

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله نهم

پایه یازدهم

۱۴۰۴/دی/۲۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	یازدهم
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ صفحه ۱ تا ۷۰
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ (درس ۱ تا ابتدای تجانس) صفحه ۹ تا ۴۳
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ (درس ۱ و ۲) صفحه ۱ تا ۴۷
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ (تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی) صفحه ۱ تا ۶۶
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ (تا ابتدای آنتالپی، همان محتوای انرژی است) صفحه ۱ تا ۶۵
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه	—

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان	طراحان: کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - علی شهبازی محسن علی نجاری - محمد گودرزی - نیما مهندس کارشناسان علمی: فرشاد حسن زاده - سروش موئینی	محسن علی نجاری
هندسه	طراحان: کیوان صارمی - ماهک کناره کارشناس علمی: ماهک کناره	کیوان صارمی
آمار و احتمال	طراحان: مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب - مریم نظری	مسعود شفیعی
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - نوید شاهی کارشناس علمی: سعید محبی	نوید شاهی - یاشار انگوتی
شیمی	طراحان: پیمان خواجوی مجد - سروش عبادی - یاسر عبداللهی - محسن مجنون کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده - یاشار ذریه	یاسر عبداللهی - سروش عبادی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منشی دارد.

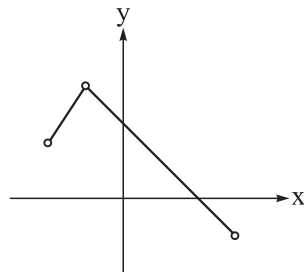
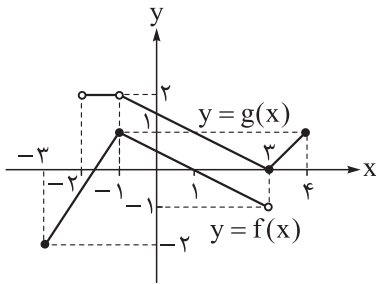
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤالات، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینشگر، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سؤالات کنکور، سراسری طراحی می شود.

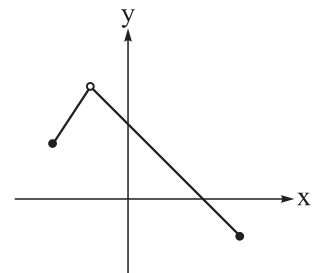


حسابان یازدهم

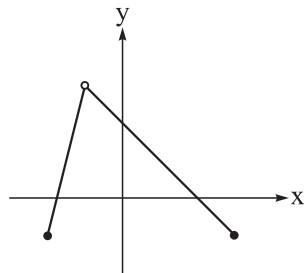
۱- در شکل زیر، نمودار تابع های f و g روی دامنه شان رسم شده اند. نمودار تابع $f + g$ روی دامنه اش کدام است؟



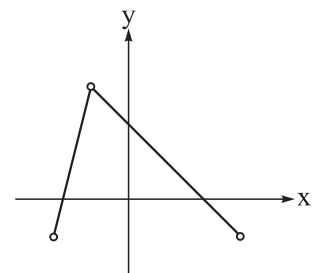
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۲- توابع $f = \{(3, a+1), (4, b-2), (5, c-1)\}$ و $g = \{(3, 2-a), (4, c+2), (5, b+3)\}$ مفروض اند. اگر

$D_g = \{4, 5\}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = \{3, 4\}$ و $(fg)(4) = 10$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

-۴ (۲)

-۲ (۱)

-۶ (۴)

-۸ (۳)

۳- مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = 2[x] + 1$ و محور x در بازه $[-\frac{3}{4}, 3]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

۱۰ (۲)

۱۳ (۱)

۱۰/۵ (۴)

۱۱/۵ (۳)

محل انجام محاسبات



۴- تابع f با ضابطه $f(x) = |4x - 3| - 4x$ روی بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه تابع f^{-1} در این بازه کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{4} ; x \geq -3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3+x}{4} ; x \geq -3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{4} ; x \geq \frac{3}{4} \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3+x}{4} ; x \geq \frac{3}{4} \quad (3)$$

۵- اگر توابع $f(x) = |4x + 2k| \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{(4x + 2k)^2(x-3)}$ با هم برابر باشند، محدوده k کدام است؟

$$k \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$k \leq 6 \quad (3)$$

$$k \leq -6 \quad (2)$$

$$k \geq -6 \quad (1)$$

۶- تابع خطی f مفروض است. اگر تابع $g(x) = f(x) + f^{-1}(x) + 3x + 2$ همانی باشد، حاصل $f(2) + f^{-1}(3)$ کدام است؟

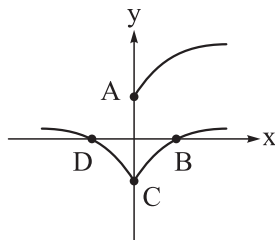
$$-7 \quad (4)$$

$$-5 \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$-6 \quad (1)$$

۷- نمودارهای توابع $f(x) = \sqrt{x} + k$ ، $g(x) = \sqrt{x} - k$ و $h(x) = \sqrt{-x} - k$ در شکل زیر رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی $ABCD$ مربع باشد، مساحت آن کدام است؟ ($k > 0$)



$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۸- نمودار تابع $f(x) = -\frac{|x|}{x} \sqrt{a + bx^2}$ و نمودار وارون آن از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرند. حاصل $a \times b$ کدام است؟

$$-11 \quad (4)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-13 \quad (1)$$

۹- اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 - 7x + 8}$ و $g(x) = \frac{-x+3}{4}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ بازه $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

$$37 \quad (4)$$

$$36 \quad (3)$$

$$35 \quad (2)$$

$$34 \quad (1)$$

۱۰- اگر f یک تابع خطی و به ازای هر عدد حقیقی x ، تساوی $f^{-1}(x) + (f \circ f^{-1})(x) + \frac{1}{4}f(x) = 0$ برقرار باشد، ضابطه

تابع $f + f^{-1}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3}x + 2 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3}x \quad (3)$$

$$-\frac{5}{2}x + 2 \quad (2)$$

$$-\frac{5}{2}x \quad (1)$$

محل انجام محاسبات



۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; x > 3 \\ x+2 & ; x \leq 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - x & ; f(x) > 0 \\ x-4 & ; f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(g \circ f)(1) + (f \circ g)(-4)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) صفر (۴) -۸

۱۲- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; x \geq 1 \\ -x+2 & ; x < 1 \end{cases}$ ، مجموع جواب‌های معادله $(f \circ f)(x) = -x + 4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{18}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) -۲ (۴) $\frac{3}{5}$

۱۳- حداقل چند جمله اول دنباله حسابی ...، ۷، ۴ را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۶۵۰ بیشتر شود؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۱۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 2x - 5 = 0$ باشد، حاصل $8\alpha^2 + 4\beta^2 + 10\beta$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۲۷

۱۵- سهمی $y = mx^2 + (m-2)x + m - 1$ فقط از سه ناحیه دستگاه مختصات عبور می‌کند. $[-m]$ کدام نمی‌تواند

باشد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۶- اگر معادله $\frac{2x+a}{x^2-9} + \frac{4x}{x-3} = 4$ ریشه نداشته باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) -۷۲ (۲) -۸۴ (۳) ۷۲ (۴) ۸۴

۱۷- معادله $\sqrt{3x^2 + 6x + 4} = 2x^2 + 4x + 1$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸- بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{14}{|x-3| + |x+4|}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱۴ (۴) $\sqrt{14}$

۱۹- اگر نقطه $(9, 3)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع باشد که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $2x - 4y + 5 = 0$ و $x - 5y + 2 = 0$ هستند، بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع متوازی‌الاضلاع چند برابر $\frac{\sqrt{5}}{2}$ است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۲۰- خط $3x + y = 1$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر اندازه مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC که

AC = BC است، برابر ۲/۵ باشد، مجموع طول‌ها و عرض‌های سه رأس مثلث کدام می‌تواند باشد؟

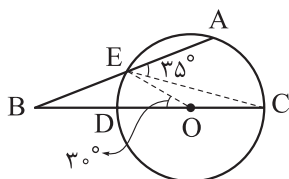
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) $\frac{15}{2}$ (۴) $\frac{17}{2}$

محل انجام محاسبات



هندسه یازدهم

۲۱- در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر $\widehat{EOD} = 3^\circ$ و $\widehat{AEC} = 35^\circ$ باشد، زاویه B چند درجه است؟



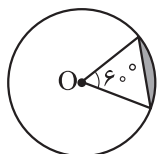
(۱) ۲۰

(۲) ۲۲ / ۵

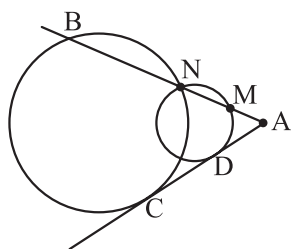
(۳) ۲۵

(۴) ۲۷ / ۵

۲۲- دایره به شعاع ۶ و مرکز O مطابق شکل مفروض است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

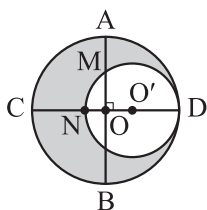
(۱) $3(3\pi - 2\sqrt{3})$ (۲) $6(\pi - \sqrt{3})$ (۳) $3(2\pi - 3\sqrt{3})$ (۴) $2(2\pi - 3\sqrt{3})$

۲۳- در شکل زیر اگر $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\frac{CD}{DA}$ کدام است؟

(۱) $2(\sqrt{2} - 1)$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{6} - 1$ (۴) $2(\sqrt{3} - 1)$

۲۴- در شکل زیر دایره‌ای به مرکز O و مماس داخل‌اند. اگر مساحت ناحیه رنگی برابر 16π و $OO' = 2$ باشد، طول

پاره خط AM کدام است؟

(۱) $5 - \sqrt{3}$

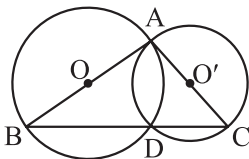
(۲) ۳

(۳) ۲ / ۵

(۴) $5 - \sqrt{5}$

محل انجام محاسبات

۲۵- دایره‌های $C(O, 15)$ و $C'(O', 13)$ مطابق شکل مفروض‌اند. اگر $AD = 24$ باشد، طول مماس مشترک C و C' کدام است؟



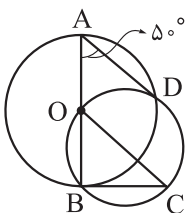
(۱) ۱۴

(۲) $8\sqrt{3}$

(۳) ۱۸

(۴) $12\sqrt{3}$

۲۶- در شکل زیر، O مرکز دایره بزرگ‌تر است، اگر $\hat{A} = 50^\circ$ باشد، زاویه OCB چند درجه است؟



(۱) ۵۰

(۲) ۴۰

(۳) ۵۵

(۴) ۴۵

۲۷- مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم ۵ و ۱۲ مفروض است. فاصله نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث با اضلاع قائم آن از یکدیگر کدام است؟

(۴) $10\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۱) $2\sqrt{2}$

۲۸- نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط d است. اگر فاصله O روی خط d از نقطه A، برابر ۱۶ و $AA' = 19/2$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' کدام است؟

(۴) $16/96$ (۳) $15/96$ (۲) $16/56$ (۱) $15/36$

۲۹- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ و ارتفاع AH را در نظر بگیرید. اگر این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AH}$ انتقال دهیم، بیشترین فاصله رأس‌های مثلث اولیه و جدید کدام است؟

(۴) $4\sqrt{13}$ (۳) $10\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{13}$ (۱) $5\sqrt{13}$

۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($AB < BC$)، وتر AC به طول ۱۰ را حول نقطه M به اندازه 90° دوران می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطه D قطع کند. اگر M وسط ضلع AC باشد، مقدار $CD \times CB$ کدام است؟

(۴) ۵۶

(۳) ۵۰

(۲) ۴۸

(۱) ۲۵

محل انجام محاسبات



آمار و احتمال

۳۱- در پرتاب یک تاس، x یک پیشامد است. گزاره‌نمای $P(x) = \frac{1}{3}$ برای کدام x نادرست است؟

(۱) عدد روشده مضرب ۳ باشد. (۲) فرد و اول باشد.

(۳) از ۴ بیشتر باشد. (۴) زوج و اول باشد.

۳۲- در پرتاب یک تاس، احتمال روشن شدن هر عدد متناسب با مجذور آن عدد است، با کدام احتمال عدد روشده ۲ یا ۳ است؟

(۱) $\frac{13}{36}$ (۲) $\frac{5}{91}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{11}{91}$

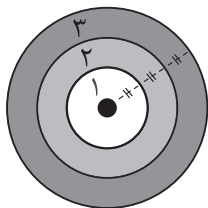
۳۳- در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ ، $P(b) = \frac{1}{3}$ ، $P(c) = \frac{1}{2}$ ، $P(d) = \frac{1}{6}$ ، بیشترین مقدار برای احتمال یک پیشامد ۳ عضوی چه قدر است؟

(۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۴- در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، احتمال عضوهای S دنباله حسابی می‌سازند. اگر کمترین احتمال یک پیشامد ساده $P(a) = \frac{1}{6}$ باشد، بیشترین احتمال یک پیشامد دو عضوی چه قدر است؟

(۱) $\frac{11}{18}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{13}{18}$ (۴) $\frac{5}{9}$

۳۵- در صفحه هدف زیر، احتمال اصابت تیر به هر ناحیه متناسب با مساحت آن ناحیه است. احتمال برخورد آن به ناحیه ۲ کدام است؟



(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۳۶- نقیض گزاره $(p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow p))$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

(۱) $p \wedge q$ (۲) $p \vee q$ (۳) T (۴) F

۳۷- تعداد زیرمجموعه‌های A و $A \cup \{1, 2\}$ با هم ۶۴ تا اختلاف دارند. $A - \{1, 2\}$ چند عضوی است؟

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

محل انجام محاسبات



۳۸- اگر $A_i = (i - m, i + m)$ و $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \emptyset$ باشد، کمترین مقدار k کدام است؟

$$2m - 1 \quad (2)$$

$$m - 1 \quad (1)$$

$$2m + 1 \quad (4)$$

$$2m \quad (3)$$

۳۹- تعداد زیرمجموعه‌های $m - 3$ عضوی و $m + 9$ عضوی یک مجموعه n عضوی با هم برابر است. اگر تعداد زیرمجموعه‌های

۲ عضوی این مجموعه، مضرب ۱۳ باشد، حداقل مقدار n کدام است؟ (m عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ است.)

$$26 \quad (4)$$

$$20 \quad (3)$$

$$14 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

۴۰- اگر $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq 2n, 2^k \leq kn\}$ ، کوچک‌ترین مقدار n برای آن که مجموعه ۶ عضو داشته باشد، کدام است؟

$$11 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$



فیزیک یازدهم

۴۱- عدد اتمی عنصر منیزیم برابر ۱۲ است. بار الکتریکی هسته اتم منیزیم چند میکروکولن است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) $1/92 \times 10^{-12}$ (۲) $1/92 \times 10^{-13}$ (۳) $7/5 \times 10^{-12}$ (۴) $7/5 \times 10^{-13}$

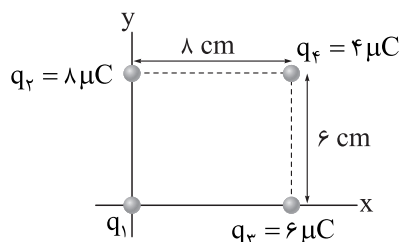
۴۲- بار الکتریکی دو کره کوچک رسانای A و B به ترتیب $q_A = q$ و $q_B = -5q$ است. دو کره در فاصله r از یکدیگر، بر هم نیروی الکتریکی 200 N وارد می‌کنند. ۴۰ درصد از بار کره B را به کره A منتقل می‌کنیم و آن‌ها را در فاصله 12 cm از هم قرار می‌دهیم. اگر در این حالت دو کره بر هم نیروی الکتریکی 30 N وارد کنند، r برابر چند

سانتی‌متر است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۳- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای در صفحه قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 در SI به صورت

$$\vec{F} = -27\vec{i} + 6\vec{j} \text{ باشد، اندازه بار } q_1 \text{ چند میکروکولن است؟ } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



(۱) ۱۰

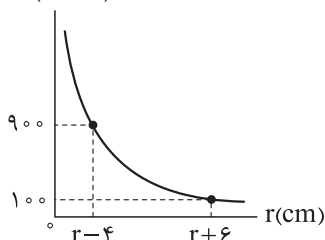
(۲) ۲۰

(۳) ۲۵

(۴) ۵۰

۴۴- نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای بر حسب فاصله از آن به شکل زیر است.

$E (\text{V/m})$



r برابر چند سانتی‌متر است؟

(۱) ۶

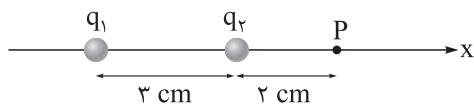
(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

۴۵- در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص حاصل از بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5 \text{ pC}$ و $q_2 = -2 \text{ pC}$ در نقطه P در SI

کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)



(۲) $-27\vec{i}$

(۱) $27\vec{i}$

(۴) $-59\vec{i}$

(۳) $59\vec{i}$

محل انجام محاسبات



۴۶- ذره‌ای به جرم $m = 4 \text{ g}$ و بار الکتریکی $q = -5 \mu\text{C}$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت از حال سکون رها می‌شود. وقتی این ذره در مسیر مستقیم 20 cm جابه‌جا می‌شود، تندی آن به 5 m/s می‌رسد. بزرگی میدان الکتریکی چند ولت بر متر است؟ (از اثر گرانش و نیروهای مقاوم در مقابل حرکت ذره صرف نظر شود.)

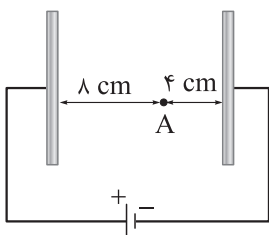
$$10^4 \quad (2)$$

$$10^3 \quad (1)$$

$$5 \times 10^4 \quad (4)$$

$$5 \times 10^3 \quad (3)$$

۴۷- در شکل زیر، دو صفحه رسانای موازی به دو سر یک باتری وصل شده‌اند. بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -3 \mu\text{C}$ را در نقطه A رها می‌کنیم. بار شروع به حرکت کرده و به یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند. اگر در این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی بار $180 \mu\text{J}$ تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین این دو صفحه چند ولت است؟



$$60 \quad (1)$$

$$90 \quad (2)$$

$$120 \quad (3)$$

$$180 \quad (4)$$

۴۸- دو کره رسانای A و B به شعاع‌های r_A و $r_B = 2r_A$ ، دارای بار الکتریکی $q_A = 5 \mu\text{C}$ و $q_B = 10 \mu\text{C}$ هستند. چند درصد از بار یکی از کره‌ها را به کره دیگر منتقل کنیم تا چگالی سطحی بار این دو کره برابر شود؟

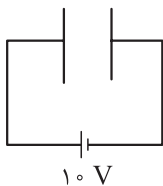
$$25 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$

$$50 \quad (4)$$

$$40 \quad (3)$$

۴۹- در شکل زیر، ظرفیت خازن برابر $5 \mu\text{F}$ و بین صفحات آن هواست. اگر عایقی با ضریب دی‌الکتریک $K = 4$ را وارد فضای بین صفحات خازن کنیم، چند میکروکولن بار الکتریکی از باتری عبور می‌کند؟ (دی‌الکتریک به طور کامل فضای بین صفحات را پر می‌کند.)



$$200 \quad (1)$$

$$150 \quad (2)$$

$$50 \quad (3)$$

$$40 \quad (4)$$

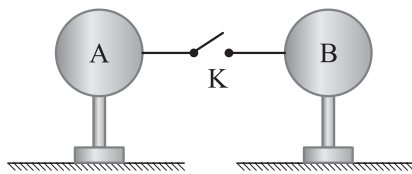


۵۰- فاصله بین صفحه‌های یک خازن تخت 9 mm ، مساحت هر یک از صفحه‌های آن 4 cm^2 و فضای بین دو صفحه خازن هوا است. این خازن به یک باتری ۵ ولتی متصل است. اگر فاصله بین صفحه‌های خازن 6 mm کاهش یابد، انرژی ذخیره شده در آن چند پیکوژول و چگونه تغییر می‌کند؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

(۱) 10° ، افزایش می‌یابد. (۲) 10° ، کاهش می‌یابد.

(۳) 15° ، افزایش می‌یابد. (۴) 15° ، کاهش می‌یابد.

۵۱- در شکل زیر دو کره مشابه A و B دارای بار الکتریکی q_A و $q_B = -5q_A$ هستند. پس از بستن کلید K به مدت 2 ns ، جریان الکتریکی متوسط 6 kA در سیم ایجاد می‌شود. بار اولیه کره A چند میکروکولن است؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

۵۲- لامپی به مقاومت الکتریکی 6Ω به اختلاف پتانسیل ثابت 4 V متصل است. در مدت یک دقیقه چند الکترون از این لامپ عبور می‌کند؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۱) 5×10^{21} (۲) 5×10^{20}

(۳) $2/5 \times 10^{21}$ (۴) $2/5 \times 10^{20}$

۵۳- سیم رسانایی به جرم 30 g از ماده‌ای با چگالی 10 g/cm^3 و مقاومت ویژه $3 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ساخته شده است. اگر مقاومت الکتریکی این سیم 4Ω باشد، طول آن چند متر است؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۲۰ (۴) ۴۰

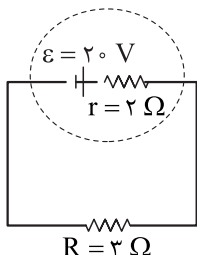
۵۴- مقاومت الکتریکی یک قطعه از جنس ژرمانیوم 20Ω است. اگر دمای این قطعه 5 K افزایش یابد، مقاومت الکتریکی آن به چند اهم می‌رسد؟ ($|\alpha| = 5 \times 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ ژرمانیوم)

(۱) ۵ (۲) ۱۰

(۳) ۱۵ (۴) ۲۵

محل انجام محاسبات

۵۵- در مدار شکل زیر در مدت ۳۰ دقیقه، چند آمپر - ساعت بار الکتریکی از مقاومت R می‌گذرد؟



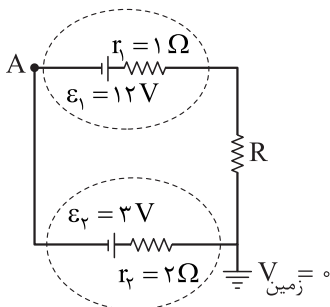
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۶- در شکل زیر، اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر $V_A = -7 V$ باشد، مقاومت R برابر چند اهم است؟



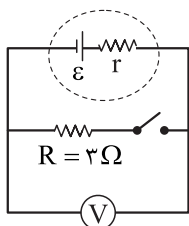
(۱) ۵ / ۰

(۲) ۱

(۳) ۵ / ۱

(۴) ۲

۵۷- در مدار شکل زیر، اگر کلید باز باشد، ولت‌سنج عدد ۱۸ V را نشان می‌دهد و اگر کلید بسته باشد، ولت‌سنج عدد ۱۲ V را نشان می‌دهد. مقاومت درونی باتری چند ولت است؟



(۱) ۱

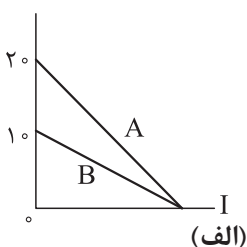
(۲) ۵ / ۱

(۳) ۲

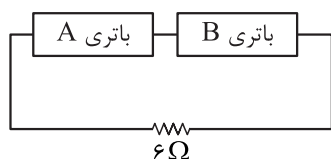
(۴) ۳

۵۸- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری‌های A و B بر حسب جریانی که از آن‌ها می‌گذرد، به شکل (الف)

است. اگر با این دو باتری مدار شکل (ب) را تشکیل دهیم، جریان A از مقاومت 6Ω می‌گذرد، مقاومت درونی باتری B چند اهم است؟



(الف)



(ب)

(۴) ۱

(۳) ۷۵ / ۰

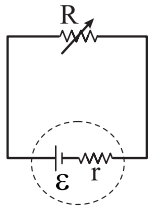
(۲) ۵ / ۰

(۱) ۲۵ / ۰

محل انجام محاسبات



۵۹- اگر در مدار شکل زیر، مقدار مقاومت متغیر R را از $R_1 = 2r$ تا $R_2 = 3r$ افزایش دهیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی



دو سر باتری چند درصد و چگونه تغییر می کند؟

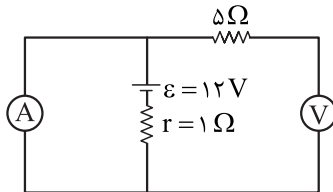
(۲) ۲۵٪ افزایش می یابد.

(۱) ۱۲/۵٪ افزایش می یابد.

(۴) ۲۵٪ کاهش می یابد.

(۳) ۱۲/۵٪ کاهش می یابد.

۶۰- در شکل زیر اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی عوض شود، کدام موارد درست است؟



الف) عددی که آمپرسنج نشان می دهد، ۱۰ A کاهش می یابد.

ب) عددی که ولتسنج نشان می دهد، ۱۰ V افزایش می یابد.

پ) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ اهمی، ۱۲ V افزایش می یابد.

(۲) الف، ب

(۱) الف، ب

(۴) الف، ب، پ

(۳) ب، پ

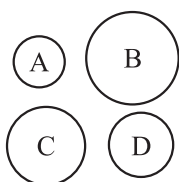


شیمی یازدهم

۶۱- اگر آرایش الکترونی یون A^{3+} به زیرلایه $3d^3$ ختم شود، خارجی ترین زیرلایه در آرایش الکترونی اتم A کدام است و عنصر A، چندمین فلز واسطه جدول دوره ای محسوب می شود؟

- (۱) $4s^1$ - چهارمین
(۲) $3d^6$ - ششمین
(۳) $4s^1$ - ششمین
(۴) $4s^2$ - چهارمین

۶۲- شکل زیر، نشان دهنده شعاع نسبی چهار عنصر متوالی از دوره سوم جدول تناوبی است که در گروه های یک تا چهارده قرار دارند. با توجه به شکل، کدام عنصر یک شبه فلز است؟



- (۱) A
(۲) B
(۳) C
(۴) D

۶۳- اگر در واکنش ترمیت، 150 گرم آلومینیم با خلوص 54% درصد با مقدار کافی از واکنش دهنده دیگر واکنش دهد، چند گرم ترکیب یونی تولید می شود؟ (بازده واکنش را 70% درصد در نظر بگیرید.)

