

آزمون شماره (۱۲)

جمعه

۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۱آزمون‌های سراسر
کاج

گزینه درسد را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۵۵	مدت پاسخگویی: ۸۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	حسابان ۲	اجباری	۱۰	۱	۸۵ دقیقه
	ریاضیات گسسته		۱۰	۱۱	
	هندسه ۳		۱۰	۲۱	
	ریاضی ۱		۵	۳۱	
	حسابان ۱		۵	۳۶	
	هندسه ۱		۵	۴۱	
	آمار و احتمال		۱۰	۴۶	

ریاضیات



حسابان (۲)

۱- دوره تناوب $f(x) = -3 \sin(\frac{\pi x}{4})$ دو برابر دوره تناوب $g(x) = 4 \cos(\frac{\pi}{4} - 2ax)$ است. مقدار a کدام است؟

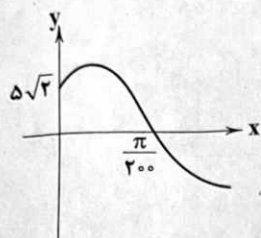
$\pm 2\pi$ (۴)

$\pm \pi$ (۳)

$\pm \frac{\pi}{4}$ (۲)

$\pm \frac{\pi}{8}$ (۱)

۲- اگر نمودار $y = a \sin(bx + \frac{\pi}{4})$ به صورت زیر باشد، آن گاه $a+b$ کدام است؟



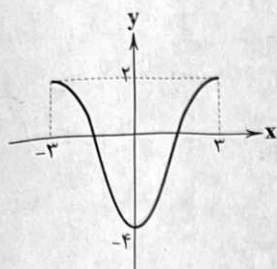
150 (۱)

160 (۲)

170 (۳)

180 (۴)

۳- اگر نمودار $f(x) = a \cos bx - 1$ به صورت زیر باشد، آن گاه ab کدام می تواند باشد؟



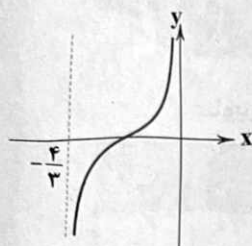
$\pm \frac{2\pi}{3}$ (۱)

$\pm \frac{\pi}{6}$ (۲)

$\pm \frac{4\pi}{3}$ (۳)

$\pm \pi$ (۴)

۴- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan(\pi(ax + \frac{1}{4}))$ به صورت زیر باشد، آن گاه مقدار a کدام است؟



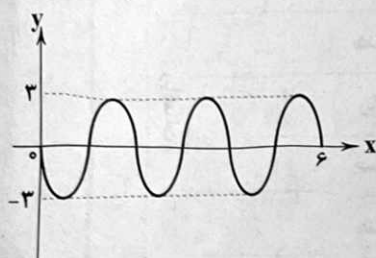
$\frac{2}{4}$ (۱)

$-\frac{2}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۴)

۵- اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ باشد، آن گاه مقدار ab کدام است؟



-6 (۱)

-3 (۲)

4 (۳)

6 (۴)

۶- برد تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$ برابر کدام است؟

$(0, 2)$ (۴)

$[\frac{3}{4}, +\infty)$ (۳)

$[\frac{3}{4}, 1]$ (۲)

$[-1, 1]$ (۱)

محل انجام محاسبات

۷- تعداد جواب‌های معادله $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan\theta \cdot \tan 2\theta = 1$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸- تعداد جواب‌های معادله $\tan x + \frac{1}{\cos x} = 2 \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹- جواب کلی معادله $\sqrt{3} \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ کدام است؟

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۱) \quad \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (۲) \quad \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (۳) \quad \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \theta = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases} \quad (۴)$$

۱۰- اگر $\Delta \cos 2\theta + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 = 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$ باشد، آن‌گاه θ برابر کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $-\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $-\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

ریاضیات گسسته

۱۱- به‌ازای چند مقدار سه‌رقمی x ، معادله $(\Delta a^2 + 4)x \equiv 13 \pmod{\Delta}$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۵۷ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۱۳

۱۲- اگر معادله همبستگی $(7a+2)x \equiv 13 \pmod{\Delta a-1}$ فاقد جواب باشد، کدام گزینه برای عدد طبیعی a صحیح است؟

- (۱) $15k+2$ (۲) $15k+7$ (۳) $17k+2$ (۴) $17k+7$

۱۳- چند عدد دو رقمی وجود دارد که ۳ برابر آن منهای یک در تقسیم بر عدد ۱۲ باقی‌مانده ۵ می‌دهد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۴- اگر a کوچک‌ترین عدد طبیعی و مضرب ۱۳ باشد که باقی‌مانده‌اش در تقسیم بر ۸ و ۱۵ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، مجموع ارقام عدد a کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۱۵- بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی که در معادله $\sum_{n=1}^{100} n! x \equiv 579 \pmod{5}$ صدق کند، کدام است؟

- (۱) ۹۱ (۲) ۹۸ (۳) ۹۷ (۴) ۹۶

۱۶- معادله سیاله $12x + my = 10$ به‌ازای چند عدد طبیعی m که $m \leq 100$ باشد در مجموعه $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۵۰ (۳) ۵۲ (۴) ۵۴

۱۷- چند جفت عدد طبیعی a و b وجود دارد به‌طوری‌که $8|a+3$ ، $11|b+4$ و $a+b=100$ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸- در یک مسابقه، سؤالات ۲ امتیازی و ۳ امتیازی هستند. اگر شخصی به هر سؤال پاسخ صحیح دهد کل امتیاز سؤال را می‌گیرد و در غیر این صورت از آن سؤال امتیازی نمی‌گیرد. اگر ۳۰ سؤال وجود داشته باشد و شخص ۶۶ امتیاز به دست بیاورد، به چند طریق به سؤالات پاسخ داده است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۹- در معادله همبستگی $600! + 18! + 12! + 6! \equiv x^{13} \pmod{17056!}$ ، باقی‌مانده $x^3 + x$ بر ۱۳ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- اگر x را یک عدد دو رقمی در نظر بگیریم با چه احتمالی معادله $x^3 + 6x^2 + 4x \equiv 14 \pmod{6}$ دارای جواب است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

حل انجام محاسبات

هندسه (۲)

- ۲۱- معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که اختلاف فواصل آن از نقاط $(3, 0)$ و $(-3, 0)$ برابر ۴ واحد باشد، کدام است؟
 (۱) $4x^2 - 5y^2 = 15$ (۲) $4x^2 + 5y^2 = 20$ (۳) $5x^2 - 4y^2 = 20$ (۴) $5x^2 + 4y^2 = 20$
- ۲۲- اگر مختصات دو سر قطر مستطیلی $(0, 0)$ و $(4, 4)$ باشد، آنگاه معادله مکان هندسی دو انتهای قطر دیگر مستطیل کدام است؟
 (۱) $x^2 - y^2 + 4x + 4y = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ (۳) $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ (۴) $x^2 - y^2 + 4x - 4y = 0$
- ۲۳- چوبی به طول ۱۰ متر به دیوار تکیه داده شده است که یک سر آن روی زمین قرار دارد. اگر چوب شروع به سر خوردن روی زمین کند، معادله مکان هندسی وسط چوب کدام است؟
 (۱) $x^2 + y^2 = 25$ (۲) $x^2 + y^2 = 100$ (۳) $4x^2 + 4y^2 = 25$ (۴) $x^2 - y^2 = 100$
- ۲۴- معادله مکان هندسی نقطه $P(x, y)$ که از دو نقطه $A(a+b, b-a)$ و $B(a-b, a+b)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟
 (۱) $ax = by$ (۲) $bx = ay$ (۳) $2ax = by$ (۴) $2bx = ay$
- ۲۵- اگر دو نقطه به مختصات $P(a, 0)$ و $Q(-a, 0)$ در صفحه واقع باشد و R یک نقطه دلخواه در یک طرف پاره خط PQ قرار داشته باشد به طوری که $R\hat{P}Q - R\hat{Q}P = 2\alpha$ برابر 2α باشد، آنگاه مکان هندسی R کدام است؟
 (۱) $x^2 + y^2 + 2xy \cot 2\alpha - a^2 = 0$ (۲) $x^2 - y^2 + 2xy \cot 2\alpha - a^2 = 0$
 (۳) $x^2 + y^2 + 2xy \tan 2\alpha - a^2 = 0$ (۴) $x^2 - y^2 - 2xy \tan 2\alpha - a^2 = 0$
- ۲۶- اگر $f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{vmatrix}$ باشد، آنگاه $f(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۲۷- اگر x, y و z مثبت باشند، آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 2 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 4 \end{vmatrix}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) $\log x \cdot \log y \cdot \log z$
- ۲۸- اگر $\sin(2x) + 1 = 0$ باشد، آنگاه مقدار $\begin{vmatrix} 0 & \cos x & -\sin x \\ \sin x & 0 & \cos x \\ \cos x & \sin x & 0 \end{vmatrix}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱
- ۲۹- مقدار $A = \begin{vmatrix} C(5, 0) & C(5, 3) & 1 \\ C(5, 1) & C(5, 4) & 1 \\ C(5, 2) & C(5, 5) & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۶! (۳) ۸۰ (۴) ۹
- ۳۰- اگر $A_n = \begin{bmatrix} n & 5 & 4 \\ n^2 & 15 & 8 \\ n^3 & 25 & 12 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $|A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5|$ کدام است؟
 (۱) ۱۶,۰۰۰ (۲) ۲۰,۰۰۰ (۳) -۱۶,۰۰۰ (۴) -۲۰,۰۰۰

حل انجام محاسبات

ریاضی (۱)

۳۱- فرض کنید $a_1 = \frac{1}{p}$ و $a_{k+1} = a_k^2 + a_k$; $k \geq 1$ باشد اگر $x_n = \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1}$ ، آن گاه $|x_{100}|$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۳۲- فرض کنید a_n یک دنباله حسابی با قدرنسبت d ($d \neq 0$) و b_n یک دنباله هندسی با قدرنسبت q (عددی گویا) و $1 < q < \infty$ است.

اگر $a_1 = d$ و $b_1 = d^2$ و $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ عددی صحیح مثبت باشد، آن گاه $6q$ برابر کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) چنین q ای وجود ندارد.

۳۳- در یک شهر کوچک فقط دو روزنامه A و B منتشر می شود. ۲۵٪ مردم شهر روزنامه A و ۲۰٪ روزنامه B و ۸٪ هر دو روزنامه را می خوانند. اگر ۳۰٪ از مردمی که روزنامه A را می خوانند و روزنامه B را نمی خوانند، بخش تبلیغات را بخوانند و ۴۰٪ افرادی که روزنامه B را می خوانند و A را نمی خوانند، بخش تبلیغات را بخوانند و همچنین ۵۰٪ درصد افرادی که هر دو روزنامه را می خوانند بخش تبلیغات را بخوانند، آن گاه چند درصد مردم بخش تبلیغات را می خوانند؟

- (۱) ۱۵/۲ (۲) ۱۴/۳ (۳) ۱۳/۹ (۴) ۱۲/۸

۳۴- حاصل عبارت $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$ برابر کدام مقدار است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۵- اگر $\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{3}{2}$ باشد، آن گاه مقدار $\sin \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{13}$ (۲) $\frac{5}{13}$ (۳) $\frac{4}{13}$ (۴) $\frac{7}{13}$

حسابان (۱)

۳۶- اگر a, b و c به ترتیب p امین، q امین و r امین جمله از یک دنباله هندسی باشند، آن گاه عبارت زیر برابر کدام مقدار است؟

$$(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c$$

- (۱) $p+q+r$ (۲) ۱ (۳) $-pqr$ (۴) صفر

۳۷- اگر $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ تشکیل دنباله حسابی دهند، به طوری که d قدرنسبت دنباله باشد، آن گاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin d \left(\frac{1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} + \frac{1}{\cos \theta_2 \cos \theta_3} + \dots + \frac{1}{\cos \theta_{n-1} \cos \theta_n} \right)$$

- (۱) $\tan \theta_n - \tan \theta_1$ (۲) $\tan \theta_n + \tan \theta_1$ (۳) $\tan \theta_n - \tan \theta_1$ (۴) $\tan \theta_n - \tan \theta_{n-1}$

۳۸- حاصل عبارت $\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} + \frac{\sin^9 x}{\cos^{27} x}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\tan^2 7x - \tan x$ (۲) $\tan^2 7x + \tan x$ (۳) $\frac{1}{3}(\tan^2 7x - \tan x)$ (۴) $\frac{1}{3}(\tan^2 7x + \tan x)$

۳۹- حاصل عبارت $\frac{1}{\cos 29^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 25^\circ}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

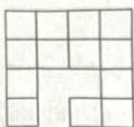
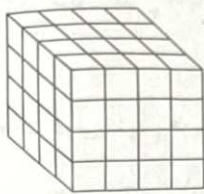
۴۰- حاصل عبارت $\sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{18}\right)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

محل انجام محاسبات

هندسه (۱)

در شکل زیر حداقل و حداکثر چندتا از مکعب‌های کوچک برداشته شود تا نمای از بالا به صورت زیر دیده شود؟



(۱) حداقل ۱۲ و حداکثر ۵۱

(۲) حداقل ۱۱ و حداکثر ۵۱

(۳) حداقل ۱۲ و حداکثر ۴۹

(۴) حداقل ۱۱ و حداکثر ۴۹

دو صفحه P و Q برهم عمودند، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر خط d موازی صفحه P باشد، حتما با صفحه Q موازی است.

(۲) هر صفحه موازی با یکی از دو صفحه بر صفحه دیگر عمود است.

(۳) فصل مشترک دو صفحه بر خطوط هر دو صفحه عمود است.

(۴) هر صفحه عمود بر یکی با دیگری موازی است.

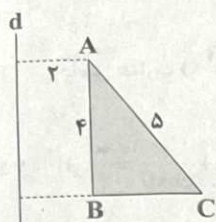
حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه زیر حول خط d کدام است؟

(۱) 9π

(۲) 12π

(۳) 36π

(۴) 30π



اگر دو خط متناظر d_1 و d_2 را در نظر بگیریم، چند صفحه شامل d_1 و عمود بر d_2 وجود دارد؟

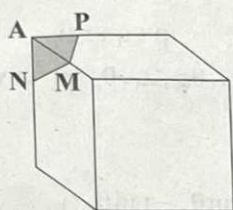
(۴) بی‌شمار

(۳) حداکثر یکی

(۲) فقط یکی

(۱) صفر

ر. مکعب شکل زیر، اگر طول ضلع مکعب برابر a ، $AM = \frac{a}{4}$ و $AN = \frac{a}{3}$ و $AP = \frac{a}{4}$ باشد، حجم هرم APMN چه کسری از حجم مکعب است؟



(۱) $\frac{1}{12}$

(۲) $\frac{1}{36}$

(۳) $\frac{1}{48}$

(۴) $\frac{1}{144}$

و احتمال

A و B دو پیشامد باشند که احتمال رخداد آن‌ها به‌طور همزمان غیرممکن باشد و $P(A') + P(B') = \frac{5}{3}$ ، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

(۴) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{5}$

یک تاس اعداد ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳ نوشته شده است. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال عدد ظاهر شده روی تاس اول

ب‌تر از عدد ظاهر شده روی تاس دوم است؟

(۴) $\frac{11}{35}$

(۳) $\frac{11}{36}$

(۲) $\frac{12}{35}$

حسابات

۴۸- تاسی طوری ساخته شده است که احتمال آمدن هر وجه آن متناسب با عکس عدد روی آن وجه است. احتمال این که عدد رو شده اول باشد کدام است؟

$$\frac{61}{147} (4)$$

$$\frac{62}{132} (3)$$

$$\frac{62}{147} (2)$$

$$\frac{61}{132} (1)$$

۴۹- سه نفر به نام های A, B و C به ترتیب در مسابقه ای شرکت کرده اند که فقط یک برنده دارد. اگر شانس برد A سه برابر شانس برد B و شانس برد B نصف شانس برد C باشد، احتمال این که در این مسابقه C برنده نشود، کدام است؟

$$\frac{1}{6} (4)$$

$$\frac{1}{3} (3)$$

$$\frac{5}{6} (2)$$

$$\frac{2}{3} (1)$$

۵۰- در انتخاب یک عدد از بین اعداد سه رقمی، با کدام احتمال عدد انتخابی بر ۵ و ۷ بخش پذیر است، ولی مضرب ۴ نیست؟

$$\frac{19}{900} (4)$$

$$\frac{19}{450} (3)$$

$$\frac{23}{900} (2)$$

$$\frac{23}{450} (1)$$

۵۱- در یک مسابقه بسکتبال، اگر یک بازیکن بخواهد ۱۰ پرتاب پناالتی را انجام دهد، با چه احتمالی گل چهارم در پناالتی هفتم رخ می دهد؟

$$\frac{5}{128} (4)$$

$$\frac{5}{32} (3)$$

$$\frac{3}{64} (2)$$

$$\frac{7}{128} (1)$$

۵۲- دو کیسه داریم؛ در کیسه اول ۶ مهره با شماره های ۱ تا ۶ و در کیسه دوم ۴ مهره با شماره های ۱ تا ۴ وجود دارد. از هر کیسه یک مهره به تصادف خارج می کنیم، با کدام احتمال جمع شماره های رو شده، عدد اول است؟

$$\frac{7}{24} (4)$$

$$\frac{13}{24} (3)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{11}{24} (1)$$

۵۳- چند مورد از گزاره های زیر نادرست است؟

$$P(A \cap B) \geq P(A) - P(B') \text{ (الف)}$$

$$P(A \cap B) = 0 \text{ آن گاه } P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) \text{ (ب)}$$

$$P(A - B)' = P(B') + P(A \cap B) \text{ (ج)}$$

$$2 (4)$$

$$3 (3)$$

$$2 \text{ صفر} (2)$$

$$1 (1)$$

۵۴- در یک ظرف ۳ مهره سفید و تعدادی مهره سیاه وجود دارد. از این ظرف سه مهره به تصادف خارج کرده ایم، اگر احتمال این که حداکثر ۲ مهره سفید باشد، برابر $\frac{119}{120}$ باشد، در این ظرف چند مهره سیاه وجود داشته است؟

$$6 (4)$$

$$4 (3)$$

$$7 (2)$$

$$5 (1)$$

۵۵- در یک آزمایش تصادفی، ۶ سکه را پرتاب کرده ایم. احتمال این که تعداد دفعاتی که رو بیاید بیشتر از تعداد دفعاتی باشد که پشت بیاید، کدام است؟

$$\frac{5}{32} (4)$$

$$\frac{11}{32} (3)$$

$$\frac{15}{32} (2)$$

$$\frac{17}{32} (1)$$

محل انجام محاسبات

آزمون شماره (۱۲)

جمعه

۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۲آزمون‌های سراسر
کاج

گزینه درسد را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۶۰	مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

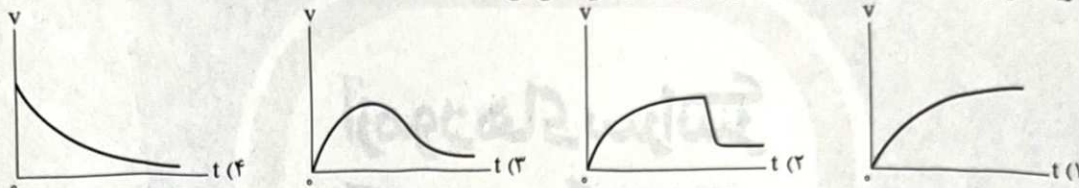
عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال		مدت پاسخگویی
			از	شماره سؤال تا	
۱	فیزیک ۳	اجباری	۲۵	۵۶	۴۵ دقیقه
	فیزیک ۱	زوج کتاب	۱۰	۸۱	
	فیزیک ۲		۱۰	۹۱	
۲	شیمی ۳	اجباری	۱۵	۱۰۱	۲۵ دقیقه
	شیمی ۱	زوج کتاب	۱۰	۱۱۶	
	شیمی ۲		۱۰	۱۲۶	

فیزیک



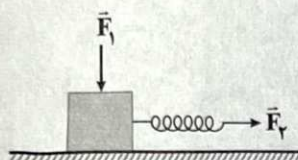
۵۶- چتریازی از بام ساختمانی در ارتفاع نسبتاً زیادی به بیرون می‌پرد. اگر چتریاز قبل از رسیدن به تندی حدی اولیه، چتر خود را باز کند، کدام گزینه نمودار تندی بر حسب زمان را برای این چتریاز به درستی نشان می‌دهد؟



۵۷- اندازه نیروی گرانشی وارد بر جسمی که در فاصله $3R_E$ از سطح زمین قرار دارد، چند برابر اندازه نیروی گرانشی وارد بر همان جسم در فاصله $1/5 R_E$ از سطح زمین است؟

- (۱) ۲ (۲) $0/5$ (۳) $\frac{25}{64}$ (۴) $\frac{64}{25}$

۵۸- مطابق شکل زیر، نیروی عمودی $\vec{F}_1$ به بزرگی 20 N به جعبه‌ای به جرم 8 kg وارد می‌شود. فنری با ثابت $4 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ را به جسم وصل کرده و آن را آن قدر می‌کشیم تا جسم با شتاب ثابتی به بزرگی $0/5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ روی سطح افقی شروع به حرکت کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی جسم با

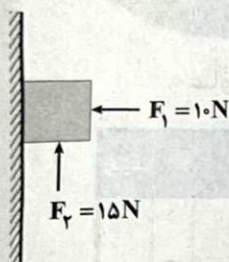


سطح برابر با $0/1$ باشد، تغییرات طول فنر چند سانتی‌متر خواهد بود؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) $3/5$ (۴) ۴

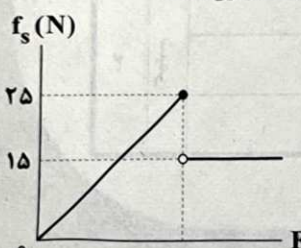
۵۹- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم 2 kg را به دیوار تکیه داده و نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را به صورت هم‌زمان به آن وارد می‌کنیم. اگر جسم در

آستانه حرکت باشد، ضریب اصطکاک ایستایی جسم با دیوار چقدر است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۶۰- جعبه‌ای به جرم 100 kg روی سطح افقی قرار دارد و نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی 20 N به آن وارد می‌شود. اگر نمودار اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و سطح بر حسب اندازه نیروی $\vec{F}$ ، مطابق شکل زیر باشد، اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و سطح چند نیوتون است؟



- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) صفر

محل انجام محاسبات

۶۱- دو ماهواره سینا و سیمرغ به ترتیب به جرم‌های M و $4M$ ، در شعاع‌های R و $4R$ از مرکز کره زمین توسط پایگاه‌های فضایی ایران در مدار کره زمین قرار گرفته‌اند. دوره ماهواره سینا چند برابر دوره ماهواره سیمرغ می‌باشد؟

- (۱) 8 (۲) 64 (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{64}$

۶۲- متحرکی روی محیط دایره‌ای به شعاع 20 cm ، به صورت یکنواخت در هر دقیقه 600 دور می‌زند. بزرگی شتاب مرکزگرای این متحرک چند میلی‌متر بر مجذور ثانیه است؟ ($\pi^2 = 10$)

- (۱) 8×10^5 (۲) 80 (۳) 4×10^5 (۴) 40

۶۳- چگالی سیاره A ، 9 برابر چگالی سیاره B و شعاع آن 4 برابر شعاع سیاره B است. شتاب گرانش در سطح سیاره B چند برابر شتاب گرانش در سطح سیاره A است؟

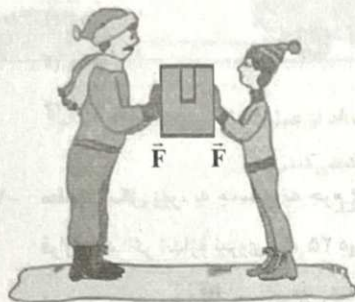
- (۱) $\frac{1}{36}$ (۲) 36 (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) 6

۶۴- طول هر یک از پره‌های یک بالگرد، 4 m می‌باشد، اگر انرژی جنبشی نوک پره بالگرد برابر با 20 kJ باشد، اندازه نیروی مرکزگرا وارد بر پره بالگرد چند نیوتون می‌باشد؟

- (۱) 10^4 (۲) 5×10^3 (۳) 4×10^3 (۴) 4×10^4

۶۵- مطابق شکل زیر، دو شخص از دو طرف با کف یک دست خود جعبه‌ای به جرم 4 kg را با نیروی یکسان می‌فشارند. اگر جعبه در آستانه لغزیدن باشد، اندازه نیرویی که سطح دست هر شخص به جعبه وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و ضریب اصطکاک ایستایی

دست هر دو شخص با جعبه یکسان و برابر با 0.4 است.)



- (۱) 50

- (۲) $10\sqrt{29}$

- (۳) 20

- (۴) $50\sqrt{29}$

۶۶- جسمی به جرم 5 kg توسط فنری با ثابت $10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ از سقف یک آسانسور که جرم کابین آن با محتویات آن برابر با 500 kg است، آویزان است.

طول فنر در حالت عادی برابر با 17 cm است. اگر آسانسور طوری حرکت کند که اندازه نیروی کشش کابل آن برابر با 4450 N باشد، طول فنر

چند سانتی‌متر خواهد بود؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

- (۱) $22/5$

- (۲) $12/55$

- (۳) $21/45$

- (۴) $11/45$

۶۷- معادله تکانه - زمان جسمی به جرم 2 kg که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $p = -t^2 + 4t - 3$ است. در 5 ثانیه اول حرکت، کدام عبارت‌ها در ارتباط با این جسم درست هستند؟

(الف) حرکت جسم ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

(ب) این متحرک 2 s به صورت کندشونده حرکت می‌کند.

(ج) نیروی متوسط وارد بر جسم در بازه $t = 2\text{ s}$ تا $t = 4\text{ s}$ ، 2 N و در خلاف جهت محور x است.

(د) شتاب متوسط حرکت جسم در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 3\text{ s}$ برابر با $1/5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است.

- (۱) «الف»، «ب» و «ج»

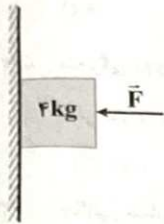
- (۲) «الف» و «د»

- (۳) «ب» و «ج»

- (۴) «الف» و «ج»

محل انجام محاسبات

۶۸- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم 4 kg با نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار قائم فشرده شده است و در آستانه حرکت به سمت پایین قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار از $\mu_s = 0.5$ به $\mu_s = 0.2$ کاهش یابد و همچنین اندازه نیروی $\vec{F}$ برابر شود، اندازه نیرویی که دیوار به جسم وارد می‌کند، چند برابر می‌شود؟ ($\mu_k = 0.25$)



$$\sqrt{\frac{17}{5}} \quad (1)$$

$$0.5\sqrt{13} \quad (2)$$

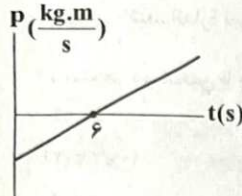
$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{104}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{5}{17}} \quad (4)$$

۶۹- به جسمی به جرم 3 kg با سرعت ثابت $\vec{v} = (-6 \frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ در حال حرکت روی خط راست است. نیروی $\vec{F} = (+24\text{ N})\vec{i}$ وارد می‌شود، از لحظه وارد شدن این نیرو به جسم، چند ثانیه طول می‌کشد تا جسم مسافت $22/5\text{ m}$ را طی کند؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\mu_k = 0.4$)

$$(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \mu_k = 0.4) \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 3/5 \quad (3) \quad 4/5 \quad (4) \quad 6$$

۷۰- نمودار تکانه بر حسب زمان برای جسمی به جرم 500 g که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب حرکت جسم برابر با $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ باشد، بردار سرعت جسم در لحظه $t = 4\text{ s}$ بر حسب SI در کدام گزینه به درستی آمده است؟



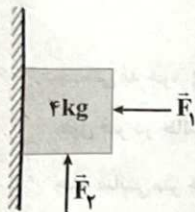
$$-8\vec{i} \quad (1)$$

$$8\vec{i} \quad (2)$$

$$-4\vec{i} \quad (3)$$

$$4\vec{i} \quad (4)$$

۷۱- مطابق شکل زیر، به جسمی به جرم 4 kg به صورت هم‌زمان دو نیروی $F_1 = 60\text{ N}$ و $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانه حرکت به سمت پایین قرار دارد. اگر اندازه نیروی $\vec{F}_1$ ۲۵ درصد کاهش و اندازه نیروی $\vec{F}_2$ ۸۰ درصد افزایش یابد، اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و دیوار چند نیوتون می‌شود؟ ($\mu_k = 0.4$, $\mu_s = 0.5$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



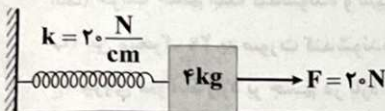
$$22/5 \quad (1)$$

$$22 \quad (2)$$

$$18 \quad (3)$$

$$30 \quad (4)$$

۷۲- در شکل زیر، جسمی به جرم 4 kg روی سطح افقی دارای اصطکاک قرار دارد. اگر در لحظه نشان داده شده جسم در حال توقف و حرکت به سمت راست بوده و اندازه شتاب آن برابر با $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ باشد، تغییر طول فنر نسبت به طول عادی فنر چند سانتی‌متر است؟ ($\mu_k = 0.25$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



$$(\mu_k = 0.25, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \quad (1) \quad 9 \quad (2) \quad 0.9 \quad (3) \quad 0.1 \quad (4) \quad 10$$

محل انجام محاسبات

۷۳- جسمی به جرم 45 kg را می‌خواهیم توسط طنابی که بیشینه نیروی کشش قابل تحمل آن برابر با 504 N است در راستای قائم بالا بیاوریم.

