) فلز آهن، ششمین فلز واسطه جدول دوره‌ای به شمار می‌آید.
 - (۲) زنگ آهن در آب نامحلول است و برای حل کردن آن در آب می‌توان از هیدروکلریک اسید استفاده کرد.
 - (۳) آرایش الکترونی یون آهن در زنگ آهن به زیرلایه $3d^6$ ختم می‌شود.
 - (۴) واکنش پذیری آهن کم‌تر از کربن بوده و آهن همانند کربن نخستین عنصر گروه خود به شمار می‌رود.
- ۶۳- اگر ۵۰۵ گرم پتاسیم نیترات مطابق واکنش زیر در ظرفی بدون سرپوش به میزان ۶۰٪ تجزیه شود، درصد جرمی پتاسیم در توده جامد موجود در ظرف کدام است؟ (واکنش موازنه شود و $N=14, O=16, K=39: g.mol^{-1}$)



۷۳/۱۵ (۴)

۶۶/۹۵ (۳)

۵۶/۸۵ (۲)

۴۸/۶۵ (۱)

۶۴- کدام یک از گزینه‌های زیر در ارتباط با آلکان‌ها نادرست است؟

- (۱) در چهار عضو نخست آلکان‌ها، پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.
 - (۲) با توجه به ساختار آلکان‌ها، این ترکیب‌ها تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارند.
 - (۳) در آلکان‌های راست‌زنجیر، هر اتم کربن به یک یا دو اتم کربن دیگر متصل است.
 - (۴) در آلکان شاخه‌دار با دو شاخه فرعی، یک اتم کربن وجود دارد که به چهار اتم کربن دیگر متصل است.
- ۶۵- تفاوت شمار پیوندهای کربن - کربن و کربن - هیدروژن در مولکول یک آلکان برابر با ۱۰ است. هر مول از این آلکان برای سوختن کامل به چند مول گاز اکسیژن نیاز دارد؟

۱۲/۵ (۴)

۱۴ (۳)

۹/۵ (۲)

۱۱ (۱)

۶۶- کدام یک از گزینه‌های زیر در ارتباط با فلزهای نیکل و مس، نادرست است؟

- (۱) مس جزو فلزهایی است که نمونه‌هایی از آن به حالت آزاد در طبیعت گزارش شده است.
- (۲) در اعماق دریاها، کلوخه‌ها و پوسته‌های غنی از این دو فلز یافت می‌شود.
- (۳) روش گیاه‌پالایی برای استخراج تنها یکی از این دو فلز توجیه اقتصادی دارد.
- (۴) مقایسه میان واکنش‌پذیری آن‌ها و آخرین فلز واسطه دوره چهارم (A) به صورت $A < Cu < Ni$ است.

۶۷- کدام مطالب زیر در ارتباط با گریس و وازلین، درست است؟

- (آ) فرمول تقریبی هر کدام از این دو ماده با فرمول شیمیایی یک آلکان مطابقت دارد.
- (ب) خاصیت چسبندگی گریس بیشتر از وازلین است.
- (پ) تفاوت شمار اتم‌های H و C در ماده‌ای با مولکول درشت‌تر، ۱/۳۵ برابر همین تفاوت در مولکول دیگر است.
- (ت) افرادی که با گریس کار می‌کنند، دستشان را با مخلوطی از آب و نفت می‌شویند.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «پ» و «ت»

(۲) «آ» و «پ»

(۱) «آ» و «ب»

۶۸- از آلکان‌ها می‌توان برای حفاظت از فلزها در برابر خوردگی، استفاده کرد. دلیل این موضوع در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) میل ترکیبی آلکان‌ها با اکسیژن بسیار زیاد و بیشتر از فلزها است و در نتیجه فلزها فرصت اکسایش پیدا نمی‌کنند.
- (۲) آلکان‌ها به دلیل سیر شده بودن در آب نامحلول‌اند و قرار دادن فلزها در آلکان‌های مایع، مانع از رسیدن آب به سطح فلز می‌شود.
- (۳) آلکان‌ها از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده‌اند و می‌توانند لایه‌ای آب‌گریز روی سطح فلز ایجاد کنند.
- (۴) فلزها در مجاورت آلکان‌ها اکسید می‌شوند، اما آلکان‌ها با لایه اکسید فلز، پیوند پایداری برقرار کرده و از ادامه اکسایش و خوردگی فلز جلوگیری می‌کنند.

محل انجام محاسبات

۶۹- کدام نام‌گذاری براساس قواعد آیوپاک درست است؟

(۱) ۴، ۵-دی متیل هپتان

(۲) ۲-اتیل - ۴-متیل اوکتان

(۳) ۳-اتیل - ۴، ۲-دی متیل پنتان

(۴) ۴، ۲، ۲-تری متیل پنتان

۷۰- کدام یک از گزینه‌های زیر، می‌تواند مجموع جرم مولی دو آلکان را نشان دهد که در چهار اتم هیدروژن با هم اختلاف دارند؟ (تمامی اعداد

برحسب g.mol^{-1} هستند، $(\text{H}=1, \text{C}=12:\text{g.mol}^{-1})$

(۴) ۲۲۸

(۳) ۱۷۰

(۲) ۱۸۶

(۱) ۱۲۸

۷۱- کدام مطالب زیر در ارتباط با عنصر کربن درست است؟

(آ) ترکیب‌های شناخته شده از کربن، از مجموع ترکیب‌های شناخته شده از دیگر عنصرهای جدول دوره‌ای بیشتر است.

(ب) اتم‌های کربن می‌توانند با یکدیگر به روش‌های گوناگون متصل شده و گرافیت و الماس را با ساختارها و خواص متفاوت ایجاد کنند.

(پ) در اتین و اتن پیوند بین اتم‌های کربن به ترتیب دوگانه و سه‌گانه است.

(ت) کربن در خانه ششم جدول دوره‌ای جای داشته و جرم اتمی آن در این جدول به طور دقیق برابر با 12.000amu است.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «آ» و «پ»

(۲) «پ» و «ت»

(۱) «آ» و «ب»

۷۲- درصد خلوص نیکل (II) اکسید در کانی لاتریت برابر 37% است. برای استخراج نیکل خالص از آن، ابتدا کانی را توسط گاز هیدروژن به

فلز نیکل تبدیل می‌کنند (واکنش a) و سپس در تماس با گاز کربن مونوکسید آن را به صورت نیکل تتراکربونیل گازی $(\text{Ni}(\text{CO})_4)$ از

محیط خارج می‌کنند (واکنش b). در این روش فقط نیکل به صورت فرار از محیط واکنش خارج شده و در واکنشگاه دیگری به نیکل فلزی

خالص تبدیل می‌شود. برای تولید یک کیلوگرم نیکل خالص به چند کیلوگرم کانی لاتریت نیاز است؟ (بازده هر کدام از واکنش‌های a و b

برابر 90% است.) $(\text{C}=12, \text{O}=16, \text{Ni}=58:\text{g.mol}^{-1})$

(۴) ۴۲۶

(۳) ۳۸۳

(۲) ۵۹۱

(۱) ۲۱۹

۷۳- در ساختار بلوری برخی از نمک‌ها، به ازای هر مول نمک، شمار معینی از مول‌های آب وجود دارد که با n در فرمول شیمیایی مشخص می‌شود

و به آن‌ها نمک آبدار می‌گویند. اگر $97/6$ گرم از نمک باریوم کلرید آبدار $(\text{BaCl}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O})$ با خلوص 75% را در مقدار زیادی آب حل کنیم

و سپس مقدار کافی به آن، سولفوریک اسید اضافه کنیم، در نهایت $69/9$ گرم باریوم سولفات خشک و خالص به دست می‌آید. مقدار n کدام

است؟ (ناخالصی‌های نمک آبدار، بی‌اثرند.) $(\text{O}=16, \text{S}=32, \text{Cl}=35/5, \text{Ba}=137:\text{g.mol}^{-1})$

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۷۴- با توجه به ویژگی‌های آلکان‌های راست‌زنجیر A، B و C، کدام مقایسه در ارتباط با گرانشی آن‌ها درست است؟ $(\text{H}=1, \text{C}=12:\text{g.mol}^{-1})$

• آلکان A: جرم اتم‌های کربن، ۵ برابر جرم اتم‌های هیدروژن است.

• آلکان B: فرمول مولکولی آن با فرمول مولکولی ساده‌ترین آلکانی که شاخه اتیل دارد، یکسان است.

• آلکان C: از سوختن کامل آن، 13 مول فراورده تولید می‌شود.

(۴) $A < C < B$

(۳) $B < A < C$

(۲) $C < A < B$

(۱) $A < B < C$

۷۵- چگالی نوعی نفت خام 850kg.m^{-3} است. جرم یک بشکه از این نفت خام به تقریب چند کیلوگرم است؟

(۴) $16/57$

(۳) $165/7$

(۲) $13/51$

(۱) $135/1$

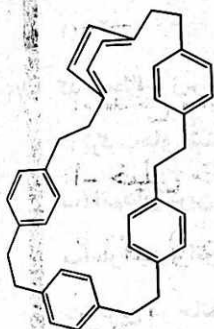
محل انجام محاسبات



۷۶- کدام یک از مطالب زیر در ارتباط با نفت خام درست است؟

- (۱) نفت خام مخلوطی از هزاران ترکیب شیمیایی است که هر کدام از آن‌ها یک هیدروکربن هستند.
- (۲) نفت خام نوعی سوخت فسیلی است که برخلاف فلزها جزو منابع تجدیدپذیر است.
- (۳) کم‌تر از ۱۰٪ از نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید مواد مختلف به کار می‌رود.
- (۴) حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز به کار می‌رود.

۷۷- برای ترکیبی با ساختار زیر، تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن هر مولکول آن، کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۴

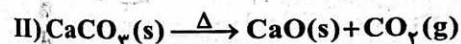
(۴) ۶

۷۸- با توجه به واکنش موازنه‌نشده زیر، اگر نسبت جرم اکسید فلز تولیدشده در واکنش (I) به جرم اکسید فلز تولیدشده در واکنش (II) برابر

با ۴/۶۶ و مقدار KMnO_4 اولیه برابر با ۳۹۵g و با خلوص ۸۰٪ باشد، در مجموع دو واکنش چند لیتر گاز در شرایط STP تولید می‌شود

و مقدار اولیه واکنش‌دهنده خالص واکنش (II) چند گرم بوده است؟ (بازده هر کدام از واکنش‌ها ۷۵٪ است).

(C=۱۲, O=۱۶, K=۳۹, Ca=۴۰, Mn=۵۵: g.mol⁻¹)



۳۳/۳، ۳۳/۶ (۴)

۳۳/۳، ۲۲/۴ (۳)

۴۴/۴، ۳۳/۶ (۲)

۴۴/۴، ۲۲/۴ (۱)

۷۹- کدام گزینه برای پر کردن عبارت زیر، مناسب‌تر است؟

«روزانه در حدود میلیون بشکه نفت خام در دنیا به عنوان سوخت در استفاده می‌شود.»

(۴) ۸۰، وسایل نقلیه

(۳) ۸۰، خودروها

(۲) ۴۰، وسایل نقلیه

(۱) ۴۰، خودروها

۸۰- برای آلکانی که تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن مولکول آن برابر با ۱۰ است، چند ساختار شاخه‌دار می‌توان در نظر گرفت که مجموع

شماره شاخه‌های فرعی، دست‌کم برابر با ۷ باشد؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

محل انجام محاسبات

نظر سنجی آزمون های سراسری گاج

دانش آموز گرامی؛

لطفا بعد از پایان آزمون، به سوالات ۱ تا ۱۰ در قسمت نظر سنجی با دقت پاسخ دهید.

۱. سطح سوالات آزمون را چطور ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۲. نظم و هماهنگی آغاز آزمون را چگونه دیدید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۳. آیا از کیفیت دفترچه ها رضایت دارید؟

۱- بله ۲- خیر

۴. آیا زمان بندی آزمون با حجم سوالات متناسب بود؟

۱- بله ۲- خیر

۵. طبق مقررات آزمون های گاج، باید دفترچه پاسخ تشریحی فقط پس از آزمون توزیع شود.

در حوزه شما، توزیع دفترچه پاسخ تشریحی به درستی انجام شد؟

۱- بله ۲- خیر

۶. عملکرد مراقبان آزمون را چگونه ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۷. آیا در حوزه شما، داوطلبان قبل از پایان زمان مجاز آزمون می توانستند محل را ترک کنند؟

۱- بله ۲- گاهی اوقات ۳- به ندرت ۴- خیر

۸. از چه طریقی با آزمون های گاج آشنا شده اید؟

۱- معرفی دوستان ۲- تبلیغات فضای مجازی ۳- مشاور تحصیلی ۴- ثبت نام مدارس

۹. تا به حال از کدامیک از خدمات گاج استفاده کرده اید؟

۱- گاج مارکت ۲- گاجینو ۳- دکتر IQ ۴- هر سه

۱۰. به طور کلی کیفیت برگزاری آزمون امروز را چطور ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

آزمون شماره (۱۲)
جمعه
۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۲

آزمون‌های سراسر گاج

گزیده دروس را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵
پاسخنامه یازدهم ریاضی
دوره دوم متوسطه



برای ورود به
مدرسه مجازی گاج
اسکن کنید.

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۸۰	مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
			از	تا	
۱	حسابان ۱	۱۰	۱	۱۰	۴۵ دقیقه
	آمار و احتمال	۱۰	۱۱	۲۰	
	هندسه ۲	۱۰	۲۱	۳۰	
۲	فیزیک	۲۵	۳۱	۵۵	۳۰ دقیقه
۳	شیمی	۲۵	۵۶	۸۰	۲۵ دقیقه

دورسنامه

۱ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

۲ شیب خط برابر تانژانت زاویه خط با راستای افقی است.