($O = 16, Al = 27, Fe = 56 : g.mol^{-1}$)

- (۱) $51/2$ (۲) 102 (۳) $107/1$ (۴) 153

۶۴- طبق اطلاعات کتاب درسی، در واکنش تهیه عنصر اصلی سازنده سلول های خورشیدی، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد کدام است و در این واکنش، کدام گاز تولید می شود؟

- (۱) $CO_2 - 4$ (۲) $CO_2 - 6$ (۳) $CO - 4$ (۴) $CO - 6$

۶۵- در دما و فشار اتاق و با توجه به ویژگی های زیر، کدام آلکان ها به ترتیب از راست به چپ، بیشترین فشاریت و بالاترین نقطه جوش را دارند؟ (همه آلکان ها را راست زنجیر در نظر بگیرید: $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

- A: آلکانی که به عنوان سوخت فندک کاربرد دارد.
- B: آلکانی که جرم مولی آن 44 گرم بر مول است.
- C: ششمین عضو خانواده آلکان ها است.
- D: سبک ترین آلکانی که حالت مایع دارد.

- (۱) A - D (۲) C - B (۳) C - D (۴) A - B

محل انجام محاسبات



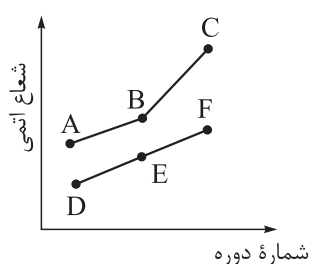
۶۶- درستی یا نادرستی کدام گزینه، مانند عبارت درون کادر نیست؟

در دمای ثابت، تفاوت چشم‌گیری میان انرژی گرمایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وجود ندارد و گرمای جذب‌شده یا آزادشده در واکنش‌ها در دمای ثابت، عمدتاً به تفاوت میان انرژی پتانسیل مواد واکنش‌دهنده و فراورده مربوط است.

- (۱) به ازای دریافت مقدار مشخصی گرما توسط مقدار یکسانی نان و سیب‌زمینی، نان تغییر دمای بیشتری خواهد داشت.
- (۲) ظرفیت گرمایی یک مول ماده، از حاصل ضرب ظرفیت گرمایی ویژه در جرم مولی آن ماده به دست می‌آید.
- (۳) انرژی مورد نیاز برای تبخیر مقدار معینی از یک ماده به حالت مایع، کمتر از انرژی مورد نیاز برای ذوب همان مقدار ماده به حالت جامد است.
- (۴) اگر دو دگرشکل یک عنصر، در یک واکنش مشابه و گرماگیر شرکت کرده و فراورده یکسانی تولید کنند، در واکنشی که دگرشکل ناپایدارتر شرکت کرده، گرمای کم‌تری مصرف می‌شود.

۶۷- کدام مورد دربارهٔ عنصرهایی از جدول تناوبی که آرایش الکترونی اتم آن‌ها به زیرلایه p^2 ختم می‌شود، نادرست است؟

- (۱) عنصری که در دورهٔ ششم جدول قرار دارد، در ساخت ساچمه‌های تفنگ‌های شکاری کاربرد دارد.
 - (۲) همهٔ این عنصرها دارای رسانایی الکتریکی هستند.
 - (۳) عنصری که در حالت جامد سطحی کدر دارد، اساس استخوان‌بندی هیدروکربن‌ها را تشکیل می‌دهد.
 - (۴) عنصری که ۲۵ درصد از الکترون‌های موجود در آرایش الکترونی اتم آن $l = 0$ دارند، در حالت جامد چکش‌خوار است.
- ۶۸- نمودار زیر، شعاع اتمی سه عضو نخست گروه هالوژن‌ها و فلزهای قلیایی را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های موجود در این نمودار، کدام مورد نادرست است؟ (نماد عنصرها فرضی است.)



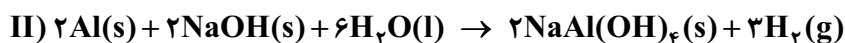
- (۱) جلای نقره‌ای B در مجاورت هوا به سرعت از بین می‌رود و سطح آن کدر می‌شود.
- (۲) شدت واکنش شیمیایی بین عنصرهای C و D، بیشتر از شدت واکنش شیمیایی بین عنصرهای A و F است.
- (۳) عنصر F در مقایسه با عنصر D، در دمای بالاتری با گاز هیدروژن واکنش داده و نقطهٔ جوش ترکیب هیدروژن‌دار حاصل از عنصر F بیشتر از ترکیب هیدروژن‌دار D است.
- (۴) طول موج نور حاصل از واکنش میان عنصرهای C و E، کوتاه‌تر از طول موج نور حاصل از واکنش میان عنصرهای A و E است.

محل انجام محاسبات



۶۹- در شرایطی معین، ۲/۱ گرم منیزیم کربنات ناخالص و ۱ گرم آلومینیم ناخالص در واکنش‌های زیر شرکت می‌کنند. اگر جرم گاز تولیدشده در دو واکنش برابر باشد، نسبت درصد خلوص آلومینیم به منیزیم کربنات کدام است؟

($H = 1, C = 12, O = 16, Mg = 24, Al = 27 : g.mol^{-1}$)



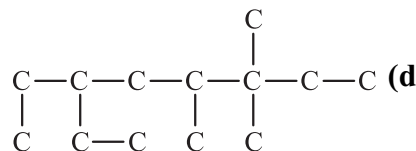
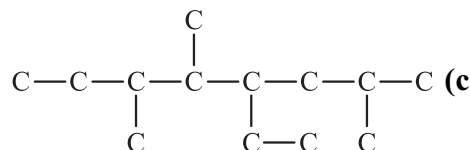
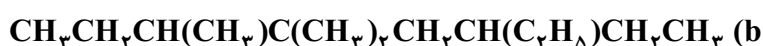
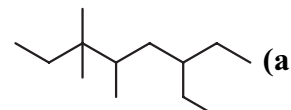
۲۹ / ۷ (۴)

۹ / ۹ (۳)

۳ / ۳ (۲)

۰ / ۴۵ (۱)

۷۰- کدام ساختارها یا نمایش‌های زیر، مربوط به یک آلکان هستند و نام این آلکان کدام است؟



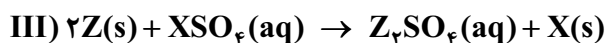
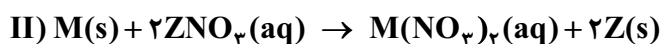
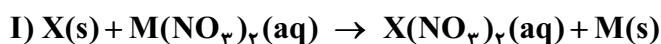
(۲) a و b - ۶ - اتیل - ۳، ۴، ۴ - تری‌متیل اوکتان

(۱) a و d - ۶ - اتیل - ۳، ۳، ۴ - تری‌متیل اوکتان

(۴) c و d - ۳ - اتیل - ۲، ۵، ۶ - تری‌متیل اوکتان

(۳) b و c - ۳ - اتیل - ۵، ۵، ۶ - تری‌متیل اوکتان

۷۱- اگر از میان واکنش‌های زیر، فقط یکی از واکنش‌ها به طور طبیعی انجام شود، کدام مورد نادرست است؟



(۱) اگر واکنش‌پذیری فراورده‌های واکنش (I) کمتر از واکنش‌دهنده‌های آن باشد، می‌توان نتیجه گرفت که واکنش‌پذیری فلز Z بیشتر از فلز M است.

(۲) اگر شرایط نگهداری فلز M دشوارتر از فلز Z باشد؛ واکنش‌پذیری هر دو فلز X و Z کمتر از فلز M است.

(۳) اگر واکنش‌پذیری فلز X از هر دو فلز M و Z کمتر باشد، واکنش (II) به طور طبیعی انجام نخواهد گرفت.

(۴) اگر واکنش‌پذیری فلز X از فلز M بیشتر باشد، محلول نمک‌های فلز M را می‌توان در ظرفی از جنس فلز Z نگهداری کرد.

محل انجام محاسبات

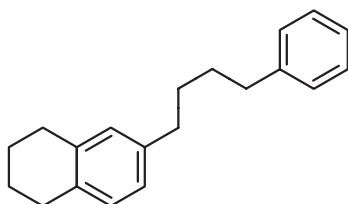


۷۲- کدام مورد، جمله زیر را به درستی کامل می‌کند؟

«..... با در ساختار خود، در هر مولکول دارد.»

- (۱) آلکینی - ۴ پیوند اشتراکی یگانه میان اتم‌های کربن - ۱۴ پیوند اشتراکی کربن - هیدروژن
- (۲) آلکانی - ۱۶ اتم هیدروژن - ۷ پیوند اشتراکی میان اتم‌های کربن
- (۳) آلکینی - ۲۱ پیوند اشتراکی - ۶ پیوند اشتراکی $C \equiv C$
- (۴) آلکینی - ۸ اتم کربن - ۹ پیوند اشتراکی میان اتم‌های کربن

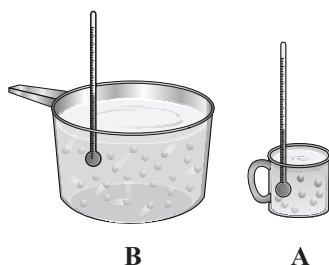
۷۳- برای سوختن کامل هر مول از هیدروکربن زیر، به چند مول گاز اکسیژن نیاز است؟



- (۱) ۲۰
- (۲) ۲۲
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۶

۷۴- کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) نفت برنت دریای شمال در مقایسه با نفت سنگین ایران، نفت کوره کم‌تر و گازوئیل بیشتری دارد.
 - (۲) نفت سفید شامل آلکان‌هایی است که از ده تا پانزده اتم کربن تشکیل شده‌اند.
 - (۳) در معادن زغال‌سنگ با افزایش درصد متان به هر میزان، احتمال انفجار به طور منظم افزایش می‌یابد.
 - (۴) جایگزینی نفت با زغال‌سنگ سبب ورود مقدار بیشتری از آلاینده‌ها شده و اثر گلخانه‌ای تشدید می‌شود.
- ۷۵- شکل‌های زیر، دو نمونه آب را نشان می‌دهند. اگر انرژی گرمایی دو نمونه برابر باشد، به ترتیب از راست به چپ، میانگین تندی ذرات سازنده کدام بیشتر است و برای افزایش دمای کدام نمونه به میزان $5^{\circ}C$ ، به گرمای کم‌تری نیاز است؟ (گرمای ویژه آب در دماهای مختلف را یکسان در نظر بگیرید.)



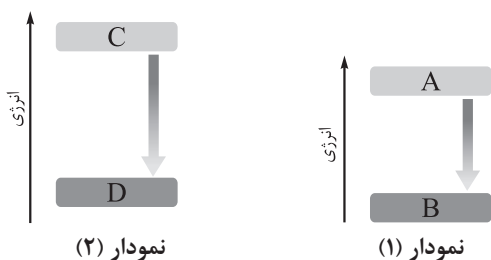
- (۱) A, A
- (۲) B, A
- (۳) B, B
- (۴) A, B

۷۶- مخلوطی از هگزان و ۱- هگزن به جرم $6/25$ گرم در اختیار داریم. اگر این مخلوط را با مقدار کافی Br_2 واکنش دهیم، نسبت افزایش جرم مخلوط به جرم اولیه آن برابر با $1/28$ خواهد بود. چند گرم هگزان در مخلوط اولیه وجود دارد و چند مول گاز هیدروژن برای واکنش کامل با ۱- هگزن موجود در مخلوط اولیه لازم است؟ ($H = 1, C = 12, Br = 80 : g.mol^{-1}$)

- (۱) $2/05 - 1/0$
- (۲) $4/2 - 1/0$
- (۳) $2/05 - 0/05$
- (۴) $4/2 - 0/05$

محل انجام محاسبات

۷۷- اگر نمودارهای زیر، نشان‌دهنده تغییرات انرژی پس از ورود مقداری شیر 60°C به بدن باشند، کدام نمودار، تغییرات انرژی را در فرایند هم‌دماشدن شیر با بدن نشان می‌دهد و سطح انرژی C مربوط به کدام ماده است؟



- (۱) نمودار (۱) - شیر 37°C
 (۲) نمودار (۲) - شیر 37°C
 (۳) نمودار (۱) - شیر 60°C
 (۴) نمودار (۲) - شیر 60°C

۷۸- اگر با دادن 370 ژول گرما به آلیاژی از فلزهای منیزیم و مس به جرم 40 گرم، دمای آن 10°C افزایش یابد، چند درصد از جرم این آلیاژ را فلز منیزیم تشکیل می‌دهد؟

فلز	مس	منیزیم
گرمای ویژه (ژول بر گرم بر درجه سلسیوس)	۰/۴	۱

۸۷/۵ (۴)

۶۵ (۳)

۳۵ (۲)

۱۲/۵ (۱)

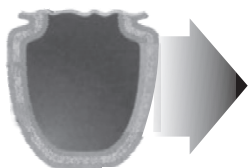
۷۹- دو نمونه از گاز H_2 در دو واکنش جداگانه، یک بار با مقداری گاز N_2 و بار دیگر با مقداری گاز N_2H_4 به طور کامل واکنش داده و همه واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل می‌شوند. اگر در پایان هر دو واکنش یک مول آمونیاک تولید شود، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) در معادله هر دو واکنش، نماد Q در سمت راست نوشته می‌شود.
 (۲) مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنشی که در آن گاز N_2 مصرف می‌شود، کم‌تر از مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنش دیگر است.

(۳) نمونه حاوی گازهای N_2H_4 و H_2 در مقایسه با نمونه دیگر، سطح انرژی بالاتری داشته و ناپایدارتر است.

(۴) با فرض شرایط STP، تفاوت حجم گاز H_2 مصرف‌شده در دو واکنش، برابر با $44/8$ لیتر است.

۸۰- با توجه به شکل داده‌شده که مربوط به یخچال صحرایی است، کدام مطلب درست است؟



(۱) براساس معادله: $\text{H}_2\text{O}(g) \rightarrow \text{H}_2\text{O}(l) + 44/1 \text{ kJ}$ ، محتویات درون آن خنک می‌شود.

(۲) آب در بدنه بیرونی ظرف نفوذ کرده و به سرعت تبخیر می‌شود.

(۳) جهت فلش، نشان‌دهنده جذب گرما از محیط بیرون است.

(۴) این دستگاه به انرژی الکتریکی نیاز ندارد و تبخیر آب باعث افت دمای محتویات آن می‌شود.

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.



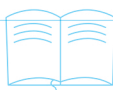
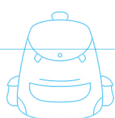
آزمون‌های تشریحی خیلی سبز



۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخ‌برگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عیناً مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال



تصحیح کاملاً مکانیزه

- تصحیح کاملاً حرفه‌ای توسط دو مصحح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پیل ثبت اعتراض



کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی



باسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله نهم

پایه یازدهم

۱۴۰۴/دی/۲۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دانشته ریاضی

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - علی شهرابی - محسن علی نجاری - محمد گودرزی - نیما مهندس
هندسه	کیوان صارمی - ماهک کناره
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	پیمان خواجوی مجد - سروش عبادی - یاسر عبداللہی - محسن مجنونی

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محسن علی نجاری	محسن علی نجاری	علیرضا کاظمی بقا محمد رضا راسخ	فرشاد حسن زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی مرضیه فرشید
هندسه	کیوان صارمی	کیوان صارمی	ماهک کناره	ماهک کناره	ماهان فنی فر امیرحسین ابومحبوب ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	علیرضا کاظمی بقا	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	مریم گلی حسن لو	سعید محبی	علیرضا جعفری پوریا علاقه مند امیر محمودی انزایی سعید محبی
شیمی	یاسر عبداللہی	سروش عبادی	یاسر عبداللہی	مرتضی نصیرزاده یاشار ذریه	یلدا رزاق زاده فردین علی دوست آرمین عظیمی مهدیس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور



Azmoon.kheilisabz.com

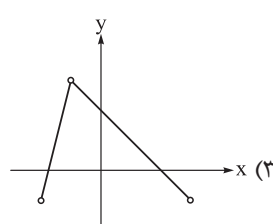
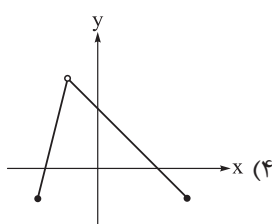
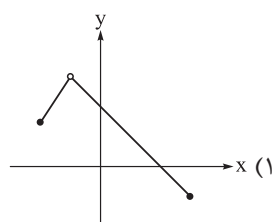
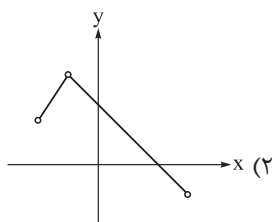
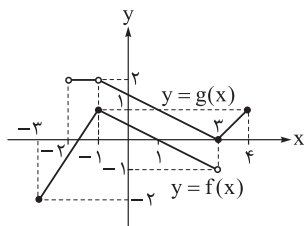
آزمون آزمایشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی الهه صفری - زهرا صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - نادره نازآوری ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی



در شکل زیر، نمودار تابع های f و g روی دامنه شان رسم شده اند. نمودار تابع $f + g$ روی دامنه اش کدام است؟

۱



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: دامنه تابع f بازه $[-3, 3]$ و دامنه تابع g مجموعه $\{-1\} - (-2, 4]$ است؛ پس دامنه تابع $f + g$ برابر است با:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-2, 3) - \{-1\}$$

گام دوم: با توجه به این که ابتدا و انتهای بازه $(-2, 3)$ باز است، یکی از گزینه های (۲) و (۳) درست است؛ زیرا ابتدا و انتهای نمودار باید حفره باشد.

گام دوم: با توجه به نمودارها، $0 < f(-2) < 1$ است. حال از آنجا که مقدار تابع g در بازه $(-2, -1)$ ثابت و برابر ۲ است، تابع $f + g$ در ابتدای نمودار باید مثبت باشد، یعنی گزینه (۲) پاسخ صحیح سؤال است.

په چور دیگه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} & ; -3 \leq x \leq -1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & ; -1 \leq x < 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2 & ; -2 < x < -1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & ; -1 < x \leq 3 \\ x - 3 & ; 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} & ; -2 < x < -1 \\ -x + 2 & ; -1 < x < 3 \end{cases}$$

توابع $f = \{(3, a+1), (4, b-2), (5, c-1)\}$ و $g = \{(3, 2-a), (4, c+2), (5, b+3)\}$ مفروض اند. اگر

$(fg)(4) = 10$ و $D_{\frac{g}{f}} = \{4, 5\}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = \{3, 4\}$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

$$-6 \quad (4)$$

$$-8 \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: دامنه توابع f و g ، هر دو مجموعه $\{3, 4, 5\}$ است، حال با توجه به اطلاعات سؤال خواهیم داشت:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \xrightarrow{D_f = \{3, 4\}} g(5) = b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$$

این یعنی $g(5)$ حتماً برابر صفر بوده است که $x = 5$ از مجموعه $\{3, 4, 5\}$ خط خورده است.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} \xrightarrow{D_g = \{4, 5\}} f(3) = a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

گام دوم: همچنین طبق فرض $(fg)(4) = 10$ است، در نتیجه:

$$f(4)g(4) = 10 \Rightarrow (b-2)(c+2) = 10 \xrightarrow{b=-3} (-5)(c+2) = 10$$

$$\Rightarrow c+2 = -2 \Rightarrow c = -4$$

گام سوم: بنابراین خواسته سؤال برابر می شود با:

$$a + b + c = (-1) + (-3) + (-4) = -8$$

۳ مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = 2[x] + 1$ و محور x در بازه $[-\frac{3}{2}, 3]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

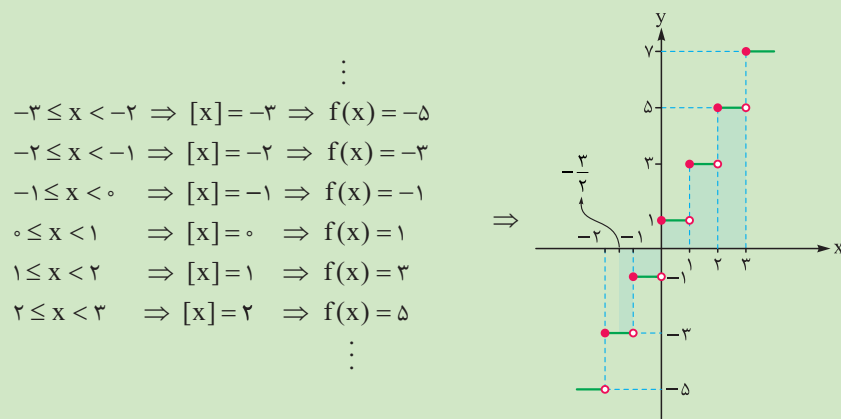
۱۰/۵ (۴)

۱۱/۵ (۳)

۱۰ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نمودار تابع f را رسم می کنیم:

گام دوم: سطح مشخص شده در شکل بالا سطح مورد نظر است که از ۵ مستطیل تشکیل شده است و مساحت آن برابر است با:

$$1 \times 5 + 1 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 = 11/5$$

(مسابان (۱) - تمرین ۷ صفحه ۵۳ کتاب درسی)

نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

کتاب درسی

الف) $f(x) = [x] + 1$, $-2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = [\frac{1}{2}x]$, $-4 \leq x < 4$

۴ تابع f با ضابطه $f(x) = |4x - 3| - 4x$ روی بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه تابع f^{-1} در این بازه کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{8} ; x \geq -3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3+x}{8} ; x \geq -3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{8} ; x \geq \frac{3}{4} \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3+x}{8} ; x \geq \frac{3}{4} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

ضابطه تابع وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است. دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا با ضابطه بندی، بازه وارون پذیری تابع را می یابیم:

$$f(x) = \begin{cases} -8x + 3 & ; x \leq \frac{3}{4} \\ -3 & ; x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

پس تابع f روی بازه $(-\infty, \frac{3}{4}]$ یک به یک و وارون پذیر است.

گام دوم: برد تابع در این بازه را به دست می آوریم:

$$x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -8x \geq -6 \Rightarrow -8x + 3 \geq -3$$

این یعنی برد تابع f و در نتیجه دامنه تابع f^{-1} ، بازه $[-3, +\infty)$ است.

گام سوم: طبق نکته، ضابطه تابع f^{-1} را می نویسیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{-8} = \frac{3-x}{8}$$

در نتیجه گزینه (۲) پاسخ صحیح سؤال است.

اگر توابع $f(x) = |4x + 2k| \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{(4x+2k)^2(x-3)}$ با هم برابر باشند، محدوده k کدام است؟

$$k \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$k \leq ۶ \quad (۳)$$

$$k \leq -۶ \quad (۲)$$

$$k \geq -۶ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

تساوی دو تابع:

توابع f و g را برابرگوییم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) دامنه آنها برابر باشد.

(۲) ضابطه آنها نیز یکی شود، به عبارت دیگر هر x که به f می‌دهیم، همان مقدار را بدهد که g به ازای همان x به ما می‌دهد.

توجه: شرط برابری دامنه‌ها را قبل از ساده کردن باید بررسی کنیم.

گام اول: دامنه f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = |4x + 2k| \sqrt{x-3} : x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$$

گام دوم: حالا نوبت به دست آوردن دامنه تابع g است:

$$g(x) = \sqrt{(4x+2k)^2(x-3)}$$

$$\underbrace{(4x+2k)^2}_{\text{همواره مثبت یا صفر}} (x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x+2k=0 \Rightarrow x=-\frac{k}{2} \Rightarrow D_g = [3, +\infty) \cup \{-\frac{k}{2}\} \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

گام سوم: دو تابع باید برابر باشند، پس باید $D_f = D_g$ و در نتیجه $-\frac{k}{2} \in [3, +\infty)$ باشد:

$$\Rightarrow -\frac{k}{2} \geq 3 \xrightarrow{\times 2} -k \geq ۶ \xrightarrow{\times (-1)} k \leq -۶$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



تابع خطی f مفروض است. اگر تابع $g(x) = f(x) + f^{-1}(x) + 3x + 2$ همانی باشد، حاصل $f(2) + f^{-1}(3)$ کدام است؟

-۷ (۴)

-۵ (۳)

-۴ (۲)

-۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

به دست آوردن ضابطه تابع وارون:

ابتدا x را بر حسب y می‌نویسیم، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم، به عنوان مثال:

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تعويض } x \text{ و } y} f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

گام اول: تابع f خطی است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ است، حال ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

گام دوم: حال ضابطه تابع g را می‌نویسیم:

$$g(x) = f(x) + f^{-1}(x) + 3x + 2 = ax + b + \frac{x}{a} - \frac{b}{a} + 3x + 2$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(a + \frac{1}{a} + 3\right)x + b - \frac{b}{a} + 2$$

گام سوم: طبق فرض سؤال، تابع g همانی است، یعنی ضابطه آن به صورت $g(x) = x$ است، در نتیجه:

$$\left(a + \frac{1}{a} + 3\right)x + b - \frac{b}{a} + 2 = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{a} + 3 = 1 \Rightarrow a + \frac{1}{a} + 2 = 0 \xrightarrow{\times a} a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ b - \frac{b}{a} + 2 = 0 \xrightarrow{a=-1} b - (-b) + 2 = 0 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

گام چهارم: پس $f^{-1}(x) = f(x) = -x - 1$ ، در نتیجه خواسته سؤال برابر است با:

$$\begin{cases} f(2) = -(2) - 1 = -3 \\ f^{-1}(3) = -(3) - 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow f(2) + f^{-1}(3) = (-3) + (-4) = -7$$

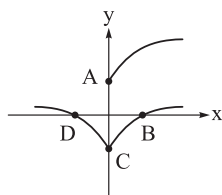
درس Box



پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودارهای توابع $f(x) = \sqrt{x} + k$ ، $g(x) = \sqrt{x} - k$ و $h(x) = \sqrt{-x} - k$ در شکل زیر رسم شده‌اند. اگر

چهارضلعی ABCD مربع باشد، مساحت آن کدام است؟ ($k > 0$)



۱ (۱)

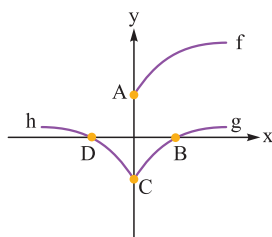
۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: با توجه به دامنه و همچنین عرض از مبدأ توابع، می‌توانیم به سادگی متوجه شویم که کدام نمودار مربوط به کدام تابع است: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



حالا مختصات نقاط A، B، C و D را پیدا می‌کنیم:

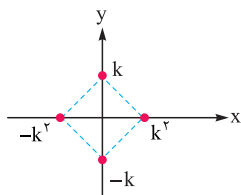
$$f(0) = k \Rightarrow A(0, k)$$

$$g(0) = -k \Rightarrow C(0, -k)$$

$$g(x_B) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_B} - k = 0 \Rightarrow x_B = k^2 \Rightarrow B(k^2, 0)$$

$$h(x_D) = 0 \Rightarrow \sqrt{-x_D} - k = 0 \Rightarrow x_D = -k^2 \Rightarrow D(-k^2, 0)$$

گام دوم: پس چهار نقطه مشخص شده در شکل مقابل را داریم:



برای این که این لوزی (زیرا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگرند) مربع باشد، کافی است طول قطرهای آن با هم برابر باشند:

$$\Rightarrow 2k^2 = 2k \Rightarrow 2k^2 - 2k = 2k(k-1) = 0 \xrightarrow{k>0} k = 1$$

گام سوم: در این شرایط طول قطر مربع برابر ۲ و مساحت آن برابر $\frac{2^2}{2} = 2$ است.