شتاب کشیدن طناب چند متر بر مجذور ثانیه باشد تا طناب پاره نشود؟ ($g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

۱/۸ (۴)

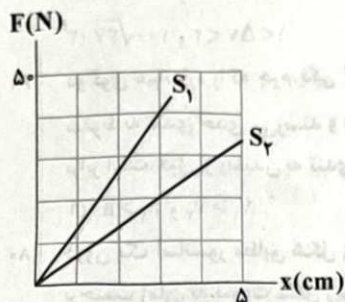
۱/۶ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

۷۴- نمودار اندازه نیرو بر حسب تغییر طول دو فنر S_1 و S_2 ، مطابق شکل زیر است. اگر طول فنر S_2 به ازای نیروی 60 N ، 9 cm تغییر کند، به ازای

وارد کردن نیروی چند نیوتونی به فنر S_1 تغییر طول دو فنر S_1 و S_2 با یکدیگر برابر خواهد بود؟



۱۲۰ (۱)

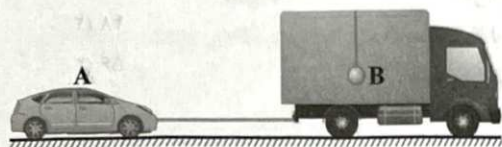
۲۰ (۲)

۶۰ (۳)

۴۰ (۴)

۷۵- در شکل زیر، برای کشیدن اتومبیل خاموش A توسط کامیون، بهتر است کامیون در ابتدا شروع به حرکت کند وقتی کامیون به تندی

رو به جلو شروع به حرکت کند، آونگ B به سمت منحرف می‌شود.



(۱) به آرامی - راست

(۲) به آرامی - چپ

(۳) به تندی - راست

(۴) به تندی - چپ

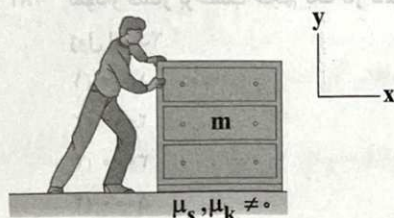
۷۶- مطابق شکل زیر، شخصی با نیروی افقی، جسمی را هل می‌دهد، اما جسم حرکت نمی‌کند. چه تعداد از عبارات‌های زیر نادرست است؟

(الف) نیروی شخص، هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی اصطکاکی است که سطح افقی به جسم وارد می‌کند.

(ب) نیروی اصطکاکی که سطح افقی به کف پاهای شخص وارد می‌کند، در خلاف جهت محور X است.

(ج) برای آن که جسم شروع به حرکت کند، شخص باید با نیروی بزرگ‌تر از $\mu_s mg$ آن را هل بدهد.

(د) نیروی اصطکاک بین کف پاهای شخص و سطح افقی، هم‌اندازه نیروی اصطکاک جسم با سطح افقی است.



۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۷۷- تندی حدی نهایی یک چترباز در سقوط آزاد با چتر بسته $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و در سقوط آزاد با چتر باز $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. این چترباز از ارتفاع بسیار زیادی

بدون سرعت اولیه می‌پرد و 4 s پس از پرش به تندی $28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌رسد و بلافاصله پس از این لحظه، شخص چتر خود را باز می‌کند و 2 s بعد از

باز شدن چتر، سرعت حرکت او ثابت می‌شود و شخص 10 s پس از ثابت شدن سرعتش، به زمین می‌رسد. شتاب متوسط حرکت چترباز در 2

ثانیه سوم چند برابر شتاب متوسط حرکت چترباز در 4 ثانیه اول است و چترباز پس از ثابت شدن سرعت، چند متر را طی می‌کند تا به سطح

زمین برسد؟

۴۰۰ و $\frac{6}{5}$ (۴)۶۰ و $\frac{6}{5}$ (۳)۴۰۰ و $-\frac{11}{7}$ (۲)۶۰ و $-\frac{11}{7}$ (۱)

تألیف و تصحیح

محل انجام محاسبات

۷۸- جعبه‌ای به جرم 50 kg بر روی یک سطح افقی ساکن است. به این جعبه، نیروی افقی متغیر با زمان $F = 100t$ وارد می‌کنیم. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب $0/6$ و $0/4$ باشد، بزرگی نیرویی که بسته به سطح در لحظه $t = 1\text{ s}$ وارد می‌کند چند نیوتون بوده و کدام گزینه درباره تغییر اندازه سرعت جعبه (Δv) بر حسب متر بر ثانیه در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 4\text{ s}$ صحیح است؟ (همه

مقادیر در SI هستند و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

$$(2) \quad 100\sqrt{26} < \Delta v < 4$$

$$(1) \quad 100\sqrt{26} < \Delta v < 8$$

$$(4) \quad 100\sqrt{37} < \Delta v < 1$$

$$(3) \quad 100\sqrt{37} < \Delta v < 2$$

۷۹- دو گوی هم‌اندازه را که جرم یکی ۲ برابر دیگری است ($m_2 = 2m_1$) از ارتفاع نسبتاً زیاد h رها می‌کنیم. به گونه‌ای که گوی‌ها در مسیر سقوط به تندی حدی می‌رسند و سپس با زمین برخورد می‌کنند. با فرض این که نیروی مقاومت هوا در حرکت گوی‌ها، در تندی‌های یکسان، برابر است، قبل از رسیدن به تندی حدی و در تندی‌های یکسان، شتاب گوی‌ها را مقایسه کنید و کدام گوی تندی بیشتری دارد؟

$$(4) \quad a_1 < a_2 \text{ و } v_1 < v_2$$

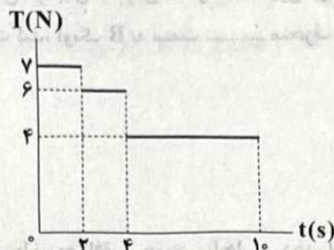
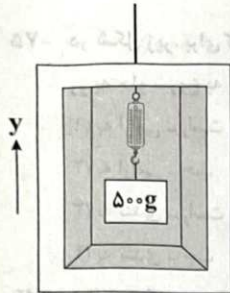
$$(3) \quad a_1 > a_2 \text{ و } v_1 < v_2$$

$$(2) \quad a_1 < a_2 \text{ و } v_1 > v_2$$

$$(1) \quad a_1 > a_2 \text{ و } v_1 > v_2$$

۸۰- درون یک آسانسور مطابق شکل زیر، جسمی به جرم 500 g از یک نیروسنج آویزان است. اگر نمودار عددی که نیروسنج نشان می‌دهد بر حسب زمان، به صورت شکل زیر بوده و آسانسور در لحظه $t = 0$ ساکن باشد، جابه‌جایی آسانسور در مدت زمان 10 s از حرکت آن چند متر

بوده است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



$$(1) \quad 40$$

$$(2) \quad 48$$

$$(3) \quad 56$$

$$(4) \quad 64$$

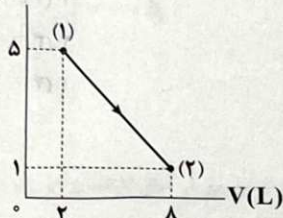
توجه: داوطلب گرمای، لطفاً از بین سؤالات زوج درس ۱ (فیزیک ۱)، شماره ۸۱ تا ۹۰ و زوج درس ۲ (فیزیک ۲)، شماره ۹۱ تا ۱۰۰، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

زوج درس ۱

فیزیک ۱ (سؤالات ۸۱ تا ۹۰)

۸۱- نمودار فشار بر حسب حجم یک گاز کامل مطابق شکل زیر است. اگر گاز در این فرایند، $1/5\text{ kJ}$ گرما دریافت کند، انرژی درونی اولیه گاز چند

$P(10^5\text{ Pa})$



ژول است؟

$$(1) \quad 1500$$

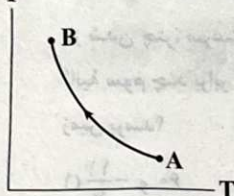
$$(2) \quad 2000$$

$$(3) \quad 3000$$

$$(4) \quad 5000$$

۸۲- شکل زیر، مربوط به فرایندی است که یک گاز کامل طی کرده است. که در طی فرایند A تا B، اندازه کار مبادله‌شده برابر با 400 J و انرژی

P



درونی آن 300 J تغییر کرده است. گاز در طی این فرایند ژول گرما

$$(1) \quad 700 \text{ می‌گیرد.}$$

$$(2) \quad 700 \text{ از دست می‌دهد.}$$

$$(3) \quad 100 \text{ می‌گیرد.}$$

$$(4) \quad 100 \text{ از دست می‌دهد.}$$

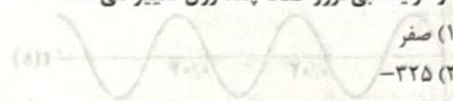
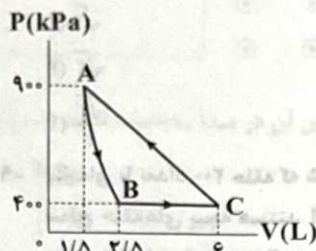
محل انجام محاسبات

۸۳- اگر به 0.5 mol گاز کامل با انرژی درونی اولیه 80 J ، در طی یک فرایند هم فشار، 150 J گرما داده شود، حجم آن 30% درصد افزایش می یابد.

دمای اولیه گاز چند کلوین بوده است؟ $(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$

- (۱) 105 (۲) 145 (۳) 215 (۴) 425

۸۴- مقدار معینی گاز کامل، چرخه ای مطابق شکل زیر را طی می کند و اندازه گرمای مبادله شده در هر چرخه برابر با 1200 J است. انرژی درونی گاز در فرایند بی دررو AB ، چند ژول تغییر می کند؟



۸۵- کدام یک از عبارات های زیر در ارتباط با ماشین گرمایی نادرست هستند؟

(الف) با توجه به داده های $Q_H = 80 \text{ J}$ ، $Q_L = -40 \text{ J}$ ، $W = -30 \text{ J}$ ؛ قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی نقض می شود.

(ب) در ماشین گرمایی بنزینی، در مرحله ضربه مکش، زمانی که پیستون به پایین ترین وضعیت خود رسید، سوپاپ در چرخه ورودی بسته می شود.

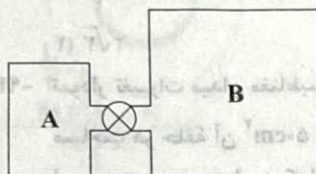
(ج) مرحله آتش گرفتن در موتور بنزینی، فرایندی بی دررو است.

- (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «الف» و «ج» (۴) هیچ کدام

۸۶- در یک ماشین گرمایی می توانیم با دادن 1600 J گرما، 320 J کار انجام دهیم. اگر با ثابت نگه داشتن گرمای دریافتی فقط اندازه گرمای تلف شده را به اندازه 25% درصد کاهش دهیم، بازده ماشین گرمایی چند درصد افزایش می یابد؟

- (۱) $12/5$ (۲) 20 (۳) 40 (۴) 50

۸۷- ظرف A حاوی گاز ایده آل با فشار 8 atm و دمای 300 K است. ظرف B نیز حاوی همان گاز با فشار 6 atm و دمای 500 K است و شیر بین دو ظرف، بسته است. حجم ظرف B، 5 برابر حجم ظرف A است. شیر رابط بین دو ظرف را باز کرده و در حالی که دمای هر یک از دو ظرف در دمای اولیه شان نگه داشته می شود، اجازه داده می شود فشار دو ظرف، یکسان شود. فشار نهایی در دو ظرف چند اتمسفر است؟



(۱) $6/5$

(۲) $6/3$

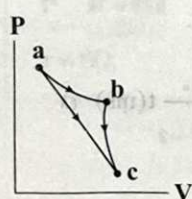
(۳) 7

(۴) $7/2$

۸۸- دمای یک گاز ایده آل در ابتدا 27°C است. اگر دمای گاز را در فشار ثابت به 21°C برسانیم، چگالی آن چند درصد تغییر خواهد کرد؟

- (۱) $0/2$ (۲) 2 (۳) 4 (۴) $0/4$

۸۹- در نمودار فشار بر حسب حجم برای یک گاز ایده آل، کار انجام شده در فرایند هم دمای ab برابر با 10 J و کار انجام شده در فرایند بی دررو bc برابر با 6 J است. بزرگی تغییرات انرژی درونی گاز در مسیر مستقیم ac چند ژول است؟



(۱) 8

(۲) 16

(۳) 6

(۴) 4

۹۰- چه تعداد از عبارات های زیر نادرست هستند؟

(الف) معادله حالت گاز کامل، مستقل از نوع گاز است.

(ب) متغیرهای ترمودینامیکی، مستقل از یکدیگر هستند.

(ج) وقتی دستگاه در تعادل ترمودینامیکی است که دما در تمام نقاط گاز، یکسان باشد.

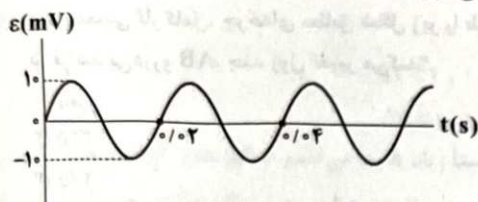
- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

حل انجام محاسبات

زوج درس ۲

فیزیک ۲ (سؤالات ۹۱ تا ۱۰۰)

۹۱- نمودار نیروی محرکه القایی بر حسب زمان برای پیچهای به مقاومت 5Ω که به طور یکنواخت در یک میدان مغناطیسی یکنواخت می چرخد، مطابق شکل زیر است. جریان عبوری از این پیچه در لحظه $t = 2/5 \text{ ms}$ چند میلی آمپر است؟

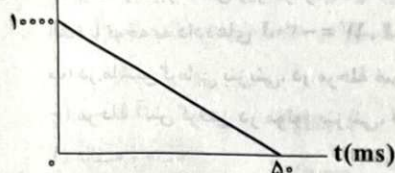


(۱) ۲

(۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۹۲- پیچهای با تعداد ۲۰۰ حلقه که شعاع هر حلقه آن 10 cm است، طوری در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته است که خطهای میدان، عمود بر سطح حلقه‌های پیچه هستند. اگر نمودار تغییرات میدان بر حسب زمان، مطابق شکل زیر باشد، نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t_1 = 10 \text{ ms}$ تا $t_2 = 20 \text{ ms}$ چند ولت است؟ ($\pi = 3$)

B(G)



(۱) ۴۰

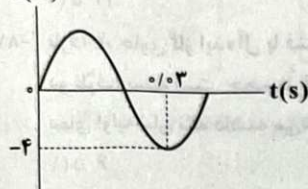
(۲) ۳۰

(۳) ۶۰

(۴) ۱۲۰

۹۳- نمودار جریان الکتریکی متناوب عبوری از رسانایی بر حسب زمان، مطابق شکل زیر است. در لحظه $t = \frac{1}{150} \text{ s}$ ، جریان عبوری از این رسانا چند آمپر است؟

I(A)

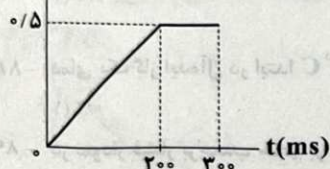


(۱) صفر

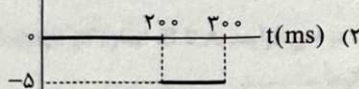
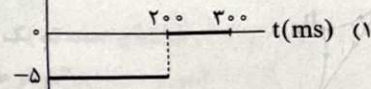
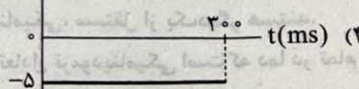
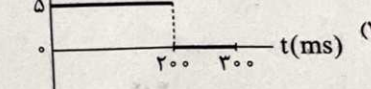
(۲) ۲

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

B(T)

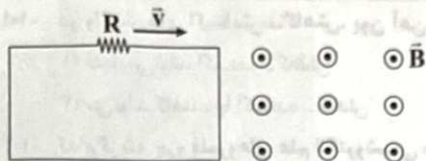


۹۴- نمودار تغییرات میدان مغناطیسی بر حسب زمان مربوط به پیچهای که دارای ۴۰۰ حلقه است و مساحت هر حلقه آن 5 cm^2 می باشد، مطابق شکل مقابل است. نمودار نیروی محرکه القایی در این پیچه بر حسب زمان در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (خطوط میدان مغناطیسی بر سطح پیچه، عمود هستند).

 $\varepsilon(V)$  $\varepsilon(V)$  $\varepsilon(V)$  $\varepsilon(V)$ 

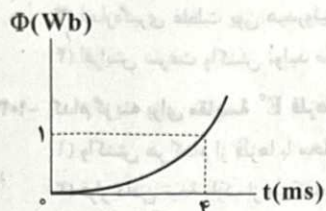
حل انجام محاسبات

۹۵- مطابق شکل زیر، توسط یک سیم رسانا، یک قاب مستطیلی شکل ساخته ایم که به طور یکنواخت، وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ شده و سپس از آن خارج می شود. جهت جریان القایی عبوری از مقاومت R در مدت زمان ورود به میدان از و هنگام خروج از میدان است.



- (۱) راست به چپ - چپ به راست
(۲) چپ به راست - راست به چپ
(۳) راست به چپ - راست به چپ
(۴) چپ به راست - چپ به راست

۹۶- نمودار شار مغناطیسی عبوری از حلقه ای رسانا برحسب زمان یک سهمی مطابق شکل زیر است که رأس آن در مبدأ مختصات است. نیروی محرکه القایی متوسط در این حلقه در ثانیه اول چند کیلوولت است؟

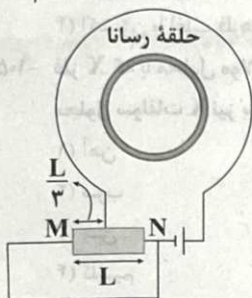


- (۱) ۶۲/۵
(۲) ۵۸/۲
(۳) ۱۲۸
(۴) ۱۰۴

۹۷- حلقه ای دایره ای شکل به طول 60 cm و مقاومت 2Ω که به یک میلی آمپرسنج متصل است، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی به بزرگی 500 G قرار دارد. اگر در مدت زمان 0.45 s میدان مغناطیسی را به 200 G در جهت مخالف رسانده و همزمان با کشیدن از دو طرف حلقه، مساحت آن را نصف کنیم، جریان الکتریکی متوسط عبوری از آن در این مدت چند میلی آمپر می شود؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) ۰/۰۲ (۲) ۲۰ (۳) ۰/۰۱۳ (۴) ۱۳

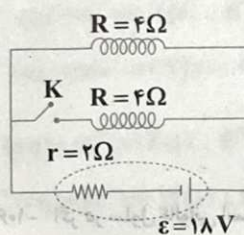
۹۸- در شکل زیر، لغزنده رنوستا بر روی یک سیم دارای مقاومت و به طول L قرار دارد. اگر لغزنده را از فاصله $\frac{L}{3}$ از نقطه M به فاصله $\frac{L}{3}$ از



نقطه N حرکت دهیم، جهت جریان القایی در حلقه رسانا مطابق کدام گزینه است؟

- (۱) پیوسته ساعتگرد
(۲) ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد
(۳) ابتدا پادساعتگرد و سپس ساعتگرد
(۴) پیوسته پادساعتگرد

۹۹- مطابق شکل زیر، دو القاگر مشابه با مقاومت الکتریکی 4Ω به یک باتری متصل هستند. انرژی ذخیره شده در القاگر قبل از بسته شدن کلید



K چند برابر مجموع انرژی ذخیره شده در القاگرها بعد از بستن کلید K است؟

$\frac{1}{9}$ (۱)	$\frac{1}{9}$ (۱)
$\frac{9}{9}$ (۲)	$\frac{9}{9}$ (۲)
$\frac{8}{9}$ (۳)	$\frac{8}{9}$ (۳)
$\frac{2}{9}$ (۴)	$\frac{2}{9}$ (۴)

۱۰۰- معادله شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه رسانا در SI به صورت $\Phi = 0.5 \cos(4\pi t)$ است. دومین بار در چه لحظه ای برحسب ثانیه

مقدار جریان به بیشترین مقدار خود می رسد؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{3}{8}$

محل انجام محاسبات

شیمی



۱۰۱- در واکنش‌های اکسایش - کاهش، یون آهن (II) باشد و یون یدید فقط می‌تواند یابد.

- (۱) فقط می‌تواند اکسند - کاهش
(۲) فقط می‌تواند اکسند - اکسایش
(۳) می‌تواند کاهشده یا اکسند - کاهش
(۴) می‌تواند کاهشده یا اکسند - اکسایش

۱۰۲- کدام گزینه جزو قلمروهای علم الکتروشیمی محسوب نمی‌شود؟

- (۱) طراحی سلول سوختی و تأمین سوخت آن‌ها
(۲) تولید مواد با استفاده از روش برقکافت
(۳) اندازه‌گیری غلظت یون هیدرونیوم با استفاده از pH سنج دیجیتال
(۴) افزایش سرعت واکنش تولید صابون با استفاده از یون‌های قلیایی به عنوان کاتالیزگر

۱۰۳- کدام گزینه برای مقایسه E° فلزهای منیزیم و آلومینیم، کارایی ندارد؟

- (۱) واکنش هر کدام از فلزها با محلول مولار هیدروکلریک اسید و محاسبه سرعت تولید گاز هیدروژن
(۲) قرار دادن تیغه نازک از هر کدام از فلزها در محلول ۰/۰۲ مولار مس (II) سولفات و بررسی انجام‌پذیر یا انجام‌ناپذیر بودن واکنش
(۳) قرار دادن لایه نازک از هر کدام از فلزها در هوای مرطوب و محاسبه سرعت افزایش جرم فلزها
(۴) قرار دادن تیغه نازک از هر کدام از فلزها در محلول ۰/۰۱ مولار روی سولفات و محاسبه تغییر دمای واکنش

۱۰۴- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به طور جداگانه ممکن نیست و باید این کمیت به طور نسبی اندازه‌گیری شود.
(۲) مقادیر E° در سری الکتروشیمیایی، براساس دمای 25°C ، فشار ۱ atm و غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت‌ها است.
(۳) سلول گالوانی به دلیل تولید انرژی الکتریکی، ویژگی‌های یک باتری را دارد.
(۴) اکسیژن با اغلب فلزها واکنش می‌دهد، در حالی که نمی‌تواند فلزهایی مانند طلا و پلاتین را به اکسید این فلزها تبدیل کند.

۱۰۵- فلز X که با محلول مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد، کاهشده بهتری از فلز کبالت است و می‌توان آن را از واکنش میان فلز آلومینیم با محلول سولفات X نیز به دست آورد. با توجه به داده‌های جدول زیر، X کدام فلز می‌تواند باشد؟

نیم‌واکنش	E°
$\text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Ca}(\text{s})$	-۲/۸۴V
$\text{Al}^{3+}(\text{aq}) + 3\text{e}^- \rightarrow \text{Al}(\text{s})$	-۱/۶۶V
$\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Fe}(\text{s})$	-۰/۴۴V
$\text{Co}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Co}(\text{s})$	-۰/۲۸V
$\text{Pb}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Pb}(\text{s})$	-۰/۱۳V
$2\text{H}^+(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2(\text{g})$	۰/۰۰V
$\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}(\text{s})$	۰/۳۴V
$\text{Pt}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Pt}(\text{s})$	۱/۱۸V

- (۱) آهن
(۲) سرب
(۳) مس
(۴) کلسیم

۱۰۶- اگر در سلول گالوانی استاندارد «آلومینیم - روی»، شمار الکترون‌های مبادله‌شده، ۰/۶ شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول گالوانی استاندارد

«مس - نقره» باشد، به‌ازای تغییر m گرم در جرم آند سلول «آلومینیم - روی»، تغییر جرم کاتد سلول «مس - نقره» برحسب m به تقریب کدام

است؟ ($\text{Al}=27, \text{Cu}=64, \text{Zn}=65, \text{Ag}=108: \text{g.mol}^{-1}$)

$$E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag})=+0.80\text{V}, E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn})=-0.76\text{V}$$

$$E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu})=+0.34\text{V}, E^\circ(\text{Al}^{3+}/\text{Al})=-1.66\text{V}$$

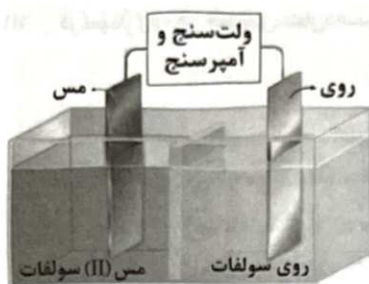
$$14/4\text{m} (4)$$

$$7/2\text{m} (3)$$

$$20\text{m} (2)$$

$$10\text{m} (1)$$

محل انجام محاسبات



۱۰۷- اگر در سلول گالوانی زیر، دیواره متخلخل برداشته شود، چه اتفاقی می افتد؟

- (۱) پتانسیل صفر و جریان غیرقابل اندازه گیری می شود.
- (۲) پتانسیل و جریان هر دو غیرقابل اندازه گیری می شود.
- (۳) پتانسیل و جریان هر دو صفر می شود.
- (۴) جریان صفر و پتانسیل غیرقابل اندازه گیری می شود.

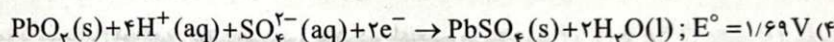
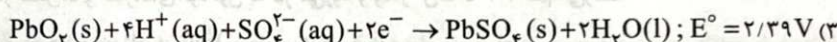
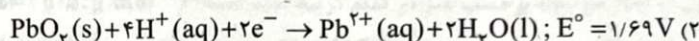
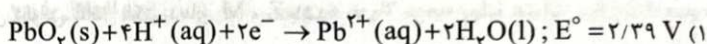
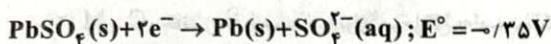
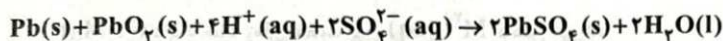
۱۰۸- کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی کامل نمی کند؟

«در میان فلزها، کمترین E° مربوط به فلزی است که»

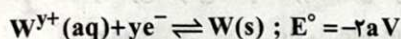
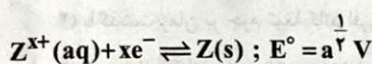
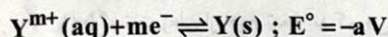
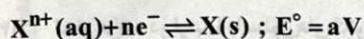
- (۱) خصلت فلزی آن کم تر از فلزهای هم گروه با آن است.
- (۲) چگالی آن کم تر از فلزهای دیگر است.
- (۳) با از دست دادن یک الکترون به آرایش هشت تایی پایدار می رسد.
- (۴) بیشترین شعاع اتمی را در مقایسه با عنصرهای هم دوره خود دارد.

۱۰۹- واکنش کلی باتری سربی و یکی از نیم واکنش های مربوط به آن به صورت زیر است. اگر E° باتری برابر با $2/04V$ باشد، معادله نیم واکنش دیگر

و E° مربوط به آن کدام است؟



۱۱۰- با توجه به داده های مقابل، کدام مطالب زیر درست هستند؟ ($0 < a < 1$)



(آ) emf سلول گالوانی با واکنش کلی $xW^{y+}(aq) + yZ(s) \rightarrow yZ^{x+}(aq) + xW(s)$ در شرایط استاندارد، بزرگ تر از صفر است.

(ب) $Z(s)$ در مقایسه با $X(s)$ کاهنده ضعیف تری است.

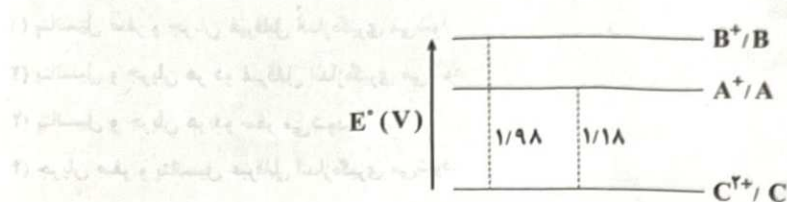
(پ) $W^{y+}(aq)$ در مقایسه با $Y^{m+}(aq)$ اکسنده قوی تری نیست.

(ت) برای هم زدن محلول نیترا ت فلز Z می توان از میله فلزی Y استفاده کرد و اتفاق خاصی هم رخ نخواهد داد.

(۱) «آ» و «پ» (۲) «ب» و «پ» (۳) «آ» و «ت» (۴) «ب» و «ت»

محل انجام محاسبات

۱۱۱- در نمودار زیر، هر خط چین نشان دهنده نیروی الکتروموتوری یک سلول گالوانی است. اگر A نیم سلول SHE باشد، کدام گزینه درست است؟



(۱) قدرت اکسندگی کاتیون C^{2+} بیشتر از کاتیون B^+ است.

(۲) C می تواند یک فلز فعال مانند فلز قلیایی باشد.

(۳) محلول هیدروکلریک اسید را نمی توان در ظرفی از جنس فلز B نگهداری کرد.