۳ با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 + 1 = 6t \Rightarrow t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} \Rightarrow t = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{2} \pm 1)^2 \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} + 1 \\ x_2 = \sqrt{2} - 1 \\ x_3 = -\sqrt{2} - 1 \\ x_4 = -\sqrt{2} + 1 \end{cases} \xrightarrow{\alpha, \beta > 0} \begin{cases} \alpha = \sqrt{2} + 1 \\ \beta = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 2 - 1 = 1 \\ \alpha + \beta = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \sqrt{\sqrt{2}(2\sqrt{2}) - x} = 1 - \sqrt{4 - x}$$

حال داریم:

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

برای یافتن برد داریم:

$$\sqrt{4 - x} \geq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{4 - x} \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow R_f = (-\infty, 1]$$

$$D_f - R_f = (-\infty, 4] - (-\infty, 1] = (1, 4]$$

اعداد صحیح بازه عبارت‌اند از $\{2, 3, 4\}$ ، پس سه عدد صحیح در بازه است.

دورسنامه

معادلات دو مجذوری به فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ با فرض $x = t^2$ به معادله درجه دوم تبدیل می‌شود که همواره (در صورت وجود ریشه‌ها) مجموع ریشه‌های آن صفر است.

۴

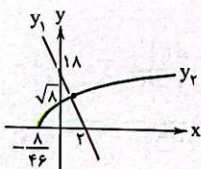
$$x^2 - 18ax + 46a + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 18a \\ P = \alpha\beta = 46a + 8 \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 6 \Rightarrow (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = 6^2 \Rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 36$$

$$\Rightarrow 18a + 2\sqrt{46a + 8} = 36 \Rightarrow 18 - 9a = \sqrt{46a + 8} \quad (*)$$

برای یافتن تعداد جواب معادله فوق کافی است با رسم هندسی نمودار

$$\text{توابع } \begin{cases} y_1 = 18 - 9x \\ y_2 = \sqrt{46x + 8} \end{cases} \text{ تعداد نقاط برخورد آن‌ها را بیابیم:}$$



ملاحظه می‌شود که یک نقطه تقاطع وجود دارد و به ازای یک مقدار a تساوی (*) برقرار است.

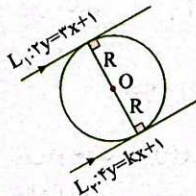
ریاضیات

۱ ابتدا چون خطوط L_1 و L_2 موازی هستند، پس بایستی شیب آن‌ها برابر باشد:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{k}{6} \Rightarrow k = 6$$

$$\begin{cases} L_1: 3x - 2y + 1 = 0 \\ L_2: kx - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1: 6x - 4y + 2 = 0 \\ L_2: 6x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

حال فاصله دو خط موازی برابر قطر دایره ($2R$) خواهد بود:



$$\frac{|2 - 1|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = 2R \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{13}} = 2R \Rightarrow R = \frac{1}{4\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{\pi}{16 \times 13} = \frac{\pi}{208}$$

$$\left[\frac{\pi}{kS} \right] = \left[\frac{\pi}{6 \times \frac{\pi}{208}} \right] = \left[\frac{104}{3} \right] = 34$$

دورسنامه

فاصله دو خط موازی $L_1: ax + by + c = 0$ و $L_2: ax + by + c' = 0$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

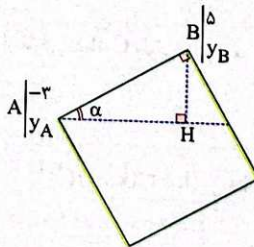
۲ روش اول:

$$y = 2x + h \Rightarrow A(-3, -6 + h) \text{ و } B(5, 10 + h)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (-6 + h - 10 - h)^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320}$$

$$S = (AB)^2 = 320$$

روش دوم: شیب خط AB مثبت است. از A خطی افقی رسم می‌کنیم تا زاویه α مشخص شود.



$$y = 2x + h \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

تانژانت α برابر شیب است، بنابراین:

اندازه پاره خط AH برابر اختلاف طول‌های نقاط است:

$$AH = 5 - (-3) = 8$$

$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow \frac{BH}{AH} = 2 \Rightarrow \frac{BH}{8} = 2 \Rightarrow BH = 16$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow AB^2 = 16^2 + 8^2 = 320 \Rightarrow AB = 8\sqrt{5}$$

$$S = AB^2 = 320$$

دورنگانه

در دنباله هندسی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید. (q قدرنسبت است).

۳ دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ است. ابتدا مقدار $x=0$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$x=0 \Rightarrow f(0)f(t)=f(t) \xrightarrow{f(t) \neq 0} f(0)=1$$

حال مقادیر $\begin{cases} x=1 \\ t=-1 \end{cases}$ را در رابطه داده شده قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x=1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow f(1)f(-1)=f(0)+(-1) \Rightarrow f(1)f(-1)=0$$

پس دو حالت $f(1)=0$ یا $f(-1)=0$ را داریم:

حالت اول:

$$f(1)=0 \xrightarrow{t=1} f(x)f(1)=f(x+1)+x \Rightarrow f(x+1)=-x \\ \Rightarrow f(x)=-x+1$$

حالت دوم:

$$f(-1)=0 \xrightarrow{t=-1} f(x)f(-1)=f(x-1)-x \\ \Rightarrow f(x-1)=x \Rightarrow f(x)=x+1$$

دو تابع وجود دارد.

دورنگانه

وقتی رابطه $f(x+k)$ را داریم کافی است، تا x را به $x-k$ تبدیل کنیم که رابطه $f(x)$ پیدا شود.

۸ و A و B نقاط برخورد با محور x ها یا همان ریشه‌های معادله $x^2-(k+1)x-k-2=0$ هستند. در این معادله رابطه $a+c=b$ برقرار است، پس:

$$\begin{cases} x_A = -1 \\ x_B = \frac{-c}{a} = k+2 \end{cases}$$

از طرفی نقطه C طولی برابر صفر دارد:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |x_B - x_A| \times |y_C|$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |k+2-(-1)| \times |-k-2| = \frac{1}{2} |(k+3)(k+2)|$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |k^2 + 5k + 6|$$

حال حداقل این عبارت درجه ۲ را به دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \left(k + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right|$$

با توجه به نمودار رسم شده، رأس سهمی دارای طولی بیشتر از یک است، پس:

$$\frac{-b}{2a} > 1 \Rightarrow \frac{k+1}{2} > 1 \Rightarrow k > 1$$

دورنگانه

برای یافتن تعداد جواب‌های معادله $f(a)=g(a)$ یکی از روش‌ها، رسم هندسی توابع $f(x)$ و $g(x)$ است تا بتوانیم تعداد نقاط برخورد نمودار آن‌ها را بیابیم.

۳ فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+9}=A \\ \sqrt{2x^2-x+1}=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2=2x^2+x+9 \\ B^2=2x^2-x+1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} A^2-B^2=2x+8 \Rightarrow A^2-B^2=2(x+4)=2(A+B) \\ A+B=x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A-B)(A+B)=2(A+B) \xrightarrow{A+B>0} A-B=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=x+4 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{x+6}{2} \\ B=\frac{x+2}{2} \end{cases}$$

حال یک معادله ساده‌تر گنگ داریم:

$$\sqrt{2x^2+x+9}=\frac{x+6}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x^2+x+9=\frac{x^2+12x+36}{4}$$

$$\Rightarrow 7x^2-11x=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{11}{7} \end{cases}$$

$$x_1+x_2=0+\frac{11}{7}=\frac{11}{7}$$

هر دو جواب قابل قبول است، پس:

دورنگانه

در حل معادلات با عبارت‌های شبیه هم، استفاده از تغییر متغیر گره‌گشا است. گاهی کافی است یک عبارت را به نام مثلاً A نام‌گذاری کنیم و گاهی از نام‌گذاری دو عبارت استفاده می‌کنیم.

$$S_{r_0} = a_1 + a_r + \dots + a_r.$$

$$\Rightarrow S_{r_0} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \dots + \frac{77}{3^{20}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{r_0}}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{9}{3^4} + \dots + \frac{77}{3^{21}}$$

$$\Rightarrow S_{r_0} - \frac{S_{r_0}}{3} = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{20}}\right) - \frac{77}{3^{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} S_{r_0} = \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^{20}}{1 - \frac{1}{3}} \right) - \frac{77}{3^{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} S_{r_0} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right) - \frac{77}{3^{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} S_{r_0} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3^{21}} - \frac{77}{3^{21}} = -\frac{1}{3} - \frac{75}{3^{21}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3} S_{r_0} \right] = \left[-\frac{1}{3} - \frac{75}{3^{21}} \right] = -1$$

ریاضیات ۵

پایان یازدهم ریاضی

همچنین توجه داریم که ریشه‌های α و β در معادله درجه دوم، یکی مثبت و یکی منفی است:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -m^2 - 1 < 0 \Rightarrow \alpha < 0 < \beta$$

حال برای دامنه f باید داشته باشیم: $(x-3)^2(x^2+\Delta x-m^2-1) \geq 0$
 که ریشه‌های ۳، α و β دیده می‌شوند. با توجه به $\alpha < 0 < \beta$ ، حالت امکان چینش جدول تعیین علامت داریم:
 حالت اول: عدد ۳ بیشتر از α و β باشد:

x	$-\infty$	α	β	۳	$+\infty$
		+	-	+	+
		جواب		جواب	

در این حالت دامنه f با دامنه $g(x)$ کاملاً یکسان است.

حالت دوم: عدد ۳ بین α و β باشد:

x	$-\infty$	α	۳	β	$+\infty$
		+	-	-	+
		جواب		جواب	

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty) \cup \{3\}$$

در این حالت دامنه f با دامنه $g(x)$ به خاطر عضو اضافی $\{3\}$ یکسان نیست.

پس باید عدد ۳ از هر دو ریشه α و β در معادله $x^2 + \Delta x - m^2 - 1 = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\Delta \\ \alpha\beta = -m^2 - 1 \end{cases} \quad \text{بیشتر باشد.}$$

$$\alpha < \beta < 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 < 0 \\ \beta - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha - 3)(\beta - 3) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9 > 0 \Rightarrow -m^2 - 1 - 3(-\Delta) + 9 > 0$$

$$\Rightarrow -m^2 > -2\Delta \Rightarrow m^2 < 2\Delta \Rightarrow -\sqrt{2\Delta} < m < \sqrt{2\Delta}$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$$

۹ مقدار صحیح m وجود دارد.

دورنما

- برای تساوی دو تابع f و g دو شرط لازم است:

شرط اول) به ازای هر ورودی، خروجی‌های یکسان بدهند.

شرط دوم) دامنه آن‌ها یکسان باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- در معادله درجه دوم:

اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، معادله همواره دو ریشه، یکی مثبت و یکی منفی دارد.

۴ گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \vee r)$ زمانی نادرست است

که $(p \wedge \sim q)$ درست و $(q \vee r)$ نادرست باشد.

$$p \wedge \sim q \equiv T \Rightarrow \begin{cases} p \equiv T \\ \sim q \equiv T \Rightarrow q \equiv F \end{cases}$$

$$q \vee r \equiv F \Rightarrow q \equiv F, r \equiv F$$

حال به بررسی گزاره‌ها می‌پردازیم:

$$p \Leftrightarrow (q \wedge r) \equiv T \Leftrightarrow (F \wedge F) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$(p \vee r) \Rightarrow q \equiv (T \vee F) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

حال محدوده مساحت را می‌یابیم:

$$k + \frac{\Delta}{4} > \frac{\gamma}{4} \Rightarrow (k + \frac{\Delta}{4})^2 > \frac{\gamma^2}{16} \Rightarrow (k + \frac{\Delta}{4})^2 - \frac{\gamma^2}{16} > 0$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} > \frac{1}{4}|\gamma| \Rightarrow S_{\Delta ABC} > 6$$

حداقل مساحت مثلث برابر ۷ خواهد بود.

دورنما

گرچه در حالت کلی حداقل یا حداکثر یک عبارت درجه ۲ در محل رأس آن رخ می‌دهد، اما اگر محدوده متغیر داشته باشیم، بهترین روش یافتن حداقل یا حداکثر، ایجاد مربع کامل برای عبارت است.

۹ عبارت‌های داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	-	-	-	+	-
$x + 2$	-	-	+	+	+

با شرط $x < 1$ داریم:

$$\begin{cases} x \leq -2: -2 - x + x^2 - x - 2 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow x = -2 \\ -2 < x \leq -1: -2 - x + x^2 + x + 2 = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ (بدیهی)} \Rightarrow -2 < x \leq -1 \\ -1 < x < 1: 2 + x - x^2 + x + 2 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (غیق)} \\ \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (غیق)} \\ x = 2 \text{ (غیق)} \end{cases} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب در $x < 1$ عبارت است از:

$$x \in [-2, -1]$$

که اعداد صحیح $\{-2, -1\}$ در بازه هستند. (دو عدد صحیح)

دورنما

برای حل معادلات قدرمطلق پیچیده، یکی از روش‌ها، تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق و سپس رسم جدول و رهایی از قدرمطلق است. در آخر نیز مقادیر به دست آمده را در بازه خاص خود، کنترل می‌کنیم.