ریاضیات

۸ نمودار تابع $f(x) = -\frac{|x|}{x} \sqrt{a+bx^2}$ و نمودار وارون آن از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرند. حاصل $a \times b$ کدام است؟

$$-11 \quad (4)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-13 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

کافیست که از نکته استفاده کنی، یعنی $(-2, 3)$ و $(3, -2)$ عضو f هستند.

Hint

اگر $(a, b) \in f$ ، آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌دانیم که $\frac{|x|}{x}$ در $x > 0$ برابر یک و در $x < 0$ برابر -1 است، پس ضابطه f به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = -\frac{|x|}{x} \sqrt{a+bx^2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{a+bx^2} & ; x > 0 \\ \sqrt{a+bx^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع f از نقطه $(3, -2)$ می‌گذرد:

$$(3, -2) \in f \Rightarrow f(3) = -2 \xrightarrow[\text{ضابطه بالایی}]{3 > 0} -2 = -\sqrt{a+9b} \xrightarrow{\text{توان 2}} a+9b = 4 \quad (*)$$

گام سوم: نقطه $(-2, 3)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد، پس نمودار تابع f از نقطه $(3, -2)$ نیز می‌گذرد:

$$(3, -2) \in f^{-1} \Rightarrow f(-2) = 3 \xrightarrow[\text{ضابطه پایینی}]{-2 < 0} 3 = \sqrt{a+4b} \xrightarrow{\text{توان 2}} a+4b = 9 \quad (**)$$

گام چهارم: حال از روابط $(*)$ و $(**)$ ، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a+9b=4 \\ a+4b=9 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=13, b=-1$$

بنابراین خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$a \times b = (13)(-1) = -13$$

تابع $y = \frac{x}{|x|} \sqrt{a+bx^2}$ و وارون آن از نقطه $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ می‌گذرند. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۹ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

$$-1 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$

کنکور

۹ اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 - 7x + 8}$ و $g(x) = \frac{-x+3}{4}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ بازه $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

۳۴ (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

تابع مرکب: نمودار زیر، ترکیب دو تابع f و g را نمایش می‌دهد که با نماد $f \circ g$ آن را می‌نویسیم:و این زمانی اتفاق می‌افتد که خروجی تابع g به عنوان ورودی به تابع f وارد شود.دامنه تابع $f \circ g$ از راه زیر تعریف می‌شود و به دست می‌آید:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه تابع $f \circ g$ همواره زیرمجموعه دامنه تابع g و برد تابع $f \circ g$ همواره زیرمجموعه برد تابع f است.گام اول: دامنه تابع خطی g برابر $\mathbb{R}$ است و دامنه تابع f را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$-x^2 - 7x + 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 8 = (x+8)(x-1) \leq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 1$$

پس $D_f = [-8, 1]$ است.گام دوم: حالا طبق تعریف، $D_{f \circ g}$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-x}{4} \in D_f\}$$

نامساوی $\frac{3-x}{4} \in D_f$ را حل می‌کنیم:

$$-8 \leq \frac{3-x}{4} \leq 1 \Rightarrow -32 \leq 3-x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-3 \leq 32 \xrightarrow{+3} -1 \leq x \leq 35$$

پس داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 35\} \Rightarrow D_{f \circ g} = [-1, 35]$$

این یعنی $a = -1$ ، $b = 35$ و در نتیجه $b - a = 36$ است.

تیزبازی طول بازه دامنه تابع f برابر $9 - (-8) = 17$ است و قدرمطلق شیب تابع خطی g نیز برابر $\frac{1}{4}$ است. پس برای این که برد تابع g بازه‌ای به طول ۹ باشد، دامنه آن باید بازه‌ای به طول $9 \times 4 = 36$ باشد. این همان $b - a$ است.

اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x^2 - 3$ باشد، دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(سؤال ۹ - قسمت الف) - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳

 امتحان
نهایی

ریاضیات

۱۰ اگر f یک تابع خطی و به ازای هر عدد حقیقی x ، تساوی $f^{-1}(x) + (fof^{-1})(x) + \frac{1}{4}f(x) = 0$ برقرار باشد، ضابطه تابع $f + f^{-1}$ کدام است؟

$$-\frac{5}{4}x + 2 \quad (1) \quad -\frac{5}{4}x + 2 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3}x + 2 \quad (3) \quad -\frac{1}{3}x + 2 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته دو تابع $f^{-1}of$ و fof^{-1} هر دو همانی هستند، اما در دامنه‌های متفاوت، دامنه تابع fof^{-1} برد تابع f و دامنه تابع $f^{-1}of$ دامنه تابع f است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ضابطه تابع f را $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(x) = x \\ f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \end{cases}$$

حالا معادله مفروض را می‌سازیم:

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} + x + \frac{1}{4}ax + \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + 1 + \frac{a}{4}\right)x + \left(\frac{b}{4} - \frac{b}{a}\right) = 0$$

گام دوم: برای این که تساوی بالا به ازای هر x حقیقی برقرار باشد، لازم است ضرایب، هر دو برابر صفر باشند:

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{4} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{a^2 + 4a + 4}{4a} = \frac{(a+2)^2}{4a} = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\frac{b}{4} - \frac{b}{a} = 0 \xrightarrow{a=-2} \frac{b}{4} + \frac{b}{2} = \frac{3b}{4} = 0 \Rightarrow b = 0$$

گام سوم: بنابراین $f(x) = -2x$ ، $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x$ و در نتیجه $(f + f^{-1})(x) = -\frac{5}{2}x$ است.

(مسایان (۱) - تمرین ۸ صفحه ۶۹ کتاب درسی)

اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ ، fof^{-1} و $f^{-1}of$ را به دست آورید.

کتاب درسی

ریاضیات

۱۱ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; x > 3 \\ x+2 & ; x \leq 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - x & ; f(x) > 0 \\ x-4 & ; f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(-4) + (gof)(1)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) صفر ۴) -۸

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: کار خاصی قرار نیست انجام دهیم. فقط کافی است مقادیر را حساب و جای گذاری کنیم:

$$\begin{cases} (gof)(1) = g(f(1)) \\ \xrightarrow{1 \leq 3} f(1) = 1+2 = 3 \end{cases} \Rightarrow g(f(1)) = g(3)$$

برای محاسبه $g(3)$ به $f(3)$ نیاز داریم:

$$f(3) = 3+2 = 5 > 0 \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی } g} g(3) = 3^2 - 3 = 6$$

گام دوم: $(fog)(-4)$ را نیز حساب می‌کنیم؛ برای محاسبه آن به $f(-4)$ نیاز داریم:

$$f(-4) = -4+2 = -2 < 0 \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی } g} g(-4) = -4-4 = -8$$

$$\Rightarrow (fog)(-4) = f(g(-4)) = f(-8) = -6$$

در نتیجه داریم:

$$(gof)(1) + (fog)(-4) = 6 - 6 = 0$$

اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 2 \\ -3x+7 & ; x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x+4 & ; f(x) \geq 0 \\ x-4 & ; f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-4)$ کدام است؟

(سوال ۹ کنکور ۱۴۰۳ ریاضی - نوبت دوم)

۱) ۱۹ ۲) ۹ ۳) -۱۵ ۴) -۵

کنکور

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; x \geq 1 \\ -x+2 & ; x < 1 \end{cases}$ ، مجموع جواب‌های معادله $(f \circ f)(x) = -x + 4$ کدام است؟

$$\frac{3}{5} (4)$$

$$-2 (3)$$

$$-\frac{2}{5} (2)$$

$$\frac{18}{5} (1)$$

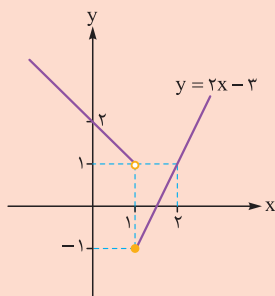
پاسخ: گزینه ۴

ضابطه تابع $f \circ f$ رو به دست بیار.

Hint

گام اول: برای سادگی، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار بالا مشخص می‌کند که به ازای $x \in [1, 2)$ داریم:

$$f(x) < 1$$

و به ازای $x \in \mathbb{R} - [1, 2)$ داریم:

$$f(x) \geq 1$$

گام دوم: حالا با توجه به گزاره بالا، ضابطه تابع $f \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$\bullet x \in [1, 2) \xrightarrow{f(x) < 1} f(f(x)) = -f(x) + 2 \xrightarrow{x \geq 1} f(f(x)) = -(2x-3) + 2 = -2x + 5$$

$$\bullet x < 1 \xrightarrow{f(x) > 1} f(f(x)) = 2f(x) - 3 \xrightarrow{x < 1} f(f(x)) = 2(-x+2) - 3 = -2x + 1$$

$$\bullet x \geq 2 \xrightarrow{f(x) \geq 1} f(f(x)) = 2f(x) - 3 \xrightarrow{x \geq 1} f(f(x)) = 2(2x-3) - 3 = 4x - 9$$

بنابراین داریم:

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -2x + 1 & ; x < 1 \\ -2x + 5 & ; 1 \leq x < 2 \\ 4x - 9 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

گام سوم: حالا برای پیدا کردن جواب‌های معادله $(f \circ f)(x) = 4 - x$ ، هر ضابطه تابع $f \circ f$ را برابر $4 - x$ قرار می‌دهیم و جواب به دست آمده را با شرط آن ضابطه چک می‌کنیم:

$$\bullet x < 1: -2x + 1 = 4 - x \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3 \quad \checkmark$$

$$\bullet 1 \leq x < 2: -2x + 5 = 4 - x \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark$$

$$\bullet x \geq 2: 4x - 9 = 4 - x \Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{5} \quad \checkmark$$

هر ۳ جواب قابل قبول است و در نهایت مجموع آن‌ها برابر است با:

$$-3 + 1 + \frac{13}{5} = \frac{3}{5}$$

اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ x+1 & ; -2 \leq x < 0 \end{cases}$ باشد، معادله $f \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

(سوال ۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

$$4 (4)$$

$$3 (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

ریاضیات

۱۳

حداقل چند جمله اول دنباله حسابی ... ۷, ۴ را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۶۵۰ بیشتر شود؟

۲۲ (۴)

۲۱ (۳)

۲۰ (۲)

۱۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d$ که در آن d قدرنسبت دنباله است، دنباله حسابی می‌نامیم. مجموع n جمله اول این دنباله را S_n می‌نامیم و از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جمله اول دنباله، $a_1 = 4$ و قدرنسبت آن $d = 7 - 4 = 3$ است، پس مجموع n جمله اول آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 4 + (n-1) \times 3) = \frac{n}{2}(3n + 5)$$

گام دوم: حالا باید S_n را بیشتر از ۶۵۰ قرار دهیم، پس باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$S_n > 650 \rightarrow \frac{n}{2}(3n + 5) > 650$$

خود را درگیر محاسبات نامعادله نمی‌کنیم و با امتحان کردن مقادیر گزینه‌ها به جواب می‌رسیم:

$$\text{گزینه (۱): } S_{19} = \frac{19 \times 62}{2} = 19 \times 31 = 589$$

$$\text{گزینه (۲): } S_{20} = \frac{20 \times 65}{2} = 650$$

بنابراین باید حداقل ۲۱ جمله اول را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۶۵۰ بیشتر شود.

در دنباله حسابی ... ۱۱, ۸, ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

(حسابان (۱) - تمرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی)

کتاب درسی

۱۴

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 2x - 5 = 0$ باشد، حاصل $8\alpha^3 + 4\beta^2 + 10\beta$ کدام است؟

۲۷ (۴)

۶ (۳)

۹ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$x = \alpha$ رو در معادله جای گذاری کنیم و بعدش تساوی به دست آورده رو به صورت $4\alpha^2 = 2\alpha + 5$ بنویسیم.

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن گاه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر می‌شود با:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ (مجموع مربعات ریشه‌ها) برابر می‌شود با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

گام اول: α ریشه معادله $4x^2 - 2x - 5 = 0$ است، پس در آن صدق می‌کند:

$$4\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0 \xrightarrow{\times 2\alpha} 8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 10\alpha = 0 \Rightarrow 8\alpha^3 = 4\alpha^2 + 10\alpha$$

گام دوم: حال در خواسته سؤال، به جای $8\alpha^3$ ، $4\alpha^2 + 10\alpha$ را قرار می‌دهیم:

$$8\alpha^3 + 4\beta^2 + 10\beta = 4\alpha^2 + 10\alpha + 4\beta^2 + 10\beta = 4(\alpha^2 + \beta^2) + 10(\alpha + \beta) \quad (*)$$

گام سوم: در معادله $4x^2 - 2x - 5 = 0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر $S = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = -\frac{5}{4}$ است؛ بنابراین:

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{11}{4}$$

گام چهارم: حال مقادیر به دست آمده در گام سوم را در رابطه (*) جای گذاری می‌کنیم تا پاسخ سؤال به دست آید:

$$8\alpha^3 + 4\beta^2 + 10\beta = 4(\alpha^2 + \beta^2) + 10(\alpha + \beta) = 4\left(\frac{11}{4}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 16$$

Hint

درس Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سهمی $y = mx^2 + (m-2)x + m-1$ فقط از سه ناحیه دستگاه مختصات عبور می‌کند. $[-m]$ کدام نمی‌تواند باشد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۴

Hint باید $\Delta > 0$ و $ac \geq 0$.

درس‌Box

جدول زیر شرایط لازم برای گذر سهمی از ربع‌های دستگاه مختصات را بیان می‌کند.

$P < 0$ یا $ac < 0$	عبور از هر چهار ربع	۱
$\Delta > 0$	عبور از حداقل سه ربع	۲
$c \leq 0$ و $b < 0$ ، $a < 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع اول نگذرد.	۳
$c \leq 0$ و $b > 0$ ، $a < 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع دوم نگذرد.	۴
$c \geq 0$ و $b < 0$ ، $a > 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع سوم نگذرد.	۵
$c \geq 0$ و $b > 0$ ، $a > 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع چهارم نگذرد.	۶
$P \geq 0$ یا $ac \geq 0$	حداکثر از سه ربع بگذرد.	۷
$\Delta \leq 0$	از دو ربع بگذرد.	۸

گام اول: می‌خواهیم سهمی مورد نظر فقط از سه ناحیه مختصات بگذرد، یعنی یکی از ردیف‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ درس‌باکس؛ بنابراین Δ ی سهمی باید مثبت باشد:

$$y = mx^2 + (m-2)x + m-1$$

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(m)(m-1) = m^2 - 4m + 4 - 4m^2 + 4m = 4 - 3m^2$$

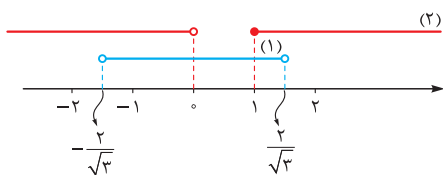
ریشه‌های چندجمله‌ای $4 - 3m^2$ اعداد $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ هستند.

$$\xrightarrow{\Delta > 0} -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

گام دوم: با دقت در ردیف‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌بینیم که در همه آن‌ها $\frac{c}{a} \geq 0$ ؛ بنابراین:

$$\frac{c}{a} = \frac{m-1}{m} \geq 0 \xrightarrow{\text{خارج ریشه‌ها}} m < 0 \text{ یا } m \geq 1 \quad (2)$$

گام سوم: برای این که خواسته سؤال برآورده شود باید هر دو شرط گام‌های اول و دوم با هم برقرار باشد، پس اشتراک مجموعه‌های (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم:



مطابق شکل بالا، از اشتراک (۱) و (۲) مجموعه قابل قبول برای m برابر $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0) \cup [1, \frac{2}{\sqrt{3}})$ است.

گام چهارم: پس مجموعه مقادیر قابل قبول برای $-m$ برابر $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0) \cup (-1, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ است و داریم:

$$[-m] = -2, -1, 0, 1$$

و با توجه به گزینه (۴)، $[-m]$ نمی‌تواند برابر ۲ باشد.

۱۶ اگر معادله $\frac{2x+a}{x^2-9} + \frac{4x}{x-3} = 4$ ریشه نداشته باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۸۴ (۴)

۷۲ (۳)

-۸۴ (۲)

-۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



بعد از حل معادله گویا، ریشه‌های به‌دست‌آمده نباید مخرج‌ها را صفر کنند، اگر به ازای ریشه‌های به‌دست‌آمده، هر کدام از مخرج‌ها صفر شوند، آن‌گاه ریشه‌ها غیر قابل قبول‌اند.

گام اول: می‌دانیم که $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ ، با توجه به این موضوع مخرج مشترک می‌گیریم و معادله را حل می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{2x+a}{x^2-9} + \frac{4x}{x-3} = 4 \Rightarrow \frac{(2x+a) + \frac{4x(x+3)}{x-3}}{x^2-9} = 4 \Rightarrow \frac{4x^2 + 14x + a}{x^2-9} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2 - 36 = 4x^2 + 14x + a \Rightarrow 14x = -36 - a \Rightarrow x = -\frac{36+a}{14}$$

گام دوم: می‌خواهیم این معادله ریشه نداشته باشد، پس جواب به‌دست‌آمده یعنی $x = -\frac{36+a}{14}$ ریشه مخرج کسرها است، ریشه‌های مخرج‌ها نیز عبارت‌اند از ۳ و -۳، پس:

$$-\frac{36+a}{14} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -36 - a = 42 \Rightarrow a = -78$$

$$-\frac{36+a}{14} = -3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -36 - a = -42 \Rightarrow a = 6$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$(-78) + (6) = -72$$

معادله $\sqrt{3x^2 + 6x + 4} = 2x^2 + 4x + 1$ چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۳

از تغییر متغیر $x^2 + 2x = t$ استفاده کن.

Hint

بعد از حل معادله گنگ، ریشه‌های به دست آمده باید در معادله اولیه صدق کنند، در غیر این صورت غیر قابل قبول هستند.

نکته

گام اول: از تغییر متغیر $x^2 + 2x = t$ استفاده می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 4} = 2x^2 + 4x + 1 \xrightarrow{x^2 + 2x = t} \sqrt{3t + 4} = 2t + 1$$

گام دوم: دو طرف معادله بالا برحسب t را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3t + 4 = 4t^2 + 4t + 1$$

$$\Rightarrow 4t^2 + t - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 & \times \\ t = \frac{3}{4} & \checkmark \end{cases}$$

 $t = -1$ در معادله $\sqrt{3t + 4} = 2t + 1$ صدق نمی‌کند، پس قابل قبول نیست.گام سوم: حال با توجه به این که $x^2 + 2x = t$ است، داریم:

$$x^2 + 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 + 2x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} 2 \text{ ریشه دارد.}$$

بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{14}{|x-3|+|x+4|}}$ کدام است؟

$\sqrt{14} \quad (4)$

$14 \quad (3)$

$2 \quad (2)$

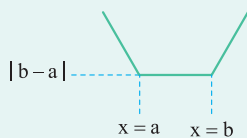
$\sqrt{2} \quad (1)$

پاسخ: گزینه ۱

کمترین مقدار تابع، $y = |x-3| + |x+4|$ رو حساب کن.

Hint

تابع گلدانی، تابعی با ضابطه $y = |x-a| + |x-b|$ را تابع گلدانی می‌نامیم؛ زیرا نمودار آن مطابق شکل زیر شبیه یک گلدان است:



(۱) کمترین مقدار تابع $|b-a|$ است.

(۲) در مورد معادله $|x-a| + |x-b| = c$ می‌توان گفت:

جواب ندارد: $c < |a-b|$ اگر

بی‌شمار جواب دارد: $c = |a-b|$ اگر

۲ جواب دارد: $c > |a-b|$ اگر

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در مخرج عبارت زیر رادیکال، ضابطه یک تابع گلدانی می‌بینیم:

$$g(x) = |x-3| + |x+4|$$

و طبق درس‌باکس، کمترین مقدار تابع g ، برابر $3 - (-4) = 7$ است.

گام دوم: حالا براساس آن کمترین مقدار تابع f را حساب می‌کنیم:

$$g(x) \geq 7 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|x-3|+|x+4|} \leq \frac{1}{7} \Rightarrow 0 < \frac{14}{|x-3|+|x+4|} \leq 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{14}{|x-3|+|x+4|}} \leq \sqrt{2}$$

بنابراین برد تابع f بازه $(0, \sqrt{2}]$ و در نتیجه بیشترین مقدار تابع $\sqrt{2}$ است.

اگر نقطه $(9, 3)$ یکی از رئوس متوازی الاضلاعی باشد که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $2x - 4y + 5 = 0$ و

$x - 5y + 2 = 0$ هستند، بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع متوازی الاضلاع چند برابر $\frac{\sqrt{5}}{2}$ است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

فاصله نقطه از خط:

درس Box

فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از فرمول زیر به دست می آید:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو سر پاره خط AB باشند، آن گاه مختصات نقطه M وسط پاره خط AB برابر می شود با:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

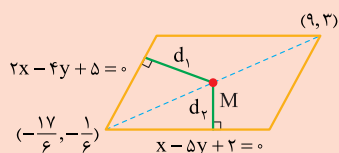
نکته

گام اول: دو ضلع داده شده از متوازی الاضلاع، غیر موازی هستند، پس ابتدا محل برخورد دو ضلع را به کمک حل دستگاه پیدا می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ x - 5y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = -\frac{17}{6}, y = -\frac{1}{6}$$

گام دوم: نقطه $(9, 3)$ بر روی هیچ کدام از خطوط داده شده قرار ندارد، پس $(9, 3)$ و $(-\frac{17}{6}, -\frac{1}{6})$ دو سر قطر متوازی الاضلاع هستند، مختصات وسط قطر را پیدا می کنیم:



$$M\left(\frac{-\frac{17}{6} + 9}{2}, \frac{-\frac{1}{6} + 3}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{37}{12}, \frac{17}{12}\right)$$

گام سوم: فاصله نقطه M از دو ضلع را پیدا می کنیم:

$$d_1 = \frac{\left| 2\left(\frac{37}{12}\right) - 4\left(\frac{17}{12}\right) + 5 \right|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{\frac{37}{6} - \frac{17}{3} + 5}{\sqrt{20}} = \frac{\frac{33}{6}}{\sqrt{20}} = \frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{20}} = \frac{11}{2\sqrt{20}}$$

$$d_2 = \frac{\left| \left(\frac{37}{12}\right) - 5\left(\frac{17}{12}\right) + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{2}{\sqrt{26}}$$

گام چهارم: می دانیم که $\frac{11}{2\sqrt{20}} > \frac{2}{\sqrt{26}}$ ، پس خواسته سؤال برابر می شود با:

$$\frac{d_1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{11}{2\sqrt{20}}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{11 \times 20}{2\sqrt{20} \times \sqrt{5}} = \frac{220}{20} = 11$$

نقطه $(4/5, 2)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

(سؤال ۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

$$\frac{\sqrt{17}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2} \quad (۱)$$

$$\sqrt{17} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{17} \quad (۳)$$

کنکور

خط $3x + y = 1$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر اندازه مساحت مثلث متساوی الساقین ABC که $AC = BC$ است، برابر $2/5$ باشد، مجموع طول‌ها و عرض‌های سه رأس مثلث کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{17}{2} (4)$$

$$\frac{15}{2} (3)$$

$$8 (2)$$

$$7 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

فاصله دو نقطه از هم:

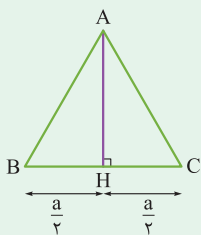
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

با توجه به رابطه مقابل فاصله دو نقطه A و B را می‌توانیم به دست آوریم:

اگر دو خط بر هم عمود باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر هستند.

اگر خطی با شیب m از نقطه (x_A, y_A) عبور کند، معادله آن به صورت مقابل نوشته می‌شود:

در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، عمودمنصف آن نیز هست، به عبارت دیگر، ارتفاع وارد بر قاعده، آن را نصف می‌کند.