(۴) اگر emf سلول گالوانی حاصل از C و D برابر $1/19V$ و C قطب مثبت سلول باشد، پتانسیل کاهشی D برابر با $-2/37V$ است.

۱۱۲- با توجه به داده های زیر، در سلول گالوانی حاصل از الکترودهای و
 • تبدیل Z^{2+} به Z، دشوارتر از تبدیل C^{2+} به C انجام می شود.

• در سلول گالوانی تشکیل شده از فلزهای Z و M، آنیون های محلول نمک Z با عبور از دیواره متخلخل به سمت الکتروود M حرکت می کنند.

(۱) $M - Z$ - جریان الکترون در مدار خارجی از سمت Z به M است.

(۲) $C - M$ - با گذشت زمان غلظت یون $M^{2+}(aq)$ کاهش می یابد.

(۳) $C - M$ - کاتیون ها با عبور از دیواره متخلخل به سمت الکتروود C حرکت می کنند.

(۴) $C - Z$ - ولتاژ سلول بیشتر از حالتی است که سلول گالوانی شامل الکترودهای M و Z باشد.

۱۱۳- کدام گزینه در ارتباط با باتری های لیتیومی نادرست است؟

(۱) باتری های لیتیومی از نوع دگمه ای در شکل ها و اندازه های گوناگون به کار می رود و ولتاژ آن ها تا ۳V هم می رسد.

(۲) نوعی از باتری های لیتیومی قابل شارژ هستند و در تلفن و رایانه همراه به کار می روند.

(۳) باتری های لیتیومی به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی هستند و نباید در طبیعت رها شوند.

(۴) از جمله معایب باتری های لیتیومی این است که قابل بازیافت نیستند.

۱۱۴- کدام گزینه در ارتباط با سلول های گالوانی همواره درست است؟

(۱) با گذشت زمان از جرم تیغه آند کم می شود.

(۲) با گذشت زمان بر جرم تیغه کاتد افزوده می شود.

(۳) در سلول گالوانی با دو الکتروود شامل فلزهای اصلی و واسطه، الکتروود فلز واسطه در نقش کاتد است.

(۴) با گذشت زمان پتانسیل کاهشی کاتد، کاهش می یابد.

۱۱۵- در ارتباط با واکنش های اکسایش - کاهش، کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) یکی از گونه های اکسند و کاهنده، فلز بوده و گونه دیگر، نافلز است.

(۲) اگر حالت فیزیکی فراورده ها مشابه باشد، حالت فیزیکی واکنش دهنده ها نیز مشابه است.

(۳) سطح انرژی فراورده ها، پایین تر از سطح انرژی واکنش دهنده ها است.

(۴) اگر الکترون مبادله نشود، گونه فلزی در واکنش شرکت ندارد.

محل انجام محاسبات

تکلیف ها و حل مسائل

توجه: داوطلب گرامی، لطفاً از بین سؤالات زوج درس ۱ (شیمی ۱)، شماره ۱۱۶ تا ۱۲۵ و زوج درس ۲ (شیمی ۲)، شماره ۱۲۶ تا ۱۳۵، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

زوج درس ۱

شیمی (۱) (سؤالات ۱۱۶ تا ۱۲۵)

۱۱۶- در دمای 20°C ، انحلال پذیری هر کدام از گازهای NO ، N_2 و O_2 در 100 گرم آب برابر 0.1 گرم است. فشار کدام گاز در این شرایط بیشتر

است و اگر بخواهیم در دمای ثابت، انحلال پذیری هر کدام از گازها دو برابر شود، تغییرات فشار کدام گاز کم تر خواهد بود؟

- (۱) NO ، NO (۲) O_2 ، NO (۳) NO ، N_2 (۴) O_2 ، N_2

۱۱۷- اگر چگالی محلول A ، بیشتر از چگالی محلول D باشد و A و D در یک لوله آزمایش وارد شوند، پس از گذشت مدت زمان مناسب، کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر A و D ، دو محلول آبی و محلول A ، غلیظ تر از محلول D باشد، D در لوله، بالاتر از A جای می گیرد.

(۲) اگر A و D دو محلول غیرآبی و غلظت D بیشتر از غلظت A باشد، A در لوله، بالاتر از D جای می گیرد.

(۳) حلال A ، می تواند آبی و حلال D می تواند غیرآبی باشد و A در لوله بالاتر از D جای می گیرد.

(۴) حلال هر دو محلول A و D می تواند غیرآبی باشد و D در لوله، بالاتر از A جای می گیرد.

۱۱۸- تمام گزینه های زیر به پدیده اسمز اشاره دارد، به جز

(۱) جذب آب توسط ریشه گیاهان

(۲) چروک شدن میوه ها در آب نمک

(۳) تشکیل بلورهای نمک در حاشیه دریاها

(۴) مرگ ماهی های آب شیرین در اثر نگهداری در آب شور

۱۱۹- در یک حوضچه استخراج سدیم کلرید از آب دریا که با محلول 6 مولار سدیم کلرید با چگالی 1.25g.mL^{-1} پر شده است، پس از تبخیر

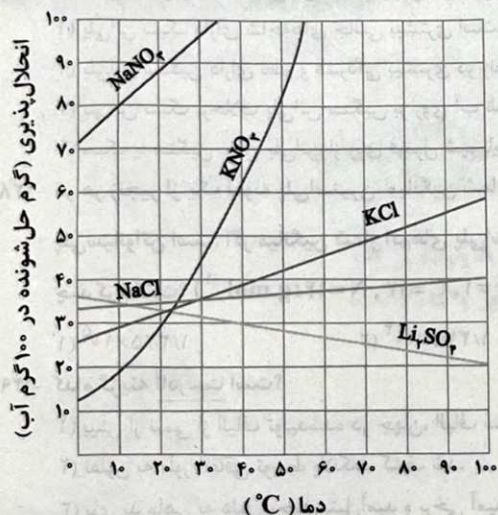
حدود 6 تن آب، فرایند تبلور سدیم کلرید شروع می شود. اگر بدانیم انحلال پذیری سدیم کلرید در این شرایط برابر با 40 گرم در 100 گرم آب

است، ابعاد حوضچه برحسب متر در کدام گزینه آمده است؟ ($\text{Na}=23$ ، $\text{Cl}=35.5$ ؛ g.mol^{-1})

- (۱) $12 \times 6 \times 3$ (۲) $15 \times 6 \times 4$ (۳) $10 \times 7 \times 4$ (۴) $8 \times 6 \times 5$

۱۲۰- با توجه به نمودار زیر، درصد جرمی محلول سیرشده نمک A در دمای 30°C به تقریب برابر با 30 است. اگر 72 گرم از محلول سیرشده این

نمک را از دمای 50°C تا 20°C سرد کنیم، حداکثر چند گرم رسوب تشکیل می شود؟



(۱) ۲۰

(۲) ۱۴

(۳) ۱۰

(۴) ۶

محل انجام محاسبات

- ۱۲۱- کدام مطالب در ارتباط با استون، هگزان و اتانول درست است؟ ($H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1}$)
- (آ) مجموع جرم مولی استون و اتانول، برابر با مجموع جرم مولی هگزان و آب است.
- (ب) نقطه جوش اتانول همانند استون کم تر از نقطه جوش آب بوده و هر دو ترکیب به میزان نامحدود در آب حل می شوند.
- (پ) استون و اتانول جزو حلال های قطبی بوده و ترکیب های ناقطبی در آن ها حل نمی شوند.
- (ت) ید و هگزان به خوبی در یکدیگر حل می شوند زیرا گشتاور دوقطبی هر کدام از دو ترکیب به طور دقیق برابر با صفر است.
- (۱) «آ» و «ب» (۲) «آ» و «پ» (۳) «ب» و «ت» (۴) «پ» و «ت»

۱۲۲- کدام گزینه جزو دلایل تشکیل سنگ کلیه در نظر گرفته نمی شود؟

- (۱) اختلالات هورمونی (۲) کم تحرکی (۳) نوشیدن کم آب (۴) مصرف کم لبنیات و پروتئین حیوانی

۱۲۳- در کدام گزینه، فقط یکی از ترکیب ها در میدان الکتریکی جهت گیری می کند؟

- (۱) H_2S, O_2, NH_3 (۲) CO_2, HCl, O_2 (۳) CH_4, CO, SO_2 (۴) SO_2, CS_2, H_2O

۱۲۴- کدام مطالب در ارتباط با مولکول های HF و H_2O درست است؟

- (آ) در دمای $15^\circ C$ ، حالت فیزیکی HF و H_2O ، یکسان است.
- (ب) پیوند هیدروژنی میان دو مولکول HF ، قوی تر از پیوند هیدروژنی میان دو مولکول H_2O است.
- (پ) در شرایطی که آمونیاک به حالت مایع است، مولکول های HF و H_2O نیز به حالت مایع هستند.
- (ت) هر مولکول HF حداکثر با ۴ مولکول HF مجاور و هر مولکول H_2O نیز حداکثر با ۴ مولکول H_2O مجاور پیوند هیدروژنی تشکیل می دهد.

- (۱) «آ» و «ب» (۲) «پ» و «ت» (۳) «ب» و «ت» (۴) «آ» و «پ»
- ۱۲۵- دانش آموزی می خواهد ترکیب های آلی فرار موجود در نمونه ای آب را از آن جدا کند. کدام روش (ها) در این مورد کارایی دارند؟
- (۱) اسمز معکوس و صافی کربن (۲) اسمز معکوس و تقطیر (۳) تقطیر و صافی کربن (۴) فقط اسمز معکوس

زوج درس ۲

شیمی (۲) (سؤالات ۱۲۶ تا ۱۳۵)

- ۱۲۶- با توجه به مطالب کتاب درسی، در کدام گزینه هر کدام از پلیمرها از دو نوع مونومر ساخته شده اند؟
- (۱) سرتنگ، کیسه فریزر (۲) کیسه خون، لباس مسابقه موتورسواری (۳) تایر اتومبیل، منبع بزرگ آب (۴) قایق بادبانی، جلیقه ضدگلوله

۱۲۷- کدام گزینه در ارتباط با پلی اتن سبک و پلی اتن سنگین نادرست است؟

- (۱) پلی اتن سبک دارای شاخه های جانبی بیشتری است.
- (۲) پلی اتن سنگین دارای نظم و فشردگی بیشتری در زنجیرهای هیدروکربنی است.
- (۳) پلی اتن سبک برخلاف پلی اتن سنگین بر روی آب شناور می ماند.
- (۴) سبک یا سنگین بودن پلی اتن از روی فرمول شیمیایی پلی اتن، قابل تشخیص نیست.

۱۲۸- در هر زنجیر از یک نمونه پلی استیرن، میانگین شمار پیوندهای دوگانه، $4/5$ برابر میانگین شمار پیوندهای سه گانه در هر زنجیر از یک نمونه پلی سیانواتن است. اگر میانگین شمار اتم های پلی استیرن در هر زنجیر برابر با 6×10^4 مول باشد، میانگین جرم مولی پلی سیانواتن، برابر

چند گرم است؟ ($H=1, C=12, N=14: g.mol^{-1}$)

- (۱) $1/325 \times 10^5$ (۲) $1/325 \times 10^4$ (۳) $1/590 \times 10^5$ (۴) $1/590 \times 10^4$

۱۲۹- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) بیش از نیمی از الیاف تولید شده در جهان، الیاف ساختگی است.
- (۲) تفلون به طور اتفاقی توسط پلانکت، کشف شد.
- (۳) بوی بد ماهی به دلیل وجود متیل آمید و برخی آمیدهای دیگر است.
- (۴) متانول همانند ۱- پروپانول به هر نسبتی در آب حل می شود.

۱۳۰- کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) واکنش دهنده‌ها در فرایند بسیار، همان واحدهای تکرارشونده در فرارده نهایی هستند.
- (۲) جرم مولی یک پلیمر، از مجموع جرم مولی مونومر(های) سازنده آن به دست می‌آید.
- (۳) شمار اتم‌های کربن در واحد تکرارشونده پلیمر و مونومر سازنده آن برابر است.
- (۴) عنصرهای کربن و هیدروژن، جزو عنصرهای ثابت پلیمرها هستند.

۱۳۱- کدام مطالب زیر در ارتباط با استری تک‌عاملی و خطی با زنجیر(های) هیدروکربنی سیرشده که جرم اتم‌های کربن آن، $1/125$ برابر جرم اتم‌های اکسیژن می‌باشد، درست است؟

(آ) نوع نیروی بین‌مولکولی آن و پلی‌اتن یکسان است.

(ب) دو ساختار می‌توان برای آن در نظر گرفت.

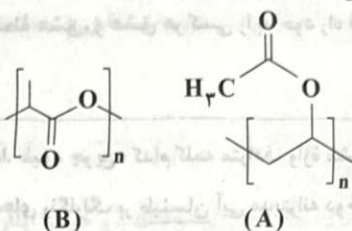
(پ) نقطه جوش آن بالاتر از نقطه جوش پروپانونیک اسید است.

(ت) هر مولکول آن شامل 10 جفت‌الکترون پیوندی است.

(۱) «آ» و «ب» (۲) «پ» و «ت» (۳) «آ» و «ت» (۴) «ب» و «پ»

۱۳۲- ساختارهای A و B به ترتیب مربوط به پلی‌وینیل استات و پلی‌لاکتیک اسید است. کدام گزینه در ارتباط با آن‌ها نادرست است؟ (هر کدام از

پلیمرها از یک مونومر تشکیل شده‌اند و $H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1}$)



(۱) پلی‌لاکتیک اسید برخلاف پلی‌وینیل استات، جزو خانواده پلی‌استرها است.

(۲) جرم مولی مونومر سازنده پلی‌لاکتیک اسید، بیشتر از جرم مولی مونومر سازنده پلی‌وینیل استات است.

(۳) پلی‌لاکتیک اسید در مقایسه با پلی‌وینیل استات، ردپای کوچک‌تری در محیط زیست برجای می‌گذارد.

(۴) مونومر پلی‌وینیل استات یک استر سیرشده، در حالی که مونومر پلی‌لاکتیک اسید یک اسید سیرشده است.

۱۳۳- 2500 مول دی‌اسید A به همراه 2500 مول دی‌آمین B در واکنش تشکیل پلی‌آمید شرکت کرده و به طور کامل مصرف می‌شوند. اگر تفاوت

جرم پلی‌آمید تولیدشده و دی‌اسید مصرف‌شده برابر با 180 کیلوگرم باشد، کدام یک از ساختارهای زیر را می‌توان به دی‌آمین B نسبت داد؟

($H=1, C=12, N=14, O=16: g.mol^{-1}$)



۱۳۴- شمار اتم‌های اکسیژن کدام دو مولکول با هم برابر نیست؟

(۱) ویتامین C و مولکول سازنده سلولز

(۳) ویتامین K و پنتیل اتانوات

(۲) ویتامین A و ویتامین D

(۴) ۲- هگزانول و استیک اسید

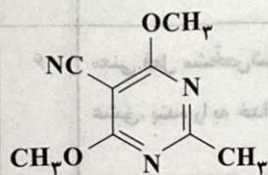
۱۳۵- با توجه به ساختار مولکول داده‌شده، کدام گزینه درست است؟

(۱) دارای دو گروه عاملی آمیدی و یک گروه عاملی آمینی است.

(۲) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی، 7 برابر شمار پیوندهای C—O است.

(۳) شمار اتم‌های کربن، دو برابر شمار اتم‌های هیدروژن در مونومر سازنده پتو است.

(۴) شمار اتم‌های هر مولکول آن، دو برابر شمار اتم‌ها در مولکول اتیل فرمات است.



محل انجام محاسبات

دفترچه تشریحی

نام خانوادگی:	نام درس:	سؤالات تشریحی
کد داوطلب:	فارسی و فیزیک	دوازدهم ریاضی
	زمان آزمون:	
	۱۱۰ دقیقه	

ردیف	نمره	سؤال
		فارسی (۲)
۱	۰/۵	در متن زیر کلمه‌ای بیابید که مترادف با کلمه «جمال» باشد. وصول به حُسن ممکن نشود؛ آلا به واسطه عشق، و عشق هر کسی را به خود راه ندهد.
۲	۰/۲۵	از میان گروه واژگان «تداعی، جزاره، ردا، طبق، چریخ» کدام کلمه مترادف واژه مشخص شده در عبارت زیر است؟ «جزیره‌های کوچک و بزرگ، مثل وصله‌های رنگارنگ بر <u>طیلسان</u> آبی مدیترانه دوخته شده است.»
۳	۰/۵	املاي درست را انتخاب کنید. هنگام (چریخ / چریق) آفتاب کنار قنات حسنی (اتراغ / اتراق) می‌کردیم.
۴	۰/۲۵	املاي درست را با توجه به معنا انتخاب کنید. «امسال که به اروپا رفتم گمانم این است که عالمی را دیده‌ام اما چه (استعبادی / استبعادی) دارد که عمری باشد و روزی خاطراتی از سفر ماه هم بنویسیم.»
۵	۰/۲۵	با توجه به عبارت «بعد از خواندن این مطلب متوجه شدم که دنیا عجیب فراموشکار است.» الف) یک وابسته وابسته بیابید و نوع آن را مشخص کنید. ب) نمودار آن را رسم کنید.
۶	۰/۲۵	معنی فعل مشخص شده را در عبارت زیر بنویسید. عشق، بنده را به خدا برساند؛ پس عشق از بهر این معنی، فرض راه آمد.
۷	۰/۲۵	با توجه به عبارت زیر تشبیه و نوع آن را مشخص کنید، سپس ارکان آن را بنویسید. «و به عالم عشق که بالای همه است نتوان رسیدن. در عشق قدیم نهادن کسی را مسلم شود که با خود نباشد و ترک خود کند.»

ردیف	نمره
۸	۰/۷۵
۹	۱
۱۰	۰/۲۵
۱۱	۰/۵
۱۲	۰/۵
۱۳	۰/۵
۱۴	۲
۱۵	۱

آرایه ادبی مناسب هر گزینه را از داخل کمانک انتخاب کنید.
الف) کاووس کیانی که کی‌اش نام نهادند / کی بود؟ کجا بود و کی‌اش نام نهادند (تلمیح - جناس ناهمسان)

ب) خاکی است که رنگین شده از خون ضعیفان / این ملک که بغداد و ری‌اش نام نهادند (کنایه - حسن تعلیل)

ج) شوخی روزگار است که در مهد دموکراسی عالم، یعنی آتن، برای آب خوردن در شهر هم، مردم رأی می‌گرفتند. (تشبیه - ایهام)

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) بیت «وین نغمه محبت بعد از من و تو ماند / تا در زمانه باقی آواز باد و باران» به کدام ویژگی عشق و محبت اشاره دارد؟

ب) عبارت داخل کمانک بیانگر چیست؟

«او بنده خود را عاشق کند، آن‌گاه بر بنده عاشق باشد و بنده را گوید: تو عاشق و محب مایی و ما معشوق و حبيب توایم. (چه بخواهی و چه نخواهی)»

معادل عبارت «ماوا کردن» را در عبارت زیر پیدا کنید.

«در عشق قدم نهادن کسی را مسلم شود که با خود نباشد و ترک خود بکند و خود را ایتار عشق کند عشق آتش است هر کجا که باشد جز او رخت دیگری نهد و هر کجا که رسد سوزد و به رنگ خود گرداند.»

در عبارت «از بیم عقرب جراره دموکراسی قرن بیستم، ناچار شده به مار غاشیه حکومت سرهنگ‌ها پناه ببرد.» نویسنده وضعیت کشور یونان را چگونه توصیف می‌کند؟

مفهوم ابیات زیر، به لزوم چه موضوعی در مسیر زندگی تأکید می‌کند؟

الف) آیین طریق از نفس پیر مغان یافت / آن خضر که فرخنده پی‌اش نام نهادند

ب) در مکتب حقایق پیش ادیب عشق / هان ای پسر، بکوش که روزی پدر شوی

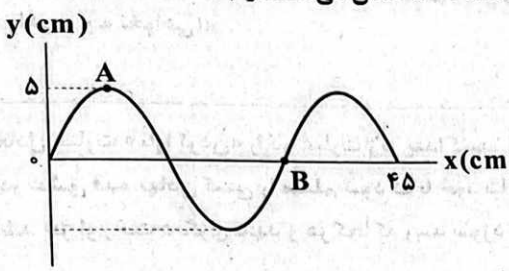
با توجه به بیت «دل گرمی و دم سردی ما بود که گاهی / مردادمه و گاه دی‌اش نام نهادند» اوضاع جهان بر چه اساس و مبنایی شکل می‌گیرد؟

معنی و مفهوم بیت و عبارت زیر را بنویسید.

الف) آدمی به هر جا می‌رود؛ گمان می‌کند که به غایت‌القصوای خود رسیده است.

ب) صد تیغ جفا بر سر و تن دید یکی چوب / تا شد تهی از خویش و نی‌اش نام نهادند

در بیت «خاکی است که رنگین شده از خون ضعیفان / این ملک که بغداد و ری‌اش نام نهادند». شاعر علت رونق و معروفیت ظاهری شهرهای بغداد و ری را چه می‌داند؟

ردیف	نمره	فیزیک (۲)
۱۶	۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اندازه شتاب نوسانگر هماهنگ ساده در نقاط بازگشتی، صفر است. ب) بسامد سامانه جرم - فنر با یک فنر معین ولی وزنه‌های متفاوت با جذر جرم وزنه به طور مستقیم متناسب است. ج) اگر ثابت فنر را افزایش دهیم، دوره نوسان‌های سامانه جرم - فنر افزایش می‌یابد. د) افزایش جرم در سامانه جرم - فنر، با فنر یکسان به کند شدن نوسان‌ها می‌انجامد.
۱۷	۰/۵	جای خالی عبارت‌های زیر را در مورد یک نوسانگر هماهنگ ساده با کلمه‌های مناسب تکمیل کنید. الف) در حرکت هماهنگ ساده وقتی نوسانگر به طرف نقطه تعادل حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل آن می‌یابد. ب) در نقطه تعادل حرکت هماهنگ ساده سامانه جرم - فنر، انرژی جنبشی نوسانگر است.
۱۸	۱/۵	شکل زیر، تصویری از یک موج عرضی در یک ریسمان کشیده شده را در لحظه $t = 0$ نشان می‌دهد. از ابتدا تا لحظه $2/5 T$:  الف) موج چه مسافتی را بر حسب سانتی‌متر طی می‌کند؟ ب) ذره B چه مسافتی را بر حسب سانتی‌متر طی می‌کند؟
۱۹	۱	یک صفحه حساس دایره‌ای شکل به شعاع ۲ cm بر راستای انتشار صوت، عمود است و در مدت زمان ۵ s، $2/4 \pi J$ انرژی صوتی به صفحه می‌رسد. شدت صوت در سطح این صفحه چند وات بر متر مربع است؟ ($\pi = 3$)
۲۰	۱	تفاوت آونگ ساده‌ای ۱/۲ s است. طول این آونگ چند متر است؟ ($\pi = 3$, $g = 10 \frac{N}{kg}$)



ردیف	نمره
۲۱	۲
معادله نوسانی یک نوسانگر هماهنگ ساده در SI به صورت $x = 0.05 \cos(100\pi t)$ است: الف) بسامد زاویه‌ای این نوسانگر چند رادیان بر ثانیه است؟ ب) اندازه شتاب این نوسانگر در لحظه $t = \frac{1}{400}$ s چند متر بر مجذور ثانیه است؟ ($\pi^2 = 10$)	
۲۲	۱
چشمه موجی، نوسان‌هایی با بسامد 20 Hz و دامنه 5 cm در یک محیط کشسان و در راستای محور x انجام می‌دهد. اگر این نوسان در جهت محور y و با تندی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در این محیط منتشر شود: الف) این موج طولی است یا عرضی؟ ب) بسامد زاویه‌ای و طول موج را (برحسب SI) محاسبه کنید.	
۲۳	۰/۷۵
تراز شدت صوت محلی پر تردد، 110 dB است. شدت این صوت، چند وات بر متر مربع است؟ ($I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$)	
۲۴	۱/۲۵
با حرکت یک جانور، در سطح ماسه امواج عرضی و طولی ایجاد می‌شود که تندی انتشار آن‌ها به ترتیب $v_L = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $v_T = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. اختلاف زمان رسیدن این دو موج به نزدیک‌ترین پای یک عقرب ماسه‌ای، $2/5 \text{ ms}$ است. این جانور در چند سانتی‌متری از عقرب قرار دارد؟	
۲۰	جمع نمرات

آزمون شماره (۱۲)
جمعه
۱۴۰۴/۰۹/۲۱

دفترچه
شماره ۳

آزمون‌های سراسر کاج

گزینه درسد را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵
پاسخنامه دوازدهم ریاضی
دوره دوم متوسطه



ادامه شو

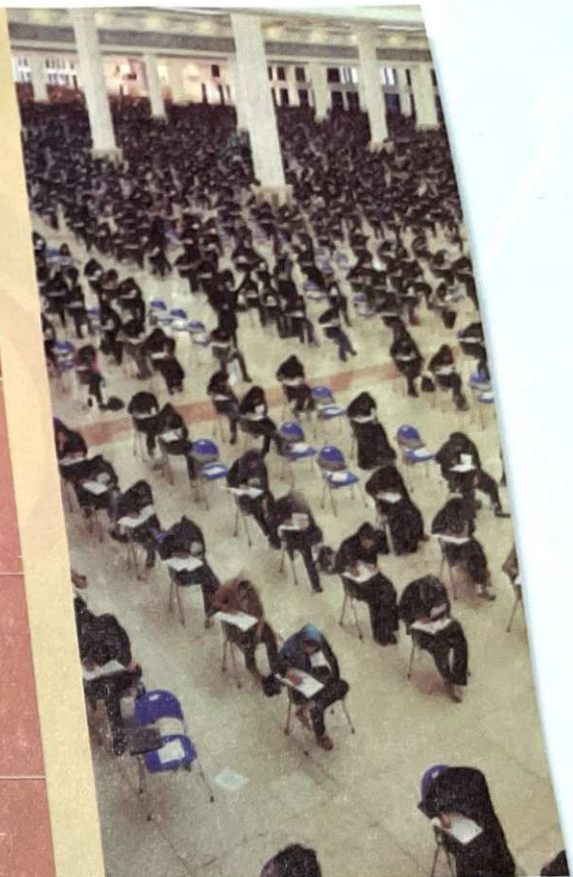
نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۱۱۵	مدت پاسخگویی: ۱۵۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	حسابان ۲	۱۰	۱	۸۵ دقیقه
	ریاضیات گسسته	۱۰	۱۱	
	هندسه ۳	۱۰	۲۱	
	ریاضی ۱	۵	۳۱	
	حسابان ۱	۵	۳۶	
	هندسه ۱	۵	۴۱	
	آمار و احتمال	۱۰	۴۶	
۲	فیزیک ۳	۲۵	۵۶	۴۵ دقیقه
	فیزیک ۱	۱۰	۸۱	
	فیزیک ۲	۱۰	۹۱	
۳	شیمی ۳	۱۵	۱۰۱	۲۵ دقیقه
	شیمی ۱	۱۰	۱۱۶	
	شیمی ۲	۱۰	۱۲۶	

آموزش‌های سراسری گاج

دروس	طراحان	ویراستاران علمی
ریاضیات	سیروس نصیری - حسین نادری مجید فرهمندپور - هایده جواهری رضا ماجدی - علی غلامی	مهدی وارسته ندا فرهختی - علی عرب مینا نظری - زهرا ساسانی
فیزیک	علی‌رضا عبداللہی - محمد باغبان مروارید شاه‌حسینی - بهزاد کاویانی - محمد زبان‌ران	مروارید شاه‌حسینی - سارا دانایی
شیمی	پویا الفتی	امیرعلی برخوردار یون محمدی ایمان زارعی - یاسر راش فاطمه عبداله‌خانی

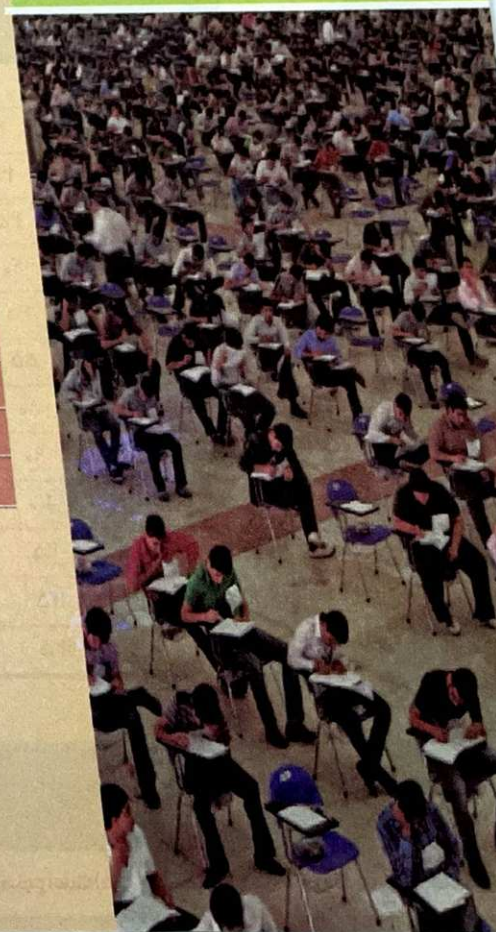


فروشگاه مرکزی گاج: تهران - خیابان انقلاب
نیش بازارچه کتاب

اطلاع‌رسانی و ثبت نام ۰۲۱-۶۴۲۰

نشانی اینترنتی www.gaj.ir

آماده‌سازی آزمون	
مدیریت آزمون: ابوالفضل مزرعتی	
بازبینی و نظارت نهایی: سارا نظری	
برنامه‌ریزی و هماهنگی: سارا نظری	
بازبینی دفترچه: بهاره سلیمی	
ویراستاران فنی: ساناز فلاحی - مریم پارسائیان - سپیده‌سادات شریفی - نوشین تاکی	
صفحه‌آرا: فرهاد عبدی	
طراح شکل: آرزو گلفر	
حروف‌نگاران: ربابه الطافی - مهدی توانایی پور - سحر فاضلی - حدیث فیض‌الهی - مریم قلی‌پور - مهناز کاظمی - فاطمه میرزایی	



$$y = \tan(\pi(ax + \frac{1}{y}))$$

$$\Rightarrow y = \tan(\pi(ax + \frac{\pi}{y})) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|\pi a|} = \frac{1}{|a|}$$

با توجه به شکل دوره تناوب برابر $\frac{4}{\pi}$ است، پس:

$$\frac{1}{|a|} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{4}$$

چون تابع f روی بازه $(-\frac{4}{\pi}, 0)$ صعودی است، پس $a = \frac{\pi}{4}$ است.