۱۰ در نگاه اول داریم:

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2(x^2 + \Delta x - m^2 - 1)}$$

$$= |x-3| \sqrt{x^2 + \Delta x - m^2 - 1} = g(x)$$

اما باید شرایط دامنه هم بررسی شود که دو تابع دامنه مساوی داشته باشند:

برای دامنه g باید داشته باشیم:

$$x^2 + \Delta x - m^2 - 1 \geq 0 \quad (*)$$

این نامعادله دو ریشه α و β دارد، جدول زیر را داریم:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$(*)$	+	-	-	+
		جواب		جواب

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$$

دراستگاه

• برای ترکیب‌های عطفی و فصلی دو گزاره داریم:

$$\textcircled{1} p \vee p \equiv p \wedge p \equiv p$$

$$\textcircled{2} p \vee q \equiv q \vee p$$

$$\textcircled{3} p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$\textcircled{4} \sim(\sim p) \equiv p$$

$$\textcircled{5} p \vee T \equiv T$$

$$\textcircled{6} p \vee F \equiv p$$

$$\textcircled{7} p \wedge T \equiv p$$

$$\textcircled{8} p \wedge F \equiv F$$

$$\textcircled{9} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\textcircled{10} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\textcircled{11} p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$\textcircled{12} p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

• برای ترکیب شرطی گزاره‌ها داریم:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\sim[(\forall x, y \in \mathbb{R}); (2x - y = 3 \Leftrightarrow x = 2 \vee y = 1)]$$

۱/۱۴

$$\equiv \exists x, y \in \mathbb{R}; \sim(2x - y = 3 \Leftrightarrow x = 2 \vee y = 1)$$

$$\equiv \exists x, y \in \mathbb{R}; (2x - y = 3 \Leftrightarrow \sim(x = 2 \vee y = 1))$$

$$\equiv \exists x, y \in \mathbb{R}; (2x - y = 3 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge y \neq 1)$$

دراستگاه

نکات:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x) \\ \sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

$$\textcircled{3} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \sim(p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$$

۴/۱۵

روش اول: اگر زیرمجموعه موردنظر را با کدگذاری بخواهیم نشان

دهیم ۴ تا صفر و ۵ تا عدد ۱ وجود دارد که ابتدا ۴ تا صفر را قرار می‌دهیم و حال می‌خواهیم در ۵ فضایی که وجود دارد ۳ تا عدد ۱ را قرار دهیم که

به $\binom{5}{3} = 10$ حالت می‌توانیم و سپس باید ۳ عدد ۱ و ۱ و ۱ را صف کنیم

که به ۳ حالت می‌توانیم آن‌ها را صف کنیم که بنا به اصل ضرب داریم:

$$10 \times 3 = 30 = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

روش دوم:

$$1, 2, 3, \begin{cases} 5 \Rightarrow 7 \text{ یا } 8 \text{ یا } 9 \\ 6 \Rightarrow 8 \text{ یا } 9 \\ 7 \Rightarrow 9 \end{cases}$$

$$2, 3, 4, \begin{cases} 6 \Rightarrow 8 \text{ یا } 9 \\ 7 \Rightarrow 9 \end{cases}$$

$$3, 4, 5, \begin{cases} 1 \Rightarrow 7 \text{ یا } 8 \text{ یا } 9 \\ 7 \Rightarrow 9 \end{cases}$$

$$4, 5, 6, \begin{cases} 1 \Rightarrow 8 \text{ یا } 9 \\ 2 \Rightarrow 8 \text{ یا } 9 \end{cases}$$

$$5, 6, 7, \begin{cases} 1 \Rightarrow 3 \text{ یا } 9 \\ 2 \Rightarrow 9 \\ 3 \Rightarrow 9 \end{cases}$$

دراستگاه

ترکیب گزاره‌ها: هرگاه بخواهیم دو یا چند گزاره را با هم ترکیب کنیم و یک گزاره مرکب بسازیم به کمک رابطه‌ها گزاره‌های ساده را به هم وصل می‌کنیم که این رابطه‌ها عبارت‌اند از ترکیب فصلی، عطفی، شرطی و دوشروطی.

«یا» (ترکیب فصلی): چنانچه دو گزاره p و q را با ترکیب فصلی به هم وصل کنیم به صورت $p \vee q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم p یا q . ارزش این گزاره تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q با هم نادرست باشند.

«و» (ترکیب عطفی): چنانچه دو گزاره p و q را با ترکیب عطفی به هم وصل کنیم به صورت $p \wedge q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم p و q . ارزش این گزاره تنها زمانی درست است که هر دو گزاره p و q با هم درست باشند.

(ترکیب شرطی): چنانچه دو گزاره p و q را با ترکیب شرطی به هم وصل کنیم به صورت $p \Rightarrow q$ می‌نویسیم و به صورت اگر p آنگاه q می‌خوانیم که p را مقدم و q را تالی گوئیم. ارزش این گزاره تنها زمانی نادرست است که p (مقدم) درست و q (تالی) نادرست باشد.

۱/۱۲

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}; y = 7 + 5x^2$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{W} \Rightarrow 7 + 5x^2 \in \mathbb{N}$$

درست است، زیرا:

پیرسنی سایر گزینه‌ها:

(۲) اگر به جای x عدد ۳ قرار دهیم، داریم:

$$9 + y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = -2 \quad \text{غ ق ق}$$

(۳) اگر به جای x عدد ۱ قرار دهیم، داریم:

$$4 - y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = -1 \quad \text{غ ق ق}$$

(۴) اگر به جای x عدد صفر قرار دهیم، داریم:

$$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

دراستگاه

سور عمومی: به معنی «به ازای هر» یا «به‌ازای همه» مقادیر» است و آن را با $\forall$ نشان می‌دهیم و هرگاه همراه متغیر گزاره‌ها بیاید، گزاره‌ها را به یک گزاره کلی تبدیل می‌کند و ارزش گزاره کلی زمانی درست است که مجموعه جواب گزاره‌ها برابر دامنه متغیر آن گزاره‌ها ($D=S$) باشد.

اگر با یک مثال نقض، خلاف حکم ثابت شد، ارزش آن نادرست است.

سور وجودی: به معنی «به‌ازای بعضی از مقادیر» یا «وجود دارد» یا «حداقل یکی یافت می‌شود» است و آن را با علامت $\exists$ نشان می‌دهیم و هرگاه همراه متغیر گزاره‌ها بیاید، گزاره‌ها را به یک گزاره جزئی تبدیل می‌کند و ارزش آن زمانی درست است که مجموعه جواب گزاره‌ها غیرتهی باشد. اگر با یک مثال درستی حکم در این گزاره‌ها ثابت شود، ارزش آن‌ها درست است.

۴/۱۲

$$p \wedge [(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]$$

$$\equiv p \wedge [(p \Rightarrow q) \vee ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))]$$

جذب

$$\equiv p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

دراستنامه

نکات:

- ① $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$
 ② $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')]$$

$$= [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')]$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap A') = (B \cap A) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B$$

دراستنامه

قوانین جبر مجموعه‌ها:

- ① $A \cup A' = U$
 ② $A \cap A' = \emptyset$
 ③ $A \cup U = U, A \cap U = A$
 ④ $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
 ⑤ $A - B = A \cap B'$
 ⑥ قانون دمورگان: $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$
 ⑦ قانون جذب «هم‌پوشانی»: $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$
 ⑧ قانون توزیع پذیری «پخشی»: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

③ ①۹ چون دو مجموعه A و B ناتهی هستند و $A \times B = B \times A$ پس $A = B$ و چون می‌دانیم $A = B \neq C$ پس $C = \emptyset$ است، یعنی A و B دو مجموعه برابر و ۵ عضوی هستند.

$$B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی } B = \binom{5}{2} = 10$$

دراستنامه

ضرب دکارتی: حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با $A \times B$ نشان می‌دهیم و این حاصل ضرب شامل همه زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها متعلق به مجموعه A و مؤلفه‌های دوم متعلق به مجموعه B است و در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ ، یعنی حاصل ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد، اما:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow (A = B) \vee (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$

$$|A \cap B| = x \Rightarrow 2^x = 15 + 1 = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow |A \cap B| = 4$$

اگر $|A - B| = y$ باشد:

$$\binom{y}{2} = 3 \Rightarrow y(y-1) = 6 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow |A - B| = 3$$

$$|(A - B) \times (B - A)| = |A - B| \times |B - A|$$

$$6, 7, 8, \begin{cases} 1 \Rightarrow 3 \text{ یا } 4 \\ 2 \Rightarrow 4 \end{cases}$$

$$7, 8, 9, \begin{cases} 1 \Rightarrow 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \\ 2 \Rightarrow 4 \text{ یا } 5 \\ 3 \Rightarrow 5 \end{cases}$$

 $\Rightarrow$ تعداد کل حالات = ۳۰

دراستنامه

روش کدگذاری: اگر فرض کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ باشد، چون A دارای ۳ عضو است پس ۸ زیرمجموعه دارد که با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های A را مشخص کنیم مثلاً $B = \{1, 3\}$ که $B \subset A$ است با کد «۱۰۱» مشخص می‌شود چون $1, 3 \in B$ با کد ۱ و $2 \notin B$ با کد ۰ مشخص می‌شوند و به همین ترتیب $C = \{3\}$ که $C \subset A$ است با کد «۰۰۱» مشخص می‌شود.

② ①۶ اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، داریم:

$$2^n - 2^{n-3} = 112 \Rightarrow 2^{n-3}(2^3 - 1) = 112 \Rightarrow 2^{n-3} \times 7 = 112$$

$$\Rightarrow 2^{n-3} = 16 \Rightarrow n - 3 = 4 \Rightarrow n = 7$$

می‌دانیم $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ است، پس تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی A با

تعداد زیرمجموعه‌های 2 عضوی آن برابر است.

دراستنامه

نکات:

- ① تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.
 ② تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی یک مجموعه n عضوی $2^n - 1$ است.
 ③ زیرمجموعه سره: اگر $A \subseteq B$ ، ولی $A \neq B$ ، آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سره B نامیده می‌شود و آن را با $A \subset B$ نشان می‌دهیم.
 ④ تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی و سره یک مجموعه n عضوی برابر $2^n - 2$ است.
 ⑤ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

③ ①۷

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ A' \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B \end{cases}$$

دو مجموعه A و B با هم برابر هستند، پس:

$$\begin{cases} x = 3 \\ z + 1 = 5 \Rightarrow z = 4 \\ 2z + x = 3x + y \Rightarrow 8 + 3 = 2(3) + y \Rightarrow 11 = 6 + y \Rightarrow y = 5 \\ \Rightarrow x + y + z = 3 + 5 + 4 = 12 \end{cases}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_7 = 180^\circ - \hat{A} \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_7 = 180^\circ - \hat{B} \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_7 = 180^\circ - \hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_7 + \hat{B}_1 + \hat{B}_7 + \hat{C}_1 + \hat{C}_7 = 3 \times 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$$

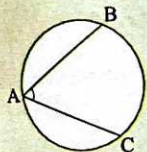
$$= 3 \times 180^\circ = 360^\circ$$

دوستنامه

چند تعریف

زاویه محاطی

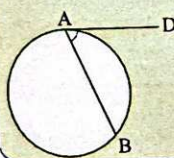
زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهای دایره باشند. در هر دایره اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن:



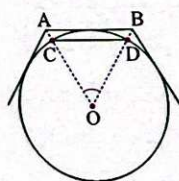
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ محاطی}$$

زاویه ظلی

زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر وتری از دایره است. در هر دایره اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن:



$$\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ ظلی}$$



$$AB = 2r \times \tan\left(\frac{18^\circ}{4}\right) = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \tan(45^\circ) = 2\sqrt{3}$$

$$CD = 2r \times \sin\left(\frac{18^\circ}{4}\right) = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sin(45^\circ) = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow AB - CD = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

دوستنامه

نکته: طول ضلع n ضلعی محاطی دایره به مرکز O و شعاع r برابر $2r \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ و طول ضلع n ضلعی محیطی دایره به مرکز O و شعاع r برابر $2r \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ است.

$$\Rightarrow 27 = 3 \times |B - A| \Rightarrow |B - A| = 9$$

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| \Rightarrow 9 = |B| - 4 \Rightarrow |B| = 13$$

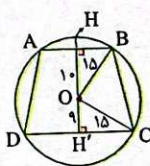
$$B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی } = \binom{13}{2} = \frac{13!}{1! \times 2!} = 78$$

دوستنامه

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| \Rightarrow |A| = |A - B| + |A \cap B|$$

۴ می‌دانیم مثلث‌های OH'B و OH'C قائم‌الزاویه هستند؛ بنابراین داریم:



$$\Delta OHB: HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{(15)^2 - (10)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\underline{AH = HB} \rightarrow AB = 2HB = 10\sqrt{5}$$

$$\Delta OH'C: H'C = \sqrt{OC^2 - OH'^2} = \sqrt{(15)^2 - (9)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\underline{DH' = H'C} \rightarrow DC = 2H'C = 24$$

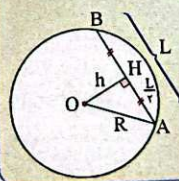
حال می‌توان مساحت ذوزنقه ABCD را به دست آورد:

$$S = \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times HH' = \frac{1}{2} \times (24 + 10\sqrt{5}) \times 19$$

$$= (12 + 5\sqrt{5}) \times 19 = 228 + 95\sqrt{5}$$

دوستنامه

در شکل زیر همیشه از سه پارامتر $\frac{L}{r}$, R , h دو تا را در سؤال مطرح می‌کنند و دیگری را از ما می‌خواهند. توجه به این‌که مثلث تشکیل شده یک مثلث قائم‌الزاویه است کلید حل این‌گونه مسائل است.



$$\Delta OHA: h^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 = R^2$$

۲۲ روش اول: تمام زاویه‌های $\hat{A}_1, \hat{A}_7, \hat{B}_1, \hat{B}_7, \hat{C}_1, \hat{C}_7$ ظلی و برابر نصف کمان روبه‌رو به خود هستند، بنابراین:

$$\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_7 = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

