

آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله دهم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/دی/۲۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۱ تا ۳ صفحه ۱ تا ۷۰	—	—
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحه ۹ تا ۴۶	—	—
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۱ تا ۴۲	—	—
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه			

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلالی - کوروش اسلامی - محمد گودرزی - حسین نادری محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن زاده - سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - محمدحسین رحیمی - حمید گلزاری حسین نادری - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: سید عباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب - مریم نظری	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

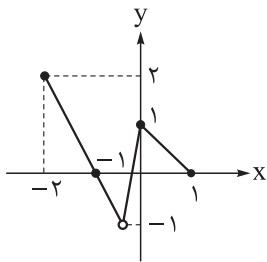
دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چیدمان گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com



۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x) = -f(2x - 1)$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) صفر

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

۲- اگر $g^{-1}(x) = 3f^{-1}(\frac{x+1}{2}) + 4$ و دامنه تابع g بازه $[1, 7]$ باشد، دامنه تابع $h(x) = 2f(\frac{x+2}{3}) - 1$ شامل چند عدد طبیعی است؟

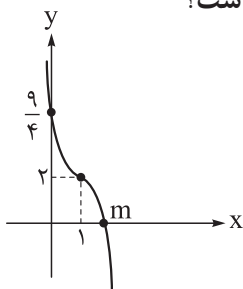
(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۳- نمودار تابع $f(x) = a(x-b)^3 + c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f^{-1}(1-m)$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt[3]{2} - 1$ (۲) $2\sqrt[3]{2} + 1$ (۳) $\sqrt[3]{2} - 1$ (۴) $\sqrt[3]{2} + 1$

۴- تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$ روی بازه (a, b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

۵- تابع $f(x) = (x - |x - 3|)^2$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

(۴) $[0, 3]$ (۳) $[\frac{3}{2}, 3]$ (۲) $[1, +\infty)$ (۱) $[\frac{3}{2}, +\infty)$

۶- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^{3n+1}$ بر چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$ کدام است؟

(۴) x (۳) $-x$

(۲) ۱

(۱) -1

۷- نمودار تابع $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4}$ را $\frac{\pi}{5}$ واحد به سمت چپ می‌بریم و سپس در راستای محور عمودی با ضریب ۲ منبسط

و در راستای محور افقی با ضریب ۴ منقبض می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. دوره تناوب تابع g نسبت به دوره

تناوب تابع f چه تغییری کرده است؟

(۲) $\frac{\pi}{4}$ واحد بیشتر شده است.

(۱) $\frac{\pi}{4}$ واحد کمتر شده است.

(۴) $\frac{3\pi}{2}$ واحد بیشتر شده است.

(۳) $\frac{3\pi}{2}$ واحد کمتر شده است.

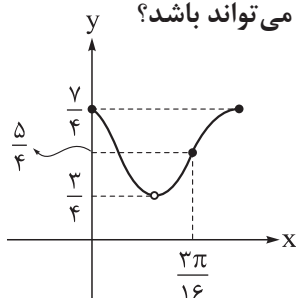
محل انجام محاسبات



۸- دوره تناوب تابع $f(x) = \tan ax \cdot \cot ax$ برابر $\frac{\pi}{8}$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۹- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 ax} + b$ به صورت زیر است. حاصل $a \times b$ کدام می تواند باشد؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰- اگر $\cot(\alpha + 25^\circ) = 2$ باشد، مقدار $\tan(11^\circ - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱- مجموع جواب های معادله $\cos^2 x + \cos^2 x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

۱۲- مجموع جواب های معادله $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 5π (۲) 7π (۳) 8π (۴) 9π

۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{[x]} \right]$ و حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{[x]}{x} \right]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱، حد ندارد. (۲) ۱، ۱ (۳) حد ندارد، حد ندارد. (۴) حد ندارد، ۱

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] + \cos x}{\sin x}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{k[x] + [-x]}{x^2 - 9} = +\infty$ باشد، مجموعه مقادیر k ، بازه (a, b) است. حاصل $a \times b$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{2x} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$



۱۷- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{ax^2 - (a+1)x - 4}$ فقط یک خط مجانب قائم دارد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a

چند عضو دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۸- اگر $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$ باشد، مساحت سطح محصور بین خطوط مجانب نمودار تابع $f \circ g^{-1}$ و محورهای

مختصات کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۳ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

محل انجام محاسبات



۱۹- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & a-4 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$ قطری باشد، دترمینان آن کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه حاصل $A^{10} + A^{20} + A^{30}$ کدام است؟

- (۱) $3A$ (۲) $3I$ (۳) $A + 2I$ (۴) $\bar{O}$

۲۱- اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد و داشته باشیم $A^3 = A + I$ ، آن گاه وارون ماتریس $A^6 - A^5$ کدام است؟

- (۱) A (۲) A^{-1} (۳) $-A$ (۴) $-A^{-1}$

۲۲- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $2I - A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های ستون اول ماتریس $A + B$ کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۲ (۳) $1/5$ (۴) ۱

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{4}(A^{10} - A^9)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $0/25$ (۳) -1 (۴) $-0/25$

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & A \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های ستون دوم ماتریس $\frac{1}{4}A^3 + 2I$ کدام است؟

- (۱) $0/5$ (۲) ۱ (۳) -3 (۴) $-1/5$

۲۵- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (m+1)x + y = -n \\ 3x + (m-1)y = 6 \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد، بیشترین مقدار ممکن برای $m + n$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۶- دو نقطه A و B و دو خط متقاطع d و d' در صفحه مفروض اند. تعداد نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از دو خط d و d' نیز به یک فاصله باشند، کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

محل انجام محاسبات

۲۷- معادله دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ که بر خط $4x - 3y + 5 = 0$ مماس است، به صورت $x^2 + y^2 + ax + by = c$ بیان

شده است. حاصل $\frac{b+c}{a}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -2 (۳) 3 (۴) -4

۲۸- فاصله مراکز دو دایره‌ای که از نقطه $(1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس‌اند، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) 4 (۴) 6

۲۹- خط به معادله $x - 3y + 6 = 0$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند.

اگر O' مرکز دایره باشد، تانژانت زاویه BO'A کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۰- دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(2, 4)$ و $(4, 2)$ همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره برابر با

فاصله نقاط تقاطع آن‌ها باشد، فاصله مرکز یکی از دو دایره تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) 2 (۴) 4

۳۱- a_1, a_2 و a_3 اعداد صحیح و b_1, b_2 و b_3 همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند. اگر

$A = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ و $A + 3 \mid B$ ، باقی‌مانده تقسیم عدد $11 - 3(A - 1)^2 + 2B^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۲- دو عدد $3\delta k + 2$ و $k + 2$ هر دو بر ۱ $a >$ بخش پذیرند. عدد $a^a!$ به کدام دسته هم‌نهمی تعلق دارد؟

- (۱) $[0]_9$ (۲) $[4]_9$ (۳) $[1]_9$ (۴) $[6]_9$

۳۳- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده از بیشترین مقدار خود ۲ واحد کم‌تر است. کدام عدد حتماً بر b بخش پذیر است؟

- (۱) $a^2 - 4$ (۲) $2a + 4$ (۳) $3a - 12$ (۴) $a^2 - 9$

۳۴- در یک سال، اول اردیبهشت‌ماه روز یکشنبه است. اگر $\overline{2a2}$ روز بگذرد، به سه‌شنبه می‌رسیم. a چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

۳۵- معادله هم‌نهمی $143x + 91y - 7n = 2$ جواب دارد. مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار دورقمی و طبیعی عدد n کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۶- اگر $1 - m \equiv 2a^3 \pmod{m}$ و عدد $3a - 1$ بر m بخش پذیر باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی $1 < m$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۳۷- در گراف منتظم G از مرتبه ۱۲، رابطه $4 = 3\delta(G) - (\Delta(G))^2$ برقرار است. اندازه گراف کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۲۸ (۴) ۲۴

۳۸- اگر حاصل ضرب درجه‌های رأس‌های گراف G از مرتبه ۶ برابر ۲۱۶ باشد، حاصل ضرب درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ کدام است؟

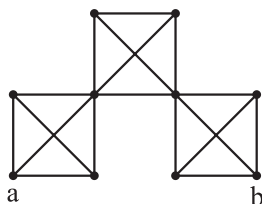
- (۱) ۷۲ (۲) ۹۶ (۳) ۱۰۸ (۴) ۲۱۶

۳۹- در گرافی از مرتبه ۱۰ رابطه $\sum_{a \in V(G)} |N_G[a]| = 82$ برقرار است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه ۹ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۰- گراف مقابل چند $a - b$ مسیر دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۶۴ (۴) ۱۲۵



پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله دهم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/دی/۲۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۱ و ۲ صفحه ۱ تا ۶۰	—	—
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ صفحه ۱ تا ۶۶	—	—
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه		—	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: رضا سبزمیدانی - نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: مهدی براتی - پیمان خواجوی مجد - یاسر راش - هادی عبادی یاسر عبداللہی - امیر قاسمی پور - محسن مجنون - محمد مرادی - عرفان نریمانی کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده - یاسر ذریه	یاسر عبداللہی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



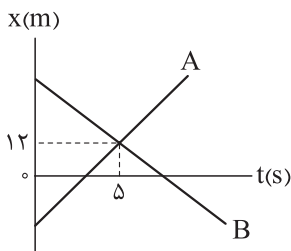
Azmoon.kheilisabz.com



۴۱- متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 3\text{ s}$ و $t_2 = 7\text{ s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 2\text{ m}$ و $x_2 = 18\text{ m}$ عبور می‌کند. در ۱۰ ثانیه اول، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

- (۱) $2/5$ (۲) $5/5$ (۳) $7/5$ (۴) 10

۴۲- نمودار مکان-زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. فاصله دو متحرک در لحظه $t_1 = 3\text{ s}$ چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t_2 = 9\text{ s}$ است؟