گام اول: ابتدا مختصات نقاط A و B و سپس فاصله آن‌ها را از یکدیگر به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 + y = 1 \Rightarrow y = 1 : A(0, 1)$$

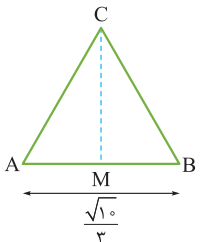
$$y = 0 \Rightarrow 3x + 0 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} : B(\frac{1}{3}, 0)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(0 - \frac{1}{3})^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

گام دوم: شیب خط گذرنده از A و B یعنی $3x + y = 1$ برابر -3 است، پس شیب عمودمنصف وارد بر آن برابر $\frac{1}{3}$ است، هم‌چنین وسط AB نقطه $M(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ است، حالا معادله عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{6}) \Rightarrow y - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$$

گام سوم: پس مختصات نقطه C را که بر روی عمودمنصف AB قرار دارد به صورت $(\alpha, \frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{9})$ در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث متساوی الساقین ABC طبق فرض برابر $2/5$ است، پس CM برابر می‌شود با:



$$S_{ABC} = \frac{2}{5} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{3} \times CM}{2} \Rightarrow CM = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

گام چهارم: حال فاصله نقطه C از خط $3x + y = 1$ را برابر $\frac{15}{\sqrt{10}}$ قرار می‌دهیم:

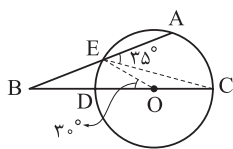
$$\frac{|3(\alpha) + (\frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{9}) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} \Rightarrow |\frac{10}{3}\alpha - \frac{5}{9}| = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{3}\alpha - \frac{5}{9} = 15 \Rightarrow \frac{10}{3}\alpha = \frac{140}{9} \Rightarrow \alpha = \frac{14}{3}, \frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{9} = 2 \Rightarrow C(\frac{14}{3}, 2) \\ \frac{10}{3}\alpha - \frac{5}{9} = -15 \Rightarrow \frac{10}{3}\alpha = -\frac{130}{9} \Rightarrow \alpha = -\frac{13}{3}, \frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{9} = -1 \Rightarrow C(-\frac{13}{3}, -1) \end{cases}$$

گام پنجم: در هر دو حالت خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A + y_A + x_B + y_B + x_C + y_C = 0 + 1 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{14}{3} + 2 = 8 \\ \text{یا} \\ x_A + y_A + x_B + y_B + x_C + y_C = 0 + 1 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{13}{3} - 1 = -4 \end{array} \right.$$

در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر $\hat{EOD} = 3^\circ$ و $\hat{AEC} = 35^\circ$ باشد، زاویه B چند درجه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۲۲/۵

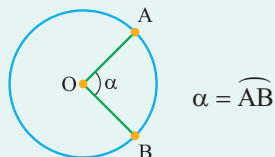
(۳) ۲۵

(۴) ۲۷/۵

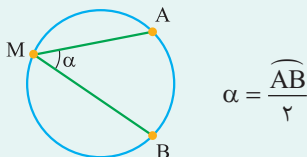
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

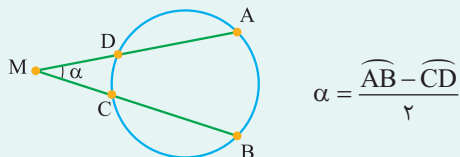
(۱) هرگاه رأس یک زاویه، مرکز دایره باشد، آن زاویه را زاویه مرکزی می‌نامیم. اندازه زاویه مرکزی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به زاویه. یعنی:



(۲) هرگاه رأس یک زاویه، روی محیط دایره باشد، آن زاویه را زاویه محاطی می‌نامیم. اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌رو به زاویه. یعنی:

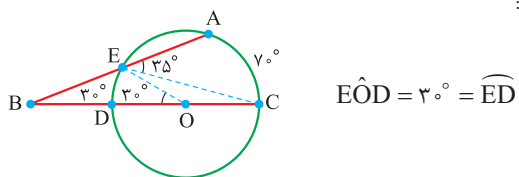


(۳) هرگاه دو وتر از یک دایره، یکدیگر را در خارج از دایره قطع کنند، زاویه‌ای تشکیل می‌شود که برابر است با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به زاویه. یعنی:



گام اول (پیدا کردن اندازه کمان‌های رو به زوایای داده شده):

$\hat{EOD}$ زاویه مرکزی است، پس اندازه کمان $\widehat{ED}$ برابر است با:



$\hat{AEC}$ زاویه محاطی است، پس اندازه کمان $\widehat{AC}$ برابر است با:

$$\hat{AEC} = 35^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 70^\circ$$

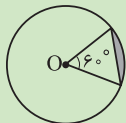
گام دوم (محاسبه زاویه $\hat{B}$):

طبق مورد سوم درس باکس، زاویه B برابر است با نصف تفاضل $\widehat{AC}$ و $\widehat{ED}$. یعنی:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{ED}}{2} = \frac{70^\circ - 3^\circ}{2} = \frac{67^\circ}{2} = 33.5^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دایره به شعاع ۶ و مرکز O مطابق شکل مفروض است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



$$(۲) 6(\pi - \sqrt{3})$$

$$(۱) 3(3\pi - 2\sqrt{3})$$

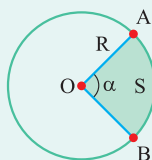
$$(۴) 2(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$(۳) 3(2\pi - 3\sqrt{3})$$

پاسخ: گزینه ۳

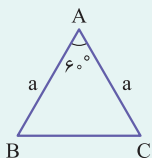
درس Box

(۱) اگر زاویه مرکزی قطاع برحسب درجه برابر با α باشد و هم‌چنین شعاع دایره برابر با R باشد، مساحت قطاع برابر است با:



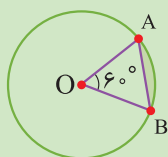
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

(۲) اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول ضلع a داشته باشیم، مساحتش می‌شود:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه مساحت قطاع AOB):



$$S_{\text{قطاع AOB}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

با جای گذاری شعاع و زاویه در فرمول بالا مساحت قطاع برابر است با:

$$S_{\text{قطاع AOB}} = \frac{\pi \times 6^2 \times 60^\circ}{360} = 6\pi$$

گام دوم (محاسبه مساحت مثلث AOB):

از آنجایی که AO و OB هر دو شعاع دایره و برابرند و زاویه بین آنها 60° است؛ سپس $\triangle AOB$ مثلث متساوی‌الاضلاع است. طبق مورد دوم درس باکس، مساحت مثلث برابر است با:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

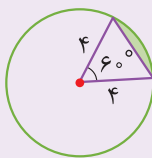
گام سوم (محاسبه مساحت ناحیه رنگی):

مساحت ناحیه رنگی از تفاضل مساحت قطاع AOB و مثلث AOB به دست می‌آید، یعنی:

$$S_{\text{ناحیه رنگی}} = S_{\text{قطاع AOB}} - S_{\triangle AOB} = 6\pi - 9\sqrt{3} = 3(2\pi - 3\sqrt{3})$$

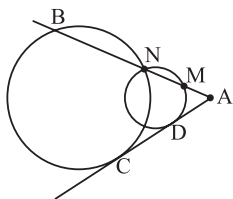
مطابق شکل، دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه‌زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

(هندسه (۲) - تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)



کتاب
درسی

۲۳ در شکل زیر اگر $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\frac{CD}{DA}$ کدام است؟

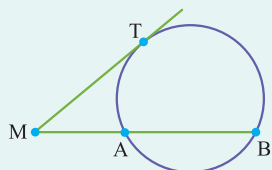


$$\begin{aligned} & \sqrt{3} - 1 \quad (2) \\ & 2(\sqrt{3} - 1) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(\sqrt{2} - 1) \quad (1) \\ & \sqrt{6} - 1 \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

هرگاه مثل شکل زیر، M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، رابطه زیر برقرار است:

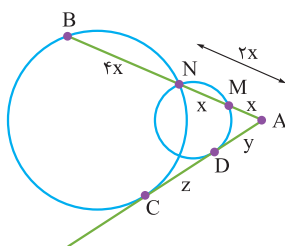


$$MT^2 = MA \times MB$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (نمایش نسبت‌ها با متغیرها):

برای ساده‌تر شدن محاسبات، نسبت‌های داده‌شده را با متغیرها نشان می‌دهیم:



اگر AM را x در نظر بگیریم، سپس داریم:

$$\begin{cases} \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2} \\ AM = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AN = 2x \\ NB = 4x \end{cases}$$

برای راحتی کار در مراحل بعد، $AD = y$ و $CD = z$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم (استفاده از تساوی مربوط به خط مماس و خط قاطع):

طبق نکته درس‌پاکس داریم:

$$y^2 = x \times 2x = 2x^2$$

در دایره کوچک:

$$(y+z)^2 = 2x \times (2x+4x) \Rightarrow (y+z)^2 = 12x^2$$

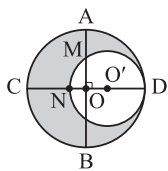
در دایره بزرگ:

اگر طرفین رابطه دوم را بر رابطه اول تقسیم کنیم؛ داریم:

$$\frac{(y+z)^2}{y^2} = \frac{12x^2}{2x^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{z}{y}\right)^2 = 6 \Rightarrow \frac{z}{y} = \sqrt{6} - 1$$

نسبت خواسته‌شده دقیقاً برابر است با نسبت $\frac{z}{y}$.

در شکل زیر دایره‌ای به مرکز O و O' مماس داخل‌اند. اگر مساحت ناحیه رنگی برابر ۱۶π و $OO' = ۲$ باشد، طول پاره خط AM کدام است؟



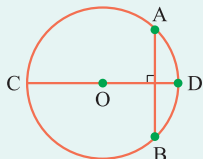
$$\begin{aligned} & ۳ \quad (۲) \\ & ۵ - \sqrt{۵} \quad (۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۵ - \sqrt{۳} \quad (۱) \\ & ۲ / ۵ \quad (۳) \end{aligned}$$

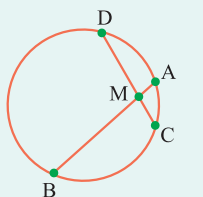
پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) هرگاه وترى از دایره، بر قطری از دایره عمود باشد، آن قطر، وتر را نصف می‌کند. یعنی در شکل زیر که وتر AB بر قطر CD عمود است، AB ، CD را نصف می‌کند.



(۲) هرگاه دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه M یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

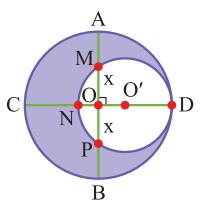
(۳) در دو دایره مماس درون، طول خط‌المركزین برابر اختلاف دو شعاع دایره است:

$$d = |R - R'|$$

گام اول (محاسبه شعاع‌های دو دایره):

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مساحت قسمت رنگی برابر اختلاف مساحت دو دایره است. پس اگر شعاع دایره بزرگ‌تر را R و شعاع دایره کوچک‌تر را r بنامیم؛ آن‌گاه داریم:



$$\pi R^2 - \pi r^2 = ۱۶\pi \Rightarrow \pi(R^2 - r^2) = ۱۶\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = ۱۶$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$R^2 - r^2 = (R - r)(R + r) = ۱۶$$

$R - r$ همان OO' یا خط‌المركزین است که برابر ۲ است، پس داریم:

$$R - r = ۲ \Rightarrow ۲(R + r) = ۱۶ \Rightarrow R + r = ۸$$

از دو معادله $R - r = ۲$ و $R + r = ۸$ داریم:

$$\begin{cases} R + r = ۸ \\ R - r = ۲ \end{cases} \Rightarrow R = ۵, r = ۳$$

گام دوم (محاسبه طول OM):

طبق مورد اول درس باکس وتر MP بر قطر ND از دایره کوچک‌تر عمود است، پس MP ، ND را نصف می‌کند. اگر مقدار OM و OP را x در نظر بگیریم، آن‌گاه طبق مورد دوم درس باکس برای دو وتر MP و ND داریم:

$$x \times x = ON \cdot OD$$

از طرفی برای ON و OD داریم:

$$ON = r - OO' = ۳ - ۲ = ۱$$

$$OD = R = ۵$$

پس برای x داریم:

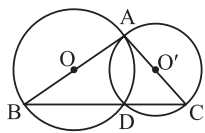
$$x^2 = 1 \times 5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

گام سوم (محاسبه طول AM):

طول AM از تفاضل AO و OM به دست می‌آید. AO همان R و OM همان x است، پس داریم:

$$AM = R - x = 5 - \sqrt{5}$$

دایره‌های $C(O, 15)$ و $C'(O', 13)$ مطابق شکل مفروض‌اند. اگر $AD = 24$ باشد، طول مماس مشترک C و C' کدام است؟



$$14 \quad (1)$$

$$8\sqrt{3} \quad (2)$$

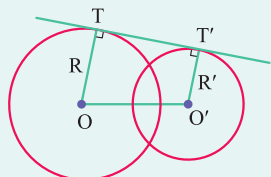
$$18 \quad (3)$$

$$12\sqrt{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

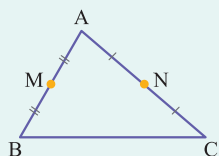
درس Box

(۱) طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع R و R' از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad (\text{با فرض } OO' = d)$$

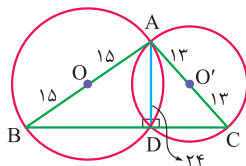
(۲) در مثلث ABC ، اگر M و N به ترتیب وسط AC و AB باشند، طول MN نصف BC است.



گام اول (محاسبه BD و DC):

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مثلث ABD ، زاویه $\hat{ADB}$ رو به قطر است. پس برابر با 90° است. شعاع AO برابر ۱۵ است، پس قطر AB برابر ۳۰ است.



طبق فیثاغورس، داریم:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 30^2 - 24^2 = 2^2(15^2 - 12^2) = 2^2(15 - 12)(15 + 12) = 2^2 \times 3 \times 27 \Rightarrow BD = 2 \times 9 = 18$$

به طریق مشابه در مثلث ADC داریم:

$$DC^2 = AC^2 - AD^2 = (26 - 24)(26 + 24) = 2 \times 50 = 100 \Rightarrow DC = 10$$

گام دوم (محاسبه OO'): ابتدا BC را به دست می‌آوریم.

$$BC = BD + DC = 18 + 10 = 28$$

طبق مورد دوم درس باکس OO' برابر است با نصف BC ، یعنی:

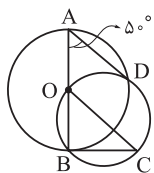
$$OO' = \frac{BC}{2} = 14$$

گام سوم (محاسبه طول مماس مشترک):

با استفاده از فرمول مماس مشترک خارجی، داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ \Rightarrow TT' = \sqrt{14^2 - (15 - 13)^2} = \sqrt{14^2 - 2^2} = \sqrt{(14 - 2)(14 + 2)} = \sqrt{12 \times 16} = \sqrt{3 \times 4 \times 16} = 8\sqrt{3}$$

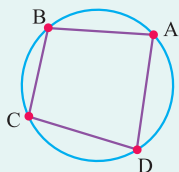
در شکل زیر، O مرکز دایره بزرگ تر است، اگر $\hat{A} = 50^\circ$ باشد، زاویه OCB چند درجه است؟

(۱) 50° (۲) 40° (۳) 55° (۴) 45°

پاسخ: گزینه ۲

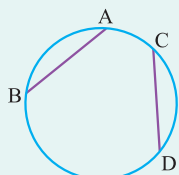
درس Box

(۱) در چهارضلعی محاطی، مجموع زوایای روبه‌رو به هم برابر 180° است. برای مثال در چهارضلعی محاطی ABCD داریم:



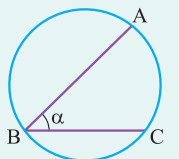
$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases}$$

(۲) هرگاه دو وتر در یک دایره برابر باشند، کمان‌های نظیرشان نیز با هم برابرند. برای مثال:



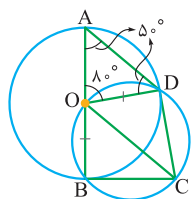
$$AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

(۳) زاویه محاطی، زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار دارد. اندازه زاویه محاطی، نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن در دایره است.



$$\alpha = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه $\hat{AOD}$):



در مثلث AOD، AO و OD هر دو شعاع و برابر هستند، پس دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{ADO}$ هر دو برابر 50° اند.

پس برای زاویه $\hat{AOD}$ داریم:

$$\hat{AOD} + \hat{A} + \hat{ADO} = 180^\circ \Rightarrow \hat{AOD} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$$

گام دوم (محاسبه $\hat{BCD}$):

چهارضلعی OBCD، یک چهارضلعی محاطی است. طبق مورد اول درس باکس داریم:

$$\hat{BOD} + \hat{BCD} = 180^\circ$$

و هم‌چنین طبق شکل داریم:

$$\hat{BOD} + \hat{AOD} = 180^\circ$$

از دو رابطه فوق و رابطه به‌دست‌آمده در گام قبل داریم:

$$\hat{BCD} = \hat{AOD} = 80^\circ$$

گام سوم (محاسبه $\widehat{O\hat{C}B}$):

OD و OB هر دو شعاع‌های دایره به مرکز O هستند. پس این دو پاره‌خط با هم برابرند. از طرفی این دو پاره‌خط (OB, OD)، وترهای دایره دیگر هستند.

طبق مورد دوم درس باکس داریم:

$$OB = OD \Rightarrow \widehat{OB} = \widehat{OD}$$

دو زاویه $\widehat{O\hat{C}D}$ و $\widehat{O\hat{C}B}$ زوایای محاطی و رو به دو کمان $\widehat{OD}$ و $\widehat{OB}$ هستند، پس داریم:

$$\widehat{O\hat{C}D} = \frac{\widehat{OD}}{2} = \frac{\widehat{OB}}{2} = \widehat{O\hat{C}B} \Rightarrow \widehat{O\hat{C}D} = \widehat{O\hat{C}B} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$$

در گام قبل مقدار زاویه BCD برابر 8° به دست آمد، پس برای $\widehat{O\hat{C}B}$ داریم:

$$\widehat{O\hat{C}B} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$$

مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۵ و ۱۲ مفروض است. فاصله نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث با اضلاع قائم آن از یکدیگر کدام است؟

$$۱۰\sqrt{۲} \quad (۴)$$

$$۵\sqrt{۲} \quad (۳)$$

$$۳\sqrt{۲} \quad (۲)$$

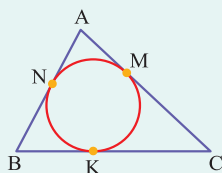
$$۲\sqrt{۲} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

کوتاه Box

اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند. داریم:

(P نصف محیط است.)



$$AM = AN = P - a$$

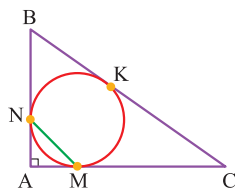
$$BN = BK = P - b$$

$$CM = CK = P - c$$

گام اول (رسم شکل):

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا مثلث قائم الزاویه ABC را با اضلاع ۵ و ۱۲ رسم می‌کنیم. طبق فیثاغورس وتر این مثلث ۱۳ خواهد بود:



$$\sqrt{۱۲^2 + ۵^2} = ۱۳$$

سپس دایره محاطی مثلث را رسم کرده و نقاط تماس آن با ABC را M، N و K می‌نامیم.

گام دوم (محاسبه AM و AN):

طبق درس باکس برای AM و AN داریم:

$$\begin{cases} AM = AN = P - a \\ P = \frac{۵ + ۱۲ + ۱۳}{۲} = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵ \\ a = ۱۳ \text{ (از گام اول طبق فیثاغورس)} \end{cases} \Rightarrow AM = AN = ۱۵ - ۱۳ = ۲$$

گام سوم (محاسبه NM):

در سؤال فاصله نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث با اضلاع قائم خواسته شده است. دو نقطه تماس دایره با اضلاع قائم، M و N

هستند. پس خواسته سؤال، طول NM است. ANM یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است که در آن $AM = AN = ۲$

است. طبق فیثاغورس داریم:

$$NM = \sqrt{۲^2 + ۲^2} = ۲\sqrt{۲}$$

نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط d است. اگر فاصله O روی خط d از نقطه A ، برابر ۱۶ و $AA' = ۱۹/۲$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' کدام است؟

$$۱۶/۹۶ (۴)$$

$$۱۵/۹۶ (۳)$$

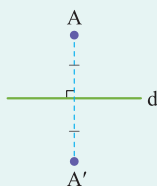
$$۱۶/۵۶ (۲)$$

$$۱۵/۳۶ (۱)$$

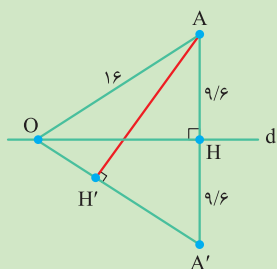
پاسخ: گزینه ۱

کلاس Box

اگر A' بازتاب نقطه A نسبت به خط d باشد، آن گاه d عمود منصف AA' است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (رسم شکل):



ابتدا AA' را طوری رسم می کنیم تا $AA' = ۱۹/۲$ باشد. سپس عمود منصف AA' را رسم می کنیم. طبق درس باکس، این خط همان d است.

سپس O را روی d طوری قرار داده تا $OA = ۱۶$ شود. محل برخورد d و AA' را H می نامیم. چون d عمود منصف AA' است، پس داریم:

$$AH = A'H = \frac{۱۹/۲}{۲} = ۹/۶$$

گام دوم (محاسبه OH):

با استفاده از فیثاغورس، OH برابر است با:

$$OH = \sqrt{۱۶^2 - (۹/۶)^2} = \sqrt{(۳/۲)^2 (۵^2 - ۳^2)} = ۳/۲ \times ۴ = ۱۲/۸$$

گام سوم (محاسبه مساحت $\triangle OAA'$ از دو روش):

ابتدا از A ، خط عمودی بر OA' رسم می کنیم و محل برخوردش با OA' را H' می نامیم. مساحت مثلث OAA' را از دو روش حساب می کنیم:

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{OH \times AA'}{۲} = \frac{۱۲/۸ \times ۱۹/۲}{۲}$$

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{OA' \times AH'}{۲} = \frac{۱۶ \times AH'}{۲} \quad (OA' = OA = ۱۶ \text{ است، پس } AA' \text{ عمود منصف } AA' \text{ است، پس داریم:})$$

در رابطه فوق، هر دو مساحت $\triangle OAA'$ اند، پس داریم:

(AH' همان فاصله نقطه A از OA' است.)

$$\frac{۱۲/۸ \times ۱۹/۲}{۲} = \frac{۱۶ \times AH'}{۲} \Rightarrow ۱۲/۸ \times ۱۹/۲ = AH' \Rightarrow AH' = ۱۵/۳۶$$

نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چه قدر است؟

(هندسه (۲) - تمرین ۷ صفحه ۴۳ کتاب درسی)

کتاب
درسی

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ و ارتفاع AH را در نظر بگیرید. اگر این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AH}$ انتقال دهیم، بیشترین فاصله رأس‌های مثلث اولیه و جدید کدام است؟

$$4\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$10\sqrt{3} \quad (۳)$$

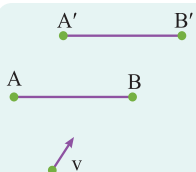
$$2\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$5\sqrt{3} \quad (۱)$$

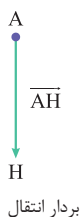
پاسخ: گزینه ۴

انتقال، اندازه و شیب خط را حفظ می‌کند.

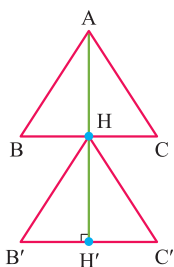
درس‌Box



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (رسم شکل):

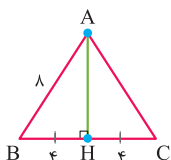


ابتدا شکل مناسب برای سؤال رسم می‌کنیم. طبق درس‌بکس، چون انتقال، اندازه و شیب خط را تغییر نمی‌دهد، پس $\triangle HB'C'$ نیز یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۸ است و HH' ارتفاع وارد بر $B'C'$ است.



گام دوم (محاسبه AH و HH'):

AH و HH' هر دو ارتفاع‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸ اند. این ارتفاع‌ها، میانه نیز هستند (چون مثلث‌های ABC و $HB'C'$ متساوی‌الاضلاع‌اند)، پس طبق فیثاغورس داریم:



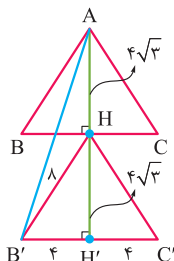
$$AH = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

به طریق مشابه برای HH' هم داریم:

$$HH' = 4\sqrt{3}$$

گام سوم (محاسبه بیشترین فاصله رأس‌های مثلث اولیه و جدید):

واضح است که بیشترین فاصله رأس‌های مثلث اولیه و جدید، همان AB' و AC' است که چون AH عمودمنصف $B'C'$ است، پس AB' و AC' با هم برابرند.



بنابراین برای رسیدن به جواب، کافیت طول AB' را به دست آوریم. در مثلث $\triangle AH'B'$ طبق فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} AB' = \sqrt{AH'^2 + B'H'^2} \\ AH' = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Rightarrow AB' = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 4^2} \Rightarrow AB' = 4\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1} = 4\sqrt{12+1} = 4\sqrt{13} \\ B'H' = 4 \end{cases}$$

در مثلث قائم الزاویه ABC ($AB < BC$)، وتر AC به طول ۱۰ را حول نقطه M به اندازه ۹۰° دوران می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطه D قطع کند. اگر M وسط ضلع AC باشد، مقدار $CD \times CB$ کدام است؟

۵۶ (۴)

۵۰ (۳)

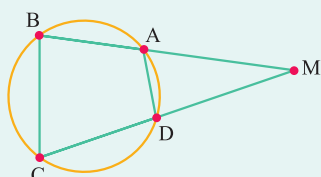
۴۸ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

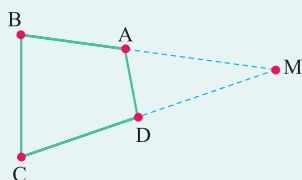
(۱) یک چندضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

(۲) اگر در یک دایره دو وتر AB و CD خارج از دایره در نقطه M یکدیگر را قطع کنند، رابطه زیر برقرار است:

$$MA \cdot MB = MD \cdot MC$$

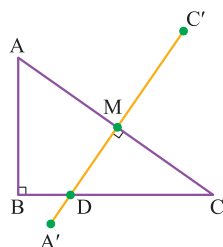
نکته فوق مثل این است که بگوییم:

اگر در چهارضلعی محاطی $ABCD$ دو ضلع AB و CD که روبه‌رو به هم قرار دارند را امتداد داده تا یکدیگر را در M قطع کنند، رابطه $MA \cdot MB = MD \cdot MC$ برقرار است.



گام اول (رسم شکل):

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا مثلث قائم الزاویه به وتر AC را رسم کرده و وسط وتر را M نامیده و AC را حول M به اندازه ۹۰° دوران می‌دهیم.گام دوم (تشخیص نوع چهارضلعی $ABDM$):در چهارضلعی $ABDM$ ، $\hat{B} = 90^\circ$ و $\hat{M} = 90^\circ$ است. مجموع این دو زاویه برابر است با:

$$\hat{B} + \hat{M} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

طبق قضیه مربوط به چهارضلعی‌های محاطی که در مورد اول درس باکس آمده است، چون مجموع دو زاویه مقابل هم $(\hat{M}, \hat{B})$ ، برابر 180° است، پس $ABDM$ یک چهارضلعی محاطی است.

گام سوم (محاسبه $CD \times CB$):

طبق مورد دوم در درس باکس، AM و BD اضلاع یک چهارضلعی محاطی‌اند که یکدیگر را در C قطع کرده‌اند. سپس رابطه زیر برقرار است.

$$CD \cdot CB = CM \cdot CA$$

 M وسط AC و $AC = 10$ است، پس داریم:

$$CM = 5, CA = 10 \Rightarrow CD \cdot CB = 5 \times 10 = 50$$

۳۱ در پرتاب یک تاس، x یک پیشامد است. گزاره‌نمای $P(x) = \frac{1}{3}$ برای کدام x نادرست است؟

- (۱) عدد روشده مضرب ۳ باشد.
 (۲) فرد و اول باشد.
 (۳) از ۴ بیشتر باشد.
 (۴) زوج و اول باشد.