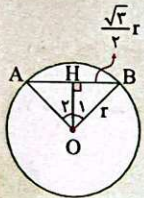
$$\hat{C}_7 = \hat{B}_7 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{AB} = 360^\circ$$

$$\begin{cases} \widehat{BC} = 12^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 6^\circ \\ \widehat{EC} = 9^\circ \Rightarrow \widehat{D} = \frac{\widehat{EC}}{2} = 4.5^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 10.5^\circ$$

دوستنامه

نکته: در هر دایره به شعاع r اگر طول وتر AB برابر $r\sqrt{3}$ باشد، اندازه کمان نظیر آن برابر 120° درجه است:

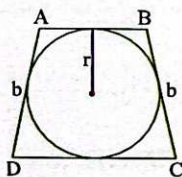


$$\Delta OHB: \sin(\widehat{O_1}) = \frac{HB}{OB} = \frac{r \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ$$

به طریق مشابه اگر طول یک وتر دایره $r\sqrt{3}$ باشد، اندازه کمان نظیر آن وتر برابر 90° درجه است.



$$(2r)^2 = AB \times CD \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 = 4 \times CD \Rightarrow CD = 6$$

از طرفی چون دوزنقه محیطی است:

$$AB + CD = 2b$$

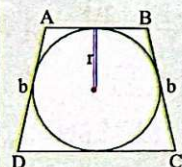
$$\Rightarrow 4 + 6 = 2b \Rightarrow b = 5$$

حال می توان مساحت دوزنقه را به دست آورد:

$$S = b \times 2r = 5 \times 2\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$$

دوستنامه

در هر دوزنقه متساوی الساقین که بر دایره به شعاع r محیط شده باشد، داریم:

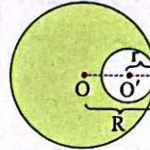


۱ قطر، واسطه هندسی بین دو قاعده است. $(2r)^2 = AB \times CD$

۲ ساق دوزنقه واسطه حسابی بین دو قاعده است. $2b = AB + CD$

۳ مساحت دوزنقه برابر است با: $S = b \times 2r$

۳/۲۴ اگر شعاع دایره بزرگتر را R و شعاع دایره کوچکتر را r در نظر بگیریم، داریم:



$$R - r = OO' = 5/5$$

$$S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} = \pi R^2 - \pi r^2 = 55\pi$$

$$\Rightarrow \pi(R^2 - r^2) = 55\pi \Rightarrow (R - r)(R + r) = 55$$

$$\frac{R - r = 5/5}{\Rightarrow 5/5 \times (R + r) = 55 \Rightarrow R + r = 11}$$

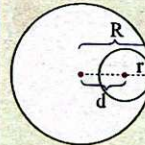
$$\Rightarrow \begin{cases} R + r = 11 \\ R - r = 5/5 \end{cases} \Rightarrow 2R = \frac{21}{5} \Rightarrow R = \frac{21}{10}, r = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\frac{21}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{21}{9}$$

دوستنامه

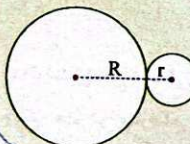
نکات:

۱ در حالتی که دو دایره مماس داخل باشند، طول خط المרכזین برابر است با:



$$d = R - r$$

۲ در حالتی که دو دایره مماس خارج باشند، طول خط المרכזین برابر است با:



$$d = R + r$$

۲/۲۵

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{56 + 40 + 35}{280} = \frac{131}{280}$$

$$\Rightarrow r = \frac{280}{131}$$

دوستنامه

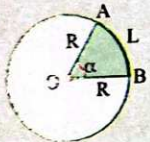
نکته: در هر مثلث با ارتفاع های h_a, h_b, h_c و شعاع دایره محاطی داخلی r داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۱/۲۶ طبق نکته زیر اگر طول یک وتر در دایره $r\sqrt{3}$ باشد، پس اندازه کمان نظیر آن 120° درجه است و اگر طول یک وتر در دایره $r\sqrt{2}$ باشد، اندازه کمان نظیر آن وتر 90° درجه است:

گوشه‌نامه

نکته: در هر دایره، ناحیه محدودشده به دو شعاع دایره و کمانی، آن را قطاع دایره می‌نامند. در هر قطاع با زاویه α (بر حسب درجه) مطابق شکل داریم:



$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360} \times \pi R^2$$

$$AB \text{ طول کمان: } L = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$$

زاویه مرکزی

زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند، زاویه مرکزی برابر با کمان رو به آن زاویه است.

پیرامونی مهمان

$$r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}$$

الف) نادرست -

ب) نادرست - در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو هم‌محال هستند ولی در لوزی این چنین نیست و زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند.

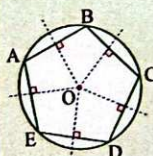
ج) درست - زیرا در چهارضلعی‌های محیطی مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است.

د) درست - زیرا مرکز دایره محیطی از رأس آن به یک فاصله است.

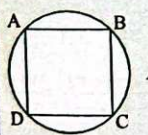
گوشه‌نامه

نکات:

۱ چندضلعی‌های محاطی: اگر تمام رأس‌های یک چندضلعی روی دایره باشد، آن چندضلعی را محاطی و دایره را محیطی می‌نامند. مرکز این دایره محل برخورد عمودمستقیم‌های اضلاع چندضلعی است.

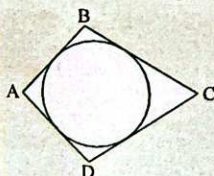


چهارضلعی‌های محاطی معروف: مربع، مستطیل، دوزنقه متساوی‌الساقین. ویژگی مهم در چهارضلعی‌های محاطی: زاویه‌های روبه‌رو هم‌محال هستند.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$$

۲ چندضلعی‌های محیطی: اگر تمام اضلاع یک چندضلعی بر دایره مماس باشد، آن چندضلعی را محیطی و دایره را محیطی می‌نامند. مرکز این دایره محل برخورد نیمسازهای رئوس این چندضلعی است.

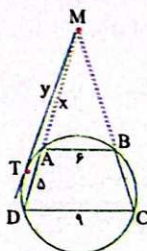


چهارضلعی‌های محیطی معروف: مربع، لوزی، کایت.

ویژگی مهم چهارضلعی‌های محیطی: جمع اضلاع روبه‌رو با هم برابرند.

$$AB + CD = BC + AD$$

۳ با توجه به اطلاعات مسئله می‌خواهیم y را به دست آوریم:



$$\Delta MDC: AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{x}{x+5} = \frac{6}{9} \Rightarrow 9x = 6x + 30 \Rightarrow x = 10$$

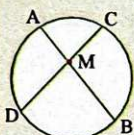
حالا طبق روابط طولی داریم:

$$MT^2 = MA \times MD \Rightarrow y^2 = 10 \times 15 \Rightarrow y = 5\sqrt{6}$$

گوشه‌نامه

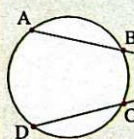
روابط طولی در دایره

۱ اگر دو وتر مانند AB و CD هم‌دیگر را درون دایره در نقطه M قطع کنند، داریم:



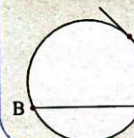
$$MA \times MB = MC \times MD$$

۲ اگر امتداد دو وتر مانند AB و CD هم‌دیگر را خارج دایره در نقطه N قطع کنند، داریم:



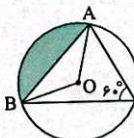
$$NA \times NB = ND \times NC$$

۳ اگر از نقطه‌ای خارج دایره مثل P یک مماس بر دایره و یک قاطع بر دایره رسم کنیم، داریم:



$$PM^2 = PA \times PB$$

۴ در شکل از O (مرکز دایره) به A و B وصل می‌کنیم. از طرفی زاویه C محیطی است پس اندازه کمان روبه‌رو به آن 120° درجه است:



$$AB \text{ طول کمان: } L = \frac{120}{360} \times 2\pi \times r \Rightarrow 4\pi = \frac{2}{3}\pi r \Rightarrow r = 6$$

حال داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع OAB}} - S_{\Delta OAB} \\ = \frac{120}{360} \times \pi \times 6^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin(120^\circ) = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

دوستانه

اگر اندازه بارهای q_1 و q_2 و یا فاصله بین بارها (r) در سوالات تغییر کند، برای مقایسه اندازه نیروی الکتریکی که دو ذره باردار به یکدیگر در دو حالت وارد می‌کنند، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

نیروهای وارد بر کره (۲) را رسم می‌کنیم:



با توجه به این که کره (۲) در حال تعادل است، داریم:

$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F_E = F_N + mg$$

$$\Rightarrow \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} = F_N + mg$$

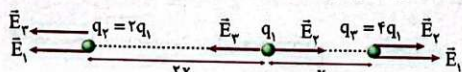
$$\Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{r^2} = 6 \times 10^{-6} + 1 \times 10^{-6} \times 10$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 10^{-3}}{r^2} = 6 \times 10^{-6} + 10 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 10^{-3}}{r^2} = 16 \times 10^{-6} \Rightarrow r^2 = \frac{9 \times 10^{-3}}{16 \times 10^{-6}} = \frac{9}{16} \times 10^3$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{4} \times 10 \times \sqrt{10} \Rightarrow r = 7.5\sqrt{10} \text{ m}$$

ابتدا میدان الکتریکی حاصل از هر کدام از بارها را رسم می‌کنیم:



بزرگی براین میدان‌های الکتریکی در محل بار q_1 برابر است با:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k \times 2q_1}{x^2} = \frac{kq_1}{x^2}$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k \times 4q_1}{x^2} = \frac{4kq_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{4kq_1}{x^2} - \frac{kq_1}{x^2} = \frac{3kq_1}{x^2}$$

بزرگی براین میدان‌های الکتریکی در محل بار q_2 برابر است با:

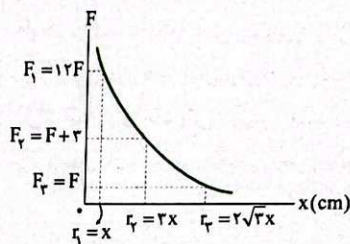
$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{kq_1}{4x^2}$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{4kq_1}{9x^2}$$

$$\Rightarrow E_2 = E_1 + E_2 = \frac{kq_1}{4x^2} + \frac{4kq_1}{9x^2} = \frac{9kq_1 + 16kq_1}{36x^2} = \frac{25kq_1}{36x^2}$$

فیزیک

با توجه به قانون کولن داریم:



$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{F}{F/2} = \left(\frac{x}{2x}\right)^2 \Rightarrow \frac{F}{F/2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4F = F/2 \Rightarrow 8F = F \Rightarrow F = 9N$$

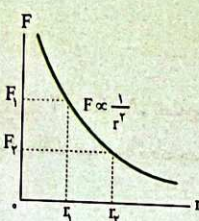
$$F_1 = \frac{k|q_1||q_2|}{r_1^2} \quad F_1 = 12 \times 9$$

$$12 \times 9 = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{x^2} \times 12 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{9 \times 12 \times 10^{-2}}{12 \times 9} \Rightarrow x = 0.1 \text{ m}$$

دوستانه

نمودار اندازه نیروی الکتریکی بین دو ذره باردار برحسب فاصله بین دو ذره مطابق شکل زیر است:



$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

توجه: با افزایش فاصله بین دو ذره باردار، بزرگی نیروی الکتریکی که دو ذره به یکدیگر وارد می‌کنند، کاهش می‌یابد.

با توجه به قانون کولن داریم:

$$\frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

$$\frac{F' = \frac{169}{100} F}{r' = \frac{1}{3} r} \Rightarrow \frac{169}{100} = \frac{(q-xq)}{q} \times \frac{q+xq}{q} \times \frac{r^2}{r'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{169}{100} \times \frac{1}{9} = \frac{q^2 - x^2 q^2}{q^2} \Rightarrow \frac{169}{100} \times \frac{1}{9} = (1-x^2) \Rightarrow \frac{169}{900} = 1-x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 - \frac{169}{900} \Rightarrow x^2 = \frac{731}{900} \Rightarrow x = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0.5$$

اصل برهم نهی میدان های الکتریکی

میدان الکتریکی خالص حاصل از چند بار الکتریکی در نقطه ای از فضا، برابر با مجموع میدان هایی است که هر بار در نبود سایر بارها در آن نقطه از فضا ایجاد می کند که به آن اصل برهم نهی میدان های الکتریکی می گویند.

سؤال های مربوط به اصل برهم نهی به دو دسته کلی تقسیم می شوند:

۱) میدان های الکتریکی هم راستا باشند (ذره ها روی یک خط باشند).

الف) میدان های الکتریکی حاصل از بارها در یک نقطه هم جهت باشند، داریم:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_1 + E_2$$

جهت میدان الکتریکی خالص، هم جهت با دو میدان است.

ب) میدان های الکتریکی حاصل از بارها در یک نقطه در خلاف جهت هم باشند، داریم:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = |E_1 - E_2|$$

جهت میدان الکتریکی خالص در جهت میدان بزرگ تر است.

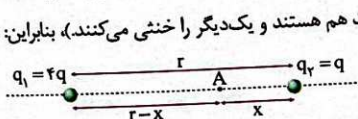
توجه: به طور کلی، زمانی که دو بردار، هم جهت باشند ($\theta = 0^\circ$)، اندازه برابر آن ها حداکثر و زمانی که دو بردار در خلاف جهت هم باشند ($\theta = 180^\circ$)، اندازه برابر آن ها حداقل است.

۲) میدان های الکتریکی عمود بر هم باشند.