(۱) ۳

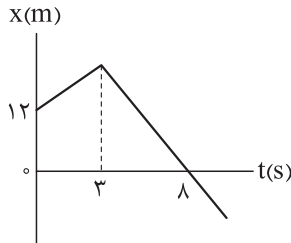
(۲) ۲

(۳) $1/3$ (۴) $1/2$

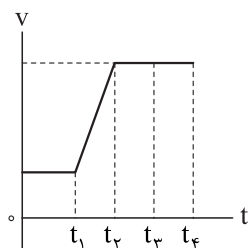
۴۳- متحرک A با سرعت ثابت در جهت محور x و متحرک B با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کنند. تندی متحرک A ، ۲ برابر تندی متحرک B است. اگر جهت بردار مکان دو متحرک A و B به ترتیب در لحظه‌های $t_1 = 8\text{ s}$ و $t_2 = 20\text{ s}$ تغییر کند، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه دو متحرک به هم می‌رسند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۴۴- نمودار مکان-زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط متحرک برابر 3 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازه، چند متر بر مربع ثانیه است؟

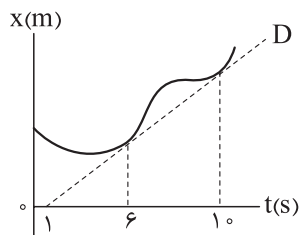
(۱) $2\vec{i}$ (۲) $-2\vec{i}$ (۳) $7\vec{i}$ (۴) $-7\vec{i}$

۴۵- نمودار سرعت-زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازه شتاب متوسط متحرک در کدام بازه زمانی بیشتر است؟

(۱) صفر تا t_2 (۲) صفر تا t_4 (۳) t_2 تا t_3 (۴) t_3 تا t_4



۴۶- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر فاصله متحرک از مبدأ در لحظه $t_1 = 10$ s برابر 36 m باشد، در لحظه $t_1 = 6$ s، تندی متحرک و فاصله متحرک از مبدأ، به ترتیب از راست به چپ، در SI کدام است؟ (خط D در لحظه‌های $t_1 = 6$ s و $t_2 = 10$ s بر نمودار مماس است).



(۱) ۲۰، ۴

(۲) ۲۰، ۳/۶

(۳) ۲۴، ۴

(۴) ۲۴، ۳/۶

۴۷- معادله سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -3t + 12$ است. اگر بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{A}$ (۱۵ m) باشد، در کدام لحظه برحسب ثانیه متحرک برای دومین بار از مکان $x = 33$ m می‌گذرد؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۳

(۱) ۲

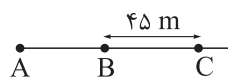
۴۸- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^2 - 10t + 5$ است. در ۴ ثانیه دوم، تندی متوسط متحرک چند برابر اندازه سرعت متوسط آن است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$

(۱) ۱

۴۹- در شکل زیر، متحرکی از نقطه A با شتاب ثابت 8 m/s^2 از حال سکون شروع به حرکت کرده و فاصله دو نقطه B و C را در مدت $5/1$ s طی می‌کند. فاصله دو نقطه A و B چند متر است؟



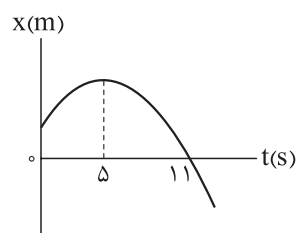
(۲) ۳۲

(۱) ۳۶

(۴) ۲۵

(۳) ۴۵

۵۰- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر حداقل مسافت طی شده توسط متحرک در یک بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای برابر 6 m باشد، بیشینه فاصله متحرک از مبدأ چند متر است؟



(۱) ۷۵

(۲) ۱۰۸

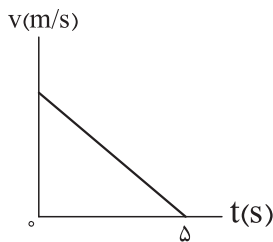
(۳) ۱۵۰

(۴) ۲۱۶

محل انجام محاسبات



۵۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه جابه جایی متحرک در ثانیه دوم چند برابر اندازه جابه جایی آن در ثانیه سوم است؟



$$\frac{7}{5} \quad (1)$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{21}{16} \quad (4)$$

۵۲- راننده خودرویی که در مسیر مستقیم با تندی ثابت 90 km/h در حرکت است، مانعی را می بیند و ترمز می کند. اگر حرکت خودرو بعد از ترمز با شتاب ثابت به بزرگی 5 m/s^2 کند شود و خودرو بعد از دیده شدن مانع توسط راننده تا توقف کامل 80 m پیموده باشد، زمان واکنش راننده چند ثانیه است؟

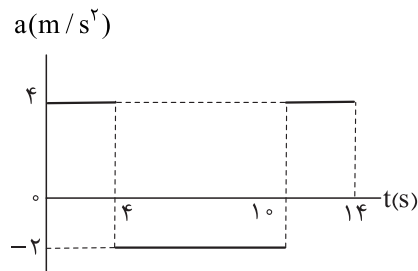
$$9/4 \quad (4)$$

$$7/3 \quad (3)$$

$$5/2 \quad (2)$$

$$3/1 \quad (1)$$

۵۳- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر داده شده و سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{v}_0 = (-8 \text{ m/s})\vec{i}$ است. سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه ای که جهت حرکت آن برای دومین مرتبه تغییر می کند، چند متر بر ثانیه است؟



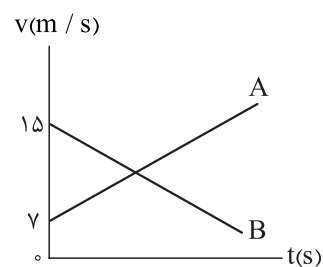
$$2\vec{i} \quad (1)$$

$$4\vec{i} \quad (2)$$

$$-2\vec{i} \quad (3)$$

$$-4\vec{i} \quad (4)$$

۵۴- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان قرار دارند و در لحظه $t = 12 \text{ s}$ دوباره به هم می رسند. فاصله بین دو متحرک در لحظه $t = 15 \text{ s}$ چند متر است؟



$$12 \quad (1)$$

$$24 \quad (2)$$

$$30 \quad (3)$$

$$54 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۵۵- در مبدأ زمان دو متحرک A و B به ترتیب در مبدأ مکان و مکان $x = ۶۸ \text{ m}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند. متحرک A با شتاب $\vec{i} (۴ \text{ m/s}^2)$ شروع به حرکت می‌کند و پس از ۶ s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B نیز ابتدا به مدت ۱۰ s با شتاب $\vec{i} (۲ \text{ m/s}^2)$ و سپس با سرعت ثابت حرکت می‌کند. چند ثانیه فاصله دو متحرک کم‌تر یا مساوی ۱۲ m است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

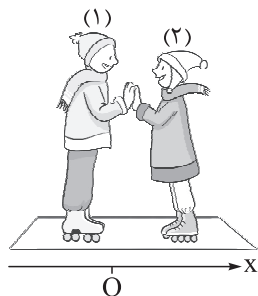
۵۶- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر گلوله در مدت $۱/۲ \text{ s}$ از ارتفاع ۴۸ m متری سطح زمین به ارتفاع ۲۴ m متری سطح زمین برسد، H برابر چند متر است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$)

- (۱) $۵۷/۸$ (۲) $۵۶/۸$ (۳) $۶۸/۶$ (۴) $۶۷/۶$

۵۷- در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصله زمانی $۰/۸ \text{ s}$ از یک نقطه بالای سطح زمین رها می‌شوند. در لحظه‌ای که فاصله دو گلوله از یکدیگر به ۳۲ m می‌رسد، مسافت طی شده توسط گلوله اول چند متر است؟ ($g = ۱۰ \text{ m/s}^2$)

- (۱) $۸۶/۸$ (۲) $۸۸/۸$ (۳) $۹۶/۸$ (۴) $۹۸/۸$

۵۸- دو شخص (۱) و (۲) به ترتیب به جرم‌های ۷۵ kg و ۶۰ kg با کفش‌های چرخ‌دار روی سطح بدون اصطکاکی روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص (۱)، شخص (۲) را به سمت راست هل می‌دهد. اگر اندازه شتاب شخص (۲) برابر ۲ m/s^2 باشد، شتاب شخص (۱) در SI برابر کدام است؟

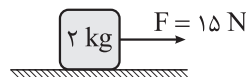


- (۱) $۲/۵ \vec{i}$
(۲) $-۲/۵ \vec{i}$
(۳) $۱/۶ \vec{i}$
(۴) $-۱/۶ \vec{i}$

۵۹- اگر جرم جسمی ۲۰ درصد و اندازه نیروی خالص وارد بر آن ۴۰ درصد کاهش یابد، اندازه شتاب جسم چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۲۰ ، افزایش می‌یابد. (۲) ۲۵ ، افزایش می‌یابد.
(۳) ۲۰ ، کاهش می‌یابد. (۴) ۲۵ ، کاهش می‌یابد.

۶۰- در شکل زیر، نیروی افقی $F = ۱۵ \text{ N}$ ، جسمی به جرم ۲ kg را که روی سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی $۰/۵$ قرار دارد، از حال سکون به حرکت درمی‌آورد. اندازه تکانه جسم پس از $۱/۸ \text{ m}$ جابه‌جایی به چند کیلوگرم متر بر ثانیه می‌رسد؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$ و $\mu_s < ۰/۷۵$)

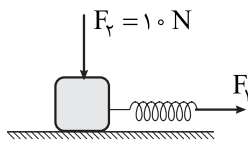


- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) $۳\sqrt{۳}$ (۴) $۶\sqrt{۳}$

۶۱- جسمی روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می‌شود و به تدریج افزایش می‌یابد. وقتی اندازه نیروی F به 12 N می‌رسد، جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. زمانی که اندازه F به 14 N می‌رسد، شتاب جسم 1 m/s^2 و به ازای $F = 16 \text{ N}$ ، شتاب جسم $1/5 \text{ m/s}^2$ می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح چند برابر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح است؟

$$\frac{3}{10} (1) \quad \frac{3}{4} (2) \quad \frac{2}{3} (3) \quad \frac{5}{6} (4)$$

۶۲- در شکل زیر، جسمی به جرم 5 kg توسط فنری افقی با شتاب ثابت به بزرگی $1/2 \text{ m/s}^2$ به صورت تندشونده روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/4$ و ثابت فنر 20 N/cm باشد، طول فنر نسبت به حالت عادی خود چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



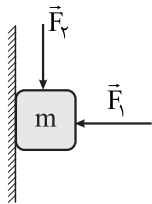
$$15 (1)$$

$$12 (2)$$

$$1/5 (3)$$

$$1/2 (4)$$

۶۳- در شکل زیر، به جسم تکیه داده شده به دیوار قائم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانه حرکت است. اگر $F_1 = 2 \text{ mg}$ و $F_2 = \frac{1}{4} \text{ mg}$ باشد، به ترتیب، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند برابر وزن جسم است و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار چه قدر است؟ (م جرم جسم و g شتاب گرانش زمین است.)