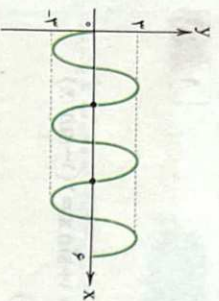
درسنامه

دوره تناوب توابع $y = \cot(ax + b)$ و $y = \tan(ax + b)$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

۲ با توجه به نمودار مشخص است که سه برابر دوره تناوب برابر ۶

است پس دوره تناوب تابع $y = a \sin(b\pi x)$ برابر ۲ است. بنابراین:

$$T = \frac{\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$



از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است پس:

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

با توجه به نمودار در شروع رسم تابع زوئی است. پس تابع باید به صورت $y = -3 \sin(\pi x)$ باشد یعنی a و b هم علامت نیستند یعنی $ab = -3$ است.

درسنامه

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار $|a| + c$ و مینیمم مقدار $-|a| + c$ است.

۲ ۶

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \cos^2 x + \cos^2 x = 1 + (\cos^2 x - \cos^2 x)$$

$$= 1 + (\cos^2 x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = (\cos^2 x - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4}$$

$$= 1 + (\cos^2 x - \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{مینیمم تابع} = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}$$

درسنامه

محدود تابع $\cos x$

برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

ریاضیات

۲ ۱

$$T_f = \frac{\pi}{\pi} = 4$$

$$T_g = \frac{\pi}{|-\pi|} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow T_f = T_g \Rightarrow 4 = 2 \times \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{2}$$

درسنامه

دوره تناوب توابع $y = a \cos(bx + c)$ و $y = a \sin(bx + c)$ از رابطه $T = \frac{\pi}{|b|}$ به دست می آید.

$$f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{4})$$

$$f(0) = 5\sqrt{2} \Rightarrow f(0) = a \sin(\frac{\pi}{4}) = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a \sin \frac{\pi}{4} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10$$

در $x = \frac{\pi}{2}$ برای اولین بار مقدار سینوس برابر صفر شده، پس باید

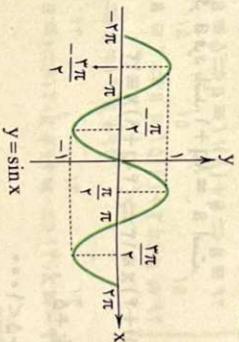
$$bx + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$b(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow b = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 1.5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 11.5$$

درسنامه

نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت زیر است:



بنابراین $y = \sin x$ در مضارب صحیح π برابر با صفر است و در نقاط $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ برابر با ۱ و در نقاط $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ برابر با -۱ است.

۲ ۴

با توجه به شکل $f(0) = -4$ بنابراین:

$$f(0) = -4 \Rightarrow a \cos 0 = -4 \Rightarrow a = -4$$

از طرف دیگر بنا به شکل، دوره تناوب ۴ است، پس:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{4}$$

بنابراین $ab = \pm \pi$ است.

$$\Rightarrow \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \\ \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

درسنامه

جوابهای کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت زیر است:

$$x = 2k\pi \pm \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Delta \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(2 \cos^2 \theta - 1) + (1 + \cos \theta) + 1 = 0 \Rightarrow 1 \cdot \cos^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \cos^2 \theta - \Delta \cos \theta + 6 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \cos \theta (2 \cos \theta - 1) + 2(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta \cos \theta + 2)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \cos \theta + 2 = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{2}{\Delta} \\ 2 \cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{-\pi \leq \theta \leq \pi} \theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

درسنامه

۱. جواب کلی $\cos \theta = \cos \alpha$ به صورت $\theta = 2k\pi \pm \alpha$ است $(k \in \mathbb{Z})$.

$$\cos^2 \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta$$

۴ ۱۱

$$a \text{ فرد است} \Rightarrow \Delta a^2 + 4 = 1 \Rightarrow (\Delta a^2 + 4, 1) = 1 \Rightarrow (\Delta a^2 + 4, 1) = 1$$

اگر a فرد باشد، $a^2 = 8q + 1$ است.

$$(\Delta a^2 + 4)x \equiv 13 \Rightarrow (\Delta(8q + 1) + 4)x \equiv 13 \Rightarrow (4q + 9)x \equiv 13$$

$$\Rightarrow 9x \equiv 13 \Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow x = 8k + 5$$

$$100 \leq x < 1000 \Rightarrow 100 \leq 8k + 5 < 1000$$

$$\Rightarrow 95 \leq 8k < 995 \Rightarrow 12 \leq k \leq 124$$

$$\text{تعداد اعداد سه رقمی} = 124 - 12 + 1 = 113$$

درسنامه

نکته: شرط آن که معادله همبستگی $ax \equiv c$ جواب داشته باشد آن است که:

$$(a, b) | c$$

یادآوری: مربع هر عدد فرد، مضرب ۸ به علاوه ۱ است.

$$a = 2k + 1$$

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 8q + 1$$

$$\begin{aligned} & \text{عدد متوالی} \\ & = 2q \end{aligned}$$

$$\tan \theta + \tan 2\theta + \tan \theta \cdot \tan 2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \tan 2\theta = 1 - \tan \theta \cdot \tan 2\theta$$

به شرط آن که $\tan \theta \tan 2\theta \neq 1$ داریم:

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \cdot \tan 2\theta} = 1 \Rightarrow \tan 2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{[0, \pi]} \begin{cases} k=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \\ k=1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{8} \\ k=2 \Rightarrow \theta = \frac{9\pi}{8} \end{cases}$$

هر سه جواب قابل قبول است.

درسنامه

جوابهای کلی $\tan x = \tan \alpha$ برابر $x = k\pi + \alpha$ است $(k \in \mathbb{Z})$.

۱ ۸

$$\tan x + \frac{1}{\cos x} = 2 \cos x$$

$$\xrightarrow{\times \cos x} \sin x + 1 = 2 \cos^2 x \Rightarrow 1 + \sin x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = 2(1 + \sin x)(1 - \sin x)$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x)(-2 + 2 \sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{2}$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6}$$

در کل جوابها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{2}$ است.

ولی $\frac{3\pi}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند، پس تعداد

جوابها ۲ تا است، یعنی $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$.

درسنامه

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \text{ برابر } \sin x = \sin \alpha$$

است $(k \in \mathbb{Z})$.

۲ ۱ طرفین تساوی را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم.

$$\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$$

پس:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{6} \sin \theta = \cos \frac{\pi}{4}$$

بنابراین معادله به صورت $3x \equiv 4 \pmod{5}$ می شود.

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 3x \equiv 9 \pmod{5} \xrightarrow{+3} x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3 \\ x < 100 &\Rightarrow 5k + 3 < 100 \Rightarrow 5k < 97 \Rightarrow k < 19.4 \\ k &= 19 \Rightarrow x = 5(19) + 3 = 98 \end{aligned}$$

درستنامه

نکته: اگر $m \geq n$ باشد، همواره $n | m!$ ، یعنی $m! \equiv 0$.

۱۶/۲ چون $(12, m) | 10$ پس $(12, m) = 1$ یا $(12, m) = 2$ ، یعنی m نباید مضرب ۳ یا ۴ باشد.

۳ مضرب ۳: $n(A) = [\frac{100}{3}] = 33$

۴ مضرب ۴: $n(B) = [\frac{100}{4}] = 25$

۱۲ مضرب ۱۲: $n(A \cap B) = [\frac{100}{12}] = 8$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 25 - 8 = 50$

$100 - 50 = 50$ تعداد حالات جواب

درستنامه

نکات:

۱) تعداد اعضای از مجموعه $\{m+1, m+2, \dots, n\}$ که مضرب k باشند برابر $[\frac{n}{k}] - [\frac{m}{k}]$ است.

۲) معادله سیاله $ax + by = c$ زمانی دارای جواب است که $(a, b) | c$.

یادآوری: اگر تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B به ترتیب $n(A)$ و $n(B)$ باشد، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$8 | a+3 \Rightarrow a+3 = 8x \Rightarrow a = 8x - 3$

$11 | b+4 \Rightarrow b+4 = 11y \Rightarrow b = 11y - 4$

$a+b = 100 \Rightarrow 8x - 3 + 11y - 4 = 100 \Rightarrow 8x + 11y = 107$

$11y \equiv 107 \pmod{8} \Rightarrow 3y \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow y = 8k + 1$

$8x + 11(8k + 1) = 107 \Rightarrow 8x = -88k + 96 \xrightarrow{+8} x = -11k + 12$

$y > 0 \Rightarrow 8k + 1 > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{8} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$

$x > 0 \Rightarrow -11k + 12 > 0 \Rightarrow k < \frac{12}{11} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$

یعنی دو جفت عدد برای a و b وجود دارد.

۱۸/۲ اگر تعداد پاسخ‌های درست ۲ امتیازی x و تعداد پاسخ‌های درست ۳ امتیازی y باشد، داریم:

$2x + 3y = 66$

$3y \equiv 66 \pmod{2} \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow y = 2k$

$2x + 6k = 66 \Rightarrow x = -3k + 33$

$y \geq 0 \Rightarrow 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$x \geq 0 \Rightarrow -3k + 33 \geq 0 \Rightarrow k \leq 11 \Rightarrow k \in \{0, 1, \dots, 11\}$

$x + y \leq 30 \Rightarrow -k + 33 \leq 30 \Rightarrow k \geq 3$

بنابراین ۹ حالت وجود دارد.

۱۲/۴ با فرض $d \neq 13$ و $d \neq 1$ ، باید $(7a+2, 5a-1) = d$ باشد داریم:

$$\left. \begin{aligned} d | 7a+2 &\xrightarrow{\times 5} d | 35a+10 \\ d | 5a-1 &\xrightarrow{\times (-7)} d | -35a+7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d | 17 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 17$$

معادله $(7a+2)x \equiv 5a-1 \pmod{13}$ زمانی فاقد جواب است که $d = 17$ پس $(7a+2, 5a-1) = 13$

$17 | 5a-1 \Rightarrow 5a-1 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 5a \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 5a \equiv 3 \pmod{17}$

$\Rightarrow a \equiv 7 \pmod{17} \Rightarrow a = 17k + 7$

درستنامه

نکات:

۱) $a | b \Rightarrow b = aq$

۲) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = mq + b$

۱۲/۲ اگر عدد موردنظر برابر a باشد، داریم:

$3a-1 \equiv 5 \pmod{12} \Rightarrow 3a \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow a = 4k + 2$

$10 \leq a < 100 \Rightarrow 10 \leq 4k + 2 < 100 \Rightarrow 8 \leq 4k < 98 \Rightarrow 2 \leq k < 24.5$

$\Rightarrow k \in \{2, 3, 4, \dots, 24\}$

یعنی ۲۳ عدد دو رقمی وجود دارد.

درستنامه

نکته: اگر در معادله همبستگی $ax \equiv ab \pmod{m}$ داشته باشیم $(a, m) = d$ در این صورت داریم:

$$\frac{m}{d} | x \equiv b$$

۱۴/۴

$$\left. \begin{aligned} a \equiv 5 \pmod{8} &\Rightarrow a \equiv 11(8) + 5 \pmod{8} \Rightarrow a \equiv 93 \pmod{8} \\ a \equiv 3 \pmod{15} &\Rightarrow a \equiv 15(6) + 3 \pmod{15} \Rightarrow a \equiv 93 \pmod{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv 93 \pmod{120} \Rightarrow a \equiv 93 \pmod{120}$$

$\Rightarrow a = 120k + 93$

$a \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 120k + 93 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 120k \equiv -93 \pmod{13} \Rightarrow 3k \equiv 24 \pmod{13} \xrightarrow{+3} k \equiv 8 \pmod{13}$

بنابراین $k = 8$ معادله دارای جواب است.

$a = 120k + 93 \xrightarrow{k=8} a = 120(8) + 93 = 1053$

a مجموع ارقام $= 1+0+5+3=9$

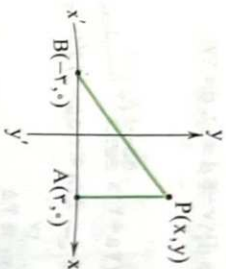
درستنامه

یادآوری: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$ باشد، آنگاه $a \equiv b \pmod{[m, n]}$.

۱۵/۲

$$\left\{ \begin{aligned} 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 100! &\equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0 \pmod{5} \\ &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned} \right. \Rightarrow 579 \equiv 4 \pmod{5}$$

۳ با توجه به شکل فرض کنید $P(x, y)$ نقطه متحرکی باشد که مکان هندسی مورد نظر است و $A(3, 0)$ و $B(-3, 0)$ نقاط ثابت داده شده باشند.



$$|PB| - |PA| = 4$$

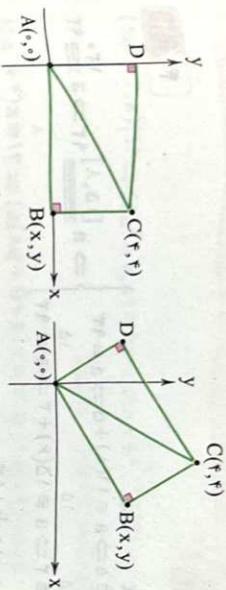
بنابراین:

$$\begin{aligned} & \text{فرض می کنیم } |PB| > |PA| \quad (|PB| > |PA|) \\ & \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 4 \\ & \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} = 4 + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9} \\ & \text{طرفین تساوی را به توان دو می رسانیم:} \\ & x^2 + y^2 + 6x + 9 = 16 + x^2 + y^2 - 6x + 9 + 8\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9} \\ & \Rightarrow 12x - 16 = 8\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9} \\ & \Rightarrow 3x - 4 = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{دو باره طرفین تساوی را به توان دو می رسانیم:} \\ & 9x^2 + 16 - 24x = 4x^2 + 4y^2 - 24x + 36 \\ & \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 = 20 \end{aligned}$$

دورسنامه

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشند، آنگاه طول AB برابر است با:
 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



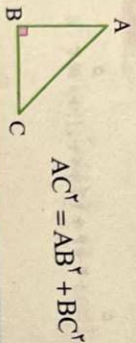
۲ ۳۲

با توجه به شکل با داشتن مختصات دو سر یک قطر مستطیل، مکان هندسی دو سر قطر دیگر را می توانیم به دست آوریم.

$$\begin{aligned} & AB^2 + BC^2 = AC^2 \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 + (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 + 16 \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 32 \\ & \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \end{aligned}$$

دورسنامه

در مثلث قائم الزاویه ABC ، رابطه فیثاغورس به صورت زیر است:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

دورسنامه

نکته: برای حل معادله سیاله $ax + by = c$ در صورت این که معادله جواب داشته باشد می توانیم از معادله همبستگی $ax \equiv c$ یا $by \equiv c$ استفاده کرد.

۳ ۱۹

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 13x + 13y \equiv 5 \\ 12x + 12y \equiv -1 \\ 12x \equiv 0 \\ 12x \equiv 0 \\ \vdots \\ 12x \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 13x + 12x + 12x + \dots + 6x \equiv 4 \\ & 13x \Rightarrow 17x \equiv 1 \\ & 17x \equiv 1 \Rightarrow 17x \equiv 17 \Rightarrow x \equiv 1 \\ & 17x \equiv 1 \Rightarrow 17x \equiv 17 \Rightarrow x \equiv 1 \\ & 17x \equiv 1 \Rightarrow 17x \equiv 17 \Rightarrow x \equiv 1 \end{aligned}$$

دورسنامه

نکات:
 ۱ اگر $m \geq n$ باشد، آنگاه $m \equiv n$.
 ۲ اگر P عددی اول باشد، آنگاه $(P-1) \equiv -1$.

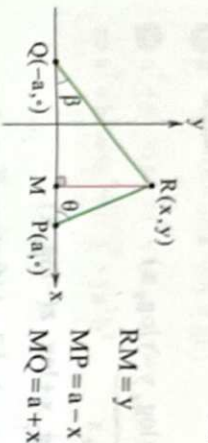
۴ ۲۰

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x^2 + 4x \equiv 14 \Rightarrow x^2 + 4x \equiv 14 \Rightarrow x^2 - x + 5x \equiv 14 \\ & \Rightarrow (x-1)x(x+1) + 5x \equiv 14 \\ & \Rightarrow 5x \equiv 14 \Rightarrow 5x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{5} \\ & 1 \leq x < 10 \Rightarrow 1 \leq 6k + 4 < 10 \Rightarrow 6 \leq 6k < 9 \Rightarrow 1 \leq k < 2 \\ & \Rightarrow k \in \{1, 2, \dots, 10\} \Rightarrow n(A) = 10 \\ & n(S) = 90 \\ & P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

دورسنامه

حاصل آوری: حاصل ضرب ۳ عدد متوالی همواره مضرب ۶ است.

با توجه به شکل فرض کنید $R(x, y)$ نقطه متغیر در یک طرف پارابول $PQ, R\hat{P}Q = \theta, R\hat{Q}P = \beta$ باشد پس $\theta - \beta$ است و فرض کنید $RM \perp PQ$.



بنابراین:

$$\tan \theta = \frac{RM}{MP} = \frac{y}{a-x}$$

$$\tan \beta = \frac{RM}{MQ} = \frac{y}{a+x}$$

و چون $\theta - \beta = \alpha$ پس داریم:

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta}$$

$$\frac{y}{a-x} - \frac{y}{a+x} = \frac{y(a+x) - y(a-x)}{1 + \frac{y}{a-x} \times \frac{y}{a+x}}$$

$$\frac{y(a+x) - y(a-x)}{(a-x)(a+x) + y^2} = \frac{y(a+x) - y(a-x)}{a^2 - x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{xy}{a^2 - x^2 + y^2} = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - a^2 = -xy \cot \alpha$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + xy \cot \alpha - a^2 = 0$$

روش اول: ۱ / ۲۴

$$f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \sin \theta (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) + \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= \sin^4 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

پس f تابع ثابت ۱ است و در نتیجه:

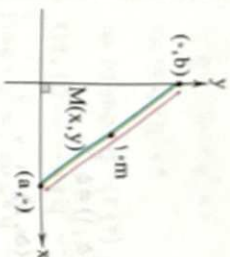
روش دوم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

درست است

$$a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2$$



با توجه به شکل:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \Rightarrow a = 2x, b = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow (2x)^2 + (2y)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

درست است

اگر مختصات دو سر پارابول AB به صورت $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد، آن گاه مختصات وسط پارابول AB به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

روش اول:

$$A(a+b, b-a), B(a-b, a+b)$$

$$PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$$

$$\Rightarrow [x - (a+b)]^2 + [y - (b-a)]^2 = [x - (a-b)]^2 + [y - (a+b)]^2$$

$$\Rightarrow [(x-a)-b]^2 + [(y-b)+a]^2 = [(x-a)+b]^2 + [(y-b)-a]^2$$

$$\Rightarrow [(x-a)+b]^2 - [(x-a)-b]^2 = [(y-b)+a]^2 - [(y-b)-a]^2$$

$$\Rightarrow (x-a+b)^2 - (x-a-b)^2 = (y-b+a)^2 - (y-b-a)^2$$

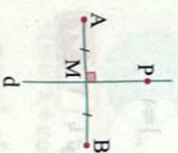
$$= (x-a+b)^2 + b^2 + 2b(x-a-b) - (x-a-b)^2 - b^2 - 2b(x-a-b)$$

$$= 4b(x-a-b) = 4b(x-a-b) = 4b(x-a-b)$$

$$\Rightarrow 4b(x-a-b) = 4b(x-a-b) \Rightarrow 4b(x-a-b) = 4b(x-a-b)$$

$$\Rightarrow 4bx = 4ay \Rightarrow bx = ay$$

روش دوم: P روی عمودمنصف AB قرار دارد:



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (a, b)$$

$$m_{AB} = \frac{b-a-a-b}{a+b-a+b} = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{b}{a}$$

کان هندسی نقاط P همان عمودمنصف AB یعنی معادله خط d است:

$$d: y-b = \frac{b}{a}(x-a)$$

$$\Rightarrow y-b = \frac{b}{a}x - b \Rightarrow y = \frac{b}{a}x \Rightarrow ay = bx$$

۴ ۲۹

$$A = \begin{vmatrix} C(5,0) & C(5,3) & 1 \\ C(5,1) & C(5,4) & 1 \\ C(5,2) & C(5,5) & 1 \end{vmatrix}$$

$$C(5,0)=1, C(5,3)=\frac{5!}{3! \times 2!}=10, C(5,1)=5$$

$$C(5,4)=5, C(5,2)=\frac{5!}{2! \times 3!}=10, C(5,5)=1$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(5-1) - 10(5-10) + 1(5-50) = 9$$

بنابراین:

۳ ۳۰

$$|A_1 + A_2 + A_3 + A_4| = \begin{vmatrix} 1+2+3+4 & 5 \times 4 & 4 \times 4 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2 & 15 \times 4 & 8 \times 4 \\ 1^3+2^3+3^3+4^3 & 25 \times 4 & 12 \times 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 20 & 16 \\ 30 & 60 & 32 \\ 100 & 100 & 48 \end{vmatrix} = 10 \times 20 \times 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 200 \times 16(1(9-10) - 1(9-20) + 1(15-30))$$

$$= 3200(-1+11-15) = -16000$$

$$a_{k+1} = a_k^2 + a_k; (k \geq 1) \Rightarrow a_{k+1} = a_k(a_k + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k(a_k + 1)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} (*)$$

$$x_n = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + 1}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} x_n = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_{100} = 2 - \frac{1}{a_{101}}$$

$$a_{101} = a_{100}(a_{100} + 1) > 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{16} > 1$$

زیرا:

یعنی از جمله a_3 به بعد a_n بزرگ‌تر از ۱ است.

$$a_{101} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_{101}} < 1 \Rightarrow x_{100} = 2 - \frac{1}{a_{101}} \Rightarrow [x_{100}] = 1$$

۲ ۳۲

با توجه به فرض مسئله دو دنباله به صورت زیر خواهند بود.

$$a_k = kd, b_k = d^r q^{k-1}; k \in \mathbb{N}$$

بنابراین:

$$\frac{a_1^r + a_2^r + a_3^r}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{d^r(1^r + 2^r + 3^r)}{d^r(1 + q + q^2)} = \frac{14}{1 + q + q^2}$$

$$\frac{14}{1 + q + q^2} = m \in \mathbb{Z}^+$$

قرار می‌دهیم:

که m عددی صحیح مثبت است. پس داریم:

$$1 + q + q^2 = \frac{1}{n} \text{ یا } \frac{2}{n} \text{ یا } \frac{3}{n} \text{ یا } \frac{14}{n} \quad (1)$$

۳ ۲۷ دترمینان را حول سطر اول می‌نویسیم:

$$1(\underbrace{-\log_y z \times \log_z y}_{1}) - \log_x y (\underbrace{1 \log_y x - \log_y z \times \log_z x}_{\log_y x})$$

$$+ \log_x z (\underbrace{\log_y x \times \log_z y - 2 \log_z x}_{\log_z x})$$

$$= 1 - \log_x y \times 2 \log_y x + \log_x z (-\log_z x)$$

$$= 1 - 2(\log_x y \times \log_y x) - \log_x z \times \log_z x = 1 - 2 - 1 = -2$$

درسنامه

$$\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

۳ ۲۸ روش اول:

$$\sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$A = \begin{vmatrix} \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) & -\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) & \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) \\ \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) & \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} & -\sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{3\pi}{4} \\ \cos \frac{3\pi}{4} & \sin \frac{3\pi}{4} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} [0 - (-1)(0-1) + (-1)(1-0)]^2$$

$$= \frac{1}{8} (0-1-1)^2 = \frac{1}{8} (-2)^2 = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

دترمینان را حول سطر اول می‌نویسیم:

$$\text{حاصل عبارت} = (-\cos x (-\cos^2 x) - \sin x (\sin^2 x))^2$$

$$= (\cos^3 x - \sin^3 x)^2 = \sin^6 x + \cos^6 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \sin^6 x + \cos^6 x - \frac{2}{8} (\sin^2 x)^2 = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 - \frac{1}{4} (-1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

دورستانه

$$1) a^r + b^r = (a+b)(a^r + b^r - ab)$$

$$2) a^r - b^r = (a-b)(a^r + b^r + ab)$$

$$3) a^r + b^r = (a+b)^r - rab$$

$$\Rightarrow a^r + b^r = (a^r + b^r)^r - ra^r b^r$$

۲ / ۳۵

$$\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{r} \Rightarrow \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} = \frac{r}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{r}{r}(1 + \sin \theta) \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{(\sin \theta + 1)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} = \frac{r}{r} \Rightarrow \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} = \frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{r}{r} \Rightarrow \cos \theta = \frac{r}{r}(1 - \sin \theta) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \sin \theta = \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \sin \theta \Rightarrow \left(\frac{r}{r} + \frac{r}{r}\right) \sin \theta = \frac{r}{r} - \frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{6} \sin \theta = \frac{5}{6} \Rightarrow \sin \theta = \frac{5}{13}$$

دورستانه

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

۴ / ۳۶ فرض کنید A جمله اول و R قدرنسبت در دنباله هندسی باشند.
آن‌گاه $a = AR^{p-1}$ بنابرین داریم:

$$\log a = \log(AR^{p-1}) = \log A + (p-1)\log R \quad (1)$$

$$\log b = \log(AR^{q-1}) = \log A + (q-1)\log R \quad (2)$$

$$\log c = \log(AR^{r-1}) = \log A + (r-1)\log R \quad (3)$$

بنابرین:

$$\begin{aligned} & (q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c \\ &= (q-r)(\log A + (p-1)\log R) + (r-p)(\log A + (q-1)\log R) \\ &+ (p-q)(\log A + (r-1)\log R) \\ &= (\log A)(q-r+r-p+p-q) + (\log R)((p-1)(q-r) \\ &+ (q-1)(r-p) + (r-1)(p-q)) \\ &= (\log A)(0) + (\log R)(0) = 0 \end{aligned}$$

دورستانه

اگر a جمله اول و r قدرنسبت در یک دنباله هندسی باشد آن‌گاه جمله
عمومی دنباله به صورت $a_n = ar^{n-1}$ است.