پاسخ: گزینه ۴

فضای نمونه‌ای: مجموعه کل حالت‌های رخداد یک آزمایش یا پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای گوئیم. پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد گفته می‌شود.

گام اول: پیشامد هر گزینه را در فضای نمونه‌ای تاس، $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌نویسیم:

- (۱) مضرب ۳ باشد: $A = \{3, 6\}$
 (۲) فرد و اول باشد: $B = \{3, 5\}$
 (۳) از ۴ بیشتر باشد: $C = \{5, 6\}$
 (۴) زوج و اول باشد: $D = \{2\}$

گام دوم: پیشامدهای A ، B و C دوعضوی‌اند و احتمال آن‌ها $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{n(x)}{n(S)} = P(x)$ است، اما احتمال پیشامد D برابر $\frac{1}{6}$

است، پس گزاره‌نمای $P(x) = \frac{1}{3}$ برای D درست نیست.

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در پرتاب یک تاس، احتمال روشن شدن هر عدد متناسب با مجذور آن عدد است، با کدام احتمال عدد روشده ۲ یا ۳ است؟

$$\frac{11}{91} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{91} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{36} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ، فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$۱) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$۲) P(S) = 1$$

$$۳) P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$$

با استفاده از خاصیت‌های (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1$$

گام اول: احتمال روشن شدن هر عدد متناسب با مجذور آن است، یعنی اگر $P(1) = x$ باشد، داریم:

$$P(2) = 4x, P(3) = 9x, P(4) = 16x, P(5) = 25x, P(6) = 36x$$

گام دوم: جمع احتمال‌ها را مساوی ۱ قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)}_{91} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{91}$$

گام سوم: احتمال روشن شدن ۲ یا ۳ برابر است با:

$$P(2) + P(3) = 4x + 9x = 13x = 13 \left(\frac{1}{91} \right) = \frac{1}{7}$$

یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است.

در پرتاب این تاس، احتمال این که عدد زوج مشاهده شود را به دست آورید. (سؤال ۹ - امتحان نهایی فردارد ۱۴۰۳)

۳۳ در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، اگر $P(a) = \frac{1}{4} P(b) = 2P(c) = P(d)$ ، بیشترین مقدار برای احتمال یک

پیشامد ۳ عضوی چه قدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{9} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

$P(c)$ را برابر x بگیرید و بقیه احتمال‌ها را هم بر حسب x بنویسید، حالا نوبت این است که جمع احتمال‌ها را مساوی ۱ قرار دهید تا x به دست آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با فرض $P(c) = x$ داریم:

$$P(a) = P(d) = 2x$$

$$P(b) = 4x$$

گام دوم: جمع احتمال‌ها باید ۱ باشد:

$$P(S) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d)$$

$$= 2x + 4x + x + 2x = 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

گام سوم: بیشترین احتمال برای پیشامدهای ۳ عضوی، $p(\{a, b, d\})$ است که به کمک متمم آن را به دست می‌آوریم:

$$P(\{a, b, d\}) = 1 - P(c) = 1 - x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، احتمال عضوهای S دنباله حسابی می‌سازند. اگر کم‌ترین احتمال یک پیشامد

ساده $P(a) = \frac{1}{6}$ باشد، بیشترین احتمال یک پیشامد دوعضوی چه قدر است؟

$$\frac{5}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{18} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{18} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به دنباله حسابی، احتمال اعضای S به ترتیب $\frac{1}{6} + x$ ، $\frac{1}{6} + 2x$ ، $\frac{1}{6} + 3x$ و $\frac{1}{6} + 4x$ است.

گام دوم: جمع احتمال‌ها باید ۱ باشد:

$$\sum P = 1 \Rightarrow \frac{4}{6} + 6x = 1 \Rightarrow 6x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{18}$$

گام سوم: پیشامد دوعضوی که بیشترین احتمال را داشته باشد از دو عضو با احتمال‌های $\frac{1}{6} + 2x$ و $\frac{1}{6} + 3x$ ساخته شده و

احتمالش می‌شود $\frac{2}{6} + 5x$ که برابر است با:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$$

در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ یک فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با

قدرنسبت کم‌تر از واحد تشکیل دهند و واسطه هندسی آن‌ها $\frac{1}{5}$ باشد، کم‌ترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S ،

(سوال ۱۲۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)

چه قدر است؟

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{5} \quad (۲)$$

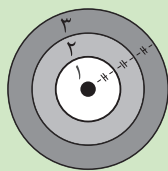
$$\frac{2 - \sqrt{2}}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{10} \quad (۳)$$

کنکور

در صفحه هدف زیر، احتمال اصابت تیر به هر ناحیه متناسب با مساحت آن ناحیه است. احتمال برخورد آن به ناحیه ۲



$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۴)$$

کدام است؟

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۳)$$

مشاوره تمرینات کتاب درسی
همواره می‌تونه مورد توجه طراحان
قرار بگیره.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: شعاع کوچک‌ترین دایره را ۱ فرض می‌کنیم، پس شعاع دایره‌های متوسط و بزرگ‌تر به ترتیب ۲ و ۳ است، بنابراین مساحت ناحیه‌ها به ترتیب $\pi(1)^2$ و $\pi(2^2 - 1^2)$ و $\pi(3^2 - 2^2)$ است.
پس داریم:

$$\frac{P(2)}{P(1)} = \frac{3\pi}{\pi} = 3 \Rightarrow P(2) = 3P(1)$$

$$\frac{P(3)}{P(1)} = \frac{5\pi}{\pi} = 5 \Rightarrow P(3) = 5P(1)$$

گام دوم: جمع کل احتمال‌ها را مساوی ۱ قرار دهیم:

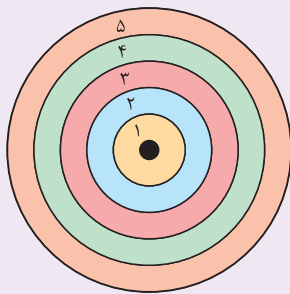
$$P(1) + P(2) + P(3) = P(1) + 3P(1) + 5P(1) = 9P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1}{9}$$

گام سوم: احتمال اصابت به ناحیه ۲ برابر است با:

$$P(2) = 3P(1) = 3\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$$

در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل مطابق شکل زیر که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه k ام، $x(2k-1)$ باشد:

(آمار و احتمال - تمرین ۵ صفحه ۴۷ کتاب درسی)



الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

۳۶ نقیض گزاره $(p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow p))$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

F (۴)

T (۳)

 $p \vee q$ (۲) $p \wedge q$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



ارزش $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که p و q هر دو درست باشند.

ارزش $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند.

ارزش $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط زمانی درست است که p و q هم‌ارز باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جدول ارزش رسم کنیم، $p \Leftrightarrow \sim q$ وقتی درست است که p و q هم‌ارز نباشند.

p	q	$\sim q \Leftrightarrow p$	$p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow p)$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

گام دوم: نقیض گزاره فقط در سطر اول درست است، یعنی ارزشش همان ارزش $p \wedge q$ است.

(سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

 $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ (۲) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ (۱) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (۴) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ (۳)

کنکور

تعداد زیرمجموعه‌های A و $\{1, 2\} \cup A$ با هم ۶۴ تا اختلاف دارند. $A - \{1, 2\}$ چند عضوی است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n .



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر A و $\{1, 2\}$ اشتراکی نداشته باشند:

$$2^{n(A)+2} - 2^{n(A)} = 64 \Rightarrow 2^{n(A)} \times 3 = 64 \rightarrow \text{که این معادله جوابی ندارد.}$$

گام دوم: اگر A و $\{1, 2\}$ ، یک عضو مشترک داشته باشند:

$$2^{n(A)+1} - 2^{n(A)} = 2^{n(A)} = 64 \Rightarrow n(A) = 6$$

گام سوم: فهمیدیم A شش عضوی است و با $\{1, 2\}$ یک عضو مشترک دارد، پس $A - \{1, 2\}$ پنج عضوی می‌شود.

اگر $A_i = (i - m, i + m)$ و $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \emptyset$ باشد، کم‌ترین مقدار k کدام است؟

$$2m - 1 \quad (۲)$$

$$m - 1 \quad (۱)$$

$$2m + 1 \quad (۴)$$

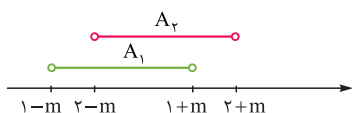
$$2m \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

اشتراک بازه‌های A_1 تا A_k همان اشتراک بازه‌های $(1 - m, 1 + m)$ و $(k - m, k + m)$ است.

گام اول: ابتدا بازه‌های $A_1, A_2, \dots$ را روی محور رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید اشتراک بازه‌ها از A_1 تا A_k برابر است با:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = A_1 \cap A_k = (1 - m, 1 + m) \cap (k - m, k + m)$$

گام دوم: به گفته سؤال $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \emptyset$ ، پس:

$$(1 - m, 1 + m) \cap (k - m, k + m) = \emptyset$$

گام سوم: برای این که اشتراک دو بازه موجود در گام دوم تهی شود، باید شرط زیر برقرار باشد:

$$1 + m \leq k - m \Rightarrow k \geq 2m + 1$$

پس کم‌ترین مقدار k برابر $2m + 1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

۳۹

تعداد زیرمجموعه‌های $m - 3$ عضوی و $m + 9$ عضوی یک مجموعه n عضوی با هم برابر است. اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی این مجموعه، مضرب ۱۳ باشد، حداقل مقدار n کدام است؟ (m عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ است).

۲۶ (۴)

۲۰ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\binom{n}{m}$$

تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با:

نکته

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{m} \Rightarrow m = k \text{ یا } m + k = n$$

نکته

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

نکته

گام اول: تعداد زیرمجموعه‌های $m - 3$ عضوی و $m + 9$ عضوی این مجموعه n برابر است، پس طبق نکته‌های گفته شده داریم:

$$\binom{n}{m-3} = \binom{n}{m+9} \Rightarrow (m-3) + (m+9) = n \Rightarrow n = 2m + 6$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی این مجموعه برابر می‌شود با:

$$\binom{2m+6}{2} = \frac{2(m+3)(2m+5)}{2} = (m+3)(2m+5)$$

گام سوم: می‌خواهیم $(m+3)(2m+5)$ مضرب ۱۳ باشد، پس $m+3$ یا $2m+5$ باید مضرب ۱۳ باشند، کم‌ترین مقدار m را در هر دو حالت به دست می‌آوریم:

$$m+3=13 \Rightarrow m_{\min}=10$$

$$2m+5=13 \Rightarrow m_{\min}=4$$

کم‌ترین مقدار n به ازای $m=4$ به دست می‌آید که برابر می‌شود با:

$$n = 2m + 6 \Rightarrow n_{\min} = 2(4) + 6 = 14$$

ریاضیات

۴۰. اگر $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq 2n, 2^k \leq kn\}$ ، کوچک‌ترین مقدار n برای آن که مجموعه ۶ عضو داشته باشد، کدام است؟

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

پاسخ: گزینه ۴

۶ $k =$ را در شرط $2^k \leq kn$ جای‌گذاری کنید و ببینید که به ازای چه مقداری از n برقرار می‌شود.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: شرط $k \leq 2n$ چندان محدودکننده نیست، شرط $2^k \leq kn$ باید برای $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ برقرار باشد تا مجموعه، ۶ عضو داشته باشد.

گام دوم: حالا $k = 6$ که بزرگ‌ترین مقدار مطلوب است را در $2^k \leq kn$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2^6 \leq 6n \Rightarrow 64 \leq 6n$$

همان‌طور که می‌بینید این شرط به ازای $10, 9, 8, n =$ برقرار نیست و به ازای $11, n =$ برقرار می‌شود، پس کم‌ترین مقدار n برابر ۱۱ است.

$$A_{11} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq 22, 2^k \leq 11k\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فیزیک

۴۱

عدد اتمی عنصر منیزیم برابر ۱۲ است. بار الکتریکی هسته اتم منیزیم چند میکروکولن است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$$1/92 \times 10^{-13} \quad (2)$$

$$1/92 \times 10^{-12} \quad (1)$$

$$7/5 \times 10^{-13} \quad (4)$$

$$7/5 \times 10^{-12} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint

با توجه به این که عدد اتمی، تعداد پروتون‌ها را در یک اتم خنثی نشان می‌دهد به کمک رابطه $q = ne$ ، بار الکتریکی هسته را محاسبه کنید.

درس‌Box

اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار الکتریکی یک جسم همواره مضرب صحیحی از بار بنیادی ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) است و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q = \pm ne, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

جسم الکترون از دست بدهد.

جسم الکترون بگیرد.

عدد اتمی عنصر برابر ۱۲ است، یعنی در اتم خنثی ۱۲ الکترون و ۱۲ پروتون وجود دارد، از آنجایی که هسته شامل پروتون با بار مثبت و نوترون بدون بار است، پس بار الکتریکی هسته برابر است با:

$$q = +ne = 12 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1/92 \times 10^{-18} \text{ C} \times 10^6 = 1/92 \times 10^{-12} \mu\text{C}$$

اگر اشتباهاً عدد اتمی رو به جای q در رابطه جای‌گذاری کنی توی دام گزینه‌های (۳) و (۴) می‌افتی.

گول نخوری

پاسخ خیلی تشریحی

فیزیک

۴۲

بار الکتریکی دو کره کوچک رسانای A و B به ترتیب $q_A = q$ و $q_B = -5q$ است. دو کره در فاصله r از یکدیگر، بر هم نیروی الکتریکی $N 200$ وارد می‌کنند. 40% درصد از بار کره B را به کره A منتقل می‌کنیم و آن‌ها را در فاصله 12 cm از هم قرار می‌دهیم. اگر در این حالت دو کره بر هم نیروی الکتریکی $N 30$ وارد کنند، r برابر چند سانتی‌متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در قدم اول قانون کولن را برای بارهای q_A و q_B بنویسید و سپس با انتقال 40% از بار q_B به بار q_A ، دوباره قانون کولن را بنویسید، در نهایت دو رابطه‌ای را که به دست آوردید به صورت نسبتی بنویسید تا r به دست آید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در حالت اول دو کره به هم نیروی الکتریکی $N 200$ نیوتونی وارد می‌کنند، یعنی:

$$F = k \frac{|q_A||q_B|}{r^2} \Rightarrow 200 = k \frac{(5q)(q)}{r^2} = k \frac{5q^2}{r^2} \quad (I)$$

گام دوم: 40% درصد از بار کره B را به کره A منتقل کرده‌ایم، کره B بار منفی دارد با انتقال 40% درصد از بار آن، بار منفی کره کم‌تر می‌شود، پس:

$$q'_B = -5q - \frac{40}{100}(-5q) = -5q + 2q = -3q, \quad q'_A = q + (-2q) = -q$$

طبق صورت سؤال در این حالت در فاصله 12 cm ، کره‌ها به هم نیروی $N 30$ نیوتونی وارد می‌کنند:

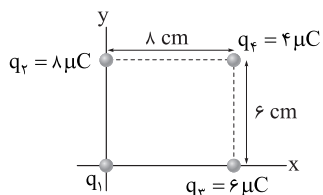
$$F' = k \frac{|q'_A||q'_B|}{r^2} \Rightarrow 30 = k \frac{(3q)(q)}{(0.12)^2} = k \frac{3q^2}{(0.12)^2} \quad (II)$$

گام سوم: روابط (I) و (II) را به صورت نسبتی می‌نویسیم تا r را پیدا کنیم:

$$\frac{200}{30} = \frac{5q^2}{3q^2} \times \frac{(0.12)^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = 36 \times 10^{-4} \Rightarrow r = 0.06\text{ m} = 6\text{ cm}$$

در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای در صفحه قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 در SI به صورت

$$\vec{F} = -27 \vec{i} + 6 \vec{j} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}) \text{ باشد، اندازه بار } q_1 \text{ چند میکروکولن است؟}$$



۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

۲۵ (۳)

۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

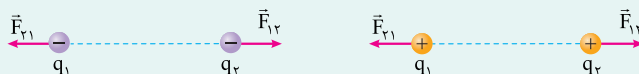
درس: Box

دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند به هم نیروی الکتریکی F وارد می‌کنند که اندازه این نیرو از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

نیروی الکتریکی (N) بارهای نقطه‌ای (C) ثابت کولن ($\frac{N \cdot m^2}{C^2}$) فاصله دو بار از هم (m)

● بارهای الکتریکی همنام یکدیگر را دفع می‌کنند:

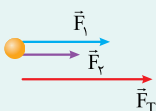


بارهای الکتریکی ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند:



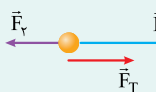
● اگر به جای دو ذره، تعدادی بار الکتریکی نقطه‌ای داشته باشیم، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره، برابری نیروهای است که هر یک از ذره‌های دیگر در غیاب سایر ذره‌ها، بر آن ذره وارد می‌کنند.

● برای محاسبه نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر بار الکتریکی، سه حالت زیر رخ می‌دهد:



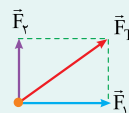
$$F_T = F_1 + F_2$$

الف) نیروها هم‌راستا و هم‌جهت:



$$F_T = F_1 - F_2$$

ب) نیروها هم‌راستا و خلاف جهت:

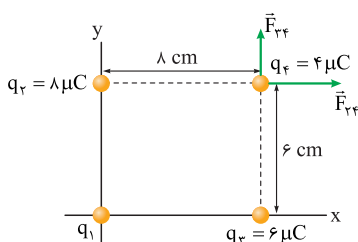


$$F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

پ) نیروها عمود بر هم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا نیروی الکتریکی که از طرف بارهای q_3 و q_4 به بار q_1 وارد می‌شود را محاسبه می‌کنیم:



$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} F_{13} = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(6 \times 10^{-2})^2} = 45 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{13} = 45 \vec{i} \\ F_{14} = 9 \times 10^9 \times \frac{6 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(6 \times 10^{-2})^2} = 60 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{14} = 60 \vec{j} \end{cases}$$

فیزیک

گام دوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 به صورت $\vec{F} = -27\vec{i} + 6\vec{j}$ است، به کمک جمع برداری، $\vec{F}_{14}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} \Rightarrow -27\vec{i} + 6\vec{j} = \vec{F}_{14} + 45\vec{i} + 60\vec{j} \Rightarrow \vec{F}_{14} = -72\vec{i} - 54\vec{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{14}| = \sqrt{(-72)^2 + (-54)^2} = 90 \text{ N}$$

گام سوم: رابطه کولن را برای نیروی الکتریکی که بار q_1 به بار q_4 وارد می‌کند می‌نویسیم تا q_1 به دست می‌آید:

$$r_{14} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$F_{14} = \frac{k |q_1| |q_4|}{r_{14}^2} \Rightarrow 90 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_1| \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(0.1)^2} \Rightarrow |q_1| = 25 \mu\text{C}$$

برای محاسبه نیروی الکتریکی بین دو بار، هرگاه بارها برحسب میکروکولن و فاصله آن‌ها برحسب سانتی‌متر باشد، می‌توان از رابطه

$$F = 90 \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

بدون تبدیل واحد استفاده کرد تا سریع‌تر به جواب رسید.

تیزبازی

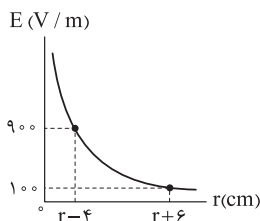


فیزیک

۴۴

نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای بر حسب فاصله از آن به شکل زیر است.

۲ برابر چند سانتی‌متر است؟



(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

Hint

به کمک داده‌های نمودار و با استفاده از رابطه مقایسه‌ای $\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ را محاسبه کنید.

درس‌Box

هر بار الکتریکی نقطه‌ای q در اطراف خود خاصیتی به نام میدان الکتریکی ایجاد می‌کند، اندازه این میدان در نقطه‌ای به فاصله r از بار q از رابطه زیر به دست می‌آید:

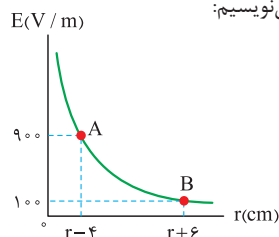
$$E = k \frac{|q|}{r^2}, \quad k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$$

اندازه بار الکتریکی (C) ثابت کولن ($\frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

فاصله نقطه از بار الکتریکی (m) میدان الکتریکی (N/C)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

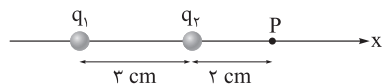
به کمک اطلاعات روی نمودار برای دو نقطه A و B، رابطه $E = \frac{kq}{r^2}$ را به صورت نسبتی می‌نویسیم:



$$\frac{E_A}{E_B} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \Rightarrow \frac{900}{100} = \left(\frac{r+6}{r-4}\right)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 3 = \frac{r+6}{r-4} \Rightarrow 3r-12 = r+6 \Rightarrow r = 9 \text{ cm}$$

در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص حاصل از بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5 \text{ pC}$ و $q_2 = -2 \text{ pC}$ در نقطه P در SI

کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



$$(1) \vec{E} = 27 \vec{i}$$

$$(2) \vec{E} = -27 \vec{i}$$

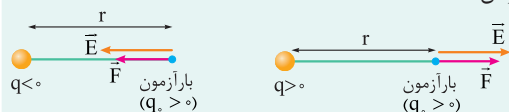
$$(3) \vec{E} = 59 \vec{i}$$

$$(4) \vec{E} = -59 \vec{i}$$

پاسخ: گزینه ۲

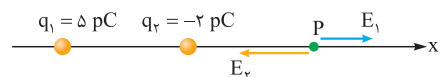
درس Box

برای تشخیص جهت میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار، بار آزمون ($q_0 > 0$) را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم، جهت نیروی وارد شده به بار q_0 ، هم‌جهت با میدان الکتریکی حاصل از بار q در آن نقطه است.



طبق شکل‌های بالا، میدان الکتریکی بار مثبت در جهتی است که از بار مثبت دور شود و میدان الکتریکی بار منفی در جهتی است که به بار منفی نزدیک شود.

گام اول: میدان‌های الکتریکی حاصل از هر کدام از بارها را در نقطه P رسم و اندازه آن را محاسبه می‌کنیم:



$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-12}}{(5 \times 10^{-2})^2} = 18 \text{ N/C} \Rightarrow \vec{E}_1 = 18 \vec{i} \\ E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-12}}{(2 \times 10^{-2})^2} = 45 \text{ N/C} \Rightarrow \vec{E}_2 = -45 \vec{i} \end{cases}$$

گام دوم: میدان الکتریکی خالص را در نقطه P به دست می‌آوریم؛ چون میدان E_2 بزرگ‌تر است، میدان الکتریکی خالص در نقطه P هم‌جهت با E_2 است:

$$\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_1 = -45 \vec{i} + 18 \vec{i} = -27 \vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ذره‌ای به جرم $m = 4 \text{ g}$ و بار الکتریکی $q = -5 \mu\text{C}$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت از حال سکون رها می‌شود. وقتی این ذره در مسیر مستقیم 20 cm جابه‌جا می‌شود، تندی آن به 5 m/s می‌رسد. بزرگی میدان الکتریکی چند ولت بر متر است؟ (از اثر گرانش و نیروهای مقاوم در مقابل حرکت ذره صرف نظر شود).

(۱) 10^3 (۲) 10^4 (۳) 5×10^3 (۴) 5×10^4

پاسخ: گزینه ۴

Hint

درس‌Box

چون بزرگی میدان الکتریکی خواسته سؤال است، کافیه در رابطه $q |E| d = K_f - K_i$ ، داده‌ها را جای گذاری کنید.

اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی E جابه‌جا شود، روی بار کار انجام می‌شود که اندازه این کار برابر با تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta U = -W_E = -|q| E d \cos \theta$$

$\uparrow$ زاویه بین F_E و d $\uparrow$ میدان الکتریکی (N/C)
 $\downarrow$ جابه‌جایی (m) $\downarrow$ بار الکتریکی (C)

یادآوری: از فیزیک دهم طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده برابر با تغییرات انرژی جنبشی است:

$$W_t = \Delta K = K_f - K_i$$

از قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

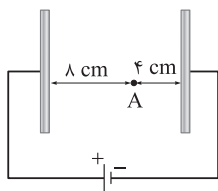
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$W_t = \Delta K \Rightarrow |q| E d \cos \theta = K_f - K_i \Rightarrow 5 \times 10^{-6} \times E \times 20 \times 10^{-2} \times \cos 0 = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-2}) (25)$$

$$\Rightarrow 10^{-6} E = 50 \times 10^{-2} \Rightarrow |E| = 5 \times 10^4 \text{ V/m}$$

(بار ذره منفی است، پس وقتی رها می‌شود در خلاف جهت میدان جابه‌جا می‌شود، یعنی هم‌جهت با نیروی F_E که از طرف میدان به آن وارد می‌شود، پس زاویه بین F_E و d صفر است.)

در شکل زیر، دو صفحه رسانای موازی به دو سر یک باتری وصل شده‌اند. بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -3 \mu\text{C}$ را در نقطه A رها می‌کنیم. بار شروع به حرکت کرده و به یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند. اگر در این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی بار $180 \mu\text{J}$ تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین این دو صفحه چند ولت است؟



(۱) ۶۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

$$\Delta U = -|q|Ed \cos \theta$$

(۱) می‌دانیم انرژی پتانسیل الکتریکی طبق رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta U = -qEd$$

که اگر بار را مثبت و θ را صفر در نظر بگیریم، داریم:از طرفی با توجه به تعریف پتانسیل الکتریکی به صورت $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ داریم:

$$\Delta U = q\Delta V = -qEd \Rightarrow E = -\frac{\Delta V}{d}$$

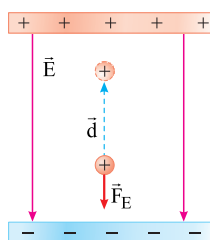
اگر در جهت میدان حرکت کنیم، $\Delta V < 0$ است و داریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

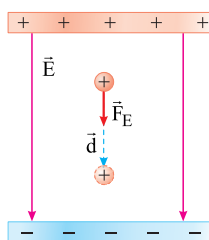
پس در حالت کلی، میدان الکتریکی یکنواخت طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d}$$

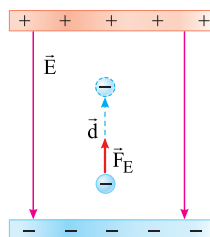
(۲) مطابق شکل‌های زیر کاهشی یا افزایشی بودن انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر مشخص می‌شود:



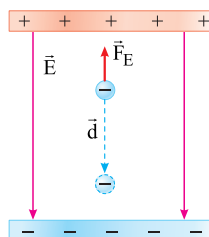
(ب) بار مثبت را در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم:
میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.