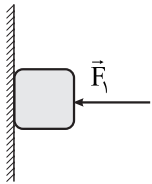
$$\frac{1}{4}, \frac{5}{2} (2)$$

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{2} (4)$$

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{2} (1)$$

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{2} (3)$$

۶۴- در شکل زیر، اگر به جسم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ وارد شود، جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. پس از شروع حرکت، اگر به جسم نیروی افقی $\vec{F}_2$ وارد شود، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. اگر اندازه نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت اول و دوم به ترتیب R_1 و R_2 و زوایایی که این نیروها با نیروی وزن جسم می‌سازند، به ترتیب θ_1 و θ_2 باشد، کدام گزینه، درست است؟ (ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی دیواره قائم با جسم به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است.)



$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} R_2, \theta_2 > \theta_1 (2)$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} R_2, \theta_1 > \theta_2 (4)$$

$$R_1 = \sqrt{2} R_2, \theta_2 > \theta_1 (1)$$

$$R_1 = \sqrt{2} R_2, \theta_1 > \theta_2 (3)$$

۶۵- تویی را از سطح زمین در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازه شتاب توپ هنگام بالارفتن، ۲ برابر اندازه شتاب آن هنگام پایین آمدن باشد، اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ، با فرض ثابت بودن، چند برابر وزن جسم است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{6} \quad (4)$$

۶۶- فنری به ثابت 50 N/m و طول 30 cm را از نقطه‌ای آویزان می‌کنیم. جسمی به جرم 400 g را به سر دیگر فنر بسته و رها می‌کنیم. در لحظه‌ای که طول فنر به 42 cm می‌رسد، شتاب جسم چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$5, \text{ به سمت بالا} \quad (1) \quad 5, \text{ به سمت پایین} \quad (2) \quad 15, \text{ به سمت بالا} \quad (3) \quad 15, \text{ به سمت پایین} \quad (4)$$

۶۷- جسمی به جرم 5 kg توسط یک ریسمان به سقف آسانسوری بسته شده و آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 و به صورت کندشونده به سمت پایین در حال حرکت است. اگر کابل آسانسور پاره شده و آسانسور سقوط آزاد کند، نیروی کشش ریسمان چند نیوتون تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$60 \quad (1) \quad 50 \quad (2) \quad 40 \quad (3) \quad 10 \quad (4)$$

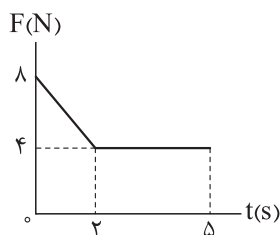
۶۸- اگر جرم گلوله‌ای برابر 20 g و اندازه تکانه آن برابر $800 \frac{\text{g} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ باشد، انرژی جنبشی گلوله چند ژول است؟

$$32 \quad (1) \quad 16 \quad (2) \quad 3/2 \quad (3) \quad 1/6 \quad (4)$$

۶۹- معادله تکانه - زمان متحرکی در SI به صورت $p = 2t^2 - 5t + 1$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر متحرک در ۲ ثانیه دوم چند نیوتون است؟

$$14\vec{i} \quad (1) \quad -14\vec{i} \quad (2) \quad 7\vec{i} \quad (3) \quad -7\vec{i} \quad (4)$$

۷۰- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی بر حسب زمان به شکل زیر است. اگر جهت حرکت جسم در لحظه $t = 4 \text{ s}$ تغییر کند، تکانه جسم در مبدأ زمان در SI کدام است؟



$$20\vec{i} \quad (1) \quad -20\vec{i} \quad (2) \quad 24\vec{i} \quad (3) \quad -24\vec{i} \quad (4)$$

۷۱- اگر ماهواره‌ای از ارتفاع 1600 km سطح زمین به ارتفاع 3600 km سطح زمین منتقل شود، وزن آن چند درصد تغییر می‌کند؟ (شعاع کره زمین 6400 km است.)

$$20 \quad (1) \quad 25 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 56/25 \quad (4)$$

۷۲- جرم زمین و ماه به ترتیب $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ و $7/2 \times 10^{22} \text{ kg}$ است. در حالتی که فاصله مرکز ماه و مرکز زمین $4 \times 10^5 \text{ km}$

باشد، اندازه نیروی گرانشی که زمین و ماه به هم وارد می کنند، تقریباً چند نیوتون است؟ $(G = 6/67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2})$

(۱) $1/8 \times 10^{14}$ (۲) $1/8 \times 10^{20}$ (۳) $7/2 \times 10^{14}$ (۴) $7/2 \times 10^{20}$

۷۳- پره یک بالگرد با دوره $0/08 \text{ s}$ به طور یکنواخت می چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پره بالگرد، چه قدر است؟

(۱) ۷۵۰ (۲) ۱۵۰۰ (۳) ۲۲۵۰ (۴) ۳۰۰۰

۷۴- خودرویی به جرم 1500 kg در سطحی افقی روی محیط دایره‌ای به شعاع 6 m با تندی ثابت 12 m/s در حال

حرکت است. اندازه نیرویی که سطح افقی به خودرو وارد می کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10 \text{ m/s}^2)$

(۱) $3/6 \times 10^3$ (۲) $3/6 \times 10^4$

(۳) $3/9 \times 10^3$ (۴) $3/9 \times 10^4$

۷۵- ماهواره‌ای روی مدار دایره‌ای به دور زمین می چرخد. اگر فاصله ماهواره از سطح زمین برابر 1600 km باشد، دوره

گردش آن چند ثانیه است؟ (شتاب گرانش در سطح زمین $\pi^2 \text{ m/s}^2$ و شعاع کره زمین 6400 km است.)

(۱) $\sqrt{2} \times 10^3$ (۲) $5\sqrt{2} \times 10^3$

(۳) $\sqrt{2} \times 10^4$ (۴) $5\sqrt{2} \times 10^4$



۷۶- کدام گزینه در مورد اوره نادرست است؟

- (۱) یک ترکیب آلی با مولکول‌های قطبی است.
 (۲) هر مولکول آن دارای ۸ پیوند اشتراکی بوده و در هگزان حل نمی‌شود.
 (۳) عدد اکسایش اتم کربن در آن با عدد اکسایش اتم کربن در متانول برابر است.
 (۴) همانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.
- ۷۷- کدام مورد، جزء مخلوط‌های ناهمگن اما پایدار است؟

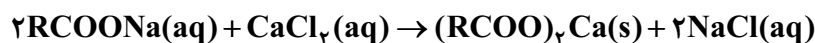
- (۱) شربت معده (۲) آب قند (۳) شیر (۴) گلاب

۷۸- کدام موارد در رابطه با اولئیک اسید با فرمول مولکولی $C_{17}H_{33}COOH$ درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

- (الف) در زنجیره هیدروکربنی این ترکیب، یک پیوند دوگانه وجود دارد.
 (ب) اگر ساختار این مولکول به صورت مقابل باشد، در بخش A، ۳ اتم وجود دارد.
 (ج) از واکنش هر مول از آن با ۴۰ گرم سدیم هیدروکسید، ۳۰۲ گرم صابون جامد حاصل می‌شود.
 (د) نیروی بین مولکولی غالب در این مولکول همانند روغن زیتون از نوع وان‌دروالس است.
- (۱) الف و ج (۲) الف و د (۳) ب و ج (۴) ب و د

۷۹- $18 / 875$ گرم از یک صابون سدیم ۱۸ کربنه را به 200 میلی‌لیتر از یک نمونه آب سخت که غلظت کلسیم کلرید در آن 125 / 1000 مولار است، وارد می‌کنیم. اگر 80 درصد این صابون سبب شود تا سختی آب به طور کامل از بین برود، در فرمول ساختاری این صابون چند پیوند دوگانه وجود دارد؟ (صابون فاقد پیوند سه‌گانه است؛ $H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۰- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر، در کدام گزینه آمده است؟

- اضافه کردن نمک خوراکی و شکر به آب، باعث تغییر pH آب نمی‌شود.
- شیمی‌دان‌ها پس از کشف ساختار اسید و باز، با ویژگی‌ها و برخی از واکنش‌های آن‌ها آشنا شدند.
- لوویس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.
- آمونیاک، خاصیت بازی دارد و افزودن آن به آب در دمای ثابت، سبب افزایش حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ می‌شود.

- (۱) درست - نادرست - نادرست - درست (۲) درست - نادرست - نادرست - نادرست
 (۳) نادرست - درست - درست - نادرست (۴) درست - درست - درست - نادرست

محل انجام محاسبات

۸۱- شمار یون‌های حاصل از اضافه کردن x گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید به آب با شمار یون‌های حاصل از اضافه کردن $۲/۰۸$ گرم باریم کلرید به آب برابر است. x و مجموع pH این دو محلول در دمای ۲۵°C کدام است؟ (حجم نهایی هر دو محلول را یک لیتر در نظر بگیرید؛ $\text{N} = ۱۴, \text{O} = ۱۶, \text{Cl} = ۳۵/۵, \text{Ba} = ۱۳۷ : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) $۱/۸, ۰/۸۱$ (۲) $۸/۸, ۰/۸۱$ (۳) $۱/۸, ۱/۰۸$ (۴) $۸/۸, ۱/۰۸$

۸۲- اگر ماده A، الکترولیت و ماده B، غیرالکترولیت باشد، کدام مورد به یقین درست است؟

- (۱) ماده A در آب، محلول و ماده B در آب، نامحلول است.
 (۲) ذرات سازنده A در حالت خالص، ذرات باردار هستند.
 (۳) ماده B، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.
 (۴) با افزایش غلظت مولی محلول B، رسانایی الکتریکی آن تغییری نمی‌کند.
- ۸۳- با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد درباره پاک‌کننده غیرصابونی درست است؟

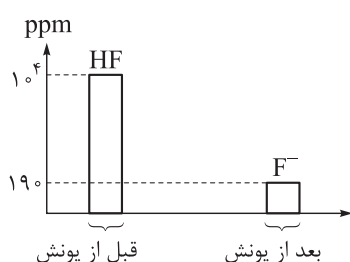
($\text{H} = ۱, \text{C} = ۱۲, \text{O} = ۱۶, \text{Na} = ۲۳, \text{S} = ۳۲ : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) با جایگزین کردن گروه CO_2^- ترکیب RCOONa با SO_3^- به دست می‌آید.
 (۲) واحدهای سازنده آن با پیوند کووالانسی (اشتراکی) به یکدیگر متصل‌اند.
 (۳) عدد اکسایش گوگرد در آن با عدد اکسایش گوگرد در هیدروژن سولفید برابر است.
 (۴) اگر جرم مولی آن، ۳۴۸ g.mol^{-1} و زنجیر هیدروکربنی در آن سیر شده باشد، تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی آن برابر ۱۱ است.