اگر میدان های الکتریکی حاصل از دو بار در نقطه مورد نظر بر هم عمود باشند، با استفاده از رابطه فیثاغورس می توانید اندازه برابرین میدان ها را محاسبه کنید و جهت میدان برابرین دو میدان قرار می گیرد. در واقع دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ دو ضلع یک مستطیل (مربع) هستند که بردار میدان خالص حاصل از این دو میدان، یعنی $\vec{E}$ قطر این مستطیل خواهد بود.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

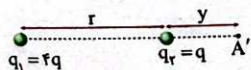
۳۵) ۲) نقطه A، نقطه ای در فاصله دو بار و نزدیک به بار کوچک تر است (در این نقطه میدان ها خلاف جهت هم هستند و یکدیگر را خنثی می کنند). بنابراین:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{4q}{(r-x)^2} = \frac{q}{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \frac{2}{r-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x = r-x \Rightarrow r = 3x \Rightarrow x = \frac{r}{3}$$

نقطه A' در خارج از فاصله بین دو بار و نزدیک به بار کوچک تر است (در این نقطه میدان ها هم جهت هستند). بنابراین:



$$E'_1 = E'_2 \Rightarrow \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{4q}{(r+y)^2} = \frac{q}{y^2} \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{2}{r+y} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow 2y = r+y \Rightarrow r = y$$

بنابراین فاصله بین نقاط A و A' برابر است با:

$$x + y = \frac{r}{3} + r = \frac{r+3r}{3} = \frac{4}{3}r$$

بزرگی برابرین میدان های الکتریکی در محل بار q_3 برابر است با:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{kq_1}{x^2} \\ E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{2kq_1}{9x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_3 = E_1 + E_2 = \frac{kq_1}{x^2} + \frac{2kq_1}{9x^2} = \frac{9kq_1 + 2kq_1}{9x^2} = \frac{11kq_1}{9x^2}$$

$$A = \left| \frac{E_2 - E_1}{E_2} \right| = \left| \frac{\frac{11kq_1}{9x^2} - \frac{2kq_1}{9x^2}}{\frac{11kq_1}{9x^2}} \right| = \left| \frac{9kq_1 - 2kq_1}{11kq_1} \right| = \left| \frac{7kq_1}{11kq_1} \right| = \frac{7}{11}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4kq_1}{\frac{11kq_1}{9x^2}} = \frac{4 \times 36}{11 \times 18} = \frac{8}{11}$$

دروسنامه

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه ای q در نقطه ای به فاصله r از آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

توجه: k ثابت کولن است که برابر با $9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$ می باشد.

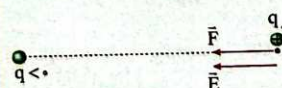
نکته: بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q با اندازه بار q رابطه مستقیم و با مجذور فاصله از بار، رابطه عکس دارد.

توجه: در رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ ، q بار ذره ای است که میدان الکتریکی را ایجاد کرده است، بنابراین بزرگی میدان الکتریکی به اندازه بار q بستگی دارد.

جهت میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار در یک نقطه

برای مشخص کردن جهت بردار میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه ای q در یک نقطه ابتدا یک بار آزمون مثبت (q_0) را در نقطه مورد نظر قرار می دهیم، سپس جهت نیروی الکتریکی وارد بر آن از طرف بار الکتریکی نقطه ای (q) را رسم می کنیم.

توجه: میدان الکتریکی در هر نقطه هم جهت با نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت فرضی قرار گرفته در آن نقطه است.



توجه: میدان الکتریکی حاصل از بار مثبت در هر نقطه به شکل خروجی و در امتداد خطی است که بار را به آن نقطه وصل می کند و میدان الکتریکی حاصل از بار منفی در یک نقطه به شکل ورودی و در امتداد خط واصل آن نقطه به بار است.



۱ ۳۷ با توجه به این که با حذف بار q_1 ، برآیند میدان‌های الکتریکی به سمت راست افزایش می‌یابد، بنابراین نتیجه می‌گیریم که میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار در نقطه مورد نظر در خلاف جهت هم هستند، بنابراین دو بار q_1 و q_2 همنام هستند و با توجه به این که میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 به سمت راست است، پس نتیجه می‌گیریم علامت هر دو بار، مثبت است.

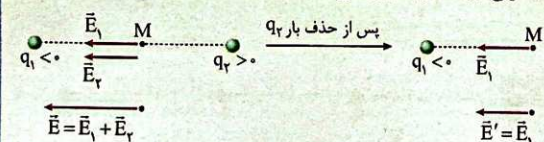
$$\begin{cases} q_1 > q_2 \Rightarrow E_T = E = |E_2 - E_1| \\ E_2 > E_1 \Rightarrow E = E_2 - E_1 \\ q_1 < q_2 \Rightarrow E_T = E_2 = E + \frac{25}{100}E = \frac{125}{100}E \\ \Rightarrow E = \frac{125}{100}E - E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{125}{100}E - E = \frac{25}{100}E \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} &= \frac{\frac{k|q_2|}{r_2^2}}{\frac{k|q_1|}{r_1^2}} = \frac{E_2 = \frac{1}{4}E}{E_1 = \frac{1}{4}E} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \\ \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} &= \frac{q_2}{q_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{4}q_1 \end{aligned}$$

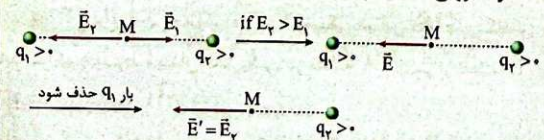
دورسنامه

۱ اگر در یک نقطه، میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 هم‌جهت باشند، (یعنی دو بار q_1 و q_2 ناهمنام باشند)، بزرگی برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار در نقطه مورد نظر برابر با $E_1 + E_2$ است و با حذف یکی از بارها، اندازه میدان برآیند، کاهش می‌یابد ولی جهت آن تغییر نمی‌کند.



۲ اگر در یک نقطه، میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در خلاف جهت هم باشند (یعنی دو بار q_1 و q_2 همنام باشند)، بزرگی برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار در نقطه مورد نظر برابر با $|E_1 - E_2|$ است.

در این حالت اگر باری که میدان الکتریکی حاصل از آن کوچک‌تر است، حذف شود، بزرگی میدان برآیند، افزایش می‌یابد اما جهت آن تغییر نمی‌کند.



در این حالت اگر باری که میدان حاصل از آن بزرگ‌تر است، حذف شود، بزرگی میدان برآیند، کاهش می‌یابد. هم‌چنین جهت آن نیز خلاف جهت میدان برآیند اولیه می‌شود.



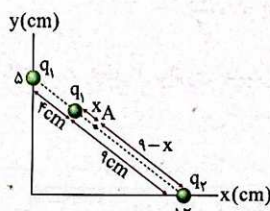
دورسنامه

برای دو بار الکتریکی نقطه‌ای غیر هم‌اندازه، در دو نقطه بزرگی میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار، هم‌اندازه می‌شود، یکی بین دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر و دیگری خارج از فاصله دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر.

نکته ۱ اگر دو بار، همنام باشند، در نقطه بین دو بار، برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار، صفر می‌شود و در خارج از فاصله دو بار، بزرگی برآیند میدان‌های الکتریکی برابر با $E_1 + E_2$ می‌شود.

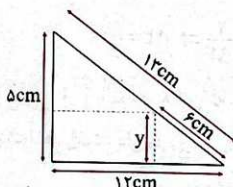
نکته ۲ اگر دو بار، ناهمنام باشند، در خارج از فاصله دو بار، برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار، صفر می‌شود و در نقطه بین دو بار، بزرگی برآیند میدان‌های الکتریکی برابر با $E_1 + E_2$ می‌شود.

۱ ۳۶ ابتدا موقعیت بارها را در صفحه مختصات مشخص می‌کنیم:



$$\begin{aligned} E_T = 0 &\Rightarrow E_1 = E_2 \\ \Rightarrow \frac{k|q_1|}{r_1^2} &= \frac{k|q_2|}{r_2^2} \\ \Rightarrow \frac{|q_1|}{x^2} &= \frac{4|q_2|}{(9-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(9-x)^2} \\ \Rightarrow 2x &= 9-x \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{y}{\Delta} = \frac{6}{13} \Rightarrow y = \frac{30}{13} \text{ cm}$$

معادله خط واصل بین دو بار q_1 و q_2 برابر است با:

$$\begin{aligned} y &= ax + b \xrightarrow{a = -\frac{\Delta}{12}, b = \Delta} y = -\frac{\Delta}{12}x + \Delta \Rightarrow \frac{30}{13} = -\frac{\Delta}{12}x + \Delta \\ \Rightarrow \frac{30}{13} - \Delta &= -\frac{\Delta}{12}x \Rightarrow \frac{30 - 6\Delta}{13} = -\frac{\Delta}{12}x \Rightarrow \frac{\Delta}{12}x = \frac{3\Delta}{13} \\ \Rightarrow x &= \frac{12}{13} \Delta \text{ cm} \end{aligned}$$

بنابراین مختصات نقطه A به صورت $(\frac{12}{13}\Delta, \frac{30}{13})$ است.

دورسنامه

اگر دو بار الکتریکی، همنام باشند، برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار بر روی خط واصل دو بار، بین دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر، صفر می‌شود.

نکته ۱ اگر دو بار، همنام و هم‌اندازه باشند، در وسط خط واصل بین دو بار، برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار، صفر می‌شود.

۴۰/۲ در جابه‌جایی بار الکتریکی در یک میدان الکتریکی، کار میدان الکتریکی به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقطه ابتدایی و انتهایی وابسته است.

دروسنامه

کار میدان الکتریکی و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار q به مسیر حرکت بار الکتریکی وابسته نیست و فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد.

۴۱/۱ ذره در حال تعادل است، بنابراین: $F_E = mg$ (*)
وقتی پایانه‌های باتری را جابه‌جا می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= ma \\ \Rightarrow F_E + mg &= ma \xrightarrow{(*)} mg + mg = ma \\ \Rightarrow 2mg &= ma \Rightarrow a = 2g = 2 \cdot \frac{m}{s} \end{aligned}$$

با توجه به رابطه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_f = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_E + W_{mg} = K_f - K_i$$

$$\Rightarrow F_E d \cos \alpha + mgd \cos \alpha = \frac{1}{2} mv_f^2$$

$$\xrightarrow{(*)} mgd + mgd = \frac{1}{2} mv_f^2 \Rightarrow 2mgd = \frac{1}{2} mv_f^2$$

$$\Rightarrow 2gd = \frac{1}{2} v_f^2 \Rightarrow 2 \times 10 \times 10 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = 4$$

$$\Rightarrow v_f = 2 \frac{m}{s}$$

با توجه به رابطه شتاب داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \xrightarrow{v_i=0} 2 = \frac{2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0.1 s$$

۴۲/۱ با توجه به این که میدان الکتریکی بین صفحات یک خازن تخت، یکنواخت است، داریم:

$$E_A = E_B$$

$$E = E_A \Rightarrow \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|\Delta V_A|}{d_A} \Rightarrow \frac{V}{10} = \frac{|\Delta V_A|}{1} \Rightarrow |\Delta V_A| = \frac{V}{10}$$

$$E = E_B \Rightarrow \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|\Delta V_B|}{d_B} \Rightarrow \frac{V}{10} = \frac{|\Delta V_B|}{9} \Rightarrow |\Delta V_B| = \frac{9}{10} V$$

$$\frac{|\Delta V_B|}{|\Delta V_A|} = \frac{\frac{9}{10} V}{\frac{V}{10}} = 9$$

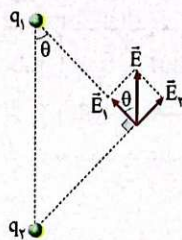
بنابراین:

دروسنامه

می‌دانیم در میدان الکتریکی یکنواخت، اندازه میدان در تمام نقاط، یکسان است، بنابراین:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{E} \\ & A \cdots \cdots B \\ & \quad d \\ & C \cdots \cdots D \\ & \quad d' \end{aligned} \quad \frac{|\Delta V_{AB}|}{d} = \frac{|\Delta V_{CD}|}{d'}$$

۱/۱ بردار میدان $\vec{E}$ را تجزیه می‌کنیم:



با توجه به جهت $\vec{E}_x$ و $\vec{E}_y$ نتیجه می‌گیریم که $q_1 < 0$ و $q_2 > 0$ است.

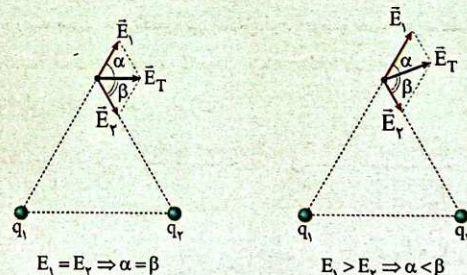
$$\begin{cases} E_x = E \cos \theta \\ E_y = E \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{E_x}{E_y} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{\frac{k|q_1|}{r_1^2}}{\frac{k|q_2|}{r_2^2}} = \frac{\sqrt{3}r}{r} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \left(\frac{r}{\sqrt{3}r}\right)^2 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \frac{1}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = 3\sqrt{3} \xrightarrow{q_1 < 0, q_2 > 0} \frac{q_1}{q_2} = -3\sqrt{3}$$

دروسنامه

نکته: اگر به‌طور کلی $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ باشد، بردار برابری میدان‌ها روی نیمساز زاویه بین دو بردار میدان می‌افتد و اگر اندازه دو میدان $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ برابر نباشد، بردار برابری به بردار میدان بزرگ‌تر، نزدیک‌تر است.



توجه: در بعضی از سوالات با تجزیه بردار میدان برابری، به راحتی می‌توان علامت بارهای الکتریکی را مشخص کرد و همچنین اندازه میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها را در نقطه مورد نظر با هم مقایسه کرد.

توجه: بردار میدان الکتریکی حاصل از یک بار مثبت در یک نقطه در حال دور شدن از بار و بردار میدان الکتریکی حاصل از یک بار منفی در یک نقطه در حال نزدیک شدن به بار است.