(الف) بار مثبت را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم:
میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(ت) بار منفی را در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم:
میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.

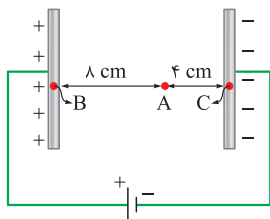


(ب) بار منفی را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم:
میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.

فیزیک

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: بار منفی را بین صفحات رها کرده‌ایم، می‌دانیم بار منفی خودبه‌خود به سمت صفحه مثبت حرکت می‌کند و انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد، پس:



$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_{AB}}{q} = \frac{-18 \times 10^{-6}}{-3 \times 10^{-6}} = 60 \text{ V}$$

گام دوم: با توجه به این که میدان الکتریکی بین صفحات یکنواخت است، داریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{V_B - V_A}{AB} = \frac{V_A - V_C}{AC} \Rightarrow \frac{60}{1} = \frac{V_A - V_C}{4} \Rightarrow \Delta V_{CA} = 30 \text{ V}$$

گام سوم: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه برابر است با:

$$\Delta V_{BC} = \Delta V_{AB} + \Delta V_{CA} = 90 \text{ V}$$

دو کره رسانای A و B به شعاع‌های r_A و $r_B = 2r_A$ ، دارای بار الکتریکی $q_A = 5 \mu C$ و $q_B = 10 \mu C$ هستند. چند درصد از بار یکی از کره‌ها را به کره دیگر منتقل کنیم تا چگالی سطحی بار این دو کره برابر شود؟

۲۰ (۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

کارت Box

• اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است را A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر q باشد، چگالی سطحی بار را با نماد σ نشان می‌دهند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_A = \frac{q}{A} \quad \leftarrow \text{چگالی سطحی بار (C/m}^2\text{)}$$

↑ بار (C)
↓ مساحت سطح (m²)

• بار کره در سطح رسانا توزیع می‌شود، پس در رابطه چگالی سطحی کره، مساحت سطح کره را باید طبق رابطه $A = 4\pi r^2$ محاسبه کنیم.

گام اول: چگالی سطحی دو کره برابر است، یعنی:

$$\sigma_A = \sigma_B \Rightarrow \frac{q'_A}{A_A} = \frac{q'_B}{A_B} \xrightarrow{A=4\pi r^2} \frac{q'_A}{4\pi r_A^2} = \frac{q'_B}{4\pi (2r_A)^2} \Rightarrow q'_A = \frac{q'_B}{4} \quad (I)$$

از طرفی طبق پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$q_A + q_B = q'_A + q'_B \Rightarrow q'_A + q'_B = 15 \mu C \xrightarrow{(I)} \frac{q'_B}{4} + q'_B = 15 \Rightarrow \begin{cases} q'_B = 12 \mu C \\ q'_A = 3 \mu C \end{cases}$$

گام دوم: $-2 \mu C$ بار از کره B به کره A منتقل شده است، پس درصد بار منتقل شده برابر است با:

$$\frac{\Delta q_A}{q_A} \times 100 = \frac{2}{5} \times 100 = 40\%$$

دقت کنید الکترون از کره B به کره A منتقل شده، اگر به انتقال بار الکتریکی دقت نکنی و درصد انتقال بار کره A را محاسبه کنی در دام گزینه (۱) می‌افتی.

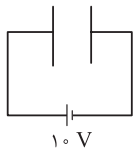
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

فیزیک

۴۹

در شکل زیر، ظرفیت خازن برابر $5 \mu F$ و بین صفحات آن هواست. اگر عایقی با ضریب دی‌الکتریک $\kappa = 4$ را وارد فضای بین صفحات خازن کنیم، چند میکروکولن بار الکتریکی از باتری عبور می‌کند؟ (دی‌الکتریک به طور کامل فضای بین صفحات را پر می‌کند.)



(۱) ۲۰۰

(۲) ۱۵۰

(۳) ۵۰

(۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا بار الکتریکی ذخیره‌شده روی صفحات را محاسبه کنید، سپس با توجه به اضافه کردن دی‌الکتریک بین صفحات و ثابت بودن اختلاف پتانسیل دو سر آن، بار الکتریکی جدید را محاسبه و اختلاف بار در دو حالت را به دست آورید.

درس Box

ظرفیت خازن از ویژگی‌های ساختاری خازن است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

ثابت دی‌الکتریک

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$\uparrow$ مساحت هر یک از صفحه‌ها (m^2)
 $\downarrow$ فاصله صفحات از هم (m)

ضریب گذردهی الکتریکی

$$\left(\frac{C^2}{N.m} \right) \text{ یا } (F/m)$$

● ثابت دی‌الکتریک، یکا ندارد.

● ثابت دی‌الکتریک هوا برابر یک فرض می‌شود و ثابت دی‌الکتریک سایر مواد بزرگ‌تر از یک است، پس وقتی بین صفحه‌های خازن دی‌الکتریک اضافه کنیم، ظرفیت خازن افزایش می‌یابد.

گام اول: بار الکتریکی ذخیره‌شده روی صفحات خازن را در حالت اول محاسبه می‌کنیم:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV = 5 \times 10 = 50 \mu C$$

گام دوم: با قراردادن عایقی با ضریب دی‌الکتریک $\kappa = 4$ بین صفحات و ثابت بودن سایر پارامترها، ظرفیت خازن ۴ برابر می‌شود و چون اختلاف پتانسیل ثابت است، پس:

$$C' = \frac{q'}{V'} \xrightarrow{V': \text{ثابت}} C' \propto q' \xrightarrow{C'=4C} q' = 4q = 200 \mu C$$

گام سوم: حالا بریم سراغ خواسته سؤال:

$$\Delta q = q' - q = 200 - 50 = 150 \mu C$$

اگر به خواسته سؤال دقت نکنی، توی دام گزینه‌های (۱) و (۳) می‌افتی که بار الکتریکی روی صفحات در خازن بدون دی‌الکتریک و با دی‌الکتریک است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

فیزیک

۵۰

فاصله بین صفحه‌های یک خازن تخت ۹ mm، مساحت هر یک از صفحه‌های آن 4 cm^2 و فضای بین دو صفحه خازن هوا است. این خازن به یک باتری ۵ ولتی متصل است. اگر فاصله بین صفحه‌های خازن ۶ mm کاهش یابد، انرژی ذخیره شده در آن چند پیکوژول و چگونه تغییر می‌کند؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

(۱) افزایش می‌یابد. (۲) کاهش می‌یابد.
(۳) افزایش می‌یابد. (۴) کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۱

درس‌Box

یکی از رابطه‌های انرژی ذخیره شده در خازن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

اختلاف پتانسیل (V)

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

ظرفیت خازن (F) انرژی (J)

گام اول: ظرفیت خازن را به کمک ویژگی‌های ساختاری آن محاسبه می‌کنیم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = 1 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{4 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{-13} \text{ F} \times 10^{+12} = 0.4 \text{ pF}$$

گام دوم: انرژی خازن را از رابطه $U = \frac{1}{2} C V^2$ به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2} \times 0.4 \times (5)^2 = 5 \text{ pJ}$$

گام سوم: طبق رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ با کاهش فاصله صفحات، ظرفیت خازن افزایش می‌یابد:

$$\frac{C'}{C} = \frac{d}{d'} \Rightarrow \frac{C'}{C} = \frac{9}{6} = 3 \quad (I)$$

گام چهارم: طبق رابطه $U = \frac{1}{2} C V^2$ و با توجه به ثابت بودن V داریم:

$$\frac{U'}{U} = \frac{C'}{C} \xrightarrow{(I)} \frac{U'}{U} = 3 \Rightarrow U' = 3U$$

$$\Delta U = U' - U = 3U - U = 2U = 2(5) = 10 \text{ pJ}$$

علامت مثبت نشان‌دهنده افزایش انرژی است.

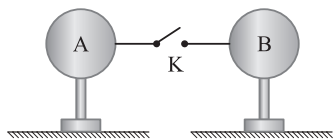
تیزبازی

C و C' را محاسبه کنید؛ سپس در رابطه $\Delta U = \frac{1}{2} V^2 (C' - C)$ ، تغییرات انرژی را به دست آورید. طبق گام اول و گام سوم:

$$C = 0.4 \text{ pF}, \quad C' = 3 \times 0.4 = 1.2 \text{ pF}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} (5)^2 (1.2 - 0.4) = 10 \text{ pJ}$$

در شکل زیر دو کره مشابه A و B دارای بار الکتریکی q_A و $q_B = -5q_A$ هستند. پس از بستن کلید K به مدت 2 ns ، جریان الکتریکی متوسط 6 kA در سیم ایجاد می‌شود. بار اولیه کره A چند میکروکولن است؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

بار الکتریکی (C)

به آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، جریان الکتریکی متوسط می‌گویند:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

مدت زمان (S) $\downarrow$ $\uparrow$ جریان الکتریکی متوسط (A)

هرگاه دو کره بردار هم‌اندازه و مشابه دارای بارهای q_A و q_B را به هم تماس دهیم، طبق قانون پایستگی بار الکتریکی، پس از تبادل بار الکتریکی بین دو کره، بار آنها هم‌اندازه و برابر با میانگین بارهای اولیه است:

$$q'_A = q'_B = \frac{q_B + q_A}{2}$$

گام اول: ابتدا مقدار بار جابه‌جاشده را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = I \Delta t = 6 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9} = 12 \times 10^{-6} \text{ C} = 12 \mu\text{C}$$

گام دوم: طبق پایستگی بار الکتریکی، مجموع بار کره‌ها قبل و بعد از تماس برابر است و همچنین چون دو کره به وسیله سیم به هم وصل شده‌اند بار آنها بعد از تماس یکسان است؛ پس:

$$q'_A = q'_B = \frac{q_A + q_B}{2} = \frac{q_A - 5q_A}{2} = -2q_A$$

گام سوم: بار کره A از $+q_A$ به $-2q_A$ تغییر کرده، یعنی:

$$\Delta q_A = q'_A - q_A = -2q_A - q_A = -3q_A$$

در نتیجه از گام اول و سوم داریم:

$$\Delta q = |\Delta q_A| \Rightarrow 12 = 3q_A \Rightarrow q_A = 4 \mu\text{C}$$

$-2q_A$ اندازه هر کدام از بارها بعد از تماس است، اگر اشتباهاً Δq رو برابر با $12 \mu\text{C}$ قرار بدی، توی دام گزینه (۳) می‌افتی.

گول نخوری ✗

فیزیک

۵۲

لامپ به مقاومت الکتریکی 6Ω به اختلاف پتانسیل ثابت $4 V$ متصل است. در مدت یک دقیقه چند الکترون از این لامپ عبور می کند؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} C$)

- (۱) 5×10^{21} (۲) 5×10^{20}
(۳) $2/5 \times 10^{21}$ (۴) $2/5 \times 10^{20}$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا جریان الکتریکی عبوری را از قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) محاسبه کنید و سپس به کمک رابطه $I = \frac{ne}{t}$ ، تعداد الکترون هایی که از لامپ عبور می کند را به دست آورید.

درس Box

در رساناهای اهمی، مقاومت الکتریکی در ولتاژهای متفاوت و در دمای ثابت همواره مقدار ثابتی است، در واقع در وسیله های که از قانون اهم پیروی می کنند، نسبت اختلاف پتانسیل به جریان عبوری همواره مقداری ثابت است، این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی رسانا می نامند:

اختلاف پتانسیل (V)

$$R = \frac{V}{I}$$

جریان عبوری (A)

مقاومت الکتریکی (Ω)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا جریان عبوری از لامپ را به کمک قانون اهم به دست می آوریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} A$$

گام دوم: با ترکیب دو رابطه $q = ne$ و $I = \frac{q}{t}$ ، تعداد الکترون هایی را که از لامپ عبور می کند، محاسبه می کنیم:

$$I = \frac{ne}{t} \Rightarrow n = \frac{It}{e} = \frac{\frac{2}{3} \times 60}{1.6 \times 10^{-19}} = 2/5 \times 10^{20}$$

فیزیک

۵۳

سیم رسانایی به جرم 30 g از ماده‌ای با چگالی 10 g/cm^3 و مقاومت ویژه $3 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ساخته شده است. اگر مقاومت الکتریکی این سیم 4Ω باشد، طول آن چند متر است؟

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

اگر سطح مقطع رسانا در تمام طول آن یکسان باشد، مقاومت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

طول رسانا (m) $\uparrow$
 $\downarrow$ مساحت مقطع رسانا (m^2)
 $\downarrow$ مقاومت ویژه ($\Omega \cdot \text{m}$)

چگالی، نسبت جرم به حجم جسم است؛ یکای آن در SI کیلوگرم بر مترمکعب (kg/m^3) و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

جرم (kg) $\uparrow$
 $\downarrow$ چگالی (kg/m^3)
 $\downarrow$ حجم (m^3)

یکی از یکاهای متداول چگالی g/cm^3 است که برای تبدیل به واحد kg/m^3 و برعکس به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \xrightarrow{\times 10^3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \xrightarrow{\times 10^{-3}} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

نکته

گام اول: با استفاده از رابطه چگالی، ارتباط بین طول سیم و سطح آن را پیدا می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL} \Rightarrow A = \frac{m}{\rho L} = \frac{30 \times 10^{-3}}{10^4 L} = \frac{3 \times 10^{-6}}{L}$$

گام دوم: حالا سراغ رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ می‌رویم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow 4 = 3 \times 10^{-8} \times \frac{L}{\frac{3 \times 10^{-6}}{L}} \Rightarrow 4 = 10^{-2} L^2 \Rightarrow L = 20 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۵۴

مقاومت الکتریکی یک قطعه از جنس ژرمانیوم 20Ω است. اگر دمای این قطعه $5 K$ افزایش یابد، مقاومت الکتریکی

آن به چند اهم می‌رسد؟ ($\alpha = 5 \times 10^{-2} K^{-1}$ ژرمانیوم)

۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

در یک رسانای فلزی با افزایش دما، ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌ها و یون‌ها افزایش می‌یابد که این عامل سبب افزایش برخورد حامل‌های بار با شبکه اتمی رسانای فلزی می‌شود که یعنی با افزایش دما، مقاومت سیم افزایش می‌یابد که یعنی ضریب دمایی مقاومت ویژه (α) مثبت است.

در نیم‌رساناها مثل ژرمانیوم و سیلیسیم در دماهای پایین تعداد حامل‌های بار ناچیز است، با افزایش دما به تعداد حامل‌های بار اضافه می‌شود و باعث کاهش مقاومت نیم‌رسانا می‌شود که می‌فهمیم ضریب دمایی مقاومت ویژه (α) منفی است.

با تغییر دمای یک رسانا، مقاومت رسانا نیز طبق رابطه زیر تغییر می‌کند: تغییرات دما (K)

$$\Delta R = R_T - R_1 = R_1 \alpha \Delta T \Rightarrow R_T = R_1 (1 + \alpha \Delta T)$$

ضریب دمایی مقاومت اولیه ($\frac{1}{R}$)

از رابطه $R_T = R_1 (1 + \alpha \Delta T)$ کمک می‌گیریم؛ فقط دقت کنید ژرمانیوم نیم‌رسانا است و در نیم‌رساناها با افزایش دما، مقاومت ویژه آن‌ها کم می‌شود، در نتیجه $\alpha < 0$ ژرمانیوم است:

$$R_T = 20 (1 - 5 \times 10^{-2} \times 5) = 20 (1 - 0.25) = 15 \Omega$$

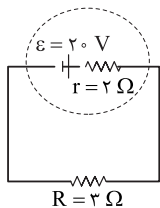
اگر خواست به علامت منفی ژرمانیوم α نباشه توی دام گزینه ۴ (۴) می‌افتی و اگه خواسته سؤال که مقاومت الکتریکی بعد از افزایش دما رو می‌خواهد و اشتباهاً دنبال ΔR توی گزینه‌ها باشی، توی دام گزینه ۱ (۱) میفتی.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

فیزیک

در مدار شکل زیر در مدت ۳۰ دقیقه، چند آمپر - ساعت بار الکتریکی از مقاومت R می‌گذرد؟ **۵۵**



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

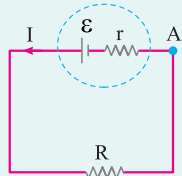
پاسخ: گزینه ۲

Hint

از برابری جریان در دو رابطه $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ و $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$ و با جای‌گذاری زمان برحسب ساعت، بار الکتریکی عبوری از مقاومت R را به دست آورید.

درس‌Box

در مدار زیر، با یک دور کامل می‌توانیم فرمول جریان الکتریکی را پیدا کنیم:



$$V_A - Ir + \varepsilon - IR = V_A \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r+R}$$

در رابطه $\Delta q = I(\Delta t)$ اگر I برحسب A و Δt برحسب ساعت باشد، یکای Δq برحسب آمپر - ساعت (Ah) بیان می‌شود.

$$\Delta t = 30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}$$

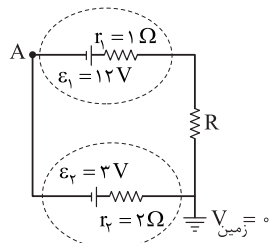
$$\text{با برابر قراردادن دو رابطه } I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ و } I = \frac{\varepsilon}{R+r} \text{ داریم:}$$

$$\Delta q = \frac{\varepsilon \cdot \Delta t}{R+r} = \frac{20 \times 0.5}{3+2} = 2 \text{ Ah}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۵۶ در شکل زیر، اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر $V_A = -7 \text{ V}$ باشد، مقاومت R برابر چند اهم است؟



(۱) ۵/۰

(۲) ۱

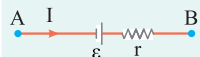
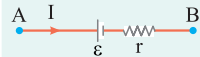
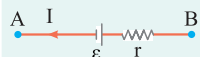
(۳) ۵/۱

(۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) در دورزدن یک حلقه حامل جریان، با عبور از هر یک از اجزای مدار، اختلاف پتانسیل طبق قوانین زیر تغییر می‌کند:

	$V_B - V_A = -IR$
	$V_B - V_A = IR$
	$V_B - V_A = +\varepsilon - Ir$
	$V_B - V_A = -\varepsilon - Ir$
	$V_B - V_A = +\varepsilon + Ir$
	$V_B - V_A = -\varepsilon + Ir$

(۲) در مدارهای تک‌حلقه‌ای که چند منبع نیروی محرکه داریم به کمک قانون حلقه، جریان از رابطه زیر به دست می‌آید:

جمع جبری نیروهای محرکه

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + \sum r}$$

جمع جبری مقاومت‌های بیرونی

جمع جبری مقاومت‌های داخلی

گام اول: با توجه به این که $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ است، پس جهت جریان ساعتگرد است؛ از زمین V در جهت جریان به سمت V_A حرکت می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

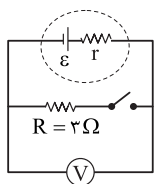
$$V_{\text{زمین}} - Ir_2 - \varepsilon_2 = V_A \Rightarrow 0 - 2I - 3 = -7 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

گام دوم: به کمک رابطه $I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2}$ داریم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} \Rightarrow 2 = \frac{12 - 3}{R + 1 + 2} \Rightarrow R + 3 = 4.5 \Rightarrow R = 1.5 \Omega$$

فیزیک

در مدار شکل زیر، اگر کلید باز باشد، ولت‌سنج عدد 18 V را نشان می‌دهد و اگر کلید بسته باشد، ولت‌سنج عدد 12 V را نشان می‌دهد. مقاومت درونی باتری چند ولت است؟



۱ (۱)

۱/۵ (۲)

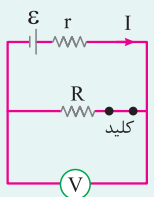
۲ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

در مدار شکل زیر، ولت‌سنج هم به دو سر باتری وصل است و هم به دو سر مقاومت، پس اختلاف پتانسیل دو سر هر دو را نشان می‌دهد.



$$V = IR$$

$$V = \varepsilon - Ir \xrightarrow{\text{اگر کلید قطع شود و جریان عبوری از باتری صفر شود}} V = \varepsilon$$

در حالت اول که کلید باز است، جریانی از مدار عبور نمی‌کند و ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد:

$$V = \varepsilon - Ir \xrightarrow{I=0} \varepsilon = 18\text{ V}$$

وقتی کلید بسته شود، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت و اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد، پس:

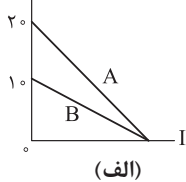
$$V = IR \Rightarrow 12 = I \times 3 \Rightarrow I = 4\text{ A}$$

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow 12 = 18 - 4(r) \Rightarrow r = 1/5\ \Omega$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

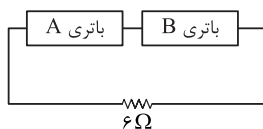
نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری‌های A و B بر حسب جریانی که از آن‌ها می‌گذرد، به شکل (الف) است. اگر با این دو باتری مدار شکل (ب) را تشکیل دهیم، جریان A ۴ از مقاومت 6Ω می‌گذرد، مقاومت درونی باتری B چند اهم است؟

V(V)



(الف)

۱ (۴)



(ب)

۰ / ۷۵ (۳)

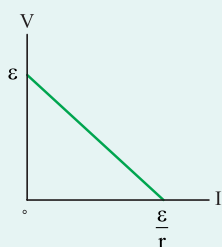
۰ / ۵ (۲)

۰ / ۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

نمودار اختلاف پتانسیل بر حسب جریان الکتریکی عبوری از مدار براساس رابطه $V = \varepsilon - Ir$ به صورت زیر رسم می‌شود:

مقاومت درونی مولد $r = |\text{شیب نمودار}|$

گام اول: عرض از مبدأ نمودار برابر با نیروی محرکه الکتریکی باتری است، پس:

$$\varepsilon_A = 20 \text{ V}, \quad \varepsilon_B = 10 \text{ V}$$

$$\left. \begin{aligned} r_A &= \frac{20}{I} \\ r_B &= \frac{10}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_A = 2r_B$$

شیب نمودارها برابر با مقاومت درونی باتری است، پس:

گام دوم: حالا دو حالت وجود دارد:

حالت اول: دو باتری مخالف هم باشند!

$$I = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{R + r_A + r_B} \Rightarrow 4 = \frac{20 - 10}{6 + r_A + r_B} \xrightarrow{r_A = 2r_B} 4 = \frac{10}{6 + 3r_B} \Rightarrow r_B < 0 \text{ غیر قابل قبول}$$

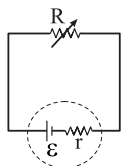
حالت دوم: دو باتری موافق هم باشند!

$$I = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{R + r_A + r_B} \Rightarrow 4 = \frac{20 + 10}{6 + r_A + r_B} \xrightarrow{r_A = 2r_B} 4 = \frac{30}{6 + 3r_B} \Rightarrow r_B = 0.5 \Omega$$

خواسته سؤال r_B است، اگر r_A را محاسبه کنی در دام گزینه (۴) می‌افتی.

گول نخوری

اگر در مدار شکل زیر، مقدار مقاومت متغیر R را از $R_1 = 2r$ تا $R_2 = 3r$ افزایش دهیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند درصد و چگونه تغییر می کند؟



(۱) $12/5\%$ ، افزایش می یابد.

(۲) 25% ، افزایش می یابد.

(۳) $12/5\%$ ، کاهش می یابد.

(۴) 25% ، کاهش می یابد.

پاسخ: گزینه ۱

 Hint

با جای گذاری رابطه جریان به صورت $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ در رابطه اختلاف پتانسیل دو سر باتری ($V = \varepsilon - Ir$)، رابطه جدیدی برای V به دست آورید و با جای گذاری $R_1 = 2r$ و $R_2 = 3r$ ، اختلاف پتانسیل ها را محاسبه و درصد تغییرات آن را به دست آورید.

 پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جریان در مدار تک حلقه از رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری از رابطه $V = \varepsilon - Ir$ به دست می آید، پس:

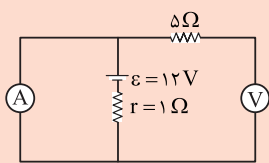
$$V = \varepsilon - \frac{\varepsilon r}{R+r} = \varepsilon \left(\frac{R}{R+r} \right) \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 2r: V_1 = \varepsilon \left(\frac{2r}{3r} \right) = \frac{2}{3} \varepsilon \\ R_2 = 3r: V_2 = \varepsilon \left(\frac{3r}{4r} \right) = \frac{3}{4} \varepsilon \end{cases}$$

گام دوم: درصد تغییرات اختلاف پتانسیل الکتریکی را به دست می آوریم:

$$\text{درصد تغییرات } V: \frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \frac{\frac{3}{4} \varepsilon - \frac{2}{3} \varepsilon}{\frac{2}{3} \varepsilon} \times 100 = \frac{\frac{1}{12} \varepsilon}{\frac{2}{3} \varepsilon} \times 100 = +12/5\%$$

علامت مثبت، نشان دهنده افزایش اختلاف پتانسیل است.

در شکل زیر اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولتسنج عوض شود، کدام موارد درست است؟



(۲) الف، پ

(۴) الف، ب، پ

(۱) الف، ب

(۳) ب، پ

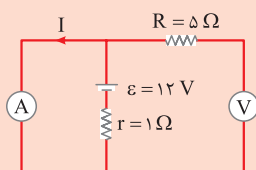
مشاوره در سؤالات عبارتی، مثل این سؤال که بین گزینه‌ها تناقض وجود دارد، از این تناقض استفاده کنید تا سریع‌تر به جواب برسید. در این سؤال با رد عبارت «پ»، جواب تست مشخص می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

Hint

در هر دو حالت مدارها را رسم کرده و جریان عبوری از آمپرسنج، اختلاف پتانسیل ولتسنج و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R را پیدا کنید و سپس اختلاف آن‌ها را به دست آورید و با بررسی عبارت‌ها جواب سؤال را مشخص کنید.

در حالت اول (شکل الف) آمپرسنج آرمانی، جریان عبوری از مدار و ولتسنج آرمانی، اختلاف پتانسیل دو سر سیم شامل آمپرسنج، یعنی عدد صفر را نشان می‌دهد؛ چون از حلقه سمت راست به خاطر ولتسنج جریانی عبور نمی‌کند.



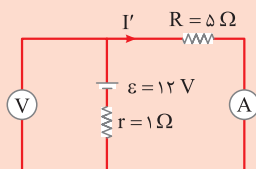
به خاطر حضور ولتسنج، جریانی از این قسمت عبور نمی‌کند.