۸۴- کدام مورد، جمله زیر را به درستی کامل نمی‌کند؟

«در دمای یکسان، از بین اسیدهای، اسیدی با، K_a کوچک‌تری دارد.»

- (۱) فورمیک اسید و استیک اسید - جرم مولی بیشتر
 (۲) نیترواسید و نیتریک اسید - تعداد اکسیژن کم‌تر
 (۳) هیدروبرمیک اسید و هیدروفلوئوریک اسید - توانایی برقراری پیوند هیدروژنی
 (۴) هیدروسیانیک اسید و کربنیک اسید - عدد اکسایش بیشتر برای کربن
- ۸۵- نمودار زیر، غلظت برخی گونه‌ها را در محلول HF قبل و بعد از یونش آن در ۱ لیتر آب در دمای معین نمایش می‌دهد. کدام مورد نادرست است؟ (چگالی محلول را ۱ g.mL^{-1} در نظر بگیرید، $\text{H} = ۱, \text{F} = ۱۹ : \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) رسانایی الکتریکی این محلول کم‌تر از رسانایی الکتریکی محلول HCl با غلظت مولی یکسان است.
 (۲) درصد یونش این اسید در آب برابر با ۲٪ است.
 (۳) مجموع شمار یون‌ها در محلول برابر با $۰/۰۲$ مول است.
 (۴) ثابت یونش هیدروفلوئوریک اسید در شرایط آزمایش به تقریب برابر ۲×۱۰^{-۳} است.

محل انجام محاسبات



۸۶- دربارهٔ محلول‌هایی به حجم یکسان از آمونیاک (I) و باریم هیدروکسید (II) با pH برابر، کدام مورد درست است؟
(۱) غلظت مولار محلول (II) دو برابر محلول (I) است.

(۲) شمار یون‌های هیدروکسید در محلول (II)، نصف محلول (I) است.

(۳) هر دو محلول، با حجم یکسانی از محلول ۱/۰ مولار هیدروکلریک اسید به طور کامل واکنش می‌دهند.

(۴) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (II) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (I) برابر است.

۸۷- pH محلول ۱/۰ مولار باز BOH با ثابت یونش 10^{-5} ، چند واحد با pH آب خالص تفاوت دارد و در این محلول، غلظت مولی یون هیدروکسید چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است؟ (دما را 25°C در نظر بگیرید).

(۱) 10^4 ، ۴ (۲) 10^8 ، ۴ (۳) 10^3 ، ۳ (۴) 10^9 ، ۳

۸۸- در دو ظرف جداگانه، دو لیتر از محلول‌های نیترواسید و استیک اسید وجود دارد. اگر pH محلول نیترواسید برابر ۱/۴ و جرم NO_2^- در محلول نیترواسید، ۲/۵ گرم بیشتر از جرم CH_3COO^- در محلول استیک اسید باشد، غلظت تعادلی نیترواسید، چند برابر غلظت تعادلی استیک اسید است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

اسید	نیترواسید	استیک اسید
ثابت یونش	4×10^{-4}	5×10^{-5}

(۱) ۱/۲۵

(۲) ۱/۷۵

(۳) ۲/۰

(۴) ۲/۵

۸۹- کدام مطلب درست است؟ ($\text{Mg} = 24, \text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) پتاسیم هیدروکسید برخلاف آمونیاک بازی قوی است، زیرا یونش آن در آب به صورت کامل و برگشت‌ناپذیر است.

(۲) در محلول ۱/۰ مولار متیل آمین همانند نیتریک اسید، غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده بیشتر از غلظت یون‌های آب پوشیده است.

(۳) یک گرم منیزیم هیدروکسید در مقایسه با دو گرم جوش شیرین، مقدار اسید معدهٔ بیشتری را خنثی می‌کند.

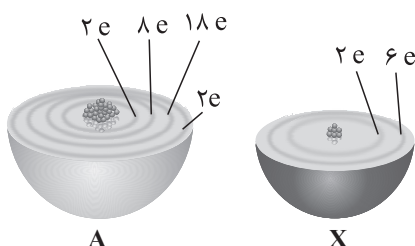
(۴) افزودن جوش شیرین به پاک‌کنندهٔ صابونی، مشکل پاک‌کنندگی آن در آب سخت را برطرف می‌کند.

۹۰- مقدار کربن دی‌اکسید حاصل از واکنش ۴ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $\text{pH} = 7/0$ با مقدار کافی سدیم

هیدروژن کربنات، با مقدار گاز کربن دی‌اکسید حاصل از سوختن کامل چند مول بنزین برابر است؟

(۱) ۱/۰ (۲) ۴/۰ (۳) ۶/۰ (۴) ۸/۰

محل انجام محاسبات



۹۱- با توجه به شکل مقابل، کدام مطلب درست است؟

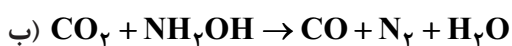
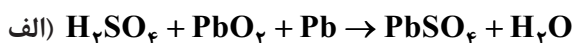
(۱) به ازای تشکیل ۰/۵ مول فراورده از واکنش A و X، $3/01 \times 10^{23}$ الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

(۲) عنصر قبل از A در جدول دوره‌ای، خاصیت کاهندگی کم‌تری نسبت به A دارد و با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد.

(۳) X در واکنش با عناصر فلوئور و کلر، ترکیبات XF_3 و XCl_3 و با عدد اکسایش برابر تشکیل می‌دهد.

(۴) امروزه از واکنش دومین عنصر دوره سوم با X، در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شود.

۹۲- تغییر عدد اکسایش اتم اکسند در واکنش «ب»، چند برابر تغییر عدد اکسایش اتم کاهنده در واکنش «الف» است؟



(۴) ۱

(۷۵) ۰/۷۵

(۵) ۰/۵

(۲۵) ۰/۲۵

۹۳- با توجه به نیم‌واکنش‌های زیر، پاسخ پرسش‌های (الف) و (ب) به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

الف) کدام فلز در محیط مرطوب و خنثی اکسایش نمی‌یابد، اما در محیط اسیدی اکسایش می‌یابد؟

ب) emf فرایند خوردگی آهن گالوانیزه بر اثر خراش در هوای مرطوب و خنثی کدام است؟



(۴) نقره - ۱/۱۶V

(۳) قلع - ۱/۱۶V

(۲) قلع - ۰/۳۲V

(۱) نقره - ۰/۳۲V

۹۴- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) سوخت‌های فسیلی رایج‌ترین سوخت برای خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند.

(۲) در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن به منظور تولید جریان برق، واکنش سوختن هیدروژن انجام می‌شود.

(۳) تعداد مراحل تبدیل انرژی شیمیایی به الکتریکی در روش سنتی بیشتر از سلول سوختی است.

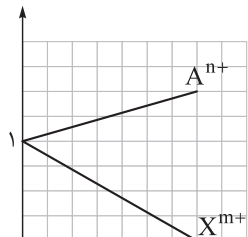
(۴) در تولید انرژی الکتریکی، استفاده از هیدروژن در سلول سوختی، باعث افزایش بازده نسبت به سوختن آن در موتور درون‌سوز می‌شود.

محل انجام محاسبات



۹۵- نمودار تغییرات غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی به صورت زیر است. کدام مطلب درست است؟

غلظت مولی



$$E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = -0.76\text{V}, E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = +0.34\text{V}$$

$$E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0.44\text{V}, E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = +0.8\text{V}$$

$$E^\circ(\text{K}^+/\text{K}) = -2.90\text{V}, E^\circ(\text{Al}^{3+}/\text{Al}) = -1.66\text{V}$$

(۱) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «پتاسیم - آهن» باشد که emf آن $2/46\text{V}$ است.

(۲) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «مس - نقره» باشد که برای واکنش با هر مول عامل اکسنده، دو مول عامل کاهنده نیاز است.

(۳) اگر X، نقره باشد، A می‌تواند روی باشد و ولتاژ آن بیش از یک ولت است.

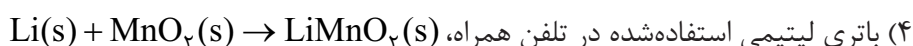
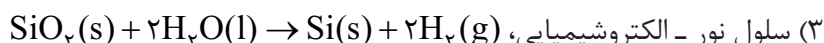
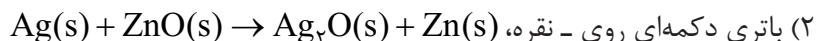
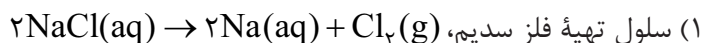
(۴) اگر A، آلومینیم باشد، X می‌تواند مس باشد و در این سلول آنیون‌ها از دیواره متخلخل به نیم‌سلول A وارد می‌شوند.

۹۶- در شرایط معین، در سلول گالوانی $\text{Al} - \text{SHE}$ ، $33/6$ میلی‌لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد تولید می‌شود. اگر تغییر جرم تیغه آندی در این سلول، نصف تغییر جرم تیغه کاتدی در سلول گالوانی «منیزیم - نقره» باشد، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در سلول «منیزیم - نقره» چه مضربی از 10^{20} است؟ ($\text{Mg} = 24, \text{Al} = 27, \text{Ag} = 108 : \text{g.mol}^{-1}$)

$$6/02(4) \quad 4/515(3) \quad 3/01(2) \quad 1/505(1)$$

۹۷- با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد، جمله داده‌شده را به درستی کامل می‌کند؟

«معادله واکنش کلی انجام‌شده در به صورت است.»