۳ / ۳۷ چون $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ یک دنباله حسابی است، بنابرین:
 $\theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2 = \theta_4 - \theta_3 = \dots = \theta_n - \theta_{n-1} = d$

بنابرین:

$$\begin{aligned} \sin d \left(\frac{1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \right) &= \frac{\sin d}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \\ &= \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \\ &= \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} - \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_1}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} = \tan \theta_2 - \tan \theta_1 \end{aligned}$$

از طرفی:

$$0 < q < 1 \Rightarrow 0 < q^r < 1$$

$$\Rightarrow 0 < q + q^r < 2$$

$$\Rightarrow 1 < 1 + q + q^r < 3 \quad (r)$$

بنابرین: q گویا نیست! $(r), (1) \Rightarrow 1 + q + q^r = 2 \Rightarrow q + q^r = 1 \Rightarrow$

$$1 + q + q^r = \frac{r}{r} \Rightarrow q + q^r - \frac{r}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$1 + q + q^r = \frac{r}{r} \Rightarrow q + q^r - \frac{r}{r} = 0 \Rightarrow \Delta = 4 \rightarrow q = \frac{-1 \pm 2}{2} \xrightarrow{0 < q < 1} q = \frac{1}{2}$$

$$1 + q + q^r = \frac{r}{r} \Rightarrow q + q^r - \frac{r}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$1 + q + q^r = \frac{r}{r} \Rightarrow q + q^r - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$1 + q + q^r = \frac{14}{5} \Rightarrow q + q^r - \frac{9}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$1 + q + q^r = \frac{14}{6} \Rightarrow q + q^r - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow$$

دورستانه

$$1) \text{ جمله عمومی دنباله حسابی: } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{اگر } a_1 = d \Rightarrow a_n = nd$$

$$2) \text{ جمله عمومی دنباله هندسی: } a_n = a_1 q^{n-1}$$

۳ / ۳۳

فرض می‌کنیم تعداد مردم شهر ۱۰۰ نفر باشند. بنابرین داریم:

مجموعه افرادی که روزنامه A را می‌خوانند

مجموعه افرادی که روزنامه B را می‌خوانند

پس:

$$n(A) = 25, \quad n(B) = 20, \quad n(A \cap B) = 8$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 8 = 17$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 20 - 8 = 12$$

درصد افرادی که تبلیغات می‌خوانند

$$= \left(\begin{matrix} 30 \text{ درصد} \\ \text{از } 17 \text{ نفر} \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 40 \text{ درصد} \\ \text{از } 12 \text{ نفر} \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 50 \text{ درصد} \\ \text{از } 8 \text{ نفر} \end{matrix} \right)$$

$$= \frac{51}{100} + \frac{48}{100} + \frac{40}{100} = \frac{139}{100} = 139\%$$

دورستانه



$$A - B = A - (A \cap B)$$

$$2(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 2[(\sin^2 x)^r + (\cos^2 x)^r] - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x)]$$

$$- 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x) - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= -(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= -[(\sin^2 x + \cos^2 x)^r - 2\sin^2 x \cos^2 x] - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= -1 + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = -1$$

۲ / ۳۲

$$\begin{aligned}
 & \sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{18}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{18}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{18}\right) \\
 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= (\sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{18}\right)) + (\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)) \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

دوستانه

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

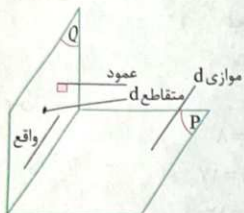
$$\begin{aligned}
 \text{حداقل} &= 3 \times 4 = 12 \\
 \text{حداکثر} &= 64 - 12 = 51
 \end{aligned}$$

دوستانه

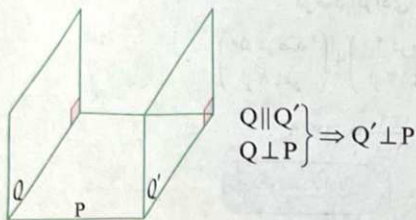
برای پیدا کردن حداقل و حداکثر تعداد برداشت باید به صورت زیر عمل کنیم.

ارتفاع مکعب $\times$ تعداد مربع خالی در شکل = حداقل
تعداد مربع های موجود - تعداد کل = حداکثر

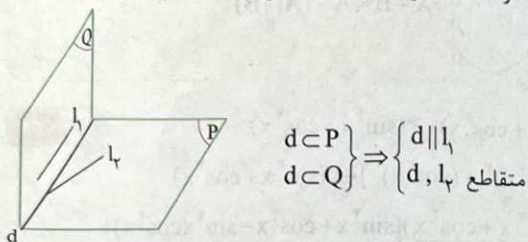
گزینه (۱) نادرست است، زیرا می تواند واقع در صفحه Q باشد و یا با آن متقاطع باشد:



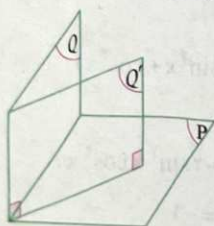
گزینه (۲) درست است:



گزینه (۳) نادرست است، زیرا می تواند متقاطع و غیر عمود و یا موازی باشد:



گزینه (۴) نادرست است، زیرا می تواند متقاطع نیز باشد:



به همین ترتیب جملات بعدی به صورت زیر به دست می آید.

$$\tan \theta_1 - \tan \theta_1, \tan \theta_2 - \tan \theta_2, \dots, \tan \theta_n - \tan \theta_{n-1}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 & \sin d \left(\frac{1}{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2} + \frac{1}{\cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3} + \frac{1}{\cos \theta_3 \cdot \cos \theta_4} + \dots \right. \\
 & \left. \dots + \frac{1}{\cos \theta_{n-1} \cdot \cos \theta_n} \right) \\
 &= \tan \theta_1 - \tan \theta_1 + \tan \theta_2 - \tan \theta_2 + \tan \theta_3 - \tan \theta_3 \\
 &+ \dots + \tan \theta_n - \tan \theta_{n-1} = \tan \theta_n - \tan \theta_1
 \end{aligned}$$

دوستانه

* فرمول بسط سینوس به صورت زیر است:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

* اگر a, b, c تشکیل دنیاله حسابی دهند آن گاه قدرنسبت دنیاله (d) از فرمول d = b - a یا d = c - b به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} + \frac{\sin^9 x}{\cos^{27} x} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin x \times \cos x}{\cos^3 x \times \cos x} + \frac{2 \sin^3 x \times \cos^3 x}{\cos^9 x \times \cos^3 x} + \frac{2 \sin^9 x \times \cos^9 x}{\cos^{27} x \times \cos^9 x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \times \cos x} + \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x \times \cos^3 x} + \frac{\sin^{18} x}{\cos^{18} x \times \cos^9 x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(3x - x)}{\cos^3 x \times \cos x} + \frac{\sin(9x - 3x)}{\cos^9 x \times \cos^3 x} + \frac{\sin(27x - 9x)}{\cos^{27} x \times \cos^9 x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\tan^2 x - \tan x + \tan^6 x - \tan^3 x + \tan^{18} x - \tan^9 x) \\
 &= \frac{1}{2} (\tan^{18} x - \tan x)
 \end{aligned}$$

دوستانه

$$\begin{aligned}
 \tan A - \tan B &= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} \\
 &= \frac{\sin A \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos A}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin(A - B)}{\cos A \cdot \cos B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\cos 29^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 25^\circ} \\
 &= \frac{1}{\cos(27^\circ + 2^\circ)} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin(27^\circ - 2^\circ)} \\
 &= \frac{1}{\sin 2^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}(-\cos 2^\circ)} = \frac{\sqrt{3} \cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{\sqrt{3}(\sin 2^\circ)(\cos 2^\circ)} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2^\circ - \frac{1}{2} \sin 2^\circ}{\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \sin 4^\circ} = \frac{\sin 6^\circ \cos 2^\circ - \cos 6^\circ \sin 2^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 4^\circ} \\
 &= \frac{\sin(6^\circ - 2^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 4^\circ} = \frac{\sin 4^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 4^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

دوستانه

$$\textcircled{1} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\textcircled{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

درسنامه

اگر دو خط d_1 و d_2 نسبت به هم متناظر باشند فقط یک خط وجود دارد که بر هر دو خط d_1 و d_2 عمود است و آن را عمود مشترک دو خط متناظر می‌نامیم.

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{12}$$

۴/۴۵

$$\frac{V_{هرم}}{V_{مکعب}} = \frac{\frac{1}{3} S_{AMN} \times AP}{a^3} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{a^2}{12} \times \frac{a}{2}}{a^3} = \frac{1}{144}$$

درسنامه

حجم هر مخروط (هرم) همواره برابر $\frac{1}{3}$ حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است و حجم هر مکعب برابر a^3 است.

۱/۴۶

$$P(A') + P(B') = 1 - P(A) + 1 - P(B) = \frac{5}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{1}{3}$$

از آن جایی که احتمال رخداد همزمان دو پیشامد A و B غیرممکن است، پس A و B ناسازگارند و $P(A \cap B) = 0$ ، در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3}$$

درسنامه

پیشامدهای ناسازگار

۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۲ دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه احتمال رخ داد همزمان آن‌ها صفر باشد. یعنی:

$$P(A \cap B) = 0$$

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A - B) = P(A)$$

۳/۴۷ در هر بار پرتاب این تاس احتمال آمدن عدد ۱ برابر $\frac{1}{6}$ ، احتمال

آمدن ۲ برابر $\frac{1}{3}$ و احتمال آمدن عدد ۳ برابر $\frac{1}{6}$ است.

حالا می‌خواهیم حالت‌هایی که مدنظر مسأله است را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} \text{تاس دوم} & \text{تاس اول} \\ (1, 2) \Rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \\ \text{تاس دوم} & \text{تاس اول} \\ (1, 3) \Rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2+3+6}{36} = \frac{11}{36}$$

$$\begin{cases} \text{تاس دوم} & \text{تاس اول} \\ (2, 3) \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

درسنامه

تذکره: در هر آزمایش تصادفی جمع احتمال رخداد تمام پیشامدها برابر است با یک. این نکته هم برای پیشامدهای هم‌شانس و هم برای پیشامدهای غیرهم‌شانس صادق است.

درسنامه

نکات:

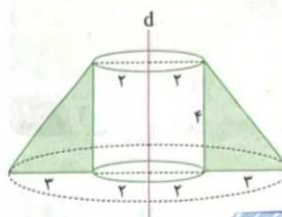
۱ اگر دو صفحه برهم عمود باشند، هر خط موازی با یکی از آن‌ها با دیگری می‌تواند موازی یا متقاطع یا واقع باشد.

۲ دو صفحه عمود بر یک صفحه الزاماً باهم موازی نیستند. اما هر صفحه موازی با یکی از دو صفحه عمود بر دیگری نیز عمود است.

۳ ابتدا باید ضلع BC را با کمک فیثاغورس به دست آوریم.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 25 = 16 + BC^2 \Rightarrow BC = 3$$

حال اگر مثلث را دوران دهیم یک مخروط ناقص به دست می‌آید که از حجم آن یک استوانه به ارتفاع ۴ و شعاع ۲ واحد خالی شده است.



$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{حاصل}}$$

$$V_{\text{حاصل}} = \frac{1}{3} \pi (2^2 + 2^2 + 16) \times 4$$

$$= \frac{1}{3} \pi (39) \times 4 - 16\pi = 36\pi$$

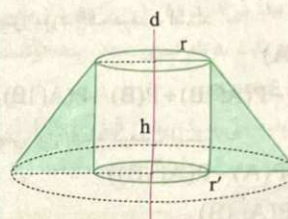
درسنامه

نکات:

۱ حجم یک مخروط ناقص برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

۲ حجم یک مخروط ناقص برابر است با:



$$V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + r'^2 + rr') h$$

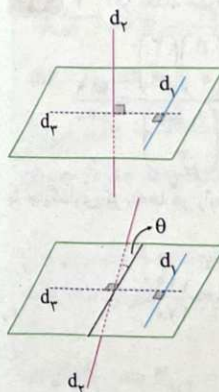
۳ حجم یک استوانه برابر است با:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 \times h$$

$\downarrow$ مساحت قاعده $\downarrow$ ارتفاع

۳/۴۴ حداکثر یک صفحه وجود دارد که شامل d_1 و عمود بر d_2 است.

زیرا اگر خط عمود بر هر دو خط متناظر d_1 و d_2 را در نظر بگیریم (عمود مشترک) و آن را d_3 بنامیم، صفحه‌گذرنده از d_1 و d_3 صفحه مورد نظر است که ممکن است بر d_2 عمود نباشد.



درسنامه

نکات:

۱ تعداد حالات انتخاب k مهره از بین n مهره برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

۲ در علم احتمال برخی آزمایش‌ها در حالتی هستند که برخی از آن‌ها عبارتند از پرتاب پنهانی در یک مسابقه فوتبال یا بسکتبال و ... پرتاب سکه، تولد نوزاد و ... در این گونه آزمایش‌ها اگر از n بار این آزمایش بخواهیم k بار موفق شود احتمال برابر است با:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

۱/۵۲

$$\text{کل حالات ممکن} = \binom{6}{1} \binom{4}{1} = 24$$

حالات مطلوب: $\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{11}{24}$$

$$\text{الف) } P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) - (1 - P(B)) \leq P(A \cap B) \Rightarrow P(A) - P(B') \leq P(A \cap B)$$

پس مورد الف درست است.

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

پس این رابطه درست است.

$$\text{ج) } P(A - B)' = 1 - P(A - B) = 1 - (P(A) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) + P(A \cap B) = P(A') + P(A \cap B)$$

پس این رابطه نادرست است.

درسنامه

چند رابطه از قوانین احتمال

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$2) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$3) P(A) = 1 - P(A'), P(A') = 1 - P(A)$$

۲/۵۲ اگر تعداد مهره سیاه n باشد:

$$\text{حداکثر ۲ مهره سفید: } \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n+3}{3}} + \frac{\binom{n}{2} \binom{3}{1}}{\binom{n+3}{3}} + \frac{\binom{n}{1} \binom{3}{2}}{\binom{n+3}{3}} = \frac{119}{120}$$

با جایگذاری گزینه‌ها در رابطه بالا $n = 7$ صدق می‌کند.

$$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{7}{2} \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{7}{1} \binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{35 + 63 + 21}{120} = \frac{119}{120}$$

۲/۲۸

عدد روبرو شده	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{5}$	$\frac{x}{6}$

$$\text{مجموع احتمالات} = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 1$$

$$\frac{60x + 30x + 20x + 15x + 12x + 10x}{60} = 1$$

$$\Rightarrow 147x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{147} = \frac{20}{49}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال این‌که عدد روبرو شده اول باشد} = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5}$$

$$= \frac{15x + 10x + 6x}{30} = \frac{31x}{30} = \frac{31}{30} \times \frac{20}{49} = \frac{62}{147}$$

۱/۲۹

$$\begin{cases} P(A) = 2P(B) \\ P(B) = \frac{1}{2}P(C) \\ P(C) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(B) = \frac{x}{2} \\ P(A) = \frac{3x}{2} \end{cases}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3x}{2} + \frac{x}{2} + x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3x + x + 2x}{2} = 1 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال برنده نشدن C} = 1 - P(C) = \frac{2}{3}$$

۴/۵۰

$$7 \text{ و } 5: |A| = \left[\frac{999}{35} \right] - \left[\frac{99}{35} \right] = 28 - 2 = 26$$

$$4 \text{ اعداد مضرب } B \Rightarrow 140 = |A \cap B| = \left[\frac{999}{140} \right] - \left[\frac{99}{140} \right]$$

$$= 7 - 0 = 7$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 26 - 7 = 19$$

احتمال این‌که عدد انتخاب شده بر ۵ و ۷ بخش پذیر باشد ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد:

$$\frac{19}{900}$$

درسنامه

نکات:

۱ تعداد مضارب عدد k در بین اعداد ۱ تا n از رابطه $\left[\frac{n}{k} \right]$ به دست می‌آید.

تعداد مضارب عدد k از $(n+1)$ تا m برابر است با:

$$\left[\frac{m}{k} \right] - \left[\frac{n}{k} \right]$$

۲ احتمال این‌که در یک آزمایش پیشامد A رخ دهد ولی B رخ ندهد برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۳/۵۱

باید از ۶ پرتاب اول ۳ تا گل شده باشد و پنهانی هفتم نیز گل شود:

از پرتاب اول تا ششم پرتاب هفتم باید سه پنهانی گل شود

$$\frac{\binom{6}{3}}{2^6} \times \frac{1}{2} = \frac{20}{2^7} = \frac{2^2 \times 5}{2^7} = \frac{5}{32}$$

مرحله ۳: از لحظه باز کردن چتر تا لحظه‌ای که تندی چتر باز، ثابت می‌شود (به تندی حدی ثانویه می‌رسد).

با باز کردن چتر، نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز ناگهان افزایش می‌یابد، بنابراین $f_D > mg$ می‌شود و در نتیجه نیروی خالص و شتاب در خلاف جهت حرکت به سمت بالا هستند، بنابراین تندی حرکت چتر باز کاهش می‌یابد.

توجه: با کاهش تندی حرکت چتر باز، اندازه نیروی مقاومت هوا کاهش یافته، در نتیجه اندازه نیروی خالص و شتاب چتر باز، کاهش یافته تا این‌که نیروی خالص وارد بر چتر باز، صفر شده و تندی حرکت چتر باز ثابت می‌شود و به این تندی، تندی حدی می‌گویند.

$$f_D > mg \Rightarrow F_{\text{net}} = f_D - mg \xrightarrow{\text{کاهش } f_D}$$

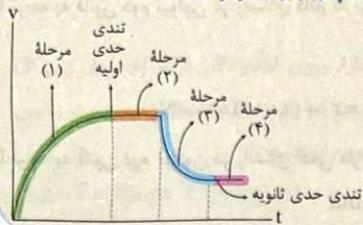
$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{\text{کاهش } F_{\text{net}}} a: \text{کاهش}$$

مرحله ۴: از لحظه‌ای که تندی چتر باز به تندی حدی می‌رسد تا لحظه‌ای که چتر باز به سطح زمین می‌رسد، چتر باز با تندی ثابت (تندی حدی) حرکت می‌کند:

$$f_D = mg \Rightarrow F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v: \text{ثابت}$$

توجه: تندی حدی در حالتی که چتر باز است (تندی حدی ثانویه) کمتر از تندی حدی قبل از باز شدن چتر (تندی حدی اولیه) است.

• نمودار سرعت تندی حرکت چتر باز بر حسب زمان



۵۷/۳ با توجه به رابطه نیروی گرانشی ($W = \frac{GM_em}{r^2}$) داریم:

$$\frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{R_e + 1/5 R_e}{R_e + 2 R_e}\right)^2 = \left(\frac{2/5}{4}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

دقت کنید: منظور از r فاصله جسم تا مرکز زمین است.

دوستانه

وزن جسم در اطراف کره زمین

اگر جسمی به جرم m در فاصله r از مرکز زمین به جرم M_e قرار داشته باشد، نیروی وزن جسم که در واقع همان نیروی گرانش بین جسم و زمین است، برابر است با:

$$W = \frac{GM_em}{r^2}$$

توجه: اگر جسم در فاصله h از سطح زمین قرار داشته باشد، بنابراین فاصله آن از مرکز زمین برابر با $r = R_e + h$ است.

نکات:

۱. ثابت گرانشی عمومی نام دارد و مقدار آن در SI برابر با $6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}$ است.

۲. از قبل می‌دانیم که وزن اجسام در سطح زمین از رابطه $W = mg$ محاسبه می‌شود، بنابراین شتاب گرانشی (g) در سطح زمین برابر است با:

$$\begin{cases} W = \frac{GM_em}{r^2} \Rightarrow mg = \frac{GM_em}{r^2} \Rightarrow g = \frac{GM_e}{r^2} \\ W = mg \end{cases}$$

۵۵/۳ اولاً فضای نمونه‌ای در پرتاب ۶ سکه برابر است با: $2^6 = 64$

دوماً: در این آزمایش تعداد دفعاتی که رو بیاید با تعداد دفعاتی که پشت بیاید برابر است با: $\binom{6}{3} = 20$

پس در سایر حالت‌ها یا تعداد دفعات رخ دادن رو بیشتر بوده یا تعداد دفعات رخ دادن پشت، یعنی نصف حالت‌ها در سکه‌ها (رو) بیشتر رخ داده است و در نصف دیگر برعکس.

$$64 - 20 = 44 \Rightarrow \text{مطلوب} = 44 + 2 = 22$$

$$\text{احتمال} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

دوستانه

نکات:

۱. فضای نمونه‌ای در پرتاب n سکه برابر است با: 2^n

۲. اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم، تعداد حالتی که از این n بار پرتاب بخواهیم k بار رو (پشت) بیاید برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

فیزیک

۵۶/۳ تندی چتر باز از لحظه پریدن تا لحظه قبل از باز کردن چتر، افزایش می‌یابد. پس از باز کردن ناگهانی چتر، نیروی مقاومت هوا به علت افزایش مساحت در آن تندی زیاد به شدت افزایش می‌یابد، بنابراین باعث کند شدن حرکت چتر باز می‌شود. رفته‌رفته نیروی مقاومت هوا کاهش پیدا می‌کند تا با وزن چتر باز برابر می‌شود و از این لحظه به بعد، چتر باز با تندی ثابت به نام تندی حدی به حرکت خود ادامه می‌دهد، بنابراین گزینه (۳) درست خواهد بود.

توجه کنید که اگر چتر باز به تندی حدی اولیه می‌رسید، یعنی قبل از باز کردن چتر، مقاومت هوا و نیروی وزن آن با هم برابر بود، گزینه (۲) درست بود.

دوستانه

حرکت چتر باز

حرکت چتر باز را در چهار مرحله بررسی می‌کنیم:

مرحله ۱: از لحظه بیرون پریدن تا لحظه‌ای که تندی حرکت چتر باز، ثابت می‌شود (به تندی حدی اولیه می‌رسد):

در طول این بازه زمانی، نیروی وزن از نیروی مقاومت هوا بیشتر است ($f_D < mg$)، در نتیجه نیروی خالص و شتاب در جهت حرکت و به سمت پایین هستند، بنابراین تندی چتر باز در حال افزایش است.

توجه: با افزایش تندی چتر باز، نیروی مقاومت هوا نیز افزایش می‌یابد، بنابراین به مرور زمان نیروی خالص وارد بر چتر باز و شتاب حرکت چتر باز کاهش می‌یابد.

$$mg > f_D \Rightarrow F_{\text{net}} = mg - f_D \xrightarrow{\text{افزایش } f_D}$$

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{\text{کاهش } F_{\text{net}}} a: \text{کاهش}$$

مرحله ۲: از لحظه ثابت شدن تندی چتر باز تا لحظه‌ای که چتر باز چترش را باز می‌کند:

در طول این بازه زمانی، در تمام لحظات، نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن برابر هستند ($f_D = mg$)، بنابراین نیروی خالص وارد بر چتر باز، صفر است و چتر باز با تندی ثابت سقوط می‌کند.

$$mg = f_D \Rightarrow F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v: \text{ثابت}$$

درسنامه

دوره تناوب چرخش ماهواره به دور یک سیاره

حرکت ماهواره به دور یک سیاره (زمین) یک حرکت دایره‌ای یکنواخت است. نیروی گرانشی سیاره یا همان وزن ماهواره در نقش نیروی مرکزگرا ظاهر می‌شود، بنابراین برای ماهواره‌ای به جرم m که در دایره‌ای به شعاع r از مرکز سیاره‌ای به جرم M در حال گردش است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_c = W_{\text{ماهواره}} \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{v = \frac{2\pi r}{T}}{r} \times \frac{m}{T} \times \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

نکات:

۱

$$T^2 \propto r^3 \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

۲ ماهواره هر چه به سیاره نزدیک‌تر باشد، دوره حرکت آن کم‌تر است.

۶۲ دوره چرخش متحرک برابر است با:

$$T = \frac{\Delta t}{N} = \frac{60}{600} = 0.1 \text{ s}$$

بزرگی شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow a_c = \frac{4 \times 10^7 \times 200}{0.01} = 8 \times 10^5 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

درسنامه

حرکت دایره‌ای یکنواخت

حرکت یکنواخت، حرکتی است که تندی (اندازه سرعت) حرکت جسم تغییر نمی‌کند.

توجه: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، تندی جسم، ثابت است ولی سرعت آن ثابت نیست، زیرا بردار سرعت تمام مدت در حال تغییر جهت است.

دوره تناوب در حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت دایره‌ای یکنواخت به مدت زمانی که طول می‌کشد تا متحرک یک دور کامل بزند، دوره تناوب یا به اختصار دوره می‌گویند و آن را با نماد T نشان می‌دهند.

توجه: یکای SI دوره برابر با ثانیه (s) است.

اگر جسم روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع r با تندی ثابت v حرکت کند، در این صورت دوره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

نکات:

۱ در حرکت دایره‌ای یکنواخت اگر متحرک در مدت زمان Δt ، n دور کامل بزند، داریم:

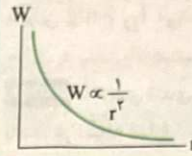
$$T = \frac{\Delta t}{n}$$

۲ در حرکت دایره‌ای یکنواخت، در مدت زمان یک دوره، متحرک مسافتی به اندازه محیط دایره را طی می‌کند.

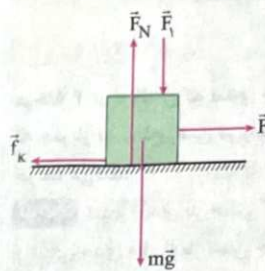
۳ هر چه جسمی از سطح زمین دورتر شود (r افزایش یابد)، شتاب

گرانشی و نیروی گرانشی وارد بر جسم، کاهش می‌یابد.

۴ نمودار نیروی وزن یک جسم بر حسب فاصله از مرکز زمین به شکل زیر است:



۵۸ ۲ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



با توجه به قانون دوم نیوتون در راستای قائم داریم:

$$F_{\text{net}y} = 0$$

$$\Rightarrow F_N = F_1 + mg \Rightarrow F_N = 20 + (8 \times 10) = 100 \text{ N}$$

با توجه به قانون دوم نیوتون در راستای افقی داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$\Rightarrow k\Delta x - \mu_k F_N = ma \Rightarrow 400\Delta x - 0.1 \times 100 = 8 \times 0.5$$

$$\Rightarrow 400\Delta x = 14 \Rightarrow \Delta x = 0.035 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 3.5 \text{ cm}$$

۵۹ ۱ با توجه به این که نیروی وزن جسم بزرگ‌تر از اندازه نیروی F_1

است، بنابراین جسم در آستانه حرکت به سمت پایین است، بنابراین طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}y} = 0$$

$$\Rightarrow mg - F_1 = f_{s,\text{max}} \Rightarrow mg - F_1 = \mu_s F_N$$

$$\xrightarrow{F_N = F_1} 20 - 15 = \mu_s \times 10 \Rightarrow \mu_s = 0.5 = \frac{1}{2}$$

۶۰ ۲ چون بزرگی نیروی وارد شده بر جسم از اندازه نیروی اصطکاک

ایستایی بیشینه کم‌تر است، پس جسم هم‌چنان ساکن و اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و سطح برابر 20 N خواهد بود.

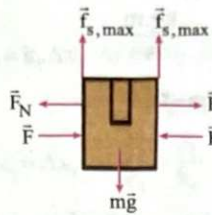
۶۱ ۳ با توجه به رابطه دوره تناوب گردش ماهواره به دور زمین داریم:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_e}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_{\text{ماهواره سینا}}}{T_{\text{ماهواره سیمرغ}}}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\text{ماهواره سینا}}}{T_{\text{ماهواره سیمرغ}}} = \frac{1}{8}$$

۶۵ ۲ نیروهای وارد بر جعبه را رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که جعبه ساکن است، بنابراین برآیند نیروهای وارد بر جعبه صفر است، بنابراین:

$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow F = F_N \quad (*)$$

$$F_{\text{net}_y} = 0 \Rightarrow 2f_{s,\text{max}} = mg \Rightarrow 4 \times 10 = 2\mu_s F_N \quad (*)$$

$$40 = 2 \times 0.4 \times F \Rightarrow F = 50 \text{ N}$$

اندازه نیرویی که سطح دست هر شخص به جعبه وارد می‌کند، برابر است با:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,\text{max}}^2} \Rightarrow R = \sqrt{F^2 + f_{s,\text{max}}^2} \Rightarrow R = \sqrt{50^2 + 20^2} \\ \Rightarrow R = 10\sqrt{29} \text{ N}$$

۶۶ ۳ با توجه به این‌که اندازه نیروی کشش کابل از اندازه نیروی وزن کل آسانسور، کم‌تر است، نتیجه می‌گیریم که جهت شتاب آسانسور به سمت پایین است، بنابراین اندازه شتاب آسانسور برابر است با:

$$mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a)$$

$$\Rightarrow 4450 = 500 \times (10 - a) \Rightarrow a = 1/1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

بنابراین تغییرات طول فنر برابر است با:

$$k\Delta x = m(g - a) \Rightarrow 10^3 \times \Delta x = 50 \times (10 - 1/1) \Rightarrow \Delta x = 4/45 \text{ cm}$$

بنابراین طول ثانویه فنر برابر است با:

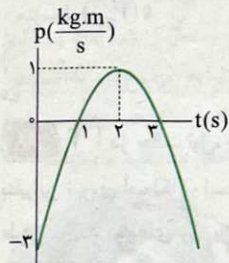
$$\Delta x = x_p - x_1 \Rightarrow 4/45 = x_p - 17 \Rightarrow x_p = 21/45 \text{ cm}$$

۶۷ ۳ ابتدا نمودار تکانه - زمان جسم را در ۵ ثانیه اول حرکت رسم

می‌کنیم:

$$p = -t^2 + 4t - 3 \xrightarrow{p=0} -t^2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1\text{s} \\ t=3\text{s} \end{cases}$$

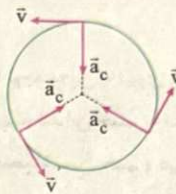
$$t_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2\text{s} \Rightarrow p_s = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$



بنابراین حرکت جسم از لحظه $t=0$ تا $t=1\text{s}$ کندشونده، از لحظه $t=1\text{s}$ تا لحظه $t=3\text{s}$ تندشونده، از لحظه $t=3\text{s}$ تا لحظه $t=2\text{s}$ کندشونده و از لحظه $t=2\text{s}$ به بعد تندشونده است. (نادرستی عبارت «الف» و درستی عبارت «ب»)

شتاب مرکزگرا

در حرکت دایره‌ای یکنواخت با توجه به این‌که جهت بردار سرعت در حال تغییر است، حرکت متحرک، شتاب‌دار است. می‌دانیم بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییرات سرعت است. در یک بازه زمانی بسیار کوچک جهت شتاب لحظه‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت همواره به سمت مرکز دایره است و اندازه این شتاب از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

توجه: اندازه شتاب مرکزگرا را می‌توان از رابطه $a_c = \frac{2\pi v}{T}$ نیز به دست آورد.