(الف)

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{R=0} I = 12 \text{ A}$$

$$V_{5\Omega} = IR \xrightarrow{I=0} V_{5\Omega} = 0$$

با جابه‌جا کردن جای ولتسنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی مدار به صورت شکل (ب) درمی‌آید؛ آمپرسنج آرمانی جریان عبوری از حلقه سمت راست را نشان می‌دهد و ولتسنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد، پس:



(ب)

$$I' = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{12}{5 + 1} = 2 \text{ A}$$

$$V = \varepsilon - I'r = 12 - 2 = 10 \text{ V}$$

$$V'_{5\Omega} = I'R = 2 \times 5 = 10 \text{ V}$$

حالا به سراغ عبارت سؤال می‌رویم:

$$\Delta I = 2 - 12 = -10 \text{ A}$$

$$\Delta V = 10 - 0 = 10 \text{ V}$$

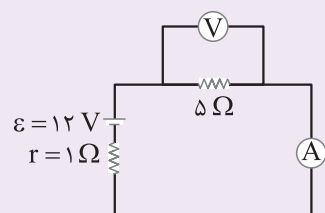
$$\Delta V_{5\Omega} = 10 \text{ V} - 0 = 10 \text{ V}$$

(الف) درست است.

(ب) درست است.

(پ) نادرست است.

در شکل زیر، اگر جای آمپرسنج و ولتسنج عوض شود، کدام مورد درست است؟ (آمپرسنج و ولتسنج، آرمانی فرض شوند). (سؤال ۶۴ کنکور تجربی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)



(الف) عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، ۲ A کاهش می‌یابد.

(ب) عددی که ولتسنج نشان می‌دهد، ۲ V افزایش می‌یابد.

(پ) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ اهمی، ۲ V کاهش می‌یابد.

(۲) الف، پ

(۴) الف، ب، پ

(۱) الف، ب

(۳) ب، پ

اگر آرایش الکترونی یون A^{3+} به زیرلایه $3d^2$ ختم شود، خارجی ترین زیرلایه در آرایش الکترونی اتم A کدام است و عنصر A، چندمین فلز واسطه جدول دوره‌ای محسوب می‌شود؟

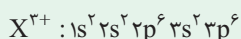
- (۱) $4s^1$ - چهارمین
(۲) $3d^6$ - ششمین
(۳) $4s^1$ - ششمین
(۴) $4s^2$ - چهارمین

پاسخ: گزینه ۱

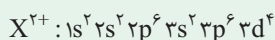
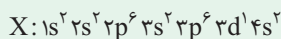


نوشتن آرایش الکترونی اتم فلز از روی کاتیون آن: اتم‌ها با از دست دادن الکترون به کاتیون تبدیل می‌شوند؛ بنابراین برای این که آرایش الکترونی کاتیون را به آرایش الکترونی اتم آن تبدیل کنیم، کافی است به تعداد بار مثبت، به کاتیون الکترون اضافه کنیم. فقط باید هواسمون باشه که، این کار را باید به ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها انجام دهیم!

مثال فرض کنید آرایش الکترونی کاتیون X^{3+} به $3p^6$ ختم شده باشد:

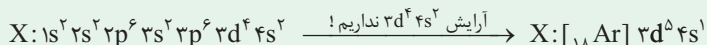


فب! اتم X، ۳ الکترون نسبت به X^{3+} بیشتر دارد. بعد از زیرلایه $3p$ ، به ترتیب زیرلایه‌های $4s$ و $3d$ از الکترون اشغال می‌شوند؛ بنابراین اگر دو الکترون به زیرلایه $4s$ و یک الکترون به زیرلایه $3d$ وارد شود، آرایش الکترونی اتم X به دست می‌آید.

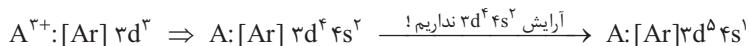


مثال فرض کنید آرایش الکترونی کاتیون X^{2+} به $3d^4$ ختم شده باشد:

حالا باید ۲ الکترون به X^{2+} اضافه کنیم تا آرایش X به دست آید. به وقت دو الکترون را به $3d$ اضافه نکنید و بنویسین $3d^6$! مطابق قاعده آفا، اول باید دو الکترون به زیرلایه $4s$ بدهیم:



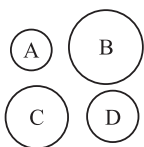
باید ۳ الکترون به A^{3+} اضافه کنیم تا آرایش A به دست آید:



عنصر A، همان کروم (Cr) است که چهارمین فلز واسطه جدول دوره‌ای محسوب می‌شود؛ زیرا عدد اتمی اولین فلز واسطه برابر ۲۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل زیر، نشان‌دهندهٔ شعاع نسبی چهار عنصر متوالی از دورهٔ سوم جدول تناوبی است که در گروه‌های یک تا چهارده قرار دارند. با توجه به شکل، کدام عنصر یک شبه‌فلز است؟



B (۲)

A (۱)

D (۴)

C (۳)

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چهار عنصر اول دورهٔ سوم به ترتیب Na ، Mg ، Al و Si هستند که در بین آن‌ها، سیلیسیم شبه‌فلز است. با توجه به این که در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عناصرها کاهش می‌یابد، در بین این چهار عنصر، کوچک‌ترین شعاع اتمی مربوط به شبه‌فلز سیلیسیم است. در شکل داده‌شده، A کوچک‌ترین شعاع اتمی را دارد.

اگر در واکنش ترمیت، ۱۵۰ گرم آلومینیم با خلوص ۵۴ درصد با مقدار کافی از واکنش دهنده دیگر واکنش دهد، چند گرم ترکیب یونی تولید می شود؟ (بازده واکنش را ۷۰ درصد در نظر بگیرید.)

($O = ۱۶$, $Al = ۲۷$, $Fe = ۵۶$; $g \cdot mol^{-1}$)



۱۵۳ (۴)

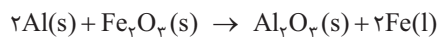
۱۰۷/۱ (۳)

۱۰۲ (۲)

۵۱/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

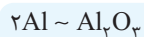
معادله موازنه شده واکنش ترمیت به صورت زیر است:



ترکیب یونی تولید شده در این واکنش، Al_2O_3 است:

$$۱۵۰ \text{ g Al} \times \frac{۵۴ \text{ g Al خالص}}{۱۰۰ \text{ g Al ناخالص}} \times \frac{۱ \text{ mol Al}}{۲۷ \text{ g Al}} \times \frac{۱ \text{ mol } Al_2O_3}{۲ \text{ mol Al}} \times \frac{۱۰۲ \text{ g } Al_2O_3}{۱ \text{ mol } Al_2O_3} \times \underbrace{\frac{۷۰ \text{ g } Al_2O_3}{۱۰۰ \text{ g } Al_2O_3}}_{\text{بازده واکنش}}$$

$$= \frac{۱۵۰ \times ۵۴ \times ۱۰۲ \times ۷۰}{۱۰۰ \times ۲۷ \times ۲ \times ۱۰۰} = \frac{۱۵ \times ۱۰۲ \times ۷}{۱۰۰} = ۱۰۷/۱ \text{ g } Al_2O_3$$



$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵۰ \times \frac{۵۴}{۱۰۰} \times \frac{۷۰}{۱۰۰}}{۲ \times ۲۷} = \frac{x}{۱ \times ۱۰۲} \Rightarrow x = \frac{۱۵ \times ۵۴ \times ۷ \times ۱۰۲}{۱۰۰ \times ۲ \times ۲۷} = ۱۰۷/۱ \text{ g}$$

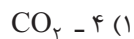
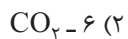
پاسخ خیلی تشریحی ✓

په چور دیگه

طبق اطلاعات کتاب درسی، در واکنش تهیه عنصر اصلی سازنده سلولهای خورشیدی، مجموع ضرایب استوکیومتری

سیلیسیم

مواد کدام است و در این واکنش، کدام گاز تولید می‌شود؟



پاسخ: گزینه ۴

عنصر اصلی سازنده سلولهای خورشیدی، سیلیسیم است که طبق یکی از تمرینهای دوره‌ای فصل ۱، از واکنش کربن با سیلیس تهیه می‌شود. فرآورده دیگر این واکنش، گاز کربن مونواکسید است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در دما و فشار اتاق و با توجه به ویژگی‌های زیر، کدام آلکان‌ها به ترتیب از راست به چپ، بیشترین فرّاریت و بالاترین نقطه جوش را دارند؟ (همه آلکان‌ها را راست‌زنجیر در نظر بگیرید؛ $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

- A: آلکانی که به عنوان سوخت فندک کاربرد دارد.
- B: آلکانی که جرم مولی آن ۴۴ گرم بر مول است.
- C: ششمین عضو خانواده آلکان‌ها است.
- D: سبک‌ترین آلکانی که حالت مایع دارد.

آلکان ۵ کربنی (C_5H_{12})

بوتان (C_4H_{10})

A - B (۴)

C - D (۳)

C - B (۲)

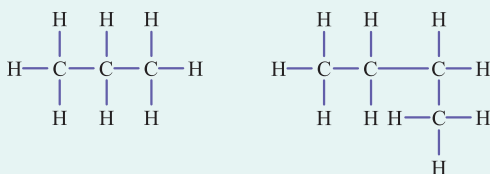
A - D (۱)

پاسخ: گزینه ۲

آلکان‌های راست‌زنجیر:

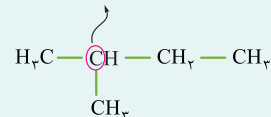
درس‌Box

فرمول عمومی آلکان‌ها، C_nH_{2n+2} است. آلکان‌ها به دو دسته راست‌زنجیر و شاخه‌دار تقسیم می‌شوند. در آلکان‌های راست‌زنجیر، همه اتم‌های کربن حداکثر به ۲ اتم کربن دیگر به طور مستقیم با پیوند یگانه وصل شده‌اند و از شاخه فرعی خبری نیست؛ به طور مثال، آلکان‌های زیر راست‌زنجیر به حساب می‌آیند؛ زیرا به هر اتم کربن، یک یا دو اتم کربن دیگر متصل است و پس!



به آلکان‌هایی که در آن‌ها حداقل یک اتم کربن به سه یا چهار اتم کربن دیگر به طور مستقیم وصل شده باشد، یعنی دارای حداقل یک شاخه فرعی باشند، آلکان شاخه‌دار می‌گویند؛ به طور مثال ترکیب زیر یک آلکان شاخه‌دار محسوب می‌شود:

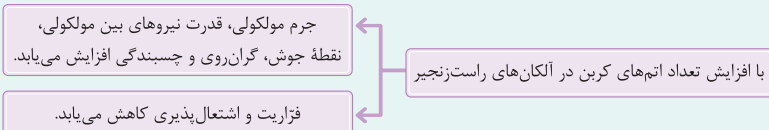
این اتم کربن به ۳ اتم کربن دیگر متصل است.



نام همه آلکان‌ها به پسوند «ان» ختم می‌شود، در جدول زیر، نام و فرمول مولکولی ۱۰ آلکان راست‌زنجیر نخست نمایش داده شده است.

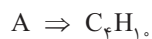
تعداد اتم کربن در آلکان (n)	فرمول مولکولی (C_nH_{2n+2})	نام
n = ۱	CH _۴	متان
n = ۲	C _۲ H _۶	اتان
n = ۳	C _۳ H _۸	پروپان
n = ۴	C _۴ H _{۱۰}	بوتان
n = ۵	C _۵ H _{۱۲}	پنتان
n = ۶	C _۶ H _{۱۴}	هگزان
n = ۷	C _۷ H _{۱۶}	هپتان
n = ۸	C _۸ H _{۱۸}	اوکتان
n = ۹	C _۹ H _{۲۰}	نونان
n = ۱۰	C _{۱۰} H _{۲۲}	دکان

● شمار اتم‌های کربن، نقش مهمی در رفتار هیدروکربن‌ها از جمله آلکان‌ها دارند؛ به طوری که با تغییر تعداد اتم‌های کربن، اندازه و جرم مولکول آلکان تغییر کرده و به دنبال آن خواص فیزیکی آن‌ها تغییر می‌کند.



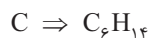
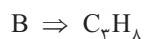
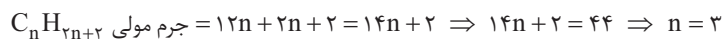
در دما و فشار اتاق، فقط چهار آلکان راست‌زنجیر نخست یعنی متان، اتان، پروپان و بوتان به حالت گازند. بقیه آلکان‌ها یا به حالت مایع و یا به حالت جامدند.

ابتدا باید آلکان‌ها را پیدا کنیم:

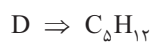


A: از بوتان به عنوان سوخت فندک استفاده می‌شود:

B:



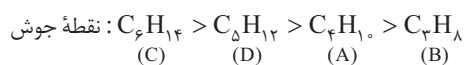
C: ششمین عضو آلکان‌ها، ۶ اتم کربن دارد:



D: آلکان‌های ۱ تا ۴ کربنه به حالت گازند؛ پس سبک‌ترین آلکان مایع، ۵ اتم کربن دارد:

بین آلکان‌های ۳ تا ۶ کربنه، بیشترین فراریت و کم‌ترین نقطه جوش، مربوط به آلکان ۳ کربنه (یعنی B) و بالاترین نقطه جوش

مربوط به آلکان ۶ کربنه (یعنی C) است:



در دمای ثابت، تفاوت چشم‌گیری میان انرژی گرمایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وجود ندارد و گرمای جذب‌شده یا آزادشده در واکنش‌ها در دمای ثابت، عمدتاً به تفاوت میان انرژی پتانسیل مواد واکنش‌دهنده و فراورده مربوط است.

- (۱) به ازای دریافت مقدار مشخصی گرما توسط مقدار یکسانی نان و سیب‌زمینی، نان تغییر دمای بیشتری خواهد داشت.
 (۲) ظرفیت گرمایی یک مول ماده، از حاصل ضرب ظرفیت گرمایی ویژه در جرم مولی آن ماده به دست می‌آید.
 (۳) انرژی مورد نیاز برای تبخیر مقدار معینی از یک ماده به حالت مایع، کمتر از انرژی مورد نیاز برای ذوب همان مقدار ماده به حالت جامد است.
 (۴) اگر دو دگرشکل یک عنصر، در یک واکنش مشابه و گرماگیر شرکت کرده و فراورده یکسانی تولید کنند، در واکنشی که دگرشکل ناپایدارتر شرکت کرده، گرمای کمتری مصرف می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت درون کادر، درست است، در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (۳) نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): آب موجود در نان نسبت به سیب‌زمینی، کمتر است؛ پس در شرایط یکسان، تغییر دمای نان بیشتر خواهد بود.

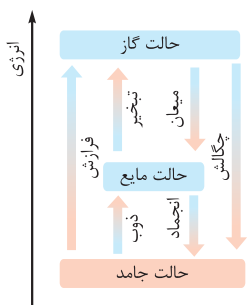
$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{\text{ثابت } m \text{ و } c} \Delta\theta \propto \frac{1}{c}$$

گزینه (۲): با توجه به رابطه ظرفیت گرمایی خواهیم داشت:

گرمای ویژه (c) × جرم (m) = ظرفیت گرمایی (C)

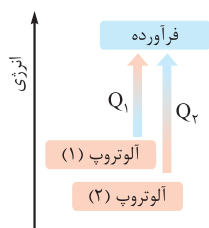
جرم ۱ مول ماده، هم‌ارز با جرم مولی آن ماده است؛ بنابراین ظرفیت گرمایی ۱ مول ماده از حاصل ضرب جرم مولی در گرمای ویژه آن به دست می‌آید.

گزینه (۳): با توجه به نمودار روبه‌رو، تفاوت سطح انرژی یک ماده در حالت‌های مایع و گاز، بیشتر از تفاوت سطح انرژی حالت‌های جامد و مایع آن است، پس می‌توان نوشت:



$$|\Delta H| \text{ (تبخیر یا میعان)} > |\Delta H| \text{ (فرازش یا چگالش)} \Rightarrow \text{برای مقدار معینی از یک ماده خالص}$$

گزینه (۴): در واکنش‌های گرماگیر، سطح انرژی فراورده‌ها از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها بالاتر است. آلوتروپ ناپایدارتر، سطح انرژی بالاتری دارد؛ بنابراین تفاوت سطح انرژی آلوتروپ ناپایدارتر با فراورده واکنش کمتر می‌شود (مقدار Q در تبدیل آلوتروپ ناپایدارتر به فراورده، کمتر است).



$$\Rightarrow Q_2 > Q_1 \Rightarrow \text{آلوتروپ (۱)} > \text{آلوتروپ (۲)} \Rightarrow \text{پایداری} \Rightarrow \text{آلوتروپ (۱)} < \text{آلوتروپ (۲)} : \text{سطح انرژی}$$

کدام مورد دربارهٔ عنصرهایی از جدول تناوبی که آرایش الکترونی اتم آن‌ها به زیرلایهٔ p^2 ختم می‌شود، نادرست است؟

عنصرهای گروه ۱۴

- (۱) عنصری که در دورهٔ ششم جدول قرار دارد، در ساخت ساچمه‌های تفنگ‌های شکاری کاربرد دارد.
- (۲) همهٔ این عناصر دارای رسانایی الکتریکی هستند.
- (۳) عنصری که در حالت جامد سطحی کدر دارد، اساس استخوان‌بندی هیدروکربن‌ها را تشکیل می‌دهد.
- (۴) عنصری که ۲۵ درصد از الکترون‌های موجود در آرایش الکترونی اتم آن $l = 0$ دارند، در حالت جامد چکش‌خوار است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

آرایش الکترونی عنصرهای گروه ۱۴ به $ns^2 np^2$ ختم می‌شود:

گروه ۱۴	
دورهٔ ۲	$2s^2 2p^2$ C
دورهٔ ۳	$3s^2 3p^2$ Si
دورهٔ ۴	$4s^2 4p^2$ Ge
دورهٔ ۵	$5s^2 5p^2$ Sn
دورهٔ ۶	$6s^2 6p^2$ Pb

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصر گروه ۱۴ در دورهٔ ششم، همان فلز سرب است که با توجه به شکل کتاب درسی، می‌توان گفت که در ساخت ساچمهٔ تفنگ کاربرد دارد.

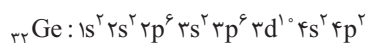


گزینهٔ (۲): کربن تنها نافلز است که رسانای جریان برق است. سیلیسیم و ژرمانیم، شبه‌فلز هستند و رسانایی الکتریکی دارند (هرچند کم). عنصرهای بعدی نیز، فلز بوده و رسانایی الکتریکی بالایی دارند.

گزینهٔ (۳): نافلز کربن، سطحی کدر دارد. کربن، عنصر اصلی سازندهٔ نفت خام بوده و اساس استخوان‌بندی هیدروکربن‌ها را تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۴): مربوط به زیرلایه‌های s است. با توجه به عدد اتمی عنصرهای گروه ۱۴ و این که ۲۵ درصد عدد اتمی عنصر باید یک عدد صحیح باشد، می‌شه خیلی سریع فهمید که عنصر مورد نظر، ژرمانیم با عدد اتمی ۳۲ است:

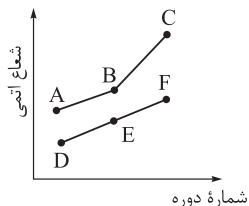
$$\frac{25}{100} \times 32 = 8$$



$$l = 0 = \frac{8}{32} \times 100 = 25$$

ژرمانیم، شبه‌فلز بوده و در اثر ضربه خرد می‌شود و چکش‌خوار نیست.

نمودار زیر، شعاع اتمی سه عضو نخست گروه هالوژن‌ها و فلزهای قلیایی را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های موجود در این نمودار، کدام مورد نادرست است؟ (نماد عنصرها فرضی است.)



(۱) جلای نقره‌ای B در مجاورت هوا به سرعت از بین می‌رود و سطح آن کدر می‌شود.

(۲) شدت واکنش شیمیایی بین عنصرهای C و D، بیشتر از شدت واکنش شیمیایی بین عنصرهای A و F است.

(۳) عنصر F در مقایسه با عنصر D، در دمای بالاتری با گاز هیدروژن واکنش داده و نقطه جوش ترکیب هیدروژن‌دار حاصل از عنصر F بیشتر از ترکیب هیدروژن‌دار D است.

(۴) طول موج نور حاصل از واکنش میان عنصرهای C و E، کوتاه‌تر از طول موج نور حاصل از واکنش میان عنصرهای A و E است.

پاسخ: گزینه ۲

در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.

... < Li < Na < K : شعاع اتمی فلزهای قلیایی (گروه ۱)

... < F < Cl < Br : شعاع اتمی هالوژن‌ها (گروه ۱۷)

(... و Li > F, Na > Cl) هالوژن > فلز قلیایی : مقایسه شعاع اتمی فلزهای قلیایی و هالوژن‌های هم‌دوره

شعاع اتمی فلزهای قلیایی از شعاع اتمی هالوژن‌های هم‌دوره آن‌ها بیشتر است؛ پس نمودار بالایی مربوط به فلزهای قلیایی و نمودار پایینی مربوط به هالوژن‌ها است:

A → ${}_3\text{Li}$ B → $_{11}\text{Na}$ C → $_{19}\text{K}$

D → ${}_9\text{F}$ E → $_{17}\text{Cl}$ F → $_{35}\text{Br}$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): همان فلز سدیم است که واکنش‌پذیری بالایی دارد. جلای نقره‌ای این فلز در مجاورت هوا از بین می‌رود و به سرعت کدر می‌شود.

گزینه (۲): درست؛ زیرا C و D (پتاسیم و فلورور) واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به A و F (لیتیم و برم) دارند.

در گروه فلزهای قلیایی، واکنش‌پذیری با شعاع اتمی رابطه مستقیم دارد، یعنی از بالا به پایین با افزایش عدد اتمی و شعاع اتمی، واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد، اما در گروه هالوژن‌ها، قفیه برعکس! یعنی از بالا به پایین با افزایش عدد اتمی و شعاع اتمی، واکنش‌پذیری کاهش می‌یابد:

واکنش‌پذیری: $\text{Li} < \text{Na} < \text{K}$

واکنش‌پذیری: $\text{F} > \text{Cl} > \text{Br}$

گزینه (۳): عنصر F (یعنی برم) واکنش‌پذیری کم‌تری نسبت به عنصر D (یعنی فلورور) دارد؛ از این‌رو در دمای بالاتری با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلورور	حتی در دمای ${}^{\circ}\text{C} - 200$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای ${}^{\circ}\text{C} 200$ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از ${}^{\circ}\text{C} 400$ واکنش می‌دهد.

اما دقت کنید که ترکیب هیدروژن‌دار برم، یعنی HBr، نقطه جوش کم‌تری نسبت به ترکیب هیدروژن‌دار فلورور، یعنی HF دارد؛ زیرا HF می‌تواند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کند.

گزینه (۴): A و C به ترتیب پتاسیم و لیتیم هستند که در واکنش با E یعنی کلر، به ترتیب نوری به رنگ بنفش و سرخ ایجاد می‌کنند. طول موج نور بنفش، کوتاه‌تر از نور سرخ است. بنفش > نیلی > آبی > سبز > زرد > نارنجی > سرخ: طول موج



پاسخ خیلی تشریحی ✓



در شرایطی معین، ۲/۱ گرم منیزیم کربنات ناخالص و ۱ گرم آلومینیم ناخالص در واکنش‌های زیر شرکت می‌کنند. اگر جرم گاز تولیدشده در دو واکنش برابر باشد، نسبت درصد خلوص آلومینیم به منیزیم کربنات کدام است؟
($H = 1, C = 12, O = 16, Mg = 24, Al = 27 : g.mol^{-1}$)



۲۹/۷ (۴)

۹/۹ (۳)

۳/۳ (۲)

۰/۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درصد خلوص منیزیم کربنات و آلومینیم را به ترتیب P_1 و P_2 در نظر می‌گیریم و به کمک اطلاعات داده‌شده، جرم گاز تولیدشده در واکنش‌ها را حساب می‌کنیم:

$$I) 2/1 \times \frac{P_1}{100} g MgCO_3 \times \frac{1 \text{ mol } MgCO_3}{84 g MgCO_3} \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } MgCO_3} \times \frac{44 g CO_2}{1 \text{ mol } CO_2}$$

$$= \frac{2/1 \times P_1 \times 44}{100 \times 84} = \frac{11}{1000} P_1 g CO_2$$

$$II) 1 \times \frac{P_2}{100} g Al \times \frac{1 \text{ mol } Al}{27 g Al} \times \frac{3 \text{ mol } H_2}{2 \text{ mol } Al} \times \frac{2 g H_2}{1 \text{ mol } H_2} = \frac{P_2}{900} g H_2$$

جرم گاز تولیدشده در دو واکنش برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{11}{1000} P_1 = \frac{1}{900} P_2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{9 \times 11}{10} = 9/9$$

این‌جا جرم گازهای تولیدی با هم برابر است و نه تعداد مول یا حجم آن‌ها! پس نمی‌تونیم معادله (I) را در ۳ ضرب کنیم تا ضریب گازها با هم برابر شود و سپس بین $MgCO_3$ و Al تناسب برقرار کنیم:



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} \Rightarrow \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{MgCO_3} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{Al}$$

$$\frac{2/1 \times \frac{P_1}{100}}{3 \times 84} = \frac{1 \times \frac{P_2}{100}}{2 \times 27} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{2 \times 27}{3 \times 40} = \frac{0/45}{1}$$

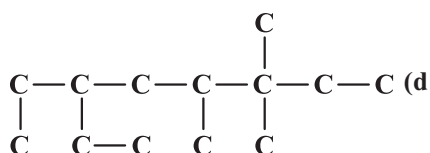
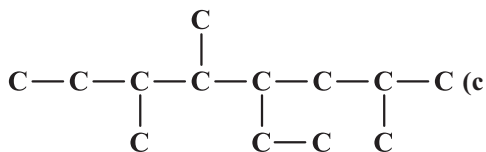
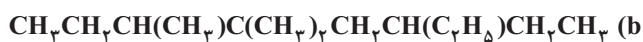
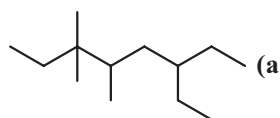
جواب اشتباه

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

کدام ساختارها یا نمایش‌های زیر، مربوط به یک آلکان هستند و نام این آلکان کدام است؟

۷۰



(۱) a و d - ۶ - اتیل - ۳، ۳، ۴ - تری‌متیل اوکتان

(۲) a و b - ۶ - اتیل - ۳، ۴، ۴ - تری‌متیل اوکتان

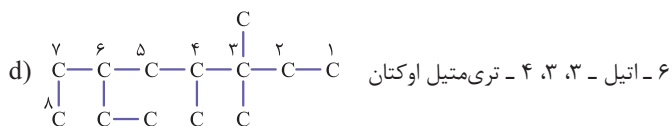
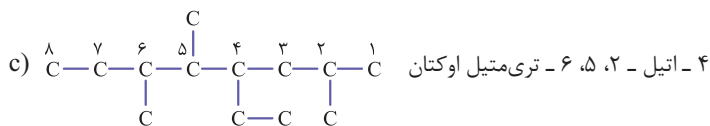
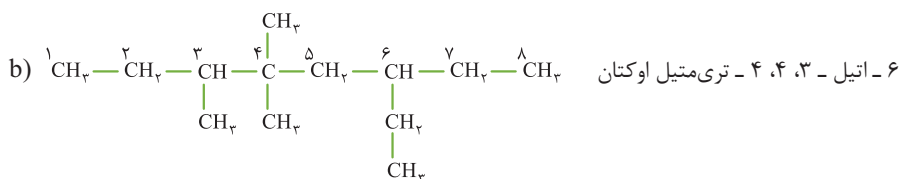
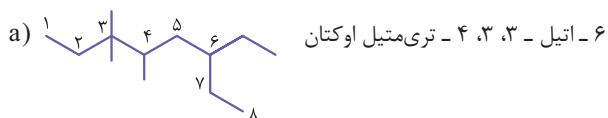
(۳) b و c - ۳ - اتیل - ۵، ۵، ۶ - تری‌متیل اوکتان

(۴) c و d - ۳ - اتیل - ۲، ۵، ۶ - تری‌متیل اوکتان

پاسخ: گزینه ۱

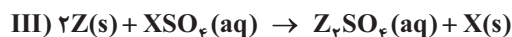
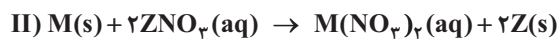
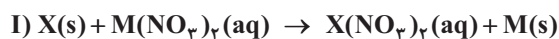
باید همه آلکان‌های داده‌شده را نام‌گذاری کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



پس a و d در واقع یک آلکان هستند!