۹۸- در کدام فرایند زیر، عدد اکسایش اتم کربن از کم‌ترین مقدار به بیشترین مقدار ممکن خود می‌رسد؟

(۱) تبدیل اتن به اتیلن گلیکول

(۲) تبدیل فرمالدهید (CH_2O) به فورمیک اسید

(۳) سوختن کامل متان

(۴) تجزیه گرمایی کلسیم کربنات

محل انجام محاسبات

۹۹- با توجه به عبارت‌های داده شده که مربوط به فلزهای X ، Y و Z در دمای 25°C هستند، کدام مورد نادرست است؟

- فلزهای X و Y با محلول 0.1 مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.
- قدرمطلق پتانسیل الکترودی X از Y بزرگ‌تر است.
- در سلول گالوانی $Y-Z$ ، الکترود Z کاتد است.

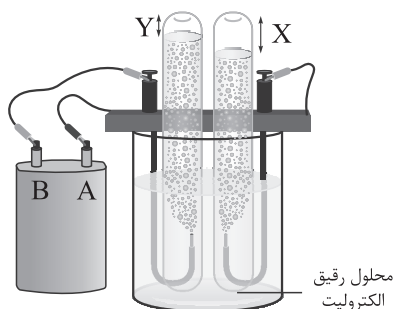
(۱) در سلول گالوانی تشکیل شده از دو فلز X و Y ، جهت جریان الکترون‌ها به سمت فلز Y است.

(۲) در سلول گالوانی X و Z ، جهت حرکت آنیون‌ها به سمت الکترود X است.

(۳) اگر قطعه‌ای از فلز Z در داخل محلولی از کاتیون‌های X^{2+} قرار گیرد، پس از مدتی دمای محلول همان 25°C باقی خواهد ماند.

(۴) ترتیب $X^{2+} > Z^{2+} > Y^{2+}$ را می‌توان به مقایسه قدرت اکسندگی این گونه‌ها نسبت داد.

۱۰۰- با توجه به شکل زیر که مربوط به برقکافت آب است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



(الف) گاز X را می‌توان به عنوان سوخت وارد قطب منفی سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن کرد.

(ب) در این فرایند با گذشت زمان، غلظت ماده حل شده در الکترولیت افزایش می‌یابد.

(ج) واکنش کلی برقکافت آب، مانند واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن است.

(د) قطب مثبت باتری است و pH محلول الکترولیت در اطراف الکترود متصل به آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

- (۱) الف و ج (۲) ب و د (۳) الف و ب (۴) ج و د

۱۰۱- کدام مورد نادرست است؟

(۱) خوردگی آهن یک فرایند الکتروشیمیایی خودبه‌خودی است که در آن، آهن، کاهنده و گاز اکسیژن، اکسنده است.

(۲) سرعت خوردگی آهن به عواملی نظیر رطوبت، دما و وجود مواد اکسیدکننده در محیط بستگی دارد.

(۳) هر چه اختلاف پتانسیل کاهشی استاندارد بین آهن و ماده اکسیدکننده بیشتر باشد، سرعت خوردگی کم‌تر خواهد بود.

(۴) تشکیل زنگار سبز بر سطح مس، نمونه‌ای از فرایند خوردگی به شمار می‌آید.

۱۰۲- اگر در شرایط معین، شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش تجزیه $6/125$ گرم پتاسیم کلرات مطابق معادله



باشد، جرم فراورده تولید شده در قطب منفی سلول، چند گرم است؟

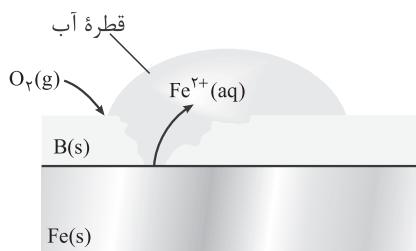
($K = 39$, $\text{Cl} = 35/5$, $\text{Mg} = 24$, $\text{O} = 16$: g.mol^{-1})

- (۱) ۱/۸ (۲) ۳/۶ (۳) ۵/۳۲۵ (۴) ۱۰/۶۵

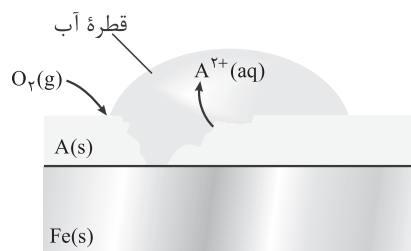
محل انجام محاسبات



۱۰۳- با توجه به شکل‌های زیر که دو قطعه آهن را نشان می‌دهند که با لایه نازکی از فلزهای A و B پوشیده شده‌اند، کدام موارد نادرست است؟



شکل (۲)



شکل (۱)

الف) قدرت کاهندگی فلز A از فلز B بیشتر است.

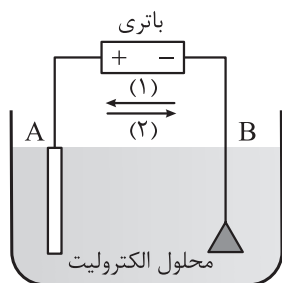
ب) مجموع ضرایب گونه‌ها در معادله موازنه‌شده نیم‌واکنش کاهش انجام‌شده در شکل (۲) برابر ۱۱ است.

ج) برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی می‌توان از ورقه آهنی مانند شکل (۱) استفاده کرد.

د) در شکل (۱)، آهن نقش کاتد را دارد و کاهش می‌یابد.

(۱) الف و د (۲) ب و ج (۳) الف و ب (۴) ج و د

۱۰۴- اگر شکل زیر مربوط به فرایند آبکاری باشد، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟



(۱) نیم‌واکنش کاهش بر روی الکترود B انجام می‌شود.

(۲) پیکان (۱) جهت جابه‌جایی الکترون‌ها را در مدار بیرونی نشان می‌دهد.

(۳) محلول الکترولیت شامل کاتیون‌های فلز A است.

(۴) E° فلز A نسبت به B، می‌تواند کمتر یا بیشتر باشد.

۱۰۵- کدام مورد، نادرست است؟

(۱) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شده مربوط به فرایند هال، ۴ برابر تغییر عدد اکسایش هر اتم آلومینیم است.

(۲) تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه نسبت به تهیه همان تعداد قوطی‌ها از فرایند هال، ۹۳ درصد در

مصرف انرژی صرفه‌جویی می‌کند.

(۳) در فرایند هال، با گذشت زمان از جرم آند کاسته می‌شود.

(۴) فلز آلومینیم در مقابل اکسایش مقاوم بوده و وسایل تولیدی از آن، برای مدت طولانی استحکام خود را حفظ می‌کنند.

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله دهم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/دی/۲۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دانشته ریاضی

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی - کوروش اسلامی - محمد گودرزی - حسین نادری - محمد سجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدحسین رحیمی - حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری - حسین نادری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی
فیزیک	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی - پیمان خواجوی مجد - یاسر راش - هادی عبادی - یاسر عبداللهی - امیر قاسمی پور - محسن مجنونی - محمد مرادی - عرفان نریمانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده سروش موثینی	منصور زرکش اصفهانی مرضیه فرشید
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	سیدعباس حسینی	ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	مسعود خندانی	علیرضا جباری سعید محبی	پریسا سلامت پوریا علاقه مند امیر محمودی انزلی سعید محبی محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	وحید فارسیان	مرتضی نصیرزاده یاشار ذریه	هادی عبادی پارسا طاهری منز پویا رستگاری حسن رحمتی کوکنده

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقا جانپور



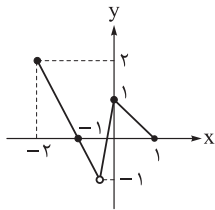
Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

الناز علی یاری زاده	سرپرست تولید
نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی الهه صفری - زهرا صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - نادره نازآوری ساعده نمازی	ویراستاران فنی
ندا فخاری سارا گنجی آزادپور	رسام
صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی	صفحه آرایی



اگر نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x) = -f(2x-1)$ شامل چند عدد



صحیح است؟

(۱) صفر

(۲) ۳

(۳) ۲

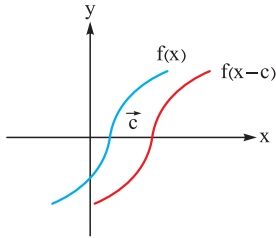
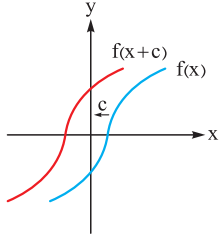
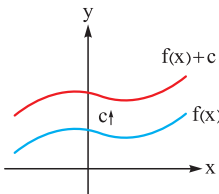
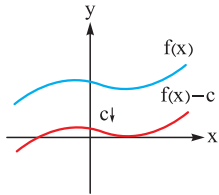
(۴) ۱

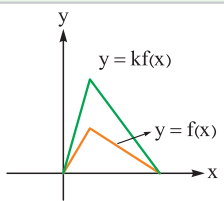
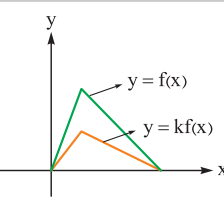
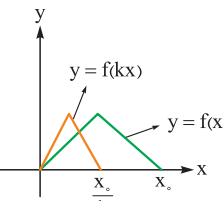
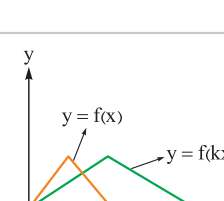
پاسخ: گزینه ۴

تبدیل نمودار توابع

کرتس Box

انتقال:

نوع انتقال	تابع	توضیح	نمودار	ویژگی
افقی	$y = f(x - c)$	نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0 + c, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x - c)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است، ولی دامنه تغییر می‌کند.
	$y = f(x + c)$	نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0 - c, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x + c)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است، ولی دامنه تغییر می‌کند.
عمودی	$y = f(x) + c$	نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0, y_0 + c)$ روی نمودار تابع $y = f(x) + c$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است، ولی برد تغییر می‌کند.
	$y = f(x) - c$	نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0, y_0 - c)$ روی نمودار تابع $y = f(x) - c$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است، ولی برد تغییر می‌کند.