۶۳ ۱ شتاب گرانش در سطح هر سیاره از رابطه $g = \frac{GM}{r^2}$ به دست

می‌آید، بنابراین:

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad M = \rho V \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow g = \frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)}{r^2} \Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi r G \rho$$

$$\Rightarrow \frac{g_B}{g_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{r_B}{r_A} \Rightarrow \frac{g_B}{g_A} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$$

درسنامه

رابطه شتاب گرانش در سطح یک سیاره با چگالی و شعاع آن

اگر چگالی متوسط سیاره‌ای به جرم m و شعاع سیاره را r در نظر بگیریم، داریم:

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad M = \rho V \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow g = \frac{G\rho V}{r^2} \Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi r G \rho$$

نکته: شتاب گرانش روی سطح یک سیاره با شعاع سیاره و چگالی سیاره رابطه مستقیم دارد.

۶۴ ۱ به کمک دو رابطه انرژی جنبشی و نیروی مرکزگرا می‌توانیم

بنویسیم:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 \\ F_c = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow mv^2 = F_c r \end{cases} \\ \Rightarrow K = \frac{F_c \times r}{2} \Rightarrow 20 \times 10^3 = \frac{F_c \times 4}{2} \Rightarrow F_c = 10^4 \text{ N}$$

بنابراین اندازه نیرویی که سطح دیوار به جسم وارد می‌کند، برابر است با:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s, \max}^2} \xrightarrow{(1)} R = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ N}$$

در حالت دوم داریم:

$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow F_N' = 2F = 2 \times 8 = 16 \text{ N}$$

حال می‌بینیم که آیا جسم حرکت می‌کند یا خیر:

$$f_{s, \max}' = \mu_s F_N' = 0.2 \times 16 = 3.2 \text{ N}$$

با توجه به این که نیروی وزن جسم از اندازه نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه بیشتر است، بنابراین جسم به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند و در نتیجه نیروی اصطکاک بین جسم و دیوار از نوع اصطکاک جنبشی است، در نتیجه داریم:

$$f_k' = \mu_k F_N' = 0.25 \times 16 = 4 \text{ N}$$

بنابراین اندازه نیرویی که سطح دیوار به جسم وارد می‌کند، برابر است با:

$$R' = \sqrt{f_k'^2 + F_N'^2} \Rightarrow R' = \sqrt{4^2 + 16^2} = 4\sqrt{17} \text{ N}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{R'}{R} = \frac{4\sqrt{17}}{4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{17}{5}}$$

۴۹ ابتدا شتاب حرکت جسم را محاسبه می‌کنیم:

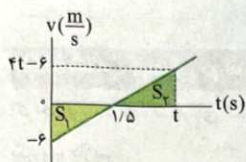
$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k mg = ma$$

$$\Rightarrow 24 - 0.4 \times 3 \times 10 = 3 \times a \Rightarrow 24 - 12 = 3a \Rightarrow a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

معادله سرعت - زمان جسم برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4t - 6$$

حال نمودار سرعت - زمان جسم را در بازه زمانی $t = 0$ تا t رسم می‌کنیم:



می‌دانیم مجموع قدرمطلق مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ برابر با مسافت پیموده شده است، بنابراین:

$$l = |S_1| + |S_2| = 22/\Delta m \Rightarrow \frac{6 \times 1.5}{2} + \frac{(4 - 1.5) \times (4 - 6)}{2} = 22/\Delta$$

$$\Rightarrow t = 4/\Delta s$$

۷۰ با توجه به ثابت بودن شیب نمودار $p-t$ ، نتیجه می‌گیریم که

شتاب حرکت جسم، ثابت است، بنابراین:

$$F_{av} = ma \Rightarrow F_{av} = 500 \times 10^{-3} \times 4 = 2 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{av} = 2\vec{i} \text{ (N)}$$

از طرفی شیب نمودار $p-t$ برابر با نیروی متوسط وارد بر جسم است، بنابراین تغییرات تکانه جسم در بازه زمانی $t = 4s$ تا $t = 6s$ برابر است با:

$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow 2\vec{i} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{6 - 4} \Rightarrow -\vec{p}_f = 4\vec{i} \Rightarrow \vec{p}_f = -4\vec{i} \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

بردار سرعت جسم در لحظه $t = 4s$ برابر است با:

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f \Rightarrow -4\vec{i} = 500 \times 10^{-3} \vec{v}_f \Rightarrow \vec{v}_f = -8\vec{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

اندازه نیروی متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی $t = 4s$ تا $t = 6s$ برابر است با:

$$p = -t^2 + 4t - 3 \Rightarrow \begin{cases} p_f = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \\ p_i = -(4)^2 + 4(4) - 3 = -3 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_f - p_i}{4 - 2} = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \text{ N}$$

شیب نمودار تکانه - زمان برابر با نیروی متوسط وارد بر جسم است، از طرفی شیب خط قاطع بین دو لحظه $t = 4s$ تا $t = 6s$ ، منفی است، بنابراین نیروی متوسط وارد بر جسم در خلاف جهت محور x است. بنابراین عبارت «ج» درست است.

شتاب متوسط حرکت جسم در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 3s$ برابر است با:

$$p = -t^2 + 4t - 3 \Rightarrow \begin{cases} p_f = (0)^2 + 4(0) - 3 = -3 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \\ p_i = -(3)^2 + 4(3) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_f - p_i}{3 - 0} = \frac{-3 - 0}{3} = -1 \text{ N}$$

$$F_{av} = ma_{av} \Rightarrow 1 = 2 \times a_{av} \Rightarrow a_{av} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

بنابراین عبارت «د» نادرست است.

دوستانه

تکانه

به حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن، تکانه می‌گوییم، یعنی:

$$\text{سرعت جسم (متر بر ثانیه)} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\left(\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right) \leftarrow \vec{p} = m \vec{v} \Rightarrow p = mv$$

جرم جسم (کیلوگرم) (kg)

تکانه کمیتی برداری و همواره هم جهت با سرعت جسم است.

• رابطه نیرو و تکانه

اگر به جسمی به جرم m نیروی ثابت $\vec{F}$ اثر کند، تکانه جسم تغییر می‌کند. رابطه بین نیروی خالص وارد بر جسم ($\vec{F}_{\text{net}}$) و تغییر تکانه آن ($\Delta \vec{p}$) به صورت زیر است:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} = m \frac{\Delta(\vec{v})}{\Delta t} \xrightarrow{(\vec{p} = m\vec{v})} \vec{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

نکته: اگر نیروی وارد بر جسم متغیر باشد، باز هم می‌توانید از رابطه تکانه - نیرو استفاده کنید، فقط باید جای $\vec{F}$ را بدهید به «نیروی خالص متوسط» ($\vec{F}_{av}$)

$$\vec{F}_{av} \Delta t = \Delta \vec{p}$$

۶۸ در حالت اول، جسم در آستانه حرکت به سمت پایین قرار دارد،

بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه وارد بر جسم به سمت بالا است و از طرفی برآیند نیروهای وارد بر جسم، صفر است، بنابراین:

$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow F_N = F \quad (1)$$

$$F_{\text{net}_y} = 0 \Rightarrow f_{s, \max} = mg \Rightarrow \mu_s F_N = mg \xrightarrow{(1)}$$

$$0.5 \times F = 4 \times 10 \Rightarrow F = 80 \text{ N}$$

۱/۷۲ ثابت فنر S_p برابر است با:

$$F_p = k_p \Delta x_p \Rightarrow 60 = k_p \times 9 \Rightarrow k_p = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \frac{N}{cm}$$

می‌خواهیم تغییرات طول دو فنر برابر می‌شود، بنابراین:

$$\Delta x_1 = \Delta x_p \Rightarrow \frac{F_1}{k_1} = \frac{F_p}{k_p} \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم شیب نمودار $F-x$ برای یک فنر برابر با ثابت آن فنر است، بنابراین با توجه به نمودار داده‌شده، ثابت فنر S_p برابر است با:

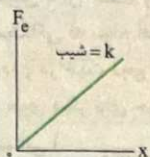
$$k_1 = \frac{40}{3} \frac{N}{cm} \quad (2)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$9 = \frac{F_1}{\frac{40}{3}} \Rightarrow F_1 = \frac{40}{3} \times 9 = 120 N$$

دورسنامه

نمودار اندازه نیروی کشسانی فنر بر حسب تغییر طول آن به شکل زیر، یک خط گذرا از مبدأ است که شیب آن، ثابت فنر را نشان می‌دهد:



۲/۷۵ به آرامی بهتر است، در غیر این صورت چون اتومبیل می‌خواهد

وضعیت سکون خود را حفظ کند، به احتمال زیاد طناب پاره می‌شود و کامیون فرصت انتقال نیرو به اتومبیل را نخواهد داشت. از طرفی وقتی کامیون به تندی رو به جلو حرکت کند، آونگ B با توجه به خاصیت لختی، در خلاف جهت آن به سمت چپ منحرف می‌شود.

دورسنامه

لختی چیست

در حالت کلی، اجسام میل دارند وضعیت حرکت خود را هنگامی که نیروی خالص وارد بر آن‌ها صفر است، حفظ کنند. در فیزیک به این خاصیت، لختی می‌گویند.

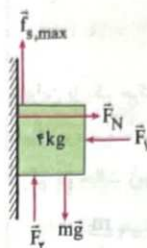
① در واقع لختی خاصیتی از جسم است که در برابر تغییر سرعت یا تغییر جهت حرکت مقاومت می‌کند. از طرفی می‌توان نشان داد که هرچه جرم جسم بیشتر باشد، لختی آن نیز بیشتر است و جسم در برابر تغییر سرعت، بیشتر مقاومت می‌کند. یعنی لختی با جرم رابطه مستقیم دارد.

② فرض کنید در اتوبوسی مطابق شکل نشسته‌اید و اتوبوس در یک جاده مستقیم حرکت می‌کند. اگر راننده اتوبوس ترمز کند و شما کمربند خود را نبسته باشید، ممکن است به جلو پرتاب شوید (متمایل شوید)، یا اگر اتوبوس ساکن باشد و ناگهان شروع به حرکت کند، به طرف عقب به صندلی خود فشرده شوید. در حالت اول چون شما کمربند نبسته‌اید، نیرویی بر شما اثر نکرده و شما تمایل دارید به حرکت خود در مسیر مستقیم با سرعت



ثابت ادامه دهید و در برابر کاهش سرعت مقاومت می‌کنید، پس به جلو پرتاب می‌شوید. همچنین در حالت دوم نیز شما تمایل دارید در وضعیت ساکن بمانید و با حرکت اتوبوس به جلو، مخالفت می‌کنید، پس به طرف عقب صندلی را فشرده می‌کنید.

۲/۷۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



با توجه به این که جسم در آستانه حرکت به سمت پایین است، داریم:

$$F_{net_x} = 0 \Rightarrow F_1 = F_N \Rightarrow F_N = 60 N$$

$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow mg = F_p + f_{s,max} \Rightarrow mg = F_p + \mu_s F_N$$

$$\Rightarrow 40 = F_p + 0.5 \times 60 \Rightarrow F_p = 10 N$$

در حالت دوم اندازه نیروی $\vec{F}_1$ برابر با $45 N$ و اندازه نیروی $\vec{F}_p$ برابر با $18 N$ می‌شود، بنابراین:

$$f'_{s,max} = \mu_s F'_N = \mu_s F'_1 = 0.5 \times 45 = 22.5 N$$

$$mg - F'_p = 40 - 18 = 22 N < 22.5 N$$

از طرفی داریم:

بنابراین جسم، ساکن می‌ماند و اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و دیوار برابر با $22 N$ است.

۲/۷۲ با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k - F_e = ma$$

$$\Rightarrow 20 - (0.25) \times (40) - 20 \Delta x = 4 \times (-2)$$

$$\Rightarrow 20 - 10 - 20 \Delta x = -8 \Rightarrow 20 \Delta x = 18 \Rightarrow \Delta x = 0.9 cm$$

دورسنامه

نیروی کشسانی فنر

اگر فنر متصل به جسمی نسبت به حالت عادی خود کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم نیرو وارد می‌کند که به آن نیروی کشسانی فنر ($\vec{F}_e$) می‌گوییم. برای تعیین اندازه این نیرو از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ثابت فنر (نیوتون بر متر): } \left(\frac{N}{m} \right)$$

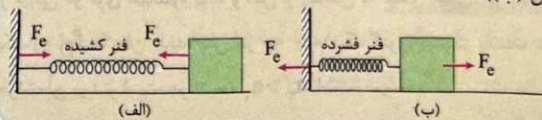
$$\vec{F}_e = kx \quad \leftarrow \text{نیروی کشسانی فنر (نیوتون: N)}$$

(تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن (متر: m))

ثابت هر فنر به مشخصات ساختمانی آن، مثل طول، قطر، جنس ماده سازنده و ... بستگی دارد.

جهت نیروی کشسانی فنر

برای تعیین جهت این نیرو از جمله زیر استفاده می‌کنیم: فنر کشیده جسم را می‌کشد (شکل الف) و فنر فشرده جسم را هل می‌دهد (شکل ب):



۱/۷۳ با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow T = mg + ma$$

$$\Rightarrow T = m(g+a) \Rightarrow 504 = 45 \times (9.8 + a) \Rightarrow a = 1/4 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین برای این که طناب پاره نشود، باید شتاب کشیدن طناب، کم‌تر

از $1/4 \frac{m}{s^2}$ باشد، بنابراین گزینه (۱) درست است.

$$F_{\text{net}} = F - f_k = 400 - 200 = 200 \text{ N}$$

$$t = 4 \text{ s} \text{ لحظه حرکت: } \begin{cases} a = \frac{200}{50} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

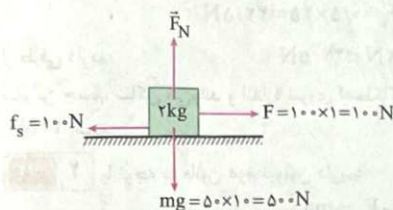
بنابراین با یک حرکت با شتاب متغیر روبه‌رو هستیم و نمی‌توانیم به راحتی تغییر سرعت متحرک را در مدت ۱s در بازه زمانی $3 \leq t < 4$ به دست آوریم. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta v = a \Delta t \begin{cases} a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta v = 2 \times 1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta v = 4 \times 1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

پس می‌توان گفت تغییر سرعت جسم بیشتر از $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و کم‌تر از $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.

از طرفی در لحظه $t = 1 \text{ s}$ بسته حرکت نکرده ($F < f_{s, \text{max}}$) و داریم:

$$F = f_s = 100 \text{ N}$$

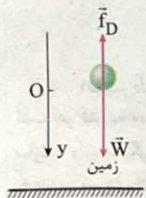


بنابراین اندازه نیرویی که بسته به سطح وارد می‌کند، برابر است با:

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{100^2 + 500^2} = 100 \sqrt{26} \text{ N}$$

۴ ۷۶ بر این گوی‌ها، دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شوند. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر گوی برابر با حاصل ضرب جرم در شتاب آن است. نیروی مقاومت هوا را با $\vec{f}_D$ و وزن را با $\vec{W}$ نشان می‌دهیم و برای بررسی ساده‌تر حرکت گوی‌ها، جهت مثبت محور y را به طرف پایین انتخاب می‌کنیم:



$$W - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{W - f_D}{m} = \frac{mg - f_D}{m} \Rightarrow a = g - \frac{f_D}{m}$$

از طرفی دو گوی هم‌اندازه بوده و قبل از رسیدن به تندی حدی، در یک تندی یکسان، f_D یکسان دارند، پس هر چه جرم یک گوی بیشتر باشد، شتاب حرکت آن بیشتر است، در نتیجه $a_p > a_1$ است.

در حالتی که گوی‌ها به تندی حدی می‌رسند، می‌توان نوشت:

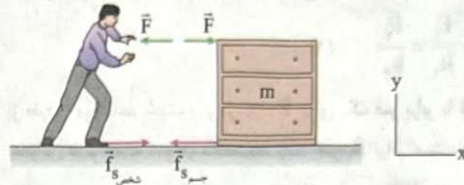
$$mg - f_D = ma \xrightarrow{a=0} f_D = mg$$

$$m_p > m_1 \Rightarrow f_{D_p} > f_{D_1}$$

از طرفی هر چقدر تندی جسم بیشتر باشد، نیروی مقاومت شاره نیز بیشتر است، بنابراین تندی حدی گوی سنگین‌تر، بیشتر از گوی سبک‌تر است.

$$v_p > v_1$$

۴ ۷۶ شکل زیر، نیروهای وارد بر جسم و شخص را نشان می‌دهد. در این شکل، نیرویی که شخص به جسم وارد می‌کند، مطابق قانون سوم نیوتون، هم‌اندازه با نیرویی است که جسم به شخص وارد می‌کند (برای واضح‌تر شدن شکل، بین شخص و جسم فاصله ایجاد کرده‌ایم).



با توجه به این‌که جسم حرکت نمی‌کند، نیروی خالص وارد بر شخص و جسم صفر است، بنابراین داریم:

$$F = f_{s, \text{شخص}} \Rightarrow \text{نیروی خالص وارد بر شخص، صفر است.}$$

$$F = f_{s, \text{جسم}} \Rightarrow \text{نیروی خالص وارد بر جسم، صفر است.}$$

مطابق توضیحات فوق، نیروی اصطکاک بین پاهای شخص و سطح ($\vec{f}_{s, \text{شخص}}$)، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح ($\vec{f}_{s, \text{جسم}}$) و نیرویی که شخص با آن جسم را هل می‌دهد ($\vec{F}$) همگی هم‌اندازه هستند. نیروی اصطکاک که سطح افقی به کف پاهای شخص وارد می‌کند، از نوع ایستایی بوده و در جهت محور x است.

از سوی دیگر برای حرکت جسم، شخص باید بر بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی ($f_{s, \text{جسم}}, \text{max}$) غلبه کند و با نیرویی بزرگ‌تر از $\mu_s F_N$ یا همان $\mu_s mg$ جسم را هل بدهد. بنابراین تنها عبارت «ب» نادرست است.

۱ ۷۷ مرحله اول (۴ ثانیه نخست):

$$a_{av_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مرحله دوم (۲ ثانیه سوم): در پایان ۲ ثانیه سوم، شخص به تندی حدی می‌رسد که در حالت چتر باز برابر با $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است و شتاب متوسط حرکت چتر باز در این بازه زمانی برابر است با:

$$a_{av_2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6 - 28}{2} = -11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{a_{av_2}}{a_{av_1}} = -\frac{11}{7}$$

بنابراین:

از سوی دیگر چتر باز ۱s پس از ثابت شدن سرعت به زمین رسیده و با توجه به این‌که سرعت حرکت آن ثابت و برابر با $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است، داریم:

$$\Delta y = v \Delta t = 6 \times 1 = 6 \text{ m}$$

۲ ۷۸ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s, \text{max}} = \mu_s mg = 0.6 \times 50 \times 10 = 300 \text{ N}$$

در ابتدا که نیروی $\vec{F}$ کوچک است، جسم حرکت نمی‌کند و پس از مدتی به حرکت در می‌آید.

$$F \geq f_{s, \text{max}} \Rightarrow 100t \geq 300 \Rightarrow t \geq 3 \text{ s}$$

$$\begin{cases} F_{\text{net}} = F - f_k \\ f_k = \mu_k F_N = 0.4 \times 500 = 200 \end{cases}$$

$$t = 3 \text{ s} \text{ لحظه حرکت: } \begin{cases} F_{\text{net}} = 300 - 200 = 100 \text{ N} \\ a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{100}{50} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

♦ قانون اول ترمودینامیک

در یک فرایند ترمودینامیکی، تغییر انرژی درونی دستگاه برابر با مجموع گرمای داده شده به دستگاه و کار انجام شده روی دستگاه است، یعنی:

$$\Delta U = Q + W$$

نکات:

۱) انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل فقط تابع دمای (مطلق) گاز است، بنابراین داریم:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

۲) تغییر انرژی درونی (ΔU) مقدار معینی گاز آرمانی فقط به حالت ابتدایی و نهایی گاز بستگی دارد و مستقل از مسیر انجام فرایند است.

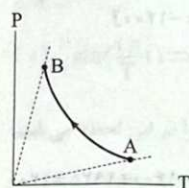
۳) مساحت سطح زیر نمودار $P-V$ هر فرایندی برابر با قدرمطلق کار انجام شده در آن فرایند است:

$$|W_{ab}| = S$$

کار محیط روی دستگاه و کار دستگاه روی محیط، قرینه، ولی هم اندازه اند. علامت کار محیط روی دستگاه در صورت افزایش حجم دستگاه، منفی و در صورت کاهش حجم دستگاه، مثبت است.

۴) با توجه به کاهش دما در فرایند AB ، انرژی درونی گاز کاهش یافته است؛ بنابراین $\Delta U = -300 \text{ J}$ است.

طبق رابطه $PV = nRT$ می توانیم نتیجه بگیریم، شیب نمودار $P-T$ بیانگر معکوس حجم است، بنابراین:



$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

$$\Rightarrow V_A > V_B \Rightarrow \Delta V = V_B - V_A < 0 \Rightarrow W > 0$$

$$\Rightarrow W = +400 \text{ J}$$

در نتیجه گرمای مبادله شده برابر است با:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 300 = Q + 400 \Rightarrow Q = -100 \text{ J}$$

بنابراین گاز در این فرایند، 100 J گرما از دست داده است.

۱) در فرایند هم فشار، حجم با دما رابطه مستقیم دارد.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta U}{U_1} \Rightarrow \frac{0.3}{80} = \frac{\Delta U}{80} \Rightarrow \Delta U = 24 \text{ J}$$

حال به کمک رابطه $\Delta U = Q + W$ ، کار مبادله شده را به دست می آوریم.

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 24 = 150 + W \Rightarrow W = -126 \text{ J}$$

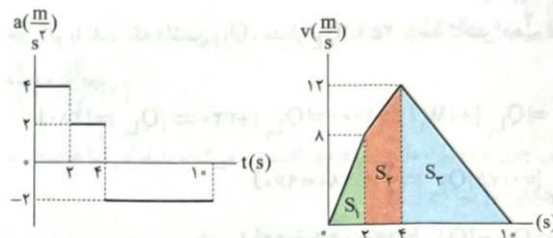
در فرایند هم فشار برای محاسبه کار از رابطه $W = -P\Delta V = -nR\Delta T$ می توانیم استفاده کنیم.

$$W = -nR\Delta T \Rightarrow -126 = -0.5 \times 8 \times (0.3 T_1) \Rightarrow T_1 = 105 \text{ K}$$

۴) گام اول: عددی که نیروی نشان می دهد، اندازه نیروی است که نیروی توسط آن به سوی بالا کشیده می شود. با توجه به این که نیروی وارد بر جسم در لحظه صفر از وزن جسم بیشتر است، داریم:

$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{T}{m} - g = \frac{T}{0.5} - 10 = 2T - 10$$

گام دوم: بنابراین با توجه به رابطه و نمودار $T-t$ ، نمودار شتاب - زمان و در نتیجه نمودار سرعت - زمان حرکت آسانسور به صورت زیر می شود و جابه جایی آسانسور به کمک محاسبه سطح زیر نمودار سرعت - زمان به دست می آید.



$$\Delta x_1 = S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = S_2 = 12 \times 2 = 24 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = S_3 = \frac{12 \times 3}{2} = 18 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 12 + 24 + 18 = 54 \text{ m}$$

۱) مساحت محدود به نمودار فشار برحسب حجم بیانگر کار انجام شده است، با توجه به انبساطی بودن فرایند، کار انجام شده روی گاز منفی است.

$$W = -S = -\frac{(5+1) \times 10^5 \times 6 \times 10^{-3}}{2} = -1800 \text{ J}$$

حال تغییرات انرژی درونی گاز را به دست می آوریم.

$$\Delta U = Q + W = 1500 - 1800 = -300 \text{ J}$$

انرژی درونی گاز، متناسب با دمای مطلق گاز است، بنابراین:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{1 \times 8}{5 \times 2} = \frac{4}{5} \Rightarrow U_2 = 0.8 U_1$$

بنابراین:

$$U_2 - U_1 = -300 \text{ J} \Rightarrow 0.8 U_1 - U_1 = -300 \Rightarrow -0.2 U_1 = -300$$

$$\Rightarrow U_1 = 1500$$

دستگاه

فرایند ترمودینامیکی

وقتی دستگاه از یک حالت تعادل به حالت تعادل دیگری برود، می گوئیم یک فرایند ترمودینامیکی انجام شده است.

♦ تبادل انرژی

دستگاه و محیط از دو راه می توانند با هم انرژی مبادله کنند: گرما و کار.

$Q > 0$: دستگاه گرما بگیرد:	گرمای (Q)
$Q < 0$: دستگاه گرما از دست بدهد:	
$W > 0$: محیط روی دستگاه کار انجام بدهد:	کار (W)
$W < 0$: دستگاه روی محیط کار انجام بدهد:	

۳ ۸۵ عبارات های «الف» و «ج» نادرست هستند.

بررسی عبارات های نادرست:

الف) اطلاعات داده شده قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی را نقض نمی کند، زیرا تمام گرمای دریافتی به کار تبدیل نشده است.

ج) مرحله آتش گرفتن در موتور بنزینی، فرایندی هم حجم است.

۲ ۸۶ بازده ماشین گرمایی را در حالت اول به دست می آوریم.

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \times 100 = \frac{320}{1600} \times 100 = 20\%$$

حال اگر با ثابت نگه داشتن Q_H ، مقدار Q_L را ۲۵ درصد کاهش دهیم در این صورت داریم:

$$Q_{H1} = |Q_{L1}| + |W_1| \Rightarrow 1600 = |Q_{L1}| + 320 \Rightarrow |Q_{L1}| = 1280 \text{ J}$$

$$|Q_{L2}| = 0.75 |Q_{L1}| = \frac{3}{4} \times 1280 = 960 \text{ J}$$

$$|W_2| = Q_H - |Q_{L2}| = 1600 - 960 = 640 \text{ J}$$

بازده ماشین گرمایی در حالت دوم برابر است با:

$$\eta_2 = \frac{|W_2|}{Q_H} \times 100 = \frac{640}{1600} \times 100 = 40\%$$

بازدهی ماشین ۲۰ درصد افزایش می یابد.

دوستانه

تبادل انرژی در ماشین های گرمایی

همه ماشین های گرمایی بین دو منبع گرما با دماهای بالا و پایین کار می کنند. در ماشین های آرمانی فرض می شود فرایندهای ایستوار انجام می شوند و از هر نوع اتلاف انرژی در خارج از چرخه دستگاه صرف نظر می شود.

در این ماشین ها، دستگاه گرمایی Q_H را از یک منبع دمابالا می گیرد و بخشی از آن را به کار تبدیل می کند و گرمای Q_L را به منبع دماپایین می دهد. با توجه به قانون اول ترمودینامیک (قانون پایستگی انرژی) برای یک ماشین گرمایی داریم:

$$|Q_H| = |Q_L| + |W|$$

توجه: چون دستگاه گرمای Q_H را از محیط می گیرد $Q_H > 0$ و چون Q_L و W را به محیط می دهد، $Q_L < 0$ و $W < 0$ است.

بازده ماشین گرمایی

بازده ماشین گرمایی (η) برابر با نسبت کار انجام شده توسط دستگاه به گرمای داده شده به آن است:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow \eta = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

۱ ۸۷ تعداد مول های گاز موجود در هر کدام از ظرف ها قبل از باز کردن شیر رابط برابر است با:

$$PV = nRT \Rightarrow \begin{cases} n_A = \frac{P_A V_A}{RT_A} \\ n_B = \frac{P_B V_B}{RT_B} \end{cases}$$

دوستانه

فرایند هم فشار

۱ فشار گاز ثابت می ماند: $\Delta P = 0$

۲ حجم گاز با دمای مطلق آن نسبت مستقیم دارد:

$$V \propto T \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

۳ کار محیط روی گاز از روابط زیر به دست می آید:

$$W = -P\Delta V \xrightarrow{P\Delta V = nR\Delta T} W = -nR\Delta T$$

۴ مبادله انرژی بین گاز و محیط، هم به صورت گرما و هم به صورت کار است.

در فرایند هم فشار علامت Q ، ΔU ، ΔT و ΔV یکسان و مخالف علامت W است، بنابراین:

در انبساط هم فشار: حجم، دما و انرژی درونی گاز افزایش می یابد، گاز گرما می گیرد و کار می دهد. یعنی:

$$\Delta V > 0 \Leftrightarrow \Delta T > 0 \Leftrightarrow \Delta U > 0 \Leftrightarrow Q > 0 \Leftrightarrow W < 0$$

در تراکم هم فشار: حجم، دما و انرژی درونی گاز کاهش می یابد، گاز گرما می دهد و کار می گیرد. یعنی:

$$\Delta V < 0 \Leftrightarrow \Delta T < 0 \Leftrightarrow \Delta U < 0 \Leftrightarrow Q < 0 \Leftrightarrow W > 0$$

۲ ۸۴ در یک چرخه، تغییرات انرژی درونی برابر صفر است، بنابراین:

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = -Q_{\text{چرخه}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{چرخه}} + W_{\text{چرخه}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{چرخه}} = -W_{\text{چرخه}}$$

با توجه به پادساعتگرد بودن چرخه در نمودار $P-V$ ، علامت W ، مثبت است.

$$\begin{cases} W_{BC} = -P\Delta V = -400 \times 10^3 \times 3/5 \times 10^{-3} = -1400 \text{ J} \\ W_{CA} = P-V \text{ مساحت نمودار} \\ = + \frac{(400+900) \times 10^3 \times 4/5 \times 10^{-3}}{2} = 2925 \text{ J} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = +1200 \Rightarrow W_{AB} - 1400 + 2925 = 1200$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -325 \text{ J}$$

فرایند AB ، بی دررو است و $W = \Delta U$ است، بنابراین انرژی درونی 325 J کاهش می یابد.