۳۹/۳ برای این که بزرگی میدان الکتریکی در این جابه‌جایی کاهش یابد، باید تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطه A بیشتر از نقطه B باشد (نادرستی گزینه‌های (۱) و (۲))

برای این که در جابه‌جایی بار منفی از نقطه A تا نقطه B، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره باردار افزایش یابد، باید در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا شده باشیم (نادرستی گزینه (۴)).

می‌دانیم با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد (نادرستی گزینه (۴)).

ظرفیت خازن

با تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن (V)، بار ذخیره شده در آن به همان نسبت تغییر می‌کند، به طوری که نسبت بار ذخیره شده در خازن به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن ثابت می‌ماند. به این نسبت، ظرفیت خازن می‌گوییم.

بنابراین رابطه ظرفیت خازن به صورت زیر است:

$$C = \frac{Q}{V}$$

نکات:

۱) یکای ظرفیت خازن برابر با کولن بر ولت ($\frac{C}{V}$) است که فاراد (F) نامیده می‌شود.

توجه: فاراد، یکای بسیار بزرگی است.

۲) ظرفیت خازن به ویژگی‌های هندسی و جنس عایق بین صفحه‌های خازن بستگی دارد و با تغییر بار یا اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، تغییر نمی‌کند.

عوامل مؤثر در ظرفیت خازن

طبق آزمایش‌ها مشخص شده است که ظرفیت خازن به سه عامل بستگی دارد.

۱) ظرفیت خازن تخت با فاصله بین صفحات (d) آن رابطه عکس دارد.

۲) ظرفیت خازن تخت با مساحت مشترک صفحات خازن (A)، رابطه مستقیم دارد.

توجه: مساحت مشترک صفحات خازن، مساحتی از یک صفحه خازن است که کاملاً روبه‌روی صفحه دیگر است.

۳) ظرفیت خازن با ضریب ثابتی که به جنس دی‌الکتریک (ماده عایق) به کاررفته در بین صفحه‌های خازن بستگی دارد، رابطه مستقیم دارد.

توجه: ضریب دی‌الکتریک خلأ برابر یک است و ضریب دی‌الکتریک سایر نارساها از یک بیشتر است.

رابطه ظرفیت خازن برحسب مشخصات ساختمانی آن به شکل زیر است:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

توجه: ϵ_0 همان ضریب گذردهی الکتریکی خلأ است و یکای آن در SI

برابر با فاراد بر متر ($\frac{F}{m}$) یا $\frac{C^2}{N.m^2}$ می‌باشد.

نکته: اگر مشخصات ظاهری (ساختمانی) خازن تختی تغییر کند، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

ظرفیت خازن در حالت ثانویه برابر است با:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{\kappa_2=1, \kappa_1=\kappa} \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{\kappa} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{A_2=2A_1, d_2=\frac{1}{2}d_1}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{\kappa} \times 2 \times 2 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{4}{\kappa} \quad (*)$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ثابت است، بنابراین:

$$C = \frac{Q}{V} \xrightarrow{V: \text{ثابت}} \frac{C_2}{C_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \xrightarrow{(*)} \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4}{\kappa}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{4}{\kappa} \Rightarrow \kappa = \frac{4 \times 25}{1} = \frac{100}{1} = 100$$

۱) اگر از مرکز کره تا سطح آن جابه‌جا شویم، چون درون رسانا قرار داریم، میدان الکتریکی صفر است. پس از جدا شدن از سطح کره رسانا و دور شدن از آن به دلیل تقارن موجود در کره رسانا می‌توانیم بار الکتریکی را به طور متمرکز و نقطه‌ای در مرکز کره در نظر بگیریم و طبق رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ با

فاصله گرفتن از بار، میدان الکتریکی آن ضعیف می‌شود ($E \propto \frac{1}{r^2}$).

پتانسیل الکتریکی درون رسانا ثابت است و بیرون از آن با فاصله گرفتن از بار و ضعیف شدن میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد. لذا گزینه (۱) صحیح است.

دورستانه

میدان الکتریکی در داخل رسانا

در شرایط تعادل الکترواستاتیکی، میدان الکتریکی داخل رسانا صفر است.

نکات:

۱) بار اضافی داده شده به یک رسانای منزوی، روی سطح خارجی آن توزیع می‌شود و میدان الکتریکی درون رسانا در این حالت صفر است.

۲) اگر یک رسانای خنثی درون یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، توزیع بار (القای بار) روی آن به گونه‌ای خواهد بود که میدان الکتریکی داخل رسانا صفر شود.

۳) در یک رسانای منزوی باردار و یا یک رسانای خنثی که درون میدان الکتریکی خارجی قرار دارد، میدان الکتریکی خارجی بر سطح رسانا عمود است.

پتانسیل الکتریکی نقاط داخل و روی سطح رسانای منزوی

چون میدان الکتریکی درون رسانایی که در تعادل الکترواستاتیکی است، برابر صفر است، در نتیجه نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره باردار در داخل رسانا صفر می‌شود، بنابراین کار نیروی الکتریکی در هر جابه‌جایی دلخواهی در داخل رسانا صفر می‌شود، در نتیجه:

$$F_E = 0 \Rightarrow W_E = 0 \Rightarrow \Delta U_E = 0 \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} = \frac{0}{q} = 0$$

بنابراین همه نقاط داخل و روی سطح رسانای منزوی که در حال تعادل الکترواستاتیکی است، پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند.

۴) ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{27 \times 10^{-9}}{150} = 1.8 \times 10^{-10} F$$

با توجه به ساختمان خازن داریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow 1.8 \times 10^{-10} = \kappa \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{3 \times 10^{-4}}{1.8 \times 10^{-6}} \Rightarrow 1.8 \times 10^{-11} = \kappa \times 1.5 \times 10^{-11} \Rightarrow \kappa = 12$$

دورستانه

خازن

خازن، قطعه‌ای الکتریکی می‌باشد که می‌تواند بار الکتریکی و انرژی الکتریکی را در خود ذخیره کند و در مواقع ضروری آن را خیلی سریع در مدار تخلیه کند.

نکته: باتری‌ها انرژی را با آهنگ نسبتاً کمی در مدار تخلیه می‌کنند، ولی خازن باردار می‌تواند انرژی را با آهنگ نسبتاً زیادی در مدار تخلیه کند.

دروسنامه

انرژی ذخیره شده در خازن

هنگامی که یک خازن را به باتری متصل می‌کنند، در هنگام شارژ شدن خازن، باتری بر روی بار Q کار انجام می‌دهد و آن را از یک صفحه خازن جدا کرده و به صفحه دیگر خازن منتقل می‌کند. کاری که باتری در این انتقال انجام می‌دهد به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی خازن ذخیره می‌شود.

انرژی ذخیره شده در خازن تختی با ظرفیت C که دو سر آن به اختلاف پتانسیل الکتریکی V متصل است و بار Q بر روی صفحات آن ذخیره شده است، از رابطه‌های زیر قابل محاسبه است:

$$U = \frac{1}{2} QV$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

نکته: یکای SI انرژی ذخیره شده در خازن برابر با ژول (J) می‌باشد که معادل وات در ثانیه (W.s) است.

۴/۴۹ ظرفیت خازن برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} C_V V^2 \Rightarrow 16 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times C_V \times (40)^2$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{32 \times 10^{-2}}{16 \times 10^2} = 2 \times 10^{-5} \text{ F} = 20 \mu\text{F}$$

بنابراین:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_V}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{\kappa_2}{1} \Rightarrow \kappa_2 = 8$$

درصد تغییرات ثابت دی‌الکتریک برابر است با:

$$\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1} \times 100 = \frac{8 - 1}{1} \times 100 = 700\%$$

۴/۵۰ بررسی عبارت‌ها:

الف)

$$\begin{cases} C_A = \frac{Q_A}{V_A} \Rightarrow C_A = \frac{4 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^{-10} \text{ F} = 0.4 \text{ nF} \\ C_B = \frac{Q_B}{V_B} \Rightarrow C_B = \frac{10 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-2}} = 2.5 \times 10^{-9} \text{ F} = 2.5 \text{ nF} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_B - C_A = 2.5 - 0.4 = 2.1 \text{ nF} \quad (\checkmark)$$

$$\text{ب) } U = \frac{1}{2} CV^2 \xrightarrow{\text{ثابت: } V} \frac{U_A}{U_B} = \frac{C_A}{C_B}$$

$$\frac{C_A = 0.4 \text{ nF}}{C_B = 2.5 \text{ nF}} \rightarrow \frac{U_A}{U_B} = \frac{4}{25} = 0.16 \quad (\checkmark)$$

دروسنامه

اگر خازن پس از شارژ شدن به باتری متصل باشد، در این صورت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ثابت است و هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت مستقیم در بار و انرژی خازن می‌شود.

$$Q = CV \xrightarrow{\text{ثابت: } V} Q \propto C$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \xrightarrow{\text{ثابت: } V} U \propto C$$

۳/۴۶ ظرفیت خازن به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن بستگی ندارد، بنابراین ظرفیت خازن، ثابت می‌ماند. با توجه به این که ظرفیت خازن ثابت است، داریم:

$$C = \frac{Q}{V} \xrightarrow{\text{ثابت: } C} \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2}{V_1} \quad V_2 = nV_1 \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = n$$

دروسنامه

ظرفیت خازن به ویژگی‌های هندسی و جنس عایق بین صفحه‌های خازن بستگی دارد و با تغییر بار ذخیره شده در خازن یا اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، تغییر نمی‌کند.

طبق رابطه $C = \frac{Q}{V}$ ، اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن را تغییر دهیم، بار ذخیره شده در آن نیز به همان نسبت تغییر می‌کند، به طوری که نسبت این دو که بیانگر ظرفیت خازن است، تغییر نمی‌کند.

$$C = \frac{Q}{V} \xrightarrow{\text{ثابت: } C} \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

۴/۴۷ اختلاف بار ذخیره شده در خازن در دو حالت برابر است با:

$$Q_2 - Q_1 = ne \xrightarrow{Q=CV}$$

$$CV_2 - CV_1 = ne \xrightarrow{V_2 = V_1 + x}$$

$$320 \times 10^{-9} \times (V_1 + x) - 320 \times 10^{-9} \times V_1 = 8 \times 10^{12} \times 1/6 \times 10^{-19}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \times 1/6 \times 10^{-7}}{320 \times 10^{-9}} \Rightarrow x = 4 \text{ V}$$

۲/۴۸ ابتدا انرژی ذخیره شده در خازن را برحسب وات در ثانیه که همان

ژول است، به دست می‌آوریم:

$$U = 0.75 \times 10^{-7} \text{ MV} \cdot \min \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{10^6 \text{ W}}{1 \text{ MW}} = 4.5 \text{ W.s} = 4.5 \text{ J}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن برابر است با:

$$V = V_+ - V_- = 2 - (-2) = 4 \text{ kV} = 4 \times 10^3 \text{ V}$$

بنابراین:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow 4.5 = \frac{1}{2} C \times (4 \times 10^3)^2$$

$$\Rightarrow 9 = C \times 16 \times 10^6 \Rightarrow C = \frac{9}{16} \times 10^{-6} \text{ F} = \frac{9}{16} \mu\text{F}$$

ظرفیت خازن برابر است با:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow 20 \times 10^{-6} = \frac{(20 \times 10^{-9})^2}{2C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{400 \times 10^{-18}}{2 \times 20 \times 10^{-6}} \Rightarrow C = \frac{4}{2} \times 10^{-11} = \frac{2}{3} \times 10^{-11} \text{ F}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{2}{3} \times 10^{-11} = \frac{20 \times 10^{-9}}{V} \Rightarrow V = \frac{60}{2} \times 10^2 = 3000 \text{ V}$$

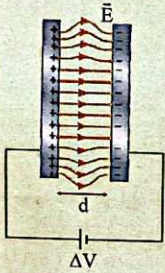
بنابراین:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow d = \frac{3000}{5 \times 10^3} = 0.6 \text{ m} = 60 \text{ cm}$$

دورسنامه

میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات خازن

خطوط میدان الکتریکی در فضای بین دو صفحه رسانای موازی با بارهای هم‌اندازه و ناهم‌نام و دور از لبه‌های صفحات، مستقیم، موازی و هم‌فاصله‌اند. یعنی بردار میدان الکتریکی در تمام نقاط بین دو صفحه (دور از لبه‌ها) هم‌اندازه و هم‌جهت است. به چنین میدانی، میدان الکتریکی یکنواخت می‌گویند و بزرگی آن برابر است با:



$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} \quad |\Delta V| = \frac{Q}{C} \Rightarrow E = \frac{Q}{Cd} \quad C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

ابتدا ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = 1 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{2 \times 10^{-6}}{0.125 \times 10^{-3}} \Rightarrow C = 144 \times 10^{-12} \text{ F}$$

با توجه به حداکثر انرژی ذخیره‌شده در خازن، حداکثر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن را به دست می‌آوریم:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} C V_{\max}^2 \Rightarrow 0.5 \times 10^{-6} = \frac{1}{2} \times 144 \times 10^{-12} \times V_{\max}^2$$

$$\Rightarrow V_{\max}^2 = \frac{1}{144} \times 10^{-6} \Rightarrow V_{\max} = \frac{1}{12} \times 10^{-3} \text{ V}$$

بزرگی حداکثر میدان الکتریکی بین صفحات خازن برابر است با:

$$E_{\max} = \frac{V_{\max}}{d} \Rightarrow E_{\max} = \frac{\frac{1}{12} \times 10^{-3}}{125 \times 10^{-6}} = \frac{10^{-3}}{125 \times 10^{-6}} = \frac{1}{125} \times 10^3 \text{ V/m}$$

بنابراین:

$$E_{\max} = \frac{1}{125} \times 10^3 \text{ V/m} \times \frac{10^{-6} \text{ MV}}{1 \text{ V}} \times \frac{1 \text{ m}}{10^{-2} \text{ cm}} = \frac{2}{3} \text{ MV/cm}$$

$$\text{ج) } C = \frac{Q}{V} \xrightarrow{\text{ثابت } Q} \frac{C_B}{C_A} = \frac{V_A}{V_B}$$

$$\frac{C_A = 0.4 \text{ nF}}{C_B = 2/5 \text{ nF}} \rightarrow \frac{2/5}{0.4} = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = 6/25 \quad (\checkmark)$$

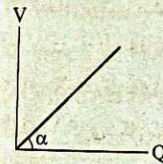
$$\text{د) } C = \frac{Q}{V} \xrightarrow{\text{ثابت } V} \frac{C_A}{C_B} = \frac{Q_A}{Q_B}$$

$$\frac{C_A = 0.4 \text{ nF}}{C_B = 2/5 \text{ nF}} \rightarrow \frac{0.4}{2/5} = \frac{Q_A}{Q_B} \Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = 0.16 \quad (\checkmark)$$

دورسنامه

نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن بر حسب بار ذخیره‌شده در آن

با توجه به رابطه ظرفیت خازن ($C = \frac{Q}{V}$)، نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن بر حسب بار ذخیره‌شده در خازن به شکل زیر است:



$$\text{شیب خط} = \tan \alpha = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C}$$

توجه: شیب نمودار $V-Q$ برابر با معکوس ظرفیت خازن است.

با تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، بار ذخیره‌شده در آن نیز تغییر می‌کند ولی ظرفیت خازن ثابت می‌ماند، بنابراین:

$$U_2 - U_1 = -252 \times 10^{-6} \text{ J} \quad U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$\frac{1}{2} C (V_2^2 - V_1^2) = -252 \times 10^{-6}$$

$$\frac{V_2 = \frac{80}{100} V_1}{\rightarrow \frac{1}{2} C \left(\left(\frac{80}{100} V_1 \right)^2 - V_1^2 \right) = -252 \times 10^{-6}}$$

$$\frac{C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{20 \times 10^{-3}}{V_1}}{\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 10^{-3}}{V_1} \times \left(-\frac{36}{100} V_1^2 \right) = -252 \times 10^{-6}}$$

$$10^{-2} \times \left(\frac{36}{100} V_1 \right) = 252 \times 10^{-6} \Rightarrow V_1 = \frac{252 \times 10^{-6}}{36 \times 10^{-4}} = 7 \times 10^{-2} \text{ V}$$

بنابراین ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{20 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-2}} = 0.2857 \text{ F} \approx 285 \text{ mF}$$

بار روی صفحات خازن 2 mC افزایش یافته است، بنابراین:

$$U_2 - U_1 = 0.18 \text{ J} \Rightarrow \frac{Q_2^2}{2C} - \frac{Q_1^2}{2C} = 0.18$$

$$\Rightarrow Q_2^2 - Q_1^2 = 1/6 C \Rightarrow (Q_1 + 2 \times 10^{-3})^2 - Q_1^2 = 1/6 \times 3/75 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow Q_1^2 + 4Q_1 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-6} - Q_1^2 = 6 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow 4Q_1 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 0.5 \times 10^{-3} \text{ C} = 500 \text{ } \mu\text{C}$$

۱ عنصرهای مورد نظر $^{32}_{14}\text{Si}$ و $^{76}_{32}\text{Ge}$ هستند.

نشان دهید که در این حالت:

- (ا) در آرایش الکترونی اتم سیلیسیم، زیرلایه با $l=2$ ، خالی از الکترون است.
 (ب) سطح هر دو عنصر صیقلی بوده و هر دو در برابر ضربه خرد می‌شوند.
 (پ) رسانایی الکتریکی کمی دارند اما رسانایی الکتریکی آن‌ها کم‌تر از رسانایی الکتریکی نافلز گروه چهاردهم یعنی گرافیت است.
 (ت) فلزهای $^{80}_{34}\text{Se}$ و $^{82}_{34}\text{Se}$ که در گروه چهاردهم جای دارند، کاتیون‌های تک‌اتمی تشکیل می‌دهند.

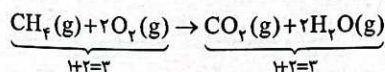
۴ اگر A جامد باشد، X در آن شرایط می‌تواند جامد، مایع و یا گازی شکل باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) از آن‌جا که A و X هم‌دوره بوده و عدد اتمی A کوچک‌تر از عدد اتمی X است، شعاع اتمی X کوچک‌تر از شعاع اتمی A خواهد بود، زیرا در هسته اتم X، تعداد پروتون بیشتری وجود داشته و اثر جاذبه هسته X بر الکترون‌های آن، بیشتر از اثر جاذبه هسته A بر الکترون‌های آن است.
 (۲) اگر X شبه‌فلز باشد، A که در سمت چپ آن قرار دارد یا شبه‌فلز و یا فلز است.
 (۳) اگر A گازی شکل باشد، تمام عنصرهای هم‌دوره و پس از آن، گازی شکل هستند.
 ۶۰ در فرمول پیوند - خط، هر خط تیره نشان‌دهنده یک پیوند کربن - کربن است. بنابراین برای نمایش مولکول اتان (C_2H_6) به روش پیوند - خط، که فقط یک پیوند $\text{C}-\text{C}$ دارد از یک خط تیره استفاده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

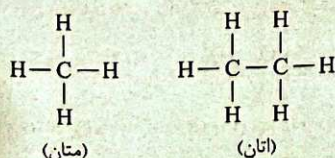
- (۱) در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، تفاوت نقطه جوش هر دو آلکان متوالی کاهش می‌یابد. بنابراین تفاوت نقطه جوش متان (CH_4) و اتان (C_2H_6) که کم‌ترین شمار اتم‌های کربن را دارند، بیشتر از تفاوت نقطه جوش هر دو آلکانی است که فقط در یک اتم کربن با هم اختلاف دارند.
 (۲) در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی کربن افزایش می‌یابد.
 (۳) به معادله واکنش زیر نگاه کنید:



درسنامه

متان و اتان

متان با فرمول مولکولی CH_4 و اتان با فرمول مولکولی C_2H_6 ، به ترتیب اولین و دومین عضو از خانواده آلکان‌ها هستند. آلکان‌ها از دسته هیدروکربن‌ها بوده و سیر شده هستند، یعنی در ساختار خود پیوندهای دوگانه یا سه‌گانه ندارند. فرمول همگانی آلکان‌ها به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ است.



متان و اتان هر دو به حالت گازی شکل هستند. متان گازی سبک، بی‌رنگ و بی‌بو است که اگر مقدار آن در هوای معدن به بیش از ۵٪ برسد، احتمال انفجار وجود دارد.

۵۵ ۳ وقتی مساحت صفحات خازن را n برابر می‌کنیم، ظرفیت خازن برابر می‌شود با:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1} \xrightarrow{A_2 = nA_1} \frac{C_2}{C_1} = n \quad (*)$$

وقتی خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ثابت است، بنابراین:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \xrightarrow{V: \text{ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \xrightarrow{(*)} \frac{U_2}{U_1} = n$$

تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن در این حالت برابر است با:

$$U' = U_2 - U_1 = nU_1 - U_1 = U_1(n-1)$$

وقتی خازن را پس از شارژ از باتری جدا می‌کنیم، بار ذخیره‌شده در خازن، ثابت است، بنابراین:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q: \text{ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} \xrightarrow{(*)} \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{n}$$

تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن در این حالت برابر است با:

$$U'' = U_1 - U_2 = U_1 - \frac{1}{n}U_1 = U_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = U_1\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{U''}{U'} = \frac{U_1\left(\frac{n-1}{n}\right)}{U_1(n-1)} = \frac{(1-n)}{n(n-1)} = -\frac{1}{n}$$

درسنامه

اگر خازن را پس از شارژ شدن از باتری جدا کنیم، در این صورت بار ذخیره‌شده در آن ثابت می‌ماند و هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت وارون در بار و انرژی خازن می‌شود.

$$Q = CV \xrightarrow{Q: \text{ثابت}} V \propto \frac{1}{C}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q: \text{ثابت}} U \propto \frac{1}{C}$$

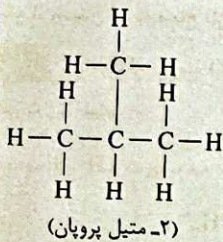
شیمی

۵۶ ۳ عنصرهای A و X به ترتیب S_{۱۶} (جامد) و Cl_{۱۷} (گاز) هستند.

بررسی گزینه‌ها:

- (۱) گاز کلر در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.
 (۲) گوگرد در طبیعت به حالت آزاد یافت می‌شود.
 (۳) میزان تمایل کلر به تشکیل آنیون Cl^- بیشتر از میزان تمایل گوگرد به تشکیل آنیون S^{2-} است.
 (۴) واضح است که نقطه جوش گوگرد جامد، بالاتر از نقطه جوش کلر گازی شکل است.
 ۵۷ ۲ • واکنش‌پذیری فلز قلیایی پتاسیم (K) بیشتر از واکنش‌پذیری فلز قلیایی خاکی هم‌دوره آن (Ca) است.
 • واکنش‌پذیری فلز قلیایی پتاسیم (K)، کم‌تر از واکنش‌پذیری فلز قلیایی روبیدیم (Rb) است که در جدول تناوبی، جایگاه پایین‌تری دارد.

۱. آلکان‌های شاخه‌دار: این گروه از آلکان‌ها، در ساختار خود دست‌کم دارای یک شاخهٔ الکیلی هستند. این شاخه‌ها عبارت است از متیل ($-\text{CH}_3$)، اتیل ($-\text{C}_2\text{H}_5$)، پروپیل ($-\text{C}_3\text{H}_7$) و ...



تفاوت آلکان‌ها

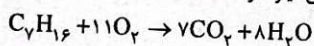
در آلکان‌های راست‌زنجیر با افزایش تعداد کربن در زنجیر هیدروکربنی:

- جرم مولی افزایش می‌یابد.
- چگالی زیاد می‌شود.
- نقطهٔ جوش بالا می‌رود.
- چون جرم مولکول‌ها بیشتر می‌شود در نتیجه نیروهای وان‌دروالسی قوی‌تر می‌گردند.
- درصد جرمی کربن در ترکیب افزایش می‌یابد.
- حالت فیزیکی آلکان تغییر می‌کند (آلکان‌های تا ۴ کربن گازی شکل و آلکان‌های با ۵ کربن یا بیشتر، مایع یا جامد هستند).

۲. هر مولکول از آلکانی با فرمول $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ دارای « $n-1$ » پیوند $\text{C}-\text{C}$ و « $2n+2$ » پیوند $\text{C}-\text{H}$ است. مطابق داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$(2n+2) - (n-1) = 10 \Rightarrow n+3=10 \Rightarrow n=7$$

بنابراین فرمول آلکان مورد نظر به صورت C_7H_{16} بوده و هر مول از آن برای سوختن کامل به ۱۱ مول گاز اکسیژن نیاز دارد:



۳. آخرین فلز واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی، روی (Zn) است. واکنش‌پذیری فلز روی بیشتر از فلز مس (Cu) است.

در ارتباط با درستی گزینهٔ (۳) باید گفت که روش گیاه‌پالایی برای استخراج فلزهای نیکل (Ni) و روی، برخلاف فلزهای مس و طلا، مقرون به صرفه نیست.

۴. فرمول شیمیایی تقریبی گریس و وازلین به ترتیب به صورت $\text{C}_{25}\text{H}_{52}$ و $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$ است که با فرمول مولکولی آلکان‌ها ($\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$) مطابقت دارد.

$$\frac{52-25}{18-18} = \frac{27}{20} = 1.35$$

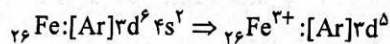
بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) وازلین مولکول‌های درشت‌تری دارد و چسبنده‌تر از گریس است.
(ت) افرادی که با گریس کار می‌کنند، دستشان را با بنزین یا نفت (مخلوطی از هیدروکربن‌ها) می‌شویند.

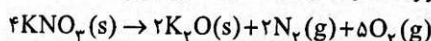
۳. بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) بر اثر تخمیر بی‌هوازی گلوکز، سوخت سبز (اتانول) و گاز گلخانه‌ای کربن دی‌اکسید تولید می‌شود:
 $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6(\text{aq}) \rightarrow 2\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq}) + 2\text{CO}_2(\text{g})$
(پ) رفتار شیمیایی فلزها به میزان توانایی اتم آن‌ها به از دست دادن الکترون وابسته است.