ویژگی	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته شده
انبساط و انقباض عمودی	عرض نقاط در k ضرب می شود.		$y = kf(x), k > 1$
			$y = kf(x), 0 < k < 1$
انبساط و انقباض افقی	طول نقاط بر k تقسیم می شود.		$y = f(kx), k > 1$
			$y = f(kx), 0 < k < 1$

تبدیلات روی محور افقی تأثیری روی برد تابع ندارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** برد تابع f طبق نمودار، بازه $[-1, 2]$ و طبق نکته بالا، برد تابع g با برد تابع $-f$ که بازه $[-2, 1]$ باشد، برابر است؛ بنابراین:

$$R_g = [-2, 1]$$

گام دوم: برای رسم نمودار تابع f باید تبدیلات زیر را در راستای محور افقی انجام دهیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر 2}} y = f(2x-1)$$

حالا همین کار را بر روی بازه دامنه تابع f که برابر $[-\frac{1}{2}, 1]$ است، انجام می دهیم:

$$D_f = [-\frac{1}{2}, 1] \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} [-1, 2] \xrightarrow{\text{تقسیم بر 2}} D_g = [-\frac{1}{2}, 1]$$

گام سوم: حالا اشتراک D_g و R_g را حساب می کنیم:

$$D_g \cap R_g = ([-\frac{1}{2}, 1] - \{\frac{1}{2}\}) \cap [-2, 1] = [-\frac{1}{2}, 1] - \{\frac{1}{2}\}$$

این مجموعه شامل یک عدد صحیح است.

ریاضیات

۲ اگر $g^{-1}(x) = 3f^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + 4$ و دامنه تابع g بازه $[1, 7]$ باشد، دامنه تابع $h(x) = 2f\left(\frac{x+2}{3}\right) - 1$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا ضابطه تابع g را (برحسب تابع f) به دست می آوریم:

$$y = g^{-1}(x) = 3f^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + 4 \Rightarrow \frac{y-4}{3} = f^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) \Rightarrow \frac{x+1}{3} = f\left(\frac{y-4}{3}\right) \Rightarrow x = 2f\left(\frac{y-4}{3}\right) - 1$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} g(x) = 2f\left(\frac{x-4}{3}\right) - 1$$

گام دوم: طبق فرض، دامنه تابع g بازه $[1, 7]$ است، پس داریم:

$$1 \leq x \leq 7 \Rightarrow -3 \leq x-4 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-4}{3} \leq 1$$

یعنی دامنه تابع f بازه $[-1, 1]$ است.گام سوم: حالا دامنه تابع h را پیدا می کنیم:

$$-1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x+2 \leq 3 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

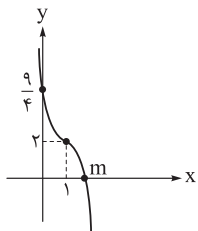
بازه $[-5, 1]$ فقط شامل یک عدد طبیعی است.با توجه به این که D_g برابر $R_{g^{-1}}$ است، می توان به جای گام های اول و دوم نوشت:

$$R_{g^{-1}} = [1, 7] \Rightarrow 1 \leq 3f^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + 4 \leq 7 \Rightarrow -1 \leq f^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) \leq 1$$

این یعنی $R_{f^{-1}} = [-1, 1]$ و در نتیجه $D_f = [-1, 1]$ است.

په چور دیگه

۳ نمودار تابع $f(x) = a(x-b)^3 + c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f^{-1}(1-m)$ کدام است؟



$$2\sqrt[3]{2} - 1 \quad (1)$$

$$2\sqrt[3]{2} + 1 \quad (2)$$

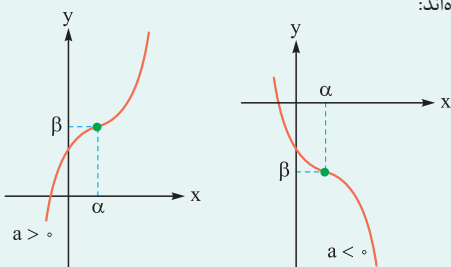
$$\sqrt[3]{2} - 1 \quad (3)$$

$$\sqrt[3]{2} + 1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

نمودار تابع درجه سوم $y = a(x-\alpha)^3 + \beta$ در شکل‌های زیر رسم شده‌اند:



نقطه (α, β) در نمودارهای بالا، مرکز تقارن نمودار تابع است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به درس‌بکس، ضابطه تابع f باید به صورت $f(x) = a(x-1)^3 + 2$ باشد. مقدار a را به کمک عرض از مبدأ تابع پیدا می‌کنیم:

$$f(0) = a(-1)^3 + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

گام دوم: پس ضابطه تابع $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^3 + 2$ است و با صفر قرار دادن این ضابطه مقدار m را پیدا می‌کنیم:

$$f(m) = -\frac{1}{4}(m-1)^3 + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)^3 = 8 \Rightarrow m-1 = 2 \Rightarrow m = 3$$

گام سوم: خواسته سؤال مقدار $f^{-1}(-2)$ است. فرض می‌کنیم این مقدار برابر b باشد:

$$f^{-1}(-2) = b \Rightarrow f(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^3 + 2 = -2 \Rightarrow (b-1)^3 = 16 \Rightarrow b-1 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt[3]{2} + 1$$

ریاضیات

تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$ روی بازه (a, b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳)

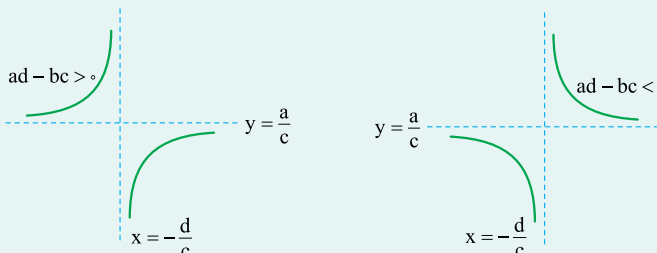
۱ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرایط $c \neq 0$ و $ad \neq bc$) هموگرافیک نامیده می شود و نمودار آن به یکی از حالت های زیر است:



بنابراین اگر $ad - bc > 0$ باشد، تابع روی هر بازه پیوسته از دامنه اش اکیداً صعودی و اگر $ad - bc < 0$ باشد، اکیداً نزولی است.

وضعیت یکنوایی تابع $g(x) = \sqrt{f(x)}$ مانند وضعیت یکنوایی تابع f است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow \frac{x-3}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-1} \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه ها}} 1 < x \leq 3 \Rightarrow D_f = (1, 3]$$

گام دوم: حالا چون $1 \times 1 - (-1)(-3) < 0$ است، تابع $y = \frac{x-3}{-x+1}$ روی بازه $(1, 3]$ اکیداً نزولی است و طبق نکته گفته شده

تابع f نیز روی این بازه اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $3-1=2$ است.



تابع $f(x) = (x - |x - 3|)^2$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟ ۵

(۲) $(1, +\infty)$

(۱) $(-\frac{3}{2}, +\infty)$

(۴) $[0, 3]$

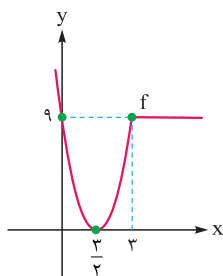
(۳) $(-\frac{3}{2}, 3]$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (x - (-x + 3))^2 & ; x < 3 \\ (x - (x - 3))^2 & ; x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (2x - 3)^2 & ; x < 3 \\ 9 & ; x \geq 3 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع f روی بازه $[\frac{3}{2}, 3]$ و هر زیرمجموعه از آن اکیداً صعودی است.



باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^{2n+1} + x^2 + x + 1$ بر چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$ کدام است؟

x (۴)

-x (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

اگر چندجمله‌ای $p(x)$ را بر چندجمله‌ای $b(x)$ تقسیم کنیم، خارج قسمت چندجمله‌ای $q(x)$ و باقی مانده چندجمله‌ای $r(x)$ می‌شود. داریم:

$$p(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

درجه چندجمله‌ای $r(x)$ همواره از درجه چندجمله‌ای $b(x)$ کوچک‌تر است.

برای محاسبه $r(x)$ ، مقدار چندجمله‌ای $p(x)$ را در ریشه‌های چندجمله‌ای $b(x)$ حساب می‌کنیم.

گام اول: رابطه تقسیم را می‌نویسیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$x^{2n+1} = (x^2 + x + 1)q(x) + r(x)$$

عبارت $x^2 + x + 1$ ریشه حقیقی ندارد، پس برای این که بتوانیم از ریشه‌های مقسوم‌علیه استفاده کنیم، طرفین تساوی بالا را در $x-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x \neq 1} (x-1)x^{2n+1} = (x^2-1)q(x) + (x-1)r(x) \Rightarrow x^{2n+2} - x^{2n+1} = (x^2-1)q(x) + (x-1)r(x)$$

گام دوم: ریشه مقسوم‌علیه $x^2-1=1$ است، پس باید مقسوم را بر حسب x^2 بسط دهیم:

$$x^{2n+2} - x^{2n+1} = (x^2)^n x^2 - (x^2)^n x$$

و سپس به جای x^2 مقدار ۱ قرار دهیم:

$$\Rightarrow x^2 - x = (x-1)r(x) \Rightarrow r(x) = x$$

مقدار $n=1$ را تست کنیم:

تیزبازی

$$\begin{array}{r} x^4 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ -(x^4 + x^2 + x^2) \quad x^2 - x \\ \hline -x^2 - x^2 \\ -(-x^2 - x^2 - x) \\ \hline x \end{array} \Rightarrow x^4 = (x^2 + x - 1)(\underbrace{x^2 - x}_{\text{باقی خارج قسمت}}) + \underbrace{x}_{\text{مانده}}$$

ریاضیات

نمودار تابع $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ را $\frac{\pi}{5}$ واحد به سمت چپ می‌بریم و سپس در راستای محور عمودی با ضریب ۲ منبسط و در راستای محور افقی با ضریب ۴ منقبض می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. دوره تناوب تابع g نسبت به دوره تناوب تابع f چه تغییری کرده است؟

(۱) $\frac{\pi}{4}$ واحد کم‌تر شده است. (۲) $\frac{\pi}{4}$ واحد بیشتر شده است.

(۳) $\frac{3\pi}{4}$ واحد کم‌تر شده است. (۴) $\frac{3\pi}{4}$ واحد بیشتر شده است.