دوستانه

چرخه ترمودینامیکی

مجموعه فرایندهای ترمودینامیکی مختلف که دستگاه پس از طی کردن آن ها به حالت اولیه خود بازمی گردد، چرخه ترمودینامیکی نامیده می شود.

نکات:

۱ در یک چرخه ترمودینامیکی، حالت ابتدایی و حالت نهایی یکسان است؛ بنابراین تغییر انرژی درونی گاز در یک چرخه برابر صفر است:

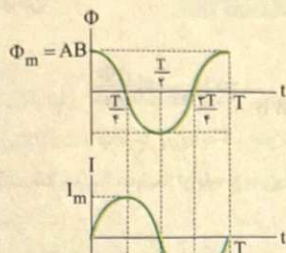
$$\Delta U_{\text{چرخه}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{چرخه}} = -W_{\text{چرخه}}$$

۲ اندازه کار انجام شده روی دستگاه در یک چرخه برابر با مساحت سطح داخل چرخه در نمودار $P-V$ است:

$$|W_{\text{چرخه}}| = S = \begin{cases} \text{مساحت داخل چرخه} = -W_{\text{چرخه}} & \text{چرخه ساعتگرد باشد.} \\ \text{مساحت داخل چرخه} = +W_{\text{چرخه}} & \text{چرخه پادساعتگرد باشد.} \end{cases}$$

دورسنامه

تذکره: با توجه به معادلات $\Phi - t$ و $I - t$ ، به سادگی می‌توان نمودارهای مربوط به آن‌ها را رسم کرد:



۴/۹۲ چون نمودار، خطی است، بنابراین مقدار $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ در هر بازه دلتا Δt یکسان و برابر با همان شیب خط است.

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{-10000 \times 10^{-4}}{50 \times 10^{-3}} = -20 \frac{T}{s}$$

$$\varepsilon_{av} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -200 \times 3 \times 10^{-2} \times 1 \times (-20) = 120 V$$

۴/۹۳ در ابتدا با توجه به نمودار سینوسی داده‌شده، معادله شدت جریان را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} I_m = 4 A \\ \frac{3T}{4} = 0.03 \Rightarrow T = 0.04 s \end{cases}$$

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow I = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{0.04} \times t\right) \Rightarrow I = 4 \sin(50\pi t)$$

حال با قرار دادن لحظه $t = \frac{1}{150} s$ در معادله، جریان را در این لحظه می‌یابیم:

$$I = 4 \sin\left(50\pi \times \frac{1}{150}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow I = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow I = 2\sqrt{3} A$$

۱/۹۴ به راحتی می‌توان با توجه به نمودار $B - t$ داده‌شده، تشخیص داد که نمودار $\varepsilon - t$ دارای دو بخش است که یکی منفی (به قانون لنز توجه کنید) و دیگری صفر می‌باشد (فقط گزینه (۱) این ویژگی را دارد).

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$(0 - 200 ms) \Rightarrow \varepsilon_1 = -400 \times 50 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{0.5}{200 \times 10^{-3}} = -5 V$$

$$(200 ms - 300 ms) \Rightarrow \Delta B = 0 \Rightarrow \Delta \Phi = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$$

۲/۹۵ هنگام ورود قاب به فضای میدان مغناطیسی برون سو، چون شار مغناطیسی عبوری از قاب در حال افزایش است، طبق قانون لنز، جهت جریان القایی در مقاومت از چپ به راست (ساعتگرد) است. هم‌چنین هنگام خروج از فضای شامل میدان مغناطیسی، چون شار مغناطیسی عبوری از قاب کاهش می‌یابد، جهت جریان القایی، پادساعتگرد بوده، پس جریان در مقاومت R از راست به چپ است.

تعداد کل مول‌های موجود در سیستم قبل و بعد از باز کردن شیر، ثابت می‌ماند، بنابراین:

$$\begin{aligned} n_A + n_B &= n'_A + n'_B \\ \Rightarrow \frac{P_A V_A}{RT_A} + \frac{P_B \times \Delta V_A}{RT_B} &= \frac{P' V_A}{RT_A} + \frac{P' \times \Delta V_A}{RT_B} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{300} + \frac{6 \times 5}{500}\right) \times 1500 &= \frac{P'}{300} + \frac{P' \times 5}{500} \Rightarrow 40 + 90 = 20 P' \\ \Rightarrow P' &= 6/5 \text{ atm} \end{aligned}$$

۲/۸۸ در یک فرایند هم‌دما داریم:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} (*)$$

از طرفی چون با تغییر دما، جرم جسم تغییری نمی‌کند، بنابراین با توجه به رابطه چگالی داریم:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \xrightarrow{\text{ثابت: } m} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \xrightarrow{(*)} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} \\ \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{273 + 27}{273 + 21} = \frac{300}{294} = 1/0.2 \end{aligned}$$

درصد تغییرات چگالی گاز برابر است با:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \times 100 = \frac{1/0.2 \rho_1 - \rho_1}{\rho_1} \times 100 = 40\%$$

۳/۸۹ تغییرات انرژی درونی یک گاز به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد، بنابراین:

$$\begin{aligned} \Delta U_{ac} &= \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} \xrightarrow{\Delta U_{ab}=0} \Delta U_{ac} = \Delta U_{bc} \\ \Rightarrow \Delta U_{ac} &= W_{bc} + Q_{bc} \xrightarrow{Q_{bc}=0} \Delta U_{ac} = W_{bc} \\ \Rightarrow \Delta U_{ac} &= 6 J \end{aligned}$$

۲/۹۰ تنها عبارت «الف» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) متغیرهای ترمودینامیکی، مستقل از یکدیگر نیستند و با هم رابطه دارند. رابطه بین متغیرهای ترمودینامیکی را معادله حالت می‌نامند.
(ج) یک دستگاه ترمودینامیکی در صورتی در حالت تعادل ترمودینامیکی است که متغیرهای ترمودینامیکی آن به طور خودبه‌خودی تغییر نکنند.

۲/۹۱ با توجه به نمودار نیروی محرکه القایی داده‌شده می‌توانیم رابطه جریان متناوب را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} I &= I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \xrightarrow{I_m = \frac{\varepsilon_m}{R}} I = \frac{\varepsilon_m}{R} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \Rightarrow I &= \left(\frac{1}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{0.02} \times 2/5 \times 10^{-3}\right) \\ \Rightarrow I &= 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ mA} \end{aligned}$$

۹۹ قبل از بسته شدن کلید K داریم:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18}{4 + 2} = 3A \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} L I_1^2 = \frac{9}{2} L$$

بعد از بسته شدن کلید K داریم:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18}{2 + 2} = \frac{9}{2} A$$

$$U_2 = 2 \times \left(\frac{1}{2} L \left(\frac{9}{2} \right)^2 \right) = \frac{81}{16} L$$

بنابراین:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{9}{2} L}{\frac{81}{16} L} = \frac{16 \times 9}{2 \times 81} = \frac{8}{9}$$

درسنامه

انرژی ذخیره شده در القاگر (سیم لوله)

وقتی در دو سر القاگر (سیم لوله‌ای) توسط مولد، اختلاف پتانسیلی برقرار شود، مولد به القاگر انرژی می‌دهد. بخشی از این انرژی در مقاومت الکتریکی سیم‌های القاگر به صورت گرما تلف شده و بقیه آن در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود که مقدار انرژی ذخیره شده در میدان القاگر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

U: انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر (J)

L: ضریب القاوری القاگر (H)

I: جریان عبوری از القاگر (A)

نکته: اگر سیم‌های القاگر مقاومت الکتریکی نداشته باشند، به این القاگر، القاگر آرمانی می‌گویند. القاگر آرمانی انرژی را مصرف نمی‌کند، بلکه آن را در میدان مغناطیسی خود ذخیره می‌کند. برای یک القاگر آرمانی، سه حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

(الف) جریان القاگر افزایش می‌یابد. انرژی وارد القاگر می‌شود و در آن ذخیره می‌شود.

(ب) جریان القاگر کاهش می‌یابد. انرژی از القاگر خارج می‌شود یا به عبارتی، القاگر انرژی را آزاد می‌کند.

(پ) جریان القاگر پایا (ثابت) باشد. انرژی به آن وارد یا از آن خارج نمی‌شود.

نکته:

ویژگی‌های فیزیکی هر القاگر، توسط ضریب القاوری آن تعیین می‌شود. ضریب القاوری که با نماد L نمایش داده می‌شود، به عواملی همچون تعداد دور، طول، سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد، بستگی دارد. یکای SI ضریب القاوری، هنری (H) نام دارد.



۹۶ ابتدا معادله سهمی را می‌یابیم:

$$\Phi = A I^2 \xrightarrow{t=4ms, \Phi=1Wb} 1 = A \times 4^2 \Rightarrow A = \frac{1}{16}$$

$$\Phi = \frac{1}{16} t^2$$

بنابراین:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = 0 \\ t_2 = 1s = 10^3 ms \Rightarrow \Phi_2 = \frac{1}{16} Wb \end{cases} \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

$$= \frac{\frac{1}{16} - 0}{10^3 - 0} = \frac{10^{-3}}{16} \frac{Wb}{ms}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \frac{1}{16} \times 10^6 \frac{Wb}{s} = 62.5 kV$$

۹۷ در ابتدا شعاع حلقه و مساحت حلقه را محاسبه می‌کنیم. سپس شار مغناطیسی عبوری از حلقه را در دو حالت ابتدایی و پایانی به دست می‌آوریم و در نهایت جریان القایی متوسط را می‌یابیم.

$$L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi} = 10 cm \Rightarrow A_1 = \pi r^2 = 3 \times 10^{-2} m^2$$

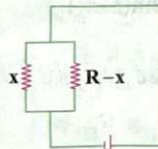
$$\Phi_1 = A_1 B_1 \cos \theta_1 = 3 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-2} \times 1 = 15 \times 10^{-4} Wb$$

$$\Phi_2 = A_2 B_2 \cos \theta_2 = -1/5 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-2} \times 1 = -3 \times 10^{-4} Wb$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = |\Phi_2 - \Phi_1| = 18 \times 10^{-4} Wb$$

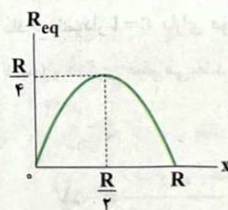
$$I = \left| \frac{\varepsilon}{R} \right| = \left| \frac{\Delta\Phi}{R \Delta t} \right| = \frac{18 \times 10^{-4}}{0.2 \times 0.45} = \frac{18 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-2} A = 20 mA$$

۹۸ ابتدا مقاومت معادل را زمانی که لغزنده رتوستا در فاصله L' از نقطه M قرار دارد به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم مقاومت قسمتی از سیم از نقطه M تا لغزنده رتوستا برابر با X و مقاومت کل سیم برابر با R باشد. مقاومت معادل برابر است با:



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{R-x} = \frac{1}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{(R-x)x}{R} = \frac{Rx - x^2}{R}$$

اگر نمودار مقاومت معادل را برحسب X بکشیم، داریم:



با توجه به نمودار تا فاصله $\frac{L}{2}$ از نقطه M، مقاومت معادل افزایش می‌یابد و پس از آن مقاومت معادل کاهش می‌یابد، بنابراین در این سؤال ابتدا جریان مطابق رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ کاهش و سپس افزایش می‌یابد. با توجه به قانون

لنز چون جریان در مدار، پادساعتگرد است با کاهش آن بزرگی میدان برون سوی عبوری از حلقه رسانا کاهش می‌یابد، بنابراین جریان القایی ابتدا پادساعتگرد است. با کاهش مقاومت رتوستا جریان عبوری افزایش می‌یابد و لذا میدان مغناطیسی حاصل از حلقه مدار افزایش می‌یابد، بنابراین جریان القایی در حلقه ساعتگرد می‌شود.

۱۰۰ ۲ با توجه به معادله جریان متناوب $I = I_{\max} \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ می توان گفت که لحظاتی که $|\sin \frac{2\pi}{T}t| = 1$ شود، شدت جریان در حلقه، بیشینه مقدار خود را دارد.

۱۰۱ ۲ مقادیر E° در سری الکتروشیمیایی، براساس دمای 25°C ، فشار 1 atm و غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت ها است.

دروسنامه

سلول گالوانی

سلول گالوانی، نوعی سلول الکتروشیمیایی است که با انجام یک واکنش اکسایش - کاهش (که به صورت خودبه خودی و گرماده است)، انرژی الکتریکی تولید می کند. اساس کار این نوع سلول، تفاوت قدرت کاهندگی فلزهاست.

سلول های گالوانی از دو تیغه با جنس متفاوت، محلولی از نمک همان تیغه ها، یک سیم، لامپ و یک دیواره متخلخل (غشای نیمه تراوا) ساخته می شوند. در این نوع از سلول های الکتروشیمیایی، تیغه های فلزی درون محلولی از نمک خودشان قرار دارند. این دو محلول به واسطه حضور دیواره متخلخل، با هم مخلوط نمی شوند. تیغه ها با یک سیم به هم متصل شده اند و جهت حرکت الکترون از سوی تیغه فلزی کاهنده تر به سوی تیغه فلزی اکسنده تر است.

نیروی الکتروموتوری (emf)

اگر در سلول گالوانی به جای لامپ، ولت سنج قرار بگیرد، ولتاژی که نشان داده می شود، اختلاف پتانسیل میان دو نیم سلول است. به این کمیت نیروی الکتروموتوری (emf) گفته می شود. اندازه گیری پتانسیل یک نیم سلول به طور جداگانه ممکن نیست و این کمیت به شکل نسبی اندازه گیری می شود. اندازه گیری در دمای 25°C ، فشار 1 atm برای گاز هیدروژن و غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت ها انجام می شود. در این شرایط پتانسیل اندازه گیری شده را پتانسیل استاندارد نیم سلول نامیده و آن را با E° نشان می دهند.

۱۰۵ ۱ • از آن جا که فلز X با محلول مولار HCl واکنش می دهد، پس

E° آن باید کوچک تر از صفر باشد. به این ترتیب Cu از گزینه ها حذف می شود.

• از طرفی چون فلز X، کاهنده بهتری از Co است، پس E° آن باید کوچک تر

(منفی تر) از E° کبالت باشد. به این ترتیب Pb نیز از گزینه ها حذف می شود.

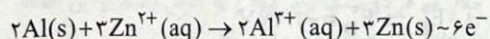
• با توجه به این که محلول سولفات X با فلز آلومینیم واکنش می دهد،

بنابراین Al کاهنده بهتری از X بوده و E° آلومینیم باید کوچک تر (منفی تر)

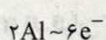
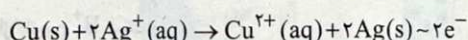
از E° آن باشد. به این ترتیب Ca نیز از گزینه ها حذف می شود.

۱۰۶ ۲ • در سلول گالوانی «آلومینیم - روی»، الکترودهای Al و Zn به

ترتیب آند و کاتد هستند و معادله واکنش کلی سلول به صورت زیر است:



• در سلول گالوانی «مس - نقره»، الکترودهای Cu و Ag به ترتیب آند و کاتد هستند و معادله واکنش کلی سلول به صورت زیر است:



$$\frac{\text{mg Al}}{2 \times 27} = \frac{x \text{ mole}^-}{6} \Rightarrow x = \frac{m}{9} \text{ mole}^-$$

۱۰۲ ۴ کنترل سرعت واکنش تولید صابون با استفاده از یون های قلیایی به عنوان کاتالیزگر، جزو مباحث سینتیک شیمیایی است و ربطی به الکتروشیمی ندارد.

دروسنامه

علم الکترو شیمی

الکتروشیمی، علم استفاده از انرژی الکتریکی برای انجام تغییر شیمیایی یا تولید انرژی الکتریکی از انجام واکنش اکسایش - کاهش است. این علم شاخه ای از دانش شیمی است که در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.

از برخی از قلمروهای الکتروشیمی می توان به ۱) تأمین انرژی (باتری ها، سلول سوختی و سوخت آن ها) ۲) تولید مواد (مثل برق کافت و آبکاری) ۳) اندازه گیری و کنترل کیفی (اطمینان از کیفیت فراورده) اشاره کرد.

۱۰۳ ۲ هر کدام از فلزهای Mg و Al، کاهنده تر از فلز Cu بوده و هر

دو فلز به طور خود به خودی می توانند با محلول مس (II) سولفات واکنش دهند و از این راه نمی توان E° آن ها را با هم مقایسه کرد.

دکترنامه

نیم سلول استاندارد هیدروژن (SHE)

می‌دانیم که اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به طور جداگانه در یک سلول گالوانی، امکان‌پذیر نیست. از این‌رو شیمی‌دان‌ها برای اندازه‌گیری نسبی پتانسیل نیم‌سلول‌ها، از نیم‌سلول استاندارد هیدروژن یا SHE استفاده می‌کنند و آن را به عنوان مینا انتخاب کرده و پتانسیل SHE را برابر با صفر در نظر گرفتند. با تشکیل سلول گالوانی در هر نیم‌سلول با SHE توانستند پتانسیل بسیاری از نیم‌سلول‌ها را اندازه‌گیری کرده و در جدولی ثبت کنند.

این اندازه‌گیری‌ها در دمای 25°C ، فشار 1 atm و غلظت 1 mol.L^{-1} برای محلول الکترولیت‌ها انجام شده است.

$$E^{\circ}(\text{Z}^{n+}/\text{Z}) = 0\text{V}$$

با توجه به این‌که تبدیل Z^{2+} به Z ، دشوارتر از تبدیل C^{2+} به C انجام می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که C^{2+} اکسندۀ بهتری از Z^{2+} بوده و مقایسۀ میان E° آن‌ها به صورت $\text{Z} < \text{C}$ است.

با توجه به این‌که در سلول گالوانی تشکیل‌شده از فلزهای Z و M ، آنیون‌های محلول نمک Z با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت الکترود M حرکت می‌کنند، می‌توان نتیجه گرفت که در این سلول، M آند بوده و E° آن کم‌تر از E° مربوط به Z است.

بنابراین مقایسۀ میان قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $\text{C} < \text{Z} < \text{M}$ است.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) در سلول گالوانی حاصل از الکترودهای M و Z ، جریان الکترود در مدار خارجی از سمت M (آند) به Z (کاتد) است.

(۲) در سلول گالوانی حاصل از الکترودهای M و C ، با گذشت زمان غلظت یون $\text{M}^{n+}(\text{aq})$ افزایش می‌یابد، زیرا M آند بوده و بر اثر اکسایش به کاتیون تبدیل می‌شود.

(۳) در سلول گالوانی حاصل از الکترودهای M و C ، کاتیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت الکترود C (کاتد) حرکت می‌کنند. فراموش نکنید که آنیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت آند و کاتیون‌ها با عبور از این دیواره به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

(۴) در سلول گالوانی حاصل از الکترودهای C و Z ، ولتاژ سلول می‌تواند بیشتر یا کم‌تر از سلول گالوانی شامل الکترودهای M و Z باشد، زیرا از مقادیر E° این فلزها اطلاعی نداریم.

باتری‌های لیتیومی به دلیل داشتن مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت، منبعی برای بازیافت این مواد هستند.

دکترنامه

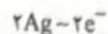
باتری‌های لیتیومی

با رشد و پیشرفت چشمگیر صنایع گوناگون هر روز نیاز و تقاضا پیوسته برای ساخت باتری‌ها با ویژگی‌های گوناگون و کاربرد معین افزایش یافته است. شیمی‌دان‌ها توانستند به فناوری ساخت باتری‌های جدید دست یابند.

در این فناوری، نقش فلز لیتیوم پررنگ است، زیرا لیتیوم در میان فلزها، کم‌ترین چگالی و E° را دارد. این ویژگی‌های لیتیوم سبب شد راه برای ساخت باتری‌های سبک‌تر، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی هموار شود. باتری‌های لیتیومی از نوع دگمه‌ای در شکل‌ها و اندازه‌های گوناگون به کار می‌رود. دسته‌ای دیگر از باتری‌های لیتیومی آن‌هایی هستند که در تلفن و رایانه همراه به کار می‌روند و می‌توان آن‌ها را بارها شارژ کرد.

• مطابق داده‌های سؤال، تعداد الکترود می‌باشد که در سلول دوم، $\frac{1}{6}$ سلول اول است.

$$\frac{1}{6} \times \frac{m}{9} = \frac{\Delta m}{27} \text{ mole}^{-1}$$



$$\frac{y \text{ g Ag}}{2 \times 108} = \frac{\Delta m}{27} \text{ mole}^{-1} \Rightarrow y = 2.0 \text{ mg Ag}$$

۱۰۷۴ با حذف دیوارهٔ متخلخل:

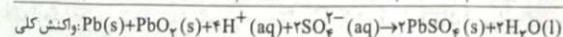
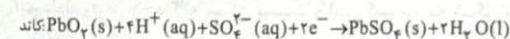
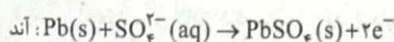
• تجمع بار در دو نیم‌سلول باعث ایجاد یک میدان الکتریکی مخالف جهت واکنش خود به خودی می‌شود. در نتیجه واکنش اکسایش - کاهش متوقف شده و جریان صفر می‌شود.

• اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نیم‌سلول هم‌چنان وجود دارد، اما چون بین دو محلول ارتباط یونی وجود ندارد، مدار کامل نبوده و نمی‌توانیم آن را به صورت اختلاف پتانسیل قابل اندازه‌گیری روی ولت‌سنج ببینیم.

۱۰۸۳ در میان فلزها، کم‌ترین چگالی و E° مربوط به فلز لیتیوم (Li) است.

فلز Li با از دست دادن یک الکترود و تشکیل کاتیون Li^{+} به آرایش دوتایی He می‌رسد.

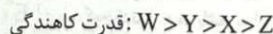
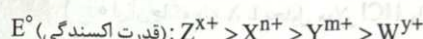
۱۰۹۴ نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی باتری سرب به همراه واکنش کلی در زیر آمده است:



$$\text{emf} = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}} \Rightarrow 2.04\text{V} = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - (-0.35\text{V})$$

$$\Rightarrow E^{\circ}_{\text{کاتد}} = 2.04 - 0.35 = 1.69\text{V}$$

۱۱۰۲ با توجه به این‌که $a < 1$ است، مقایسۀ میان E° کاتیون‌ها به صورت زیر است:



به این ترتیب درستی عبارت‌های «ب» و «پ» تأیید می‌شود.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(آ) در مقایسه با هر کدام از فلزهای دیگر، کاهندۀ ضعیف‌تری است و هیچ کدام از سه کاتیون دیگر را نمی‌تواند به طور خود به خودی به اتم‌های فلز آن‌ها کاهش دهد.

(ت) Y در مقایسه با Z کاهندۀ قوی‌تری است و بنابراین اتم Y با محلول نترات Z به طور طبیعی واکنش می‌دهد.

$$\text{emf} = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}}$$

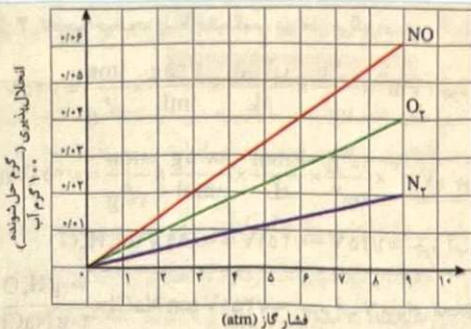
$$1.19 = -1.18 - E^{\circ}_{\text{D}} \Rightarrow E^{\circ}_{\text{D}} = -2.37\text{V}$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) فلز C کاهنده‌تر از فلز B است. بنابراین قدرت اکسندگی کاتیون C^{2+} کم‌تر از کاتیون B^{+} است.

(۲) فلز قلیایی کاتیون C^{2+} تشکیل نمی‌دهد.

(۳) فلز B با محلول HCl واکنش نمی‌دهد و می‌توان ظرفی از جنس فلز B را برای نگهداری محلول دارای HCl در نظر گرفت.



همان گونه که در نمودار بالا مشخص است، نمودار انحلال پذیری بر حسب فشار، به صورت یک خط راست و صعودی است.

گاز NO با بیشترین شیب و گاز N₂ با کمترین شیب نشان می‌دهد که تغییرات فشار روی گاز NO بیشترین تأثیر و روی گاز N₂ کمترین اثر را دارد.

نکته: قانون هنری به بررسی گازهایی می‌پردازد که با آب واکنش شیمیایی نمی‌دهند.

• بررسی مقدار انحلال پذیری

می‌دانیم گازهای N₂ و O₂ ناقطبی و گاز NO قطبی است، گاز NO در آب انحلالی کاملاً مولکولی دارد، به علت وجود پیوند سه‌گانه در ساختار یک مولکول N₂ و ناقطبی‌تر بودن N₂ نسبت به O₂، گاز نیتروژن به مقدار کم‌تری نسبت به گاز اکسیژن در آب حل می‌شود.

۱۱۷ • ۴ از آن‌جا که چگالی محلول A بیشتر از چگالی محلول D است، در لوله بالاتر از A جای می‌گیرد. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

• اگر A و D دو محلول آبی باشند، وقتی وارد یک لوله آزمایش می‌شوند، یک مخلوط همگن تشکیل می‌شود. پس گزینه (۱) نیز نادرست است.

۱۱۸ • ۳ تشکیل بلورهای نمک در حاشیه دریاها همان فرایند تبلور است و ارتباطی به اسمز ندارد.

• بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) ریشه‌های گیاه، آب را از خاک (غلظت کم‌تر) به درون سلول‌های ریشه (غلظت بیشتر) جذب می‌کنند.

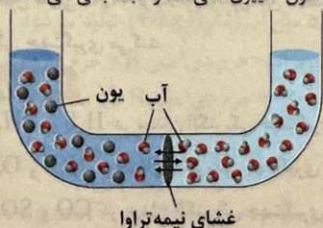
(۲) اگر میوه‌ای مانند انگور یا خیار را در آب نمک قرار دهیم، آب از داخل میوه (غلظت کم‌تر) به بیرون (غلظت بیشتر) حرکت می‌کند و میوه چروک می‌شود.

(۳) اگر یک ماهی آب شیرین را در آب شور نگهداری کنیم، آب از بدن ماهی خارج شده و می‌میرد، زیرا تعادل اسمزی آن به هم می‌خورد.

دورستانه

فرایند اسمز

تعریف اسمز: به مهاجرت خودبه‌خودی مولکول‌های کوچک حلال از محلول رقیق به محلول غلیظ به وسیله یک غشای نیمه‌تراوا فرایند اسمز یا گذرندگی می‌گویند. در این فرایند، مولکول‌های حلال از هر طرف غشا به طرف دیگر می‌روند و چون سرعت عبور مولکول‌های حلال از طرف حلال به طرف دیگر بیشتر از حالت مقابل است، این فرایند تا جایی ادامه پیدا می‌کند که سرعت حرکت مولکول‌های حلال در هر دو سمت برابر شود و به تعادل برسد. از این لحظه به بعد، غلظت محلول تغییری نمی‌کند و ثابت باقی می‌ماند.



افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیومی، سبب شد این فلز جایگاه ممتازی در تأمین انرژی جهان پیدا کند به طوری که سالانه از میلیاردها باتری لیتیومی درون دستگاه‌های الکترونیک در سرتاسر جهان استفاده می‌شود و سرانجام این دستگاه‌ها به همراه باتری‌های درون خود به شکل پسماند دور ریخته می‌شوند.

۱۱۴ • ۴ در سلول‌های گالوانی با گذشت زمان پتانسیل کاهش کاتد، کاهش

و پتانسیل کاهش آن، افزایش می‌یابد و در نهایت این دو با هم برابر شده و ولتاژ سلول برابر با صفر می‌شود.

• بررسی گزینه‌های نادرست:

۱ و ۲) اگر نیم‌سلول SHE، آند یا کاتد سلول گالوانی باشد، جرم تیغه پلاتینی آن تغییری نمی‌کند.

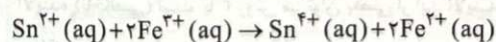
۳) در سلول گالوانی حاصل از فلز واسطه Mn و فلز اصلی Sn، الکتروکد منگنز در نقش آند ظاهر می‌شود.

۱۱۵ • ۴ برای رد هر کدام از سه گزینه اول یک مثال نقض آورده شده

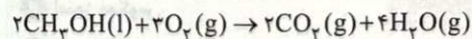
است:

• بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) در واکنش اکسایش - کاهش زیر، هر دو گونه اکسند و کاهنده، فلز هستند:



(۲) در واکنش اکسایش - کاهش زیر، حالت فیزیکی فراورده‌ها با هم مشابه است، اما حالت فیزیکی واکنش‌دهنده‌ها متفاوت است:



(۳) فقط در واکنش‌های اکسایش - کاهش که به طور خود به خودی انجام می‌شوند، سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌هاست.

۱۱۶ • ۳ در دمای یکسان و فشار ثابت، مقایسه میان انحلال‌پذیری

گازهای موردنظر در آب به صورت $\text{NO} < \text{O}_2 < \text{N}_2$ است.

• اگر انحلال‌پذیری این سه گاز در دمای ثابت با هم برابر باشد، به این معنی است که فشار گاز N₂ بیشتر از فشار دو گاز دیگر است.

• برای این‌که انحلال‌پذیری هر کدام از گازها دو برابر شود، مطابق قانون هنری، فشار هر کدام از گازها نیز باید دو برابر شود. با توجه به این‌که فشار اولیه گاز NO کم‌تر از دو گاز دیگر است، تغییرات فشار این گاز کم‌تر از گازهای N₂ و O₂ خواهد بود.

دورستانه

قانون هنری

قانون هنری بیان می‌کند که در دمای ثابت با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها افزایش می‌یابد. به طور کلی قانون هنری نشان می‌دهد که انحلال‌پذیری یک گاز با فشار گاز، رابطه مستقیم دارد و میزان وابستگی انحلال‌پذیری گازها (S) با فشار (P) را بررسی می‌کند.

۱/۱۲۴ بررسی عبارات های نادرست:

ب) در شرایطی که آمونیاک به حالت مایع است، مولکول های H_2O به حالت جامد هستند. NH_3 در دمای پایین تر از $-33^\circ C$ مایع می شود.

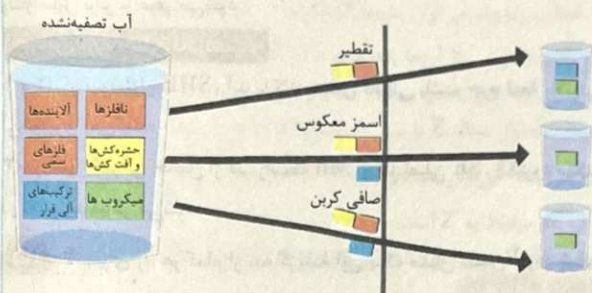
ت) هر مولکول HF حداکثر با ۲ مولکول HF مجاور و هر مولکول H_2O نیز حداکثر با ۴ مولکول H_2O مجاور پیوند هیدروژنی تشکیل می دهد.

۱/۱۲۵ با استفاده از روش های صافی کربن و اسمز معکوس، برخلاف روش تقطیر، می توان ترکیب های آلی فزّار را از آب جدا کرد.

درستنامه

تصفیه آب

شکل زیر برخی روش های تصفیه آب را نشان می دهد.



همان گونه که در شکل هم مشخص است، آب تصفیه نشده دارای ۶ نوع آلاینده (ناخالصی) است. با ۳ روش می توان بعضی از این آلاینده ها را از آب جدا کرد:

۱ تقطیر

۲ اسمز معکوس

۳ صافی کربن

هیچ کدام از این ۳ روش نمی توانند میکروب ها را از آب جدا کند، به همین دلیل پیش از استفاده از آب تصفیه شده با هر کدام از این روش ها می بایست فرایند کلرزنی انجام شود. چون کلر خاصیت گندزدایی و ضد عفونی کننده دارد.

تنها در روش تصفیه به وسیله تقطیر، علاوه بر میکروب ها، ترکیب های آلی فزّار نیز حذف نمی شوند.

۱/۱۲۶ قایق بادبانی و جلیقه ضد گلوله از پلیمر کولار تهیه می شوند. کولار

یک پلی آمید است که مونومر های سازنده آن، دی آمین و دی اسید هستند.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) سرنگ از پلی پروپن تهیه می شود که مونومر آن همان پروپن است. کیسه فریزر از پلی اتن تهیه می شود که مونومر آن همان اتن است.

۲) کیسه خون از پلی وینیل کلرید تهیه می شود که مونومر آن همان وینیل کلرید است. لباس مخصوص مسابقه موتورسواری از کولار تهیه می شود.

۳) منبع بزرگ آب از پلی اتن تهیه می شود که مونومر آن همان اتن است. تایر اتومبیل از کولار تهیه می شود.

۳/۱۱۹ حجم حوضچه را V مترمکعب در نظر می گیریم:

$$V m^3 \times \frac{10^3 L}{1 m^3} \times \frac{10^3 mL}{1 L} \times \frac{1.25 g}{1 mL} \times \frac{1 ton}{10^6 g} = 1.25 V ton$$

$$V m^3 \times \frac{10^3 L}{1 m^3} \times \frac{6 mol}{1 L} \times \frac{58.5 g}{1 mol} \times \frac{1 ton}{10^6 g} = 0.351 V ton$$

$$1.25 V - 0.351 V = 0.899 V ton H_2O$$

$$0.351 V ton NaCl \times \frac{100 g H_2O}{4 g NaCl} = 0.8775 V ton H_2O$$

$$0.899 V - 0.8775 V = 0.0215 V ton$$

مطابق داده های سؤال داریم:

$$0.0215 V = 6 \Rightarrow V = 280 m^3$$

حاصل ضرب اعداد موجود در گزینه (۳) برابر با ۲۸۰ است.

۱/۱۲۰ اگر انحلال پذیری نمک A در دمای $30^\circ C$ را S نشان دهیم،

مطابق داده های سؤال می توان نوشت:

$$30 = \frac{S}{S+100} \times 100 \Rightarrow 30S + 3000 = 100S \Rightarrow 3000 = 70S \Rightarrow S = 42.8 g A$$

مطابق نمودار داده شده، انحلال پذیری نمک KNO_3 در دمای $30^\circ C$ برابر ۴۳ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. از طرفی انحلال پذیری این نمک در دماهای $50^\circ C$ و $20^\circ C$ به ترتیب برابر ۸۰ و ۳۰ گرم است. یعنی اگر ۱۸۰ گرم محلول سیر شده پتاسیم نیترات را از دمای $50^\circ C$ تا $20^\circ C$ سرد کنیم، جرم محلول سیر شده به ۱۳۰ گرم می رسد و حداکثر ۵۰ گرم رسوب تشکیل می شود.

$$رسوب 20^\circ C = \frac{50 g \text{ رسوب}}{180 g \text{ محلول}} \times 72 g \text{ محلول} = 20 g \text{ رسوب}$$

۲/۱۲۱ بررسی عبارات ها:

آ) جرم مولی اتانول (C_2H_5OH)، استون (CH_3COCH_3)، آب (H_2O) و هگزان (C_6H_{14}) به ترتیب برابر با ۴۶، ۵۸، ۱۸ و ۸۶ گرم بر مول است:

$$46 + 58 = 104$$

ب) نقطه جوش اتانول، استون و آب به ترتیب برابر با ۷۸، ۵۶ و ۱۰۰ درجه سلسیوس است. اتانول و استون به هر نسبتی در آب حل می شوند.

پ) هر چند اتانول و استون جزو حلال های قطبی هستند، اما شمار زیادی از مواد ناقطبی مانند یُد، چربی، رنگ و... در این دو حلال به خوبی حل می شوند.

ت) گشتاور دو قطبی هگزان به طور تقریبی برابر با صفر است.

۴/۱۲۲ آمارها نشان می دهند که نزدیک به ۳ درصد از جمعیت کشورمان

سنگ کلیه دارند. این بیماری افزون بر زمینه زن شناختی می تواند به دلیل تغذیه نامناسب، کم تحرکی، مصرف بیش از حد نمک خوراکی، نوشیدن کم آب، صرف پروتئین حیوانی و لبنیات و نیز اختلالات هورمونی ایجاد شود.

۴/۱۲۳ مولکول قطبی H_2O برخلاف مولکول های ناقطبی CS_2 و SO_2

میدان الکتریکی جهت گیری می کند.

۱ بررسی سایر گزینه ها:

مولکول های NH_3 و H_2S در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

مولکول های O_3 و HCl در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

مولکول های SO_2 و CO در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

۱۲۹/۳ بوی بد ماهی به دلیل وجود متیل آمین و برخی آمین های دیگر است.

۱۳۰/۳ بررسی گزینه های نادرست:

۱ و ۲) این موارد فقط در ارتباط با پلیمرهایی درست است که از یک نوع مونومر ساخته شده اند و به پلیمرهای افزایشی معروفند، مانند پلی اتن، پلی وینیل کلرید و ...

۴) در پلیمری مانند تفلون $(-C_2F_4)_n$ ، عنصر هیدروژن وجود ندارد.

۱۳۱/۱ فرمول مولکولی استرهای تک عاملی و خطی با زنجیر (های) هیدروکربنی سیر شده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. مطابق داده های سؤال می توان نوشت:

$$\frac{C \text{ جرم}}{O \text{ جرم}} = \frac{12 \times n}{16 \times 2} = \frac{3}{4} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow \text{فرمول استر } C_3H_6O_2$$

بررسی عبارات ها:

آ) نیروی بین مولکولی استرها و پلی اتن یکسان و از نوع وان دروالسی است. (ب) دو ساختار زیر را می توان برای این استر در نظر گرفت:

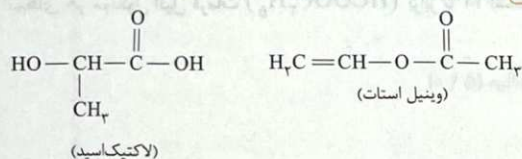


ب) نقطه جوش پروپانویک اسید (C_2H_5COOH) بالاتر از نقطه جوش هر کدام از استرهای بالا است. زیرا میان مولکول های پروپانویک اسید، پیوند هیدروژنی تشکیل می شود.

ت) هر مولکول از $C_3H_6O_2$ دارای ۱۱ جفت الکترون پیوندی است:

$$\frac{3(4) + 6(1) + 2(2)}{2} = 11$$

۱۳۲/۴ ساختار مونومر هر دو پلیمر در زیر آمده است:



لاکتیک اسید را نمی توان اسید سیر نشده در نظر گرفت. زیرا هیچ پیوند $C=C$ در آن وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) پلی لاکتیک اسید یک نوع پلی استر است. زیرا مونومر آن دارای هر دو گروه عاملی اسیدی و الکلی است. در صورتی که مونومر پلی وینیل استات یک استر سیر نشده است.

۲) جرم مولی وینیل استات و لاکتیک اسید به ترتیب ۸۶ و ۹۰ گرم بر مول است.

۳) پلی لاکتیک اسید جزو پلیمرهای سبز است و رد پای کوچک تری در محیط زیست بر جای می گذارد.

۱۳۳/۴ از واکنش n مول دی اسید با n مول دی آمین، یک مول پلی آمید و $2n$ مول آب تولید می شود. بنابراین می توان نوشت:

جرم آب + جرم پلیمر = جرم دی آمین + جرم دی اسید A
با توجه به این که مقدار مصرفی هر کدام از واکنش دهنده ها، 2500 مول بوده است، مقدار 5000 مول آب ($90 \text{ kg H}_2\text{O}$) تولید می شود.

جرم آب - جرم دی آمین B = جرم دی اسید A - جرم پلیمر
 $180 = B - 270 \Rightarrow B = 450$ جرم دی آمین B

$$B = \frac{270000 \text{ g}}{2500 \text{ mol}} = 108 \text{ g.mol}^{-1}$$

جرم مولی دی آمین موجود در گزینه (۴) برابر 108 g.mol^{-1} است.

درست است

پلیمرها

پلیمری شدن واکنشی است که در آن مولکول های کوچک در شرایط مناسب به یکدیگر متصل شده و زنجیرهای مولکولی طولانی با جرم مولی بالا می سازند. برخی پلیمرها تنها از یک نوع تک پار (مونومر) ساخته شده اند، مانند: پلی اتن، پلی وینیل کلرید، تفلون و ... ولی برخی دیگر از پلیمرها، از چند نوع مونومر به وجود می آیند، مثل پلی استر، پلی آمید و ...

جدول زیر برخی از انواع پلیمرها را نشان می دهد:

کاربرد	مونومر	پلیمر
دبه آب، بطری کدر شیر	$\begin{array}{c} H & & H \\ & \backslash & / \\ & C = C \\ & / & \backslash \\ H & & H \end{array}$ اتن	$\left[\begin{array}{c} H & H \\ & \\ -C & -C- \\ & \\ H & H \end{array} \right]_n$ پلی اتن
سرنگ	$\begin{array}{c} H & & H \\ & \backslash & / \\ & C = C \\ & / & \backslash \\ H & & CH_3 \end{array}$ پروپن	$\left[\begin{array}{c} H & H \\ & \\ -C & -C- \\ & \\ H & CH_3 \end{array} \right]_n$ پلی پروپن
کیسه خون	$\begin{array}{c} H & & H \\ & \backslash & / \\ & C = C \\ & / & \backslash \\ H & & Cl \end{array}$ کلرواتن (وینیل کلرید)	$\left[\begin{array}{c} H & H \\ & \\ -C & -C- \\ & \\ H & Cl \end{array} \right]_n$ پلی وینیل کلرید
کولار (تایر خودرو)، قایق بادبانی، جلیقه ضدگلوله و ...	دی آمین + دی اسید	$\left[\begin{array}{c} O & & O \\ & & \\ -C & - & -C- \\ & & \\ H & & N- \\ & & \\ & & H \end{array} \right]_n$ پلی آمید

۱۳۷/۳ چگالی هر دو نوع پلی اتن سبک و پلی اتن سنگین کمتر از چگالی آب بوده و هر دو نوع پلیمر بر روی آب شناور می مانند.

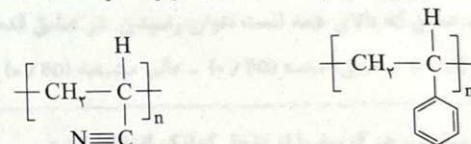
بررسی سایر گزینه ها:

۱) پلی اتن سبک به پلی اتن شاخه دار معروف بوده و در مقایسه با پلی اتن سنگین، شاخه های فرعی بیشتری دارد.

۲) پلی اتن سنگین، زنجیرهای هیدروکربنی منظم تر و فشرده تری در مقایسه با پلی اتن سبک دارد.

۴) فرمول شیمیایی هر دو نوع پلی اتن، یکسان و به صورت $(-C_2H_4)_n$ است.

۱۳۸/۱ در هر واحد تکرارشونده از پلی استیرن $(-C_8H_8)_n$ و پلی سیانواتن $(-C_4H_3N)_n$ شمار پیوندهای چندگانه به ترتیب برابر با ۳ و ۱ است:



اگر شمار مونومرها در هر زنجیر از پلی استیرن و پلی سیانواتن را به ترتیب با a و b نشان دهیم، مطابق داده های سؤال می توان نوشت:

$$\frac{3a}{b} = 4/5 \Rightarrow a = 1/5 b$$

$$a(8+8) = 6 \times 10^4 \Rightarrow a = 3750 \Rightarrow b = \frac{3750}{1/5} = 18750$$

(جرم مولی سیانواتن) $b \times$ جرم مولی پلی سیانواتن

$$= 18750 \times 53 = 993750 \text{ g.mol}^{-1}$$

۴ ۱۳۴ ۲. هگزانول ($C_6H_{13}OH$) و استیک اسید (CH_3COOH) به ترتیب دارای ۱ و ۲ اتم اکسیژن هستند.

پروپنیل هیدروکسیل ها:

(۱) مولکول ویتامین C همانند مولکول سازنده سلولز (گلوکز) شامل ۶ اتم اکسیژن است.

(۲) هر کدام از مولکول های ویتامین A و D شامل یک اتم اکسیژن هستند.

(۳) هر کدام از مولکول های ویتامین K و پنیل اتانوات (استر تک عاملی) شامل ۲ اتم اکسیژن هستند.

۴ ۱۳۵ **پروپنیل هیدروکسیل ها:**

(۱) گروه های عاملی در شکل زیر مشخص شده است:



(۲) فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به صورت $C_8H_9N_3O_4$ است. شمار جفت الکترون های پیوندی این ترکیب برابر است با:

$$\frac{8(4) + 9(1) + 3(3) + 2(2)}{2} = 27$$

عدد ۲۷ بر ۷ بخش پذیر نبوده و عبارت گزینه (۲) نمی تواند درست باشد.

(۳) ترکیب مورد نظر دارای ۸ اتم کربن است، در حالی که مونومر سازنده پتو یمین سیانواتن (C_3H_3N) دارای ۳ اتم هیدروژن است.

(۴) مجموع شمار اتم های هر مولکول از این ترکیب برابر با ۲۲ و مجموع شمار اتم های هر مولکول اتیل فرمات ($HCOOC_2H_5$) برابر با ۱۱ است.



$$\frac{8(4) + 9(1) + 3(3) + 2(2)}{2} = 27$$

$$\frac{8(4) + 9(1) + 3(3) + 2(2)}{2} = 27$$

$$\frac{8(4) + 9(1) + 3(3) + 2(2)}{2} = 27$$

$$\frac{8(4) + 9(1) + 3(3) + 2(2)}{2} = 27$$



ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
	فارسی (۲)	
۱	در متن زیر کلمه‌ای بیابید که مترادف با کلمه «جمال» باشد. وصول به حُسن ممکن نشود؛ آلا به واسطهٔ عشق، و عشق هر کسی را به خود راه ندهد. حُسن یکی از معانی حسن و جمال، زیبایی است. (۵ / ۰)	۰/۵
۲	از میان گروه واژگان «تداعی، جزاره، ردا، طبق، چریغ» کدام کلمه مترادف واژهٔ مشخص شده در عبارت زیر است؟ «جزیره‌های کوچک و بزرگ، مثل وصله‌های رنگارنگ بر <u>طیلسان</u> آبی مدیترانه دوخته شده است.» طیلسان: ردا (۷۵ / ۰)	۰/۲۵
۳	املاي درست را انتخاب کنید. هنگام (چریغ / چریق) آفتاب کنار قنات حسنی (اتراغ / اتراق) می‌کردیم. چریغ (۷۵ / ۰) - اتراق (۷۵ / ۰)	۰/۵
۴	املاي درست را با توجه به معنا انتخاب کنید. «امسال که به اروپا رفتم گمانم این است که عالمی را دیده‌ام اما چه (استبعادی / استبعادی) دارد که عمری باشد و روزی خاطراتی از سفر ماه هم بنویسیم.» استبعادی (۷۵ / ۰)	۰/۲۵
۵	با توجه به عبارت «بعد از خواندن این مطلب متوجه شدم که دنیا عجیب فراموشکار است.» الف) یک وابستهٔ وابسته بیابید و نوع آن را مشخص کنید. خواندن این مطلب. این صفت مضاف‌الیه است. خواندن = هسته، مطلب = مضاف‌الیه (۵ / ۰) ب) نمودار آن را رسم کنید. خواندن این مطلب (۷۵ / ۰)	۰/۷۵
۶	معنی فعل مشخص شده را در عبارت زیر بنویسید. عشق، بنده را به خدا برساند؛ پس عشق از بهر این معنی، فرض راه آمد. شد یا گشت (۷۵ / ۰)	۰/۲۵
۷	با توجه به عبارت زیر تشبیه و نوع آن را مشخص کنید، سپس ارکان آن را بنویسید. «و به عالم عشق که بالای همه است نتوان رسیدن. در عشق قدم نهادن کسی را مسلم شود که با خود نباشد و ترک خود کند.» عالم عشق (۵ / ۰) - عشق: مشبه (۷۵ / ۰) - عالم: مشبهه (۷۵ / ۰)	۱
۸	آرایهٔ ادبی مناسب هر گزینه را از داخل کمانک انتخاب کنید. الف) کاووس کیانی که کی‌اش نام نهادند / کی بود؟ کجا بود و کی‌اش نام نهادند (تلمیح - جناس ناهمسان) تلمیح (۷۵ / ۰) ب) خاکی است که رنگین شده از خون ضعیفان / این ملک که بغداد و ری‌اش نام نهادند (کنایه - حسن تعلیل) کنایه (۷۵ / ۰) ج) شوخی روزگار است که در مهد دموکراسی عالم، یعنی آتن، برای آب خوردن در شهر هم، مردم رأی می‌گرفتند. (تشبیه - ایهام) تشبیه (۷۵ / ۰)	۰/۷۵



ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) بیت «وین نغمه محبت بعد از من و تو ماند / تا در زمانه باقی آواز باد و باران» به کدام ویژگی عشق و محبت اشاره دارد؟ جاودانگی و ابدیت عشق (۵ / ۵) ب) عبارت داخل کمانک بیانگر چیست؟ «او بنده خود را عاشق کند، آن‌گاه بر بنده عاشق باشد و بنده را گوید: تو عاشق و محب مایی و ما معشوق و حبيب توایم. (چه بخواهی و چه نخواهی)» بی‌اختیاری عاشق در عالم عشق (۵ / ۵)	۱
۱۰	معادل عبارت «ماوا کردن» را در عبارت زیر پیدا کنید. «در عشق قدم نهادن کسی را مسلم شود که با خود نباشد و ترک خود بکند و خود را ایثار عشق کند عشق آتش است هر کجا که باشد جز او رخت دیگری نهد و هر کجا که رسد سوزد و به رنگ خود گرداند.» رخت نهادن (۲۵ / ۵)	۰/۲۵
۱۱	در عبارت «از بیم عقرب جراره دموکراسی قرن بیستم، ناچار شده به مار غاشیه حکومت سرهنگ‌ها پناه ببرد.» نویسنده وضعیت کشور یونان را چگونه توصیف می‌کند؟ از یک وضعیت بد به وضعیتی بدتر افتادن (۵ / ۵)	۰/۵
۱۲	مفهوم ابیات زیر، به لزوم چه موضوعی در مسیر زندگی تأکید می‌کند؟ الف) آیین طریق از نفس پیر مغان یافت / آن خضر که فرخنده پیاش نام نهادند ب) در مکتب حقایق پیش ادیب عشق / هان ای پسر، بکوش که روزی پدر شوی اهمیت لزوم وجود راهنما (۵ / ۵)	۰/۵
۱۳	با توجه به بیت «دل گرمی و دم سردی ما بود که گاهی / مردادمه و گاه دی‌اش نام نهادند» اوضاع جهان بر چه اساس و مبنایی شکل می‌گیرد؟ براساس نوع نگرش ما (۵ / ۵)	۰/۵
۱۴	معنی و مفهوم بیت و عبارت زیر را بنویسید. الف) آدمی به هر جا می‌رود؛ گمان می‌کند که به غایت‌القصوای خود رسیده است. انسان به هر جایی می‌رود؛ فکر می‌کند به نهایت آرزوها دست یافته است. (۱) ب) صد تیغ جفا بر سر و تن دید یکی چوب / تا شد تهی از خویش و نی‌اش نام نهادند نی در ابتدا چوب بی‌ارزشی بود؛ چون سختی دید و وجودش از ناخالصی تهی شد به نی تبدیل گردید. (۱)	۲
۱۵	در بیت «خاکی است که رنگین شده از خون ضعیفان / این ملک که بغداد و ری‌اش نام نهادند». شاعر علت رونق و معروفیت ظاهری شهرهای بغداد و ری را چه می‌داند؟ کشته شدن ضعیفان (۵ / ۵) و رنگین شدن شهر به خون آنان (۵ / ۵)	۱

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۶	فیزیک (۲) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اندازه شتاب نوسانگر هماهنگ ساده در نقاط بازگشتی، صفر است. نادرست (۰/۷۵) ب) بسامد سامانه جرم - فنر با یک فنر معین ولی وزنه‌های متفاوت با جذر جرم وزنه به طور مستقیم متناسب است. نادرست (۰/۷۵) ج) اگر ثابت فنر را افزایش دهیم، دوره نوسان‌های سامانه جرم - فنر افزایش می‌یابد. نادرست (۰/۷۵) د) افزایش جرم در سامانه جرم - فنر، با فنر یکسان به کند شدن نوسان‌ها می‌انجامد. درست (۰/۷۵)	۱
۱۷	جای خالی عبارت‌های زیر را در مورد یک نوسانگر هماهنگ ساده با کلمه‌های مناسب تکمیل کنید. الف) در حرکت هماهنگ ساده وقتی نوسانگر به طرف نقطه تعادل حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل آن می‌یابد. کاهش (۰/۷۵) ب) در نقطه تعادل حرکت هماهنگ ساده سامانه جرم - فنر، انرژی جنبشی نوسانگر است. بیشینه (۰/۷۵)	۰/۵
۱۸	شکل زیر، تصویری از یک موج عرضی در یک ریسمان کشیده شده را در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد. از ابتدا تا لحظه $2/5T$: الف) موج چه مسافتی را بر حسب سانتی‌متر طی می‌کند؟ $\frac{3}{2}\lambda = 45 \text{ (۰/۷۵)} \Rightarrow \lambda = 30 \text{ cm (۰/۷۵)}$ $\frac{3}{2}\lambda = 45 \text{ (۰/۷۵)} \Rightarrow \lambda = 30 \text{ cm (۰/۷۵)}$ مسافتی که موج در مدت $2/5T$ طی می‌کند $2/5 \times 30 = 12 \text{ cm (۰/۷۵)}$ ب) ذره B چه مسافتی را بر حسب سانتی‌متر طی می‌کند؟ $10A = 10 \times 5 = 50 \text{ cm (۰/۷۵)}$ مسافتی که ذره B در مدت $2/5T$ طی می‌کند $2/5 \times 50 = 20 \text{ cm (۰/۷۵)}$	۱/۵
۱۹	یک صفحه حساس دایره‌ای شکل به شعاع 2 cm بر راستای انتشار صوت، عمود است و در مدت زمان 0.5 s، انرژی صوتی 2 J به صفحه می‌رسد. شدت صوت در سطح این صفحه چند وات بر متر مربع است؟ ($\pi=3$) $A = \pi r^2 = 3 \times (2)^2 = 12 \text{ cm}^2 \text{ (۰/۷۵)}$ $I = \frac{E}{A \Delta t} \text{ (۰/۷۵)} = \frac{2/4 \times 10^{-9}}{12 \times 10^{-4} \times 0.5} \text{ (۰/۷۵)} = 4 \times 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \text{ (۰/۷۵)}$	۱
۲۰	دوره تناوب آونگ ساده‌ای $1/2 \text{ s}$ است. طول این آونگ چند متر است؟ ($\pi=3$، $g=10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$) $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ (۰/۷۵)} \Rightarrow 1/2 = 2 \times 3 \times \sqrt{\frac{L}{10}} \text{ (۰/۷۵)}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{L}{10}} = 0.2 \xrightarrow{\text{توان ۲ می‌رسانیم}} \frac{L}{10} = 0.04 \Rightarrow L = 0.4 \text{ m (۰/۵)}$	۱



ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۲۱	معادله نوسانی یک نوسانگر هماهنگ ساده در SI به صورت $x = 0.05 \cos(100\pi t)$ است: الف) بسامد زاویه‌ای این نوسانگر چند رادیان بر ثانیه است؟ $\omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (0.5)$ ب) اندازه شتاب این نوسانگر در لحظه $t = \frac{1}{400} \text{ s}$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟ ($\pi^2 = 10$) $x = 0.05 \cos(100\pi \times \frac{1}{400}) \quad (0.75) \Rightarrow x = 25\sqrt{2} \times 10^{-3} \text{ m} \quad (0.75)$ $ a = \omega^2 x \quad (0.5) \Rightarrow a = 2500\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (0.5)$	۲
۲۲	چشمه موجی، نوسان‌هایی با بسامد 20 Hz و دامنه 5 cm در یک محیط کشسان و در راستای محور x انجام می‌دهد. اگر این نوسان در جهت محور y و با تندی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در این محیط منتشر شود: الف) این موج طولی است یا عرضی؟ از آنجایی که جهت انتشار موج بر راستای نوسان ذرات محیط، عمود است، موج عرضی است. (0.5) ب) بسامد زاویه‌ای و طول موج را (بر حسب SI) محاسبه کنید. $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 20 = 40\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (0.75)$ $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ m} \quad (0.75)$	۱
۲۳	تراز شدت صوت محلی پر تردد، 11 dB است. شدت این صوت، چند وات بر متر مربع است؟ ($I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$) $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (0.75) \Rightarrow 11 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \quad (0.75) \Rightarrow I = 10^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (0.75)$	۰.۷۵
۲۴	با حرکت یک جانور، در سطح ماسه امواج عرضی و طولی ایجاد می‌شود که تندی انتشار آن‌ها به ترتیب $v_L = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $v_T = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. اختلاف زمان رسیدن این دو موج به نزدیک‌ترین پای یک عقرب ماسه‌ای، $2/5 \text{ ms}$ است. این جانور در چند سانتی‌متری از عقرب قرار دارد؟ اگر فاصله جانور تا عقرب را x بگیریم، می‌توان نوشت: $x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} \quad (0.75)$ $t_T - t_L = 2/5 \times 10^{-3} \Rightarrow \frac{x}{50} - \frac{x}{150} = 2/5 \times 10^{-3} \quad (0.75) \Rightarrow \frac{2x}{150} = 2/5 \times 10^{-3} \quad (0.75)$ $\Rightarrow x = \frac{150 \times 2/5 \times 10^{-3}}{2} = 0.1875 \text{ m} = 18.75 \text{ cm} \quad (0.5)$	۱/۲۵
۲۰	جمع نمرات	