اگر از میان واکنش‌های زیر، فقط یکی از واکنش‌ها به طور طبیعی انجام شود، کدام مورد نادرست است؟



(۱) اگر واکنش‌پذیری فراورده‌های واکنش (I) کم‌تر از واکنش‌دهنده‌های آن باشد، می‌توان نتیجه گرفت که واکنش‌پذیری فلز Z بیشتر از فلز M است.

(۲) اگر شرایط نگهداری فلز M دشوارتر از فلز Z باشد؛ واکنش‌پذیری هر دو فلز X و Z کم‌تر از فلز M است.

(۳) اگر واکنش‌پذیری فلز X از هر دو فلز M و Z کم‌تر باشد، واکنش (II) به طور طبیعی انجام نخواهد گرفت.

(۴) اگر واکنش‌پذیری فلز X از فلز M بیشتر باشد، محلول نمک‌های فلز M را می‌توان در ظرفی از جنس فلز Z نگهداری کرد.

پاسخ: گزینه ۴

اگر واکنش‌پذیری عنصر A از B بیشتر باشد، A می‌تواند با نمک‌های B به طور طبیعی واکنش دهد:

(واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از فراورده‌ها است.) انجام می‌شود. $A > B \Rightarrow A + B^{n+} \rightarrow$ واکنش‌پذیری

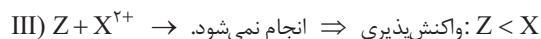
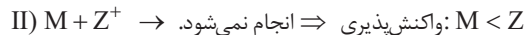
انجام نمی‌شود. $A < B \Rightarrow A + B^{n+} \rightarrow$ واکنش‌پذیری



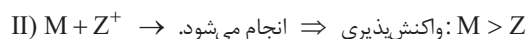
بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): کم‌تر بودن واکنش‌پذیری فراورده‌های (I) نسبت به واکنش‌دهنده‌های آن، نشان‌دهنده این است که واکنش (I) به طور طبیعی انجام می‌شود؛ پس طبق فرض سؤال، دو واکنش دیگر انجام نمی‌شوند:



گزینه (۲): دشوارتر بودن شرایط نگهداری M نسبت به Z، نشان‌دهنده بیشتر بودن واکنش‌پذیری M است؛ در نتیجه با این فرض، واکنش (II) انجام‌پذیر است، در حالی که دو واکنش دیگر انجام نمی‌شوند:



از سه داده قبلی، به ترتیب $M > X > Z$ برای واکنش‌پذیری فلزها می‌رسیم.

گزینه (۳): اگر واکنش‌پذیری فلز X از Z کم‌تر باشد و $(Z > X)$ ، واکنش (III) به طور طبیعی انجام می‌شود؛ پس دو واکنش دیگر، انجام نخواهند شد.

گزینه (۴): اگر واکنش‌پذیری فلز X از M بیشتر باشد، واکنش (I) به طور طبیعی انجام می‌شود؛ بنابراین دو واکنش دیگر انجام نمی‌شود. از انجام‌نشدن واکنش (II) نتیجه می‌گیریم که واکنش‌پذیری فلز M از Z کم‌تر است، به عبارت دیگر واکنش‌پذیری Z از M بیشتر است و واکنش $Z + M^{n+} \rightarrow$ به طور طبیعی انجام می‌شود، یعنی فلز Z به درر نگهداری محلول نمک‌های فلز M نمی‌تواند!!



کدام مورد، جمله زیر را به درستی کامل می‌کند؟

..... با در ساختار خود، در هر مولکول دارد.»

(۱) آلکینی - ۴ پیوند اشتراکی یگانه میان اتم‌های کربن - ۱۴ پیوند اشتراکی کربن - هیدروژن

(۲) آلکانی - ۱۶ اتم هیدروژن - ۷ پیوند اشتراکی میان اتم‌های کربن

(۳) آلکینی - ۲۱ پیوند اشتراکی - ۶ پیوند اشتراکی $C \equiv C$

(۴) آلکینی - ۸ اتم کربن - ۹ پیوند اشتراکی میان اتم‌های کربن

پاسخ: گزینه ۴



شمار پیوندهای اشتراکی (کووالانسی) در هیدروکربن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times 4)}{2}$$

با توجه به فرمول عمومی آلکان‌ها (C_nH_{2n+2})، آلکن‌ها (C_nH_{2n}) و آلکین‌ها (C_nH_{2n-2}) خواهیم داشت:

خانواده	آلکان‌ها	آلکن‌ها	آلکین‌ها
شمار کل پیوندهای اشتراکی	$3n + 1$	$3n$	$3n - 1$
شمار پیوندهای « $C-H$ »	$2n + 2$	$2n$	$2n - 2$
شمار پیوندهای « $C-C$ »	$n - 1$	$n - 2$	$n - 2$
شمار پیوندهای « $C=C$ »	۰	۱	۰
شمار پیوندهای « $C \equiv C$ »	۰	۰	۱

توجه! از آن‌جا که هر اتم هیدروژن، یک پیوند تشکیل می‌دهد، شمار پیوندهای « $C-H$ » در هیدروکربن‌ها، برابر با تعداد اتم‌های هیدروژن آن‌ها است. در هر آلکن n کربنی، ۱ پیوند دوگانه (که معادل ۲ پیوند اشتراکی است) و در هر آلکین n کربنی، ۱ پیوند سه‌گانه (که معادل ۳ پیوند اشتراکی است)، وجود دارد.

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): در ساختار آلکن ۶ کربنی، ۴ پیوند $C-C$ وجود دارد ($n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$)!

فرمول مولکولی آلکن ۶ کربنی به صورت C_6H_{12} است که به خاطر داشتن ۱۲ اتم هیدروژن، ۱۲ پیوند $C-H$ در ساختار آن وجود دارد.

گزینه (۲): آلکانی با ۱۶ اتم هیدروژن، دارای ۷ اتم کربن است:

در ساختار آلکان ۷ کربنی، ۶ پیوند $C-C$ وجود دارد.

گزینه (۳): شمار کل پیوندهای اشتراکی در یک آلکن n کربنی برابر $3n$ است:

$$3n = 21 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow n - 2 = 5 \quad C-C \text{ پیوند}$$

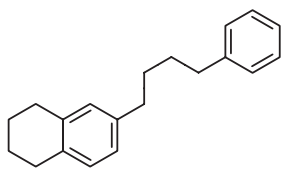
گزینه (۴): فرمول مولکولی آلکین ۸ کربنی به صورت C_8H_{14} است.

شمار کل پیوندهای اشتراکی در یک آلکین n کربنی برابر $3n - 1$ است.

$$3n - 1 = 23 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \text{شمار پیوندها} = 23$$

از این ۲۳ پیوند اشتراکی، ۱۴ پیوند (به تعداد اتم‌های H) مربوط به پیوندهای $C-H$ بوده و ۹ پیوند مربوط به پیوندهای اشتراکی بین اتم‌های کربن است. (توجه داشته باشید از این ۹ پیوند، یک پیوند سه‌گانه و ۶ پیوند یگانه داریم.)

۷۳ برای سوختن کامل هر مول از هیدروکربن زیر، به چند مول گاز اکسیژن نیاز است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۲۲

(۳) ۲۴

(۴) ۲۶

پاسخ: گزینه ۴



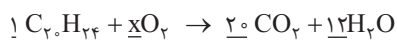
برای به دست آوردن شمار اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن، علاوه بر شمردن اتم‌های هیدروژن از روی ساختار گسترده، می‌توانیم از فرمول زیر نیز استفاده کنیم:

$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن } n \text{ کربنی} = (\text{تعداد پیوندهای سه گانه} \times 4) - (\text{تعداد حلقه‌ها} + \text{تعداد پیوندهای دوگانه}) \times 2 + (2n + 2)$$

در ساختار پیوند - خط، محل تقاطع خط‌ها، نشان‌دهنده اتم کربن است؛ به این ترتیب، هیدروکربن مورد نظر، ۲۰ اتم کربن دارد. با توجه به این که در ساختار آن، ۳ حلقه و ۶ پیوند دوگانه وجود دارد، خواهیم داشت:

$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن} = \underbrace{(2 \times 20)}_{2n+2} + 2 - 2(\underbrace{6}_{\text{تعداد حلقه‌ها پیوندهای دوگانه}} + \underbrace{3}_{\text{تعداد پیوندهای دوگانه}}) = 42 - 18 = 24$$

هر مول هیدروکربن به صورت $C_{20}H_{24}$ بوده و معادله موازنه‌شده سوختن کامل آن به صورت زیر است:



$$\text{موازنه O: } 2x = (20 \times 2) + 12 = 52 \Rightarrow x = 26$$

برای سوختن کامل هر مول از هیدروکربن مورد نظر، ۲۶ مول گاز اکسیژن نیاز است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام مطلب نادرست است؟ ۷۴

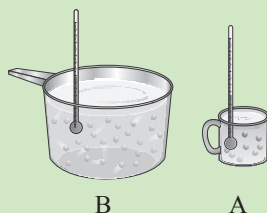
- ۱) نفت برنت دریای شمال در مقایسه با نفت سنگین ایران، نفت کوره کم‌تر و گازوئیل بیشتری دارد.
- ۲) نفت سفید شامل آلکان‌هایی است که از ده تا پانزده اتم کربن تشکیل شده‌اند.
- ۳) در معادن زغال‌سنگ با افزایش درصد متان به هر میزان، احتمال انفجار به طور منظم افزایش می‌یابد.
- ۴) جایگزینی نفت با زغال‌سنگ سبب ورود مقدار بیشتری از آلاینده‌ها شده و اثر گلخانه‌ای تشدید می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

متان، گازی سبک، بی‌بو و بی‌رنگ است و هرگاه مقدار آن در هوای معدن به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد. البته با افزایش درصد متان تا مقدار معینی، هم‌چنان احتمال انفجار وجود خواهد داشت.

شکل‌های زیر، دو نمونه آب را نشان می‌دهند. اگر انرژی گرمایی دو نمونه برابر باشد، به ترتیب از راست به چپ، میانگین تندی ذرات سازنده کدام بیشتر است و برای افزایش دمای کدام نمونه به میزان 5°C ، به گرمای کمتری نیاز است؟ (گرمای ویژه آب در دماهای مختلف را یکسان در نظر بگیرید.)



A, A (۱)

B, A (۲)

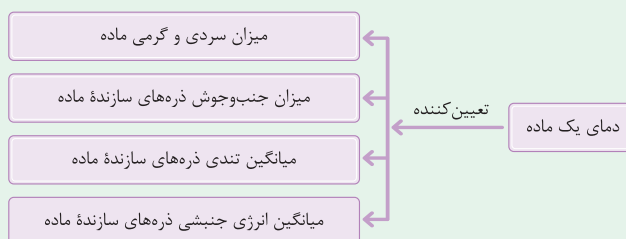
B, B (۳)

A, B (۴)

پاسخ: گزینه ۱



یک ویژگی مشترک همه مواد، وجود جنبش‌های نامنظم ذره‌های سازنده آن‌ها در دمای معین است. هر چه دمای ماده بالاتر باشد، میانگین تندی و میانگین انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن بیشتر است؛ از این رو دمای یک ماده، تعیین‌کننده میزان جنب و جوش، میانگین سرعت و میانگین انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن می‌باشد.



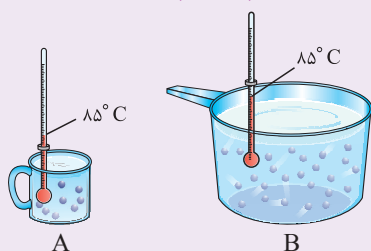
به مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده یک ماده، انرژی گرمایی آن ماده می‌گویند.

انرژی گرمایی هم به دما و هم به تعداد ذره‌های سازنده (جرم) ماده بستگی دارد. اگر تعداد ذره‌های سازنده دو نمونه از یک ماده برابر باشد، نمونه‌ای با دمای بیشتر، انرژی گرمایی بیشتری دارد و اگر دمای دو نمونه از یک ماده برابر باشد، نمونه‌ای با تعداد ذره‌های سازنده (جرم) بیشتر، انرژی گرمایی بیشتری خواهد داشت.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جرم نمونه B بیشتر از جرم نمونه A است؛ پس برای این‌که انرژی گرمایی دو نمونه بتواند با هم برابر باشد، حتماً باید دمای نمونه A (میانگین تندی ذرات سازنده) بیشتر باشد. همچنین با توجه به رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، در c و $\Delta\theta$ یکسان، هر چه m کمتر باشد، مقدار Q نیز کمتر خواهد بود.

با توجه به شکل‌های زیر به پرسش‌های مطرح شده پاسخ دهید. (شیمی (۲) - سوال ۲ با هم بیندیشیم صفحه ۵۷ کتاب درسی)



الف) میانگین تندی مولکول‌های آب را در دو ظرف مقایسه کنید.

ب) انرژی گرمایی آب موجود در کدام ظرف بیشتر است؟ چرا؟



مخلوطی از هگزان و ۱- هگزن به جرم ۶/۲۵ گرم در اختیار داریم. اگر این مخلوط را با مقدار کافی Br_2 واکنش دهیم، نسبت افزایش جرم مخلوط به جرم اولیه آن برابر با ۱/۲۸ خواهد بود. چند گرم هگزان در مخلوط اولیه وجود دارد و چند مول گاز هیدروژن برای واکنش کامل با ۱- هگزن موجود در مخلوط اولیه لازم است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{Br} = 80 : \text{g.mol}^{-1}$)

$$(1) \quad 0/1 - 2/05$$

$$(2) \quad 0/1 - 4/2$$

$$(3) \quad 0/05 - 2/05$$

$$(4) \quad 0/05 - 4/2$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هگزان (C_6H_{14})، سیرشده است و با برم واکنش نمی‌دهد، در حالی که ۱- هگزن (C_6H_{12}) سیرنشده است و مطابق معادلهٔ روبه‌رو با برم واکنش داده و آن را بی‌رنگ می‌کند:

$$\text{C}_6\text{H}_{12} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{14}\text{Br}_2$$

مقدار افزایش جرم مخلوط با جرم Br_2 جذب‌شده توسط ۱- هگزن برابر است؛ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{\text{افزایش جرم مخلوط (جرم } \text{Br}_2\text{)}}{\text{جرم اولیه}} = 1/28 \Rightarrow \frac{\text{جرم } \text{Br}_2 \text{ مصرف شده}}{6/25} = 1/28$$

$$\Rightarrow \text{جرم } \text{Br}_2 \text{ مصرف شده} = 6/25 \times 1/28 = \frac{6}{25} \times \frac{128}{100} = 8 \text{ g}$$

حالا از روی جرم Br_2 ، می‌توانیم ابتدا جرم ۱- هگزن و سپس جرم هگزان موجود در مخلوط اولیه را حساب کنیم:

$$\text{جرم ۱- هگزن} = 8 \text{ g } \text{Br}_2 \times \frac{1 \text{ mol } \text{Br}_2}{160 \text{ g } \text{Br}_2} \times \frac{1 \text{ mol } \text{C}_6\text{H}_{12}}{1 \text{ mol } \text{Br}_2} \times \frac{84 \text{ g } \text{C}_6\text{H}_{12}}{1 \text{ mol } \text{C}_6\text{H}_{12}} = 4/2 \text{ g } \text{C}_6\text{H}_{12}$$

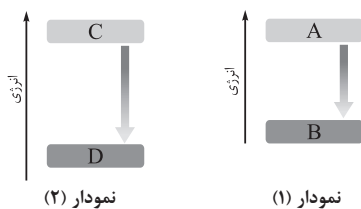
$$\text{جرم هگزان} = \text{جرم ۱- هگزن} - \text{جرم مخلوط اولیه} = 6/25 - 4/2 = 2/05 \text{ g}$$

برای قسمت دوم سؤال، باید معادلهٔ واکنش ۱- هگزن با گاز هیدروژن را بنویسیم:



$$4/2 \text{ g } \text{C}_6\text{H}_{12} \times \frac{1 \text{ mol } \text{C}_6\text{H}_{12}}{84 \text{ g } \text{C}_6\text{H}_{12}} \times \frac{1 \text{ mol } \text{H}_2}{1 \text{ mol } \text{C}_6\text{H}_{12}} = \frac{1}{20} = 0/05 \text{ mol } \text{H}_2$$

اگر نمودارهای زیر، نشان‌دهنده تغییرات انرژی پس از ورود مقداری شیر 60°C به بدن باشند، کدام نمودار، تغییرات انرژی را در فرایند هم‌دماشدن شیر با بدن نشان می‌دهد و سطح انرژی C مربوط به کدام ماده است؟



(۱) نمودار (۱) - شیر 37°C

(۲) نمودار (۲) - شیر 37°C

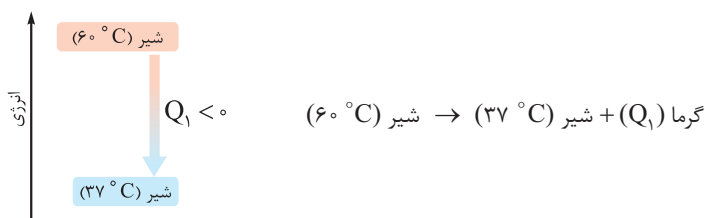
(۳) نمودار (۱) - شیر 60°C

(۴) نمودار (۲) - شیر 60°C

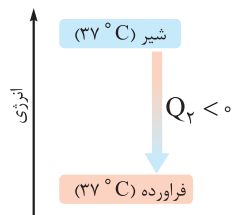
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا پس از ورود شیر به بدن، شیر (سامانه)، مقداری انرژی به شکل گرما از دست می‌دهد تا جایی که با بدن (محیط) هم‌دم شود (به دمای 37°C برسد). بنابراین در این فرایند، $\Delta\theta$ و Q کوچک‌تر از صفر بوده؛ در نتیجه این فرایند گرما ده است.



در مرحله بعد، در دمای ثابت 37°C ، بخش عمده انرژی موجود در شیر هنگام فرایند گوارش و سوخت‌وساز که با انجام واکنش‌های شیمیایی مختلفی همراه است، به بدن می‌رسد. انجام این فرایندها و واکنش‌های شیمیایی مختلف، منجر به تولید انرژی و مواد اولیه مورد نیاز سوخت‌وساز یاخته‌ها (سلول‌ها) خواهد شد.



از آنجا که فرایند گوارش و سوخت‌وساز شیر در بدن، با آزاد شدن انرژی همراه است، این فرایند را گرما ده در نظر می‌گیریم.

گرما $(Q_2) + \text{فراورده ها } (37^{\circ}\text{C}) \rightarrow \text{شیر } (37^{\circ}\text{C})$

اگر به نمودارها دقت کنید متوجه خواهید شد که گرمای آزاد شده در فرایند سوخت‌وساز، بیشتر از گرمای مبادله شده در فرایند هم‌دماشدن شیر با بدن است:

$$|Q_2| > |Q_1|$$

نمودار (۱) نمودار (۲)

هم‌دماشدن شیر با بدن سوخت‌وساز شیر در بدن

اگر با دادن 37° ژول گرما به آلیاژی از فلزهای منیزیم و مس به جرم 40 گرم، دمای آن 10°C افزایش یابد، چند درصد از جرم این آلیاژ را فلز منیزیم تشکیل می‌دهد؟

منیزیم	مس	فلز
۱	$0/4$	گرمای ویژه (ژول بر گرم بر درجهٔ سلسیوس)

۸۷ / ۵ (۴)

۶۵ (۳)

۳۵ (۲)

۱۲ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرض می‌کنیم x گرم منیزیم و y گرم مس در آلیاژ وجود دارد. حالا با دو رابطه‌ای که داریم (جرم آلیاژ و رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$)، x و y را به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{Q_{\text{کل}} = Q_{\text{Mg}} + Q_{\text{Cu}}} 370 = \underbrace{(x \times 1 \times 10)}_{\text{Mg}} + \underbrace{(y \times 0/4 \times 10)}_{\text{Cu}} \Rightarrow 10x + 4y = 370$$

$$\text{جرم آلیاژ} = 40 \text{ g} \Rightarrow x + y = 40$$

$$\begin{cases} 10x + 4y = 370 \\ (\times 4) \quad x + y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 4y = 370 \\ 4x + 4y = 160 \end{cases}$$

$$6x = 210 \Rightarrow x = 35$$

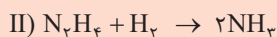
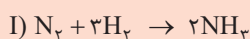
$$\text{درصد جرمی منیزیم در آلیاژ} = \frac{\text{جرم منیزیم}}{\text{جرم آلیاژ}} \times 100 = \frac{35}{40} \times 100 = 87.5\%$$

دو نمونه از گاز H_2 در دو واکنش جداگانه، یک بار با مقداری گاز N_2 و بار دیگر با مقداری گاز N_2H_4 به طور کامل واکنش داده و همه واکنش دهنده‌ها به فراورده تبدیل می‌شوند. اگر در پایان هر دو واکنش یک مول آمونیاک تولید شود، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) در معادله هر دو واکنش، نماد Q در سمت راست نوشته می‌شود.
- (۲) مقدار گرمای مبادله شده در واکنشی که در آن گاز N_2 مصرف می‌شود، کمتر از مقدار گرمای مبادله شده در واکنش دیگر است.
- (۳) نمونه حاوی گازهای N_2H_4 و H_2 در مقایسه با نمونه دیگر، سطح انرژی بالاتری داشته و ناپایدارتر است.
- (۴) با فرض شرایط STP، تفاوت حجم گاز H_2 مصرف شده در دو واکنش، برابر با ۸ / ۴۴ لیتر است.

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش‌های انجام شده به صورت زیر است:



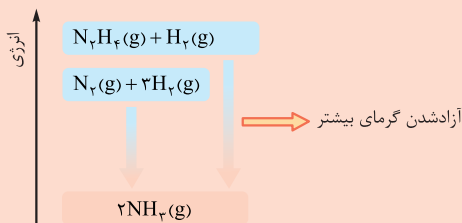
بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): هر دو واکنش، گرماده هستند و نماد Q در سمت راست معادله آن‌ها نوشته می‌شود.

گزینه‌های (۲) و (۳): فراورده هر دو واکنش یکسان است. با توجه

به این که واکنش دهنده‌های واکنش (II)، سطح انرژی بالاتری

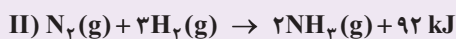
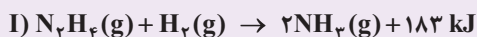
دارند، مقدار گرمای مبادله شده در واکنش (II) بیشتر است.



گزینه (۴): تفاوت تعداد مول گاز هیدروژن مصرف شده به ازای تولید ۲ مول آمونیاک، برابر $3 - 1 = 2$ است. با توجه به اطلاعات سؤال، ۱ مول آمونیاک در واکنش‌ها تولید شده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$1 \text{ mol } NH_3 \times \frac{2 \text{ mol } H_2 \text{ (تفاوت)}}{2 \text{ mol } NH_3} \times \frac{22.4 \text{ L } H_2}{1 \text{ mol } H_2} = 22.4 \text{ L } H_2$$

با توجه به واکنش‌های زیر، که در شرایط مناسب انجام می‌شوند، چند مورد از مطالب زیر، درست هستند؟



(سؤال ۲۲۹ کنکور مهندسی تجربی ۱۴۰۱)

- در هر دو واکنش، انرژی از سامانه به محیط، جاری می‌شود.
- پایداری واکنش دهنده‌ها در واکنش (I)، نسبت به واکنش (II) کم‌تر است.
- در هر دو واکنش، انرژی پتانسیل فراورده در مقایسه با واکنش دهنده‌ها، کم‌تر است.
- محتوای انرژی واکنش دهنده‌ها در واکنش (II)، پایین‌تر از محتوای انرژی واکنش دهنده‌ها در واکنش (I) است.

(۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک



با توجه به شکل داده شده که مربوط به یخچال صحرایی است، کدام مطلب درست است؟

(۱) براساس معادله: $H_2O(g) \rightarrow H_2O(l) + 44 / 1 \text{ kJ}$ ، محتویات درون آن خنک می شود.

(۲) آب در بدنه بیرونی ظرف نفوذ کرده و به سرعت تبخیر می شود.

(۳) جهت فلش، نشان دهنده جذب گرما از محیط بیرون است.

(۴) این دستگاه به انرژی الکتریکی نیاز ندارد و تبخیر آب باعث افت دمای محتویات آن می شود.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سایر گزینه ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): معادله باید برعکس باشد: $H_2O(l) + 44 / 1 \text{ kJ} \rightarrow H_2O(g)$

گزینه (۲): تبخیر آب در این یخچال، آهسته انجام می شود.

گزینه (۳): جهت فلش، نشان دهنده جذب گرما از محیط داخل است.