پاسخ: گزینه ۲

دوره تناوب‌های توابع مهم:

درس‌Box

$$۱) \begin{cases} y = a \sin bx + c \\ y = a \cos bx + c \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$۲) \begin{cases} y = \sin^n bx \text{ یا } y = \cos^n bx \\ y = |\sin bx| \text{ یا } y = |\cos bx| \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$۳) y = |\sin bx| + |\cos bx| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$۴) y = a \tan bx + c \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا دوره تناوب تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{درس یاکس}} T_f = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

گام دوم: سپس ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۴}]{\text{به چپ } \frac{\pi}{5} \text{ و انبساط عمودی با ضریب ۲}} y = \sin^2 \frac{x + \frac{\pi}{5}}{2} = \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10} \right) \xrightarrow{\text{انقباض افقی با ضریب ۴}} g(x) = 2 \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{5} \right)$$

دوره تناوب این تابع نیز برابر است با:

$$T_g = \frac{\pi}{2}$$

گام سوم: همان‌طور که مشاهده می‌شود، T_g ، $\frac{3\pi}{4}$ واحد از T_f کم‌تر است.می‌دانیم تنها چیزی که روی دوره تناوب تابع اثرگذار است، انقباض / انقباض افقی است، پس وقتی نمودار تابع f را با ضریب ۴

$$T_f = 2\pi \Rightarrow T_g = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{منقبض می‌کنیم، دوره تناوب آن } \frac{1}{4} \text{ برابر می‌شود:}$$

تیزبازی

ریاضیات

۸

دوره تناوب تابع $f(x) = \tan ax \cdot \cot ax$ برابر $\frac{\pi}{8}$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

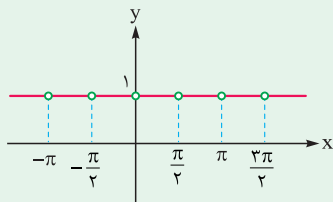
۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



تابع خاص $y = \tan x \cdot \cot x$: این تابع با دامنه $\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ثابت است:



یعنی دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.

پس دوره تناوب تابع $f(x) = \tan ax \cdot \cot ax$ برابر $\frac{\pi}{2|a|}$ است؛ زیرا با تقسیم طول نقاط روی نمودار تابع $y = \tan x \cdot \cot x$ به عدد a ، به دست می‌آید.

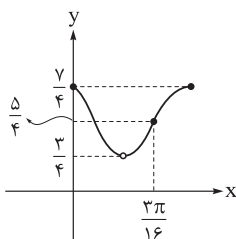
طبق نتیجه نکته بالا داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2|a| = 8 \Rightarrow |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$



بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 ax} + b$ به صورت زیر است. حاصل $a \times b$ کدام می‌تواند باشد؟



(۱) ۳

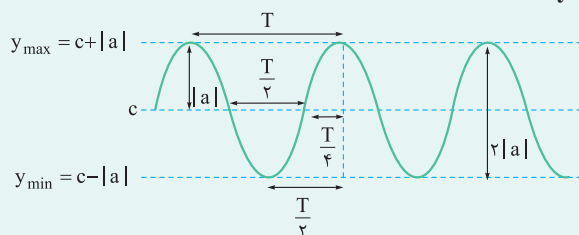
(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

نمودار توابع $y = a \cos bx + c$ یا $y = a \sin bx + c$ (۱) بیشترین مقدار تابع $y_{\max} = c + |a|$ و کم‌ترین مقدار آن $y_{\min} = c - |a|$ است.

(۲) فاصله دو ماکزیمم متوالی یا فاصله دو مینیمم متوالی برابر دوره تناوب است.

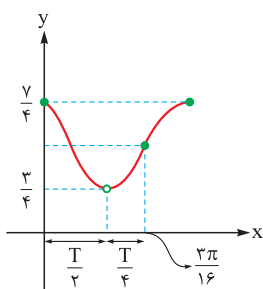
(۳) فاصله افقی هر ماکزیمم با مینیمم متوالی اش نصف دوره تناوب است.

گام اول: ابتدا ضابطه تابع را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 ax}} + b = \cos^2 ax + b = \frac{\cos 2ax + 1}{2} + b \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cos 2ax + \frac{2b+1}{2}$$

گام دوم: خط وسط نمودار $y = \frac{5}{4}$ است؛ زیرا $\frac{5}{4} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{2}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{2b+1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 2b+1 = 5 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

گام سوم: مطابق شکل زیر، $\frac{3T}{4}$ برابر $\frac{3\pi}{16}$ است.

$$\Rightarrow \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{16} \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

و با توجه به رابطه دوره تناوب داریم:

$$\frac{2\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

در نهایت خواسته سؤال برابر است با:

$$a \times b = \pm 4 \times \frac{3}{2} = \pm 6$$

ریاضیات

۱۰ اگر $\cot(\alpha + 25^\circ) = 2$ باشد، مقدار $\tan(11^\circ - \alpha)$ کدام است؟

۴) -3

۳) 3

۲) $-\frac{1}{3}$

۱) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

اتحاد تانژانت مجموع کمان:

درس Box

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\tan(45^\circ + \theta) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: متهم زاویه $25^\circ + \alpha$ زاویه $65^\circ - \alpha$ است؛ زیرا:

$$90^\circ - (\alpha + 25^\circ) = 65^\circ - \alpha$$

پس داریم:

$$\tan(65^\circ - \alpha) = 2$$

گام دوم: مطلوب مسئله $\tan(11^\circ - \alpha)$ است که کمان آن 45° بیشتر از کمان $65^\circ - \alpha$ است، بنابراین طبق نکته داریم:

$$\tan(11^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ + (65^\circ - \alpha)) = \frac{1 + \tan(65^\circ - \alpha)}{1 - \tan(65^\circ - \alpha)} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

(سوال ۱۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

کنکور

۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{15}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

۱) $5\sqrt{3}$

۱۱ مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \cos^2 x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟
۴) 4π ۳) 3π ۲) 2π ۱) π

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

معادله مثلثاتی: معادله‌ای که مجهول مسئله در کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معادله مثلثاتی است. برای حل چنین معادلاتی، به روش‌های تجزیه، تغییر متغیر و ... باید به یکی از سه معادله زیر برسیم:

$$۱) \sin \text{cloud} = \sin \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{cloud} = 2k\pi + \theta_0 \\ \text{cloud} = 2k\pi + \pi - \theta_0 \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$۲) \cos \text{cloud} = \cos \theta_0 \Rightarrow \text{cloud} = 2k\pi \pm \theta_0$$

$$۳) \tan \text{cloud} = \tan \theta_0 \Rightarrow \text{cloud} = k\pi + \theta_0$$

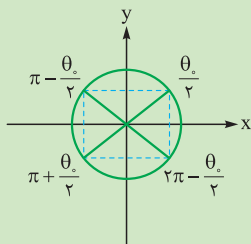
 پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $\cos^2 x$ را بر حسب $\cos 2x$ می‌نویسیم:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{3}$$

 گام دوم: فرض کنید θ_0 کمانی باشد که کسینوس آن برابر $-\frac{1}{3}$ است؛ در این صورت داریم:

$$\cos 2x = \cos \theta_0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \theta_0 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\theta_0}{2}$$

گام سوم: جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\theta_0}{2}, \pi - \frac{\theta_0}{2}, \pi + \frac{\theta_0}{2}, 2\pi - \frac{\theta_0}{2}$ که مجموع آن‌ها برابر 4π است. این کمان‌ها روی دایره مثلثاتی مطابق شکل زیر هستند:



(سوال ۷ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱)

 معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید.

 امتحان
نهایی

۱۲ مجموع جواب‌های معادله $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۹π (۴)

۸π (۳)

۷π (۲)

۵π (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اتحادهای جانبی:



$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\theta$$

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\theta$$

$$\sin \theta = 0, \tan \theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$$

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

معادلات خاص:

گام اول: ابتدا از اتحادهای بالا استفاده می‌کنیم و معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} \cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0$$

بنابراین داریم:

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از:

$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$$

که مجموع همه آن‌ها برابر 8π است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{[x]} \right]$ و حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{[x]}{x} \right]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) حد ندارد. (۲) ۱، ۱
(۳) حد ندارد، حد ندارد. (۴) حد ندارد، ۱

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: می‌دانیم که $x - 1 < [x] \leq x$ است، پس داریم:

$$\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$$

هم‌چنین $1 \leq \frac{x}{[x]} < \frac{[x]+1}{[x]}$ است، بنابراین:

$$1 \leq \frac{x}{[x]} < \frac{[x]+1}{[x]}$$

حواسمان هست که وقتی $x \rightarrow +\infty$ عبارت $\frac{x-1}{x}$ عضو بازه $(0, 1)$ و عبارت $\frac{[x]+1}{[x]}$ عضو بازه $(1, 2)$ است.

گام دوم: حالا حاصل‌حدها را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{[x]} \right] = [1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{[x]}{x} \right] = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین حاصل حد دوم وجود ندارد.

۱۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] + \cos x}{\sin x}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

+∞ (۴)

-∞ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در یک همسایگی چپ $x = 0$ ، مقدار $[x]$ برابر ۱- است و داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 + \cos x}{\sin x}$$

گام دوم: به کمک اتحادهای دو برابر کمان، صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{0}{-1} = 0$$

با استفاده از اتحاد $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$ به سادگی داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \tan \frac{x}{2} = \tan 0 = 0$$

یه جور دیگه ➡

۱۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{k[x] + [-x]}{x^2 - 9} = +\infty$ باشد، مجموعه مقادیر k ، بازه (a, b) است. حاصل $a \times b$ کدام است؟ ([] نماد جزء

صحیح است.)