(۳) در زنگ آهن، یون آهن (III) وجود دارد و آرایش الکترونی آن به زیرلایهٔ $3d^5$ ختم می‌شود:



۲. معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



ابتدا مقدار جامد تولیدشده (K_2O) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{50.5\text{g KNO}_3 \times \frac{6}{100}}{4 \times 101} = \frac{x\text{g K}_2\text{O}}{2 \times 94} \Rightarrow x = 141\text{g K}_2\text{O}$$

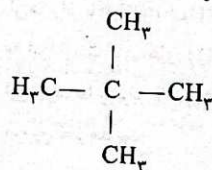
از طرفی ۴۰٪ از پتاسیم نیترات نیز در ظرف باقی می‌ماند:

$$\frac{40}{100} \times 50.5\text{g} = 20.2\text{g KNO}_3$$

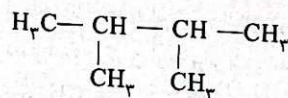
بنابراین تودهٔ جامد در ظرف، جرمی معادل $141 + 20.2 = 161.2$ گرم دارد.

$$\frac{50.5 \times \frac{39}{101}}{141 + 20.2} \times 100 = \frac{195}{161.2} \times 100 = 12.1\%$$

۴. عبارت گزینهٔ (۴) تنها در حالتی درست است که هر دو شاخهٔ فرعی به یک اتم کربن متصل باشند، مانند آلکان زیر:



اگر دو شاخهٔ فرعی به دو اتم کربن متفاوت متصل باشد، کربنی که به چهار اتم کربن دیگر متصل باشد، وجود ندارد:

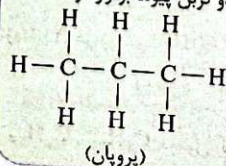


دکترنامه

آلکان‌ها

به دسته‌ای از هیدروکربن‌های خطی سیرشده (فاقد پیوند دوگانه یا سه‌گانه)، آلکان می‌گویند. این هیدروکربن‌ها به دلیل سیرشدگی، واکنش‌پذیری کمی دارند. آلکان‌ها به دو دستهٔ کلی ۱. راست‌زنجیر (بدون شاخه) و ۲. شاخه‌دار تقسیم‌بندی می‌شوند.

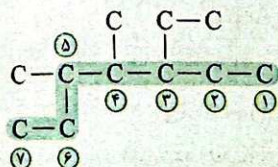
۱. آلکان‌های راست‌زنجیر: فرمول همگانی این گروه از آلکان‌ها به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ است. آن‌ها هیچ شاخهٔ هیدروکربنی جانبی ندارند و هر کربن در زنجیر، حداقل با یک کربن و حداکثر با دو کربن پیوند برقرار کرده است:



نوشتن جایگاه و نام شاخه: برای نوشتن جایگاه شاخه تنها کافیس شماره کربنی که شاخه به آن متصل است نوشته شود. برای نوشتن نام شاخه باید نکاتی را رعایت کرد؛ نام شاخه‌های فرعی (متیل، اتیل، پروپیل و...) در صورت تعدد، به همراه تعداد آن‌ها بیان می‌شود. باید توجه داشت که در صورت وجود هر دو شاخه فرعی متیل و اتیل در یک ساختار، نوشتن شماره شاخه و نام اتیل بر شماره شاخه و نام متیل اولویت دارد و مقدم‌تر است.

مثال: ۴، ۵ - دی‌متیل - ۳ - اتیل هپتان x

۳ - اتیل - ۴، ۵ - دی‌متیل هپتان ✓



به طور کلی، نحوه نوشتن نام آلکان‌ها به شکل زیر است:

شماره شاخه اتیل - تعداد شاخه‌های اتیل - شماره شاخه متیل - تعداد شاخه متیل - شماره شاخه پروپیل - تعداد شاخه پروپیل - تعداد اتم‌های کربن زنجیر اصلی با پسوند «آن»

نکته: اگر تنها یک شاخه متیل یا اتیل داشته باشیم، پیشوند «مونو» نوشته نمی‌شود.

۴ ۷۵ • فرمول عمومی آلکان‌ها به صورت C_nH_{2n+2} است. با توجه به

این فرمول، جرم مولی آلکان‌ها $14n+2$ گرم بر مول است.

• اگر شمار اتم‌های کربن دو آلکان را با n و m نشان دهیم، مجموع جرم مولی آن‌ها برابر با $14(n+m)+4$ است.

به این ترتیب گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. زیرا اگر هر کدام از اعداد این گزینه‌ها را برابر $14(n+m)+4$ قرار دهیم، حاصل « $n+m$ » عددی صحیح نخواهد بود:

$$128 = 14(n+m) + 4 \Rightarrow (n+m) = 8/85$$

$$170 = 14(n+m) + 4 \Rightarrow (n+m) = 11/85$$

از طرفی با توجه به این‌که دو آلکان در چهار اتم هیدروژن اختلاف دارند، تفاوت شمار اتم‌های کربن آن‌ها برابر با دو است. زیرا هر دو آلکان متوالی فقط در یک گروه $-CH_2-$ با هم اختلاف دارند.

در ارتباط با گزینه (۲) باید گفت اگر چه به‌ازای مقدار صحیح « $n+m$ »، تساوی $14(n+m)+4$ برقرار است:

$$14(n+m)+4=186 \Rightarrow n+m=13$$

اما چون دو آلکان در دو اتم کربن با هم اختلاف دارند، اگر شمار اتم‌های کربن یک آلکان، عددی فرد باشد، شمار اتم‌های کربن آلکان دیگر نیز باید فرد باشد. به همین ترتیب اگر شمار اتم‌های کربن یک آلکان، عددی زوج باشد، شمار اتم‌های کربن آلکان دیگر نیز باید زوج باشد.

$$\begin{cases} n+m=13 \\ n-m=2 \end{cases} \Rightarrow n=7/5, m=5/5$$

گزینه (۴) هر دو شرط را دارد:

$$14(n+m)+4=228 \Rightarrow n+m=16$$

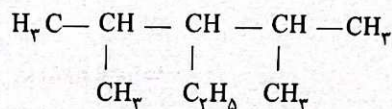
$$\begin{cases} n+m=16 \\ n-m=2 \end{cases} \Rightarrow n=9, m=7 \Rightarrow \text{فرمول آلکان‌ها: } C_9H_{20}, C_7H_{16}$$

۳ ۶۸ آلکان‌ها به دلیل ناقطبی بودن در آب نامحلول‌اند. این ویژگی

سبب می‌شود تا بتوان از آن‌ها برای حفاظت از فلزها استفاده کرد. به طوری که قرار دادن فلزها در آلکان‌های مایع یا اندود کردن سطح فلزها و وسایل فلزی با آن‌ها، مانع از رسیدن آب به سطح فلز می‌شود و از خوردگی فلز جلوگیری می‌کند.

۳ ۶۹ نام‌گذاری گزینه (۳) درست بوده و ساختار ترکیب مورد نظر به

صورت زیر است:



پرسش مشابه گزیده:

نام درست ترکیب‌های دیگر به صورت زیر است:

(۱) ۴، ۳ - دی‌متیل هپتان

(۲) ۵، ۳ - دی‌متیل نونان

(۴) ۴، ۲، ۲ - تترامتیل پنتان

دوربین

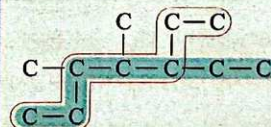
نام‌گذاری براساس قواعد آیوپاک

ده آلکان راست‌زنجیر به ترتیب افزایش تعداد کربن (از چپ به راست) در جدول زیر مرتب شده‌اند:

پنتان	بوتان	پروپان	اتان	متان	نام
C_5H_{12}	C_4H_{10}	C_3H_8	C_2H_6	CH_4	فرمول مولکولی
دکان	نونان	اوکتان	هپتان	هگزان	نام
$C_{10}H_{22}$	C_9H_{20}	C_8H_{18}	C_7H_{16}	C_6H_{14}	فرمول مولکولی

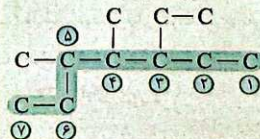
همان‌طور که از اسامی این ده آلکان مشخص است، به تمام آلکان‌ها پسوند «آن» اضافه می‌شود. برای نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ پیدا کردن زنجیر اصلی: برای پیدا کردن زنجیر اصلی، طولانی‌ترین زنجیر که دارای بیشترین شمار کربن است را انتخاب می‌کنیم:



(پیش‌بینی نوی این ساختار همیشه به دو شکل زنجیر اصلی رو انتخاب کنیم که هر دو تا ش هم درسته. ما این‌جا فقط روی یکی از ساختارها شماره‌گذاری رو نشون داریم.)

۲ شماره‌گذاری شاخه(ها): زنجیر اصلی را به گونه‌ای شماره‌گذاری می‌کنیم که از کنار هم قرار دادن شماره‌ها، عدد کوچک‌تری به دست آید.



۷۶ / ۳ بررسی گزینه‌های نادرست:

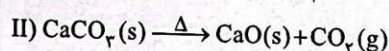
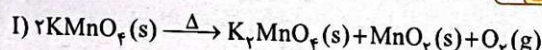
(۱) نفت خام مخلوطی از هزاران ترکیب شیمیایی است که بخش عمده آن را هیدروکربن‌های گوناگون تشکیل می‌دهند.

(۲) نفت خام مانند فلزها جزو منابع تجدیدناپذیر است.

(۴) حدود ۴۰٪ از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز به کار می‌رود.

۷۷ / ۱ فرمول مولکولی ترکیب داده شده به صورت C_4H_8 بوده و تفاوت شمار اتم‌های C و H هر مولکول آن برابر صفر است.

۷۸ / ۳ معادله موازنه شده واکنش‌های مورد نظر به صورت زیر است:



ابتدا جرم اکسید تولیدشده و حجم گاز تولیدشده در واکنش (I) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{395g KMnO_4 \times \frac{8}{100} \times \frac{75}{100}}{2 \times 158} = \frac{x g MnO_2}{1 \times 87} = \frac{y L O_2}{1 \times 22.4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 65.25 g MnO_2 \\ y = 16.8 L O_2 \end{cases}$$

در ادامه جرم اکسید تولیدشده در واکنش (II) را به دست می‌آوریم:

$$?g CaO = \frac{65.25}{4/66} = 14g CaO$$

$$\frac{mg CaCO_3 \times \frac{75}{100}}{1 \times 100} = \frac{14g CaO}{1 \times 56} = \frac{VL CO_2}{1 \times 22.4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 33.3g CaCO_3 \\ V = 5.6 L CO_2 \end{cases} \text{ مجموع حجم گازها: } 16.8 + 5.6 = 22.4$$

دروغنامه

شرایط استاندارد (STP)

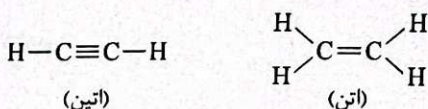
حجم یک نمونه گاز به مقدار، دما و فشار آن وابسته است. برای یافتن رابطه بین حجم و مقدار یک نمونه گازی، باید دما و فشار ثابت باشد. بر پایه یک قرارداد، شیمی‌دان‌ها دمای صفر درجه سلسیوس و فشار یک اتمسفر را به عنوان شرایط استاندارد (STP) در نظر گرفته‌اند.

۷۹ / ۲ موارد مصرف نفت خام در شکل زیر مشخص شده است:



۷۱ / ۱ بررسی عبارت‌های نادرست:

(پ) در اتین و اتن پیوند بین اتم‌های کربن به ترتیب سه‌گانه و دوگانه است.



(ت) کربن در خانه ششم جدول دوره‌ای جای داشته و جرم اتمی آن در این جدول برابر با ۱۲/۰۱ amu است.

۷۲ / ۴ ابتدا حساب می‌کنیم که در ۱۰۰ گرم از کانی لاتریت، چند گرم نیکل وجود دارد:

$$?g Ni = 100g \text{ کانی} \times \frac{0.37g NiO}{100g \text{ کانی}} \times \frac{1 \text{ mol NiO}}{74g NiO} \times \frac{1 \text{ mol Ni}}{1 \text{ mol NiO}} \\ \times \frac{58.69g Ni}{1 \text{ mol Ni}} = 0.29g Ni$$

اکنون حساب می‌کنیم با فرض بازده ۱۰۰٪ برای هر کدام از واکنش‌های a و b، برای تولید یک کیلوگرم نیکل به چند کیلوگرم کانی لاتریت نیاز است.

$$?kg \text{ کانی} = 1kg Ni \times \frac{100g \text{ کانی}}{0.29g Ni} = 344.82kg \text{ کانی}$$

در صورتی که بازده هر کدام از واکنش‌ها ۹۰٪ باشد، مقدار کانی مورد نیاز برابر است با:

$$344.82 \times \frac{100}{90} \times \frac{100}{90} = 425.7kg \text{ کانی}$$

۷۳ / ۱ ابتدا جرم باریم کلرید آبدار خالص را به دست می‌آوریم:

$$?g BaCl_2 \cdot nH_2O = 97.6g \times \frac{75}{100} = 73.2g BaCl_2 \cdot nH_2O$$

هر مول باریم کلرید آبدار در نهایت منجر به تولید یک مول باریم سولفات می‌شود.

$$BaCl_2 \cdot nH_2O \sim BaSO_4 \\ \frac{73.2g BaCl_2 \cdot nH_2O}{1 \times (208 + 18n)} = \frac{69.9g BaSO_4}{1 \times 233} \Rightarrow n = 2$$

۷۴ / ۴ آلکان A همان پنتان (C_5H_{12}) است که هر مول از آن

شامل ۶۰g کربن و ۱۲g هیدروژن است.

• آلکان B همان هپتان (C_7H_{16}) است. زیرا ساده‌ترین آلکان شاخه‌داری که شاخه اتیل دارد، ۳-اتیل پنتان بوده و هفت کربنی است.

• آلکان C همان هگزان (C_6H_{14}) است که از سوختن کامل هر مول از آن، ۶ مول CO_2 و ۷ مول بخار آب تولید می‌شود.

مقایسه میان گرانیوی آلکان‌های مایع مشابه مقایسه میان شمار اتم‌های کربن آن‌هاست.

پنتان > هگزان > هپتان: گرانیوی (A) (C) (B)

۷۵ / ۱ حجم هر بشکه نفت خام برابر با ۱۵۹L است.

$$?kg = 1 \text{ بشکه} \times \frac{159L}{1 \text{ بشکه}} \times \frac{1m^3}{1000L} \times \frac{850kg}{1m^3} = 135.15kg$$

۴/۸۰ فرمول مولکولی آلکان مورد نظر به صورت C_8H_{18} است. در هر

کدام از ساختارهای زیر، مجموع شماره شاخه‌های فرعی دستکم برابر با ۷ است.