حد دو طرفه است.

$$\frac{4}{3} (4)$$

$$\frac{3}{2} (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

در حد توابع کسری که حد مخرج صفر، اما حد صورت مخالف صفر باشد، حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ می شود. برای تعیین علامت حد، از جدول زیر کمک می گیریم:

حد بی نهایت		حد مخرج	
		∞^-	∞^+
حد صورت	مثبت	$-\infty$	$+\infty$
	منفی	$+\infty$	$-\infty$

گام اول: هر دو حد چپ و راست تابع در $X = 3$ برابر $+\infty$ شده است. این دو حد را جداگانه بررسی می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{حد چپ: } x \rightarrow 3^- \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \\ [-x] = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{k[x] + [-x]}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2k - 3}{x^2 - 9} = \frac{2k - 3}{\infty^-} = +\infty \Rightarrow 2k - 3 < 0 \Rightarrow k < \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{حد راست: } x \rightarrow 3^+ \Rightarrow \begin{cases} [x] = 3 \\ [-x] = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{k[x] + [-x]}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3k - 4}{x^2 - 9} = \frac{3k - 4}{\infty^+} = +\infty \Rightarrow 3k - 4 > 0 \Rightarrow k > \frac{4}{3} \quad (2)$$

گام دوم: این یعنی مجموعه مقادیر قابل قبول برای k بازه $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a \times b = 2$$

۱۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{2x} \right)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint از اتحاد مزدوج استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: عبارت را در مزدوج عبارت $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - (1 + \frac{1}{2x})$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{2x} \right) = x^2 \frac{1 + \frac{1}{x} - (1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2})}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}} = x^2 \frac{-\frac{1}{4x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}}$$

گام دوم: حالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}} \right) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 حد در بی‌نهایت برابر صفر است.

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{ax^2 - (a+1)x - 4}$ فقط یک خط مجانب قائم دارد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a چند عضو دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ باشد (در مورد حدهای چپ و راست هم صادق است)، خط $x = x_0$ مجانب قائم نمودار تابع f است. در توابع کسری، مجانب‌های قائم از بین ریشه‌های مخرج انتخاب می‌شود. ریشه‌ای از مخرج معادله، مجانب قائم است که ریشه صورت نباشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در سه حالت، نمودار تابع f فقط یک خط مجانب قائم دارد: الف) عبارت مخرج درجه یک باشد؛ یعنی $a = 0$ باشد. در این شرط ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -\frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)}$ خواهد بود که نمودار آن فقط یک خط مجانب دارد.

گام دوم: ب) مخرج فقط یک ریشه داشته باشد؛ چون عبارت مخرج درجه دو است، Δ آن باید برابر صفر باشد: $\Rightarrow \Delta = (a+1)^2 - 4(-4)a = a^2 + 18a + 16 = 0$ این معادله دو جواب دارد که با ریشه‌های صورت متفاوت است، پس فعلاً دو مقدار برای a قابل قبول است.

گام سوم:

پ) یکی از ریشه‌های مخرج، با یکی از ریشه‌های صورت مشترک باشد:

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-2)}{ax^2 - (a+1)x - 4}$$

پس $x = 2$ و $x = -5$ را در عبارت مخرج امتحان می‌کنیم:

$$x = 2: 4a - 2a - 2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$x = -5: 25a + 5a + 5 - 4 = 0 \Rightarrow 30a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{30}$$

در نتیجه مجموعه مقادیر قابل قبول برای a شامل ۵ عضو است.

برای چند مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a + 1}$ یک مجانب قائم دارد؟ (سوال ۱۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۷ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

ریاضیات

۱۸ اگر $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$ باشد، مساحت سطح محصور بین خطوط مجانب نمودار تابع $f \circ g^{-1}$ و محورهای

مختصات کدام است؟

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$3 (3)$$

$$\frac{3}{2} (2)$$

$$\frac{3}{4} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$ باشد، خط $y = y_0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

درس Box

نکته

تابع وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، تابع $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

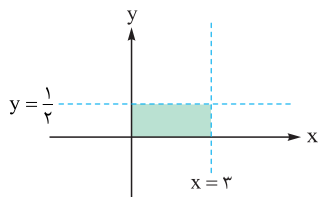
گام اول: ابتدا ضابطه تابع $f \circ g^{-1}$ را به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{\text{نکته}} g^{-1}(x) = \frac{-x-3}{x-1} \Rightarrow (f \circ g^{-1})(x) = \frac{g^{-1}(x)+2}{g^{-1}(x)+3} = \frac{\frac{-x-3}{x-1}+2}{\frac{-x-3}{x-1}+3} = \frac{x-5}{2x-6}$$

گام دوم: خط $x = 3$ مجانب قائم نمودار تابع $f \circ g^{-1}$ و خط $y = \frac{1}{2}$ مجانب افقی آن است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}$$

گام سوم: خط $x = 3$ و خط $y = \frac{1}{2}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:



مستطیل رنگ شده شکل بالا سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۹ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & a-4 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$ قطری باشد، دترمینان آن کدام است؟

۳۰ (۲)

۶ (۱)

۲۰ (۴)

۱۲ (۳)

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱، قسمت پ، امتحان نهایی هندسه (۳) شهریور ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به تعریف ماتریس قطری، مقدار a را پیدا کنید.

Hint

درس Box

(۱) ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند).

(۲) دترمینان ماتریس‌های 2×2 :

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$|A| = ad - bc$$

گام اول: ماتریس A قطری است؛ بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفر هستند و در نتیجه داریم:

$$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقدار a ، ماتریس A را بازنویسی کرده و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4 \times 5 - 0 = 20$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) برای هر دو ماتریس دلخواه A و B ، تساوی $AB = BA$ برقرار می‌باشد. (درست - نادرست)

ب) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = 2i - j^2$ ، در این صورت درایه a_{33} برابر ۵- است. (درست - نادرست)

پ) $A = \begin{bmatrix} a & a-4 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری است، در این صورت مقدار a برابر می‌باشد.

ت) اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = 1$ ، در این صورت $|-2A|$ برابر است.

(سؤال ۱ (قسمت پ) - امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۴)

امتحان نهایی

۲۰ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^{1^{\circ}} + A^{2^{\circ}} + A^{3^{\circ}}$ کدام است؟

O (۴)

A + 2I (۳)

3I (۲)

3A (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ماتریس‌های A^2 و A^3 را پیدا کنید تا به یک الگو دست پیدا کنید یا مضربی از ماتریس واحد حاصل شود.

Hint

درس Box

روش‌های متعددی برای پیدا کردن توان‌های بزرگ ماتریس‌ها وجود دارد که بعضی از این روش‌ها عبارت‌اند از:
(۱) گاهی اوقات می‌توان از روی ماتریس‌های A^2 ، A^3 و ... به یک الگو دست پیدا کرد و ماتریس A^n را حدس زد.

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{1405} را پیدا کنید.

ماتریس‌های A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس‌های A ، A^2 و A^3 ، ماتریس A^n از رابطه $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$A^{1405} = \begin{bmatrix} 1 & 1405 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(۲) در بعضی از موارد، یکی از توان‌های ماتریس A مانند A^2 یا A^3 ، مضربی از ماتریس I می‌شود و با توجه به این موضوع می‌توان ماتریس A^n را به سادگی پیدا کرد.

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس A^{1404} را به دست آورید.

ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$A^{1404} = (A^2)^{702} = I^{702} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام اول: ابتدا ماتریس A^2 و در صورت لزوم ماتریس A^3 را محاسبه می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

گام دوم: حال ماتریس‌های $A^{1^{\circ}}$ ، $A^{2^{\circ}}$ و $A^{3^{\circ}}$ را بر حسب ماتریس A^2 می‌نویسیم:

$$A^{1^{\circ}} + A^{2^{\circ}} + A^{3^{\circ}} = (A^3)^3 A + (A^3)^2 A^2 + (A^3)^1 = I^3 \times A + I^2 \times A^2 + I^1 =$$

$$= A + A^2 + I = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۲۱ اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد و داشته باشیم $A^۳ = A + I$ ، آن گاه وارون ماتریس $A^۶ - A^۵$ کدام است؟

- (۱) A (۲) A^{-1}
(۳) $-A$ (۴) $-A^{-1}$

پاسخ: گزینه ۲

ماتریس های $A^۶$ و $A^۵$ را بر حسب ماتریس $A^۳$ بنویسید.

Hint

درس Box

ماتریس I با هر ماتریس مربعی هم مرتبه اش تعویض پذیر است، یعنی داریم:

$$A \times I = I \times A = A$$

بنابراین اتحادهای جبری برای ماتریس I و هر ماتریس مربعی هم مرتبه اش همواره برقرار است. به عنوان مثال می توان نوشت:

$$(A + I)^۲ = A^۲ + ۲A + I$$

$$(A + I)^۳ = A^۳ + ۳A^۲ + ۳A + I$$

گام اول: ماتریس های $A^۵$ و $A^۶$ را بر حسب ماتریس $A^۳$ نوشته و سپس از تساوی $A^۳ = A + I$ استفاده می کنیم:

$$A^۶ = (A^۳)^۲ = (A + I)^۲ = A^۲ + ۲A + I$$

$$A^۵ = A^۳ \times A^۲ = (A + I) \times A^۲ = A^۳ + A^۲ = A + I + A^۲$$

گام دوم: مقادیر به دست آمده را جای گذاری کرده و ماتریس $A^۶ - A^۵$ را به دست می آوریم:

$$A^۶ - A^۵ = (A^۲ + ۲A + I) - (A + I + A^۲) = A$$

گام سوم: با توجه به نتیجه گام دوم، وارون ماتریس $A^۶ - A^۵$ برابر است با:

$$(A^۶ - A^۵)^{-1} = A^{-1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۲ اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $2I - A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A + B$ کدام است؟

۱ (۴)

۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۲/۵ (۱)

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۲ کنکور ریاضی داخل نوبت دوم ۱۴۰۳ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱

با محاسبه ماتریس $A^{-1}B^{-1}$ و داشتن ماتریس A^{-1} ، ماتریس B^{-1} را به دست آورید.

Hint

درس Box

حل معادله ماتریسی: برای پیدا کردن ماتریس X از روابط $AX = B$ و $XA = B$ ، کافی است طرفین این دو رابطه را به ترتیب از چپ و از راست در وارون ماتریس A ضرب کنیم.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$XA = B \Rightarrow (XA)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$$

گام اول: ابتدا ماتریس $A^{-1}B^{-1}$ را پیدا می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$2I - A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}B^{-1} = 2I - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ابتدا ماتریس A و سپس به کمک آن ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A(A^{-1}B^{-1}) = A \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس B و سپس ماتریس $A + B$ را محاسبه می‌کنیم.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} B = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots \\ 1/5 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع ستون اول} = 2/5$$

اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $2A - 3B^{-1}$ کدام است؟

کنکور

(سؤال ۳۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{4}(A^{10} - A^9)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۰/۲۵
(۳) -۱
(۴) -۰/۲۵

پاسخ: گزینه ۲

نیازی به محاسبه ماتریس‌های A^9 و A^{10} نیست.

Hint

درس: Box

- (۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن گاه $|AB| = |A||B|$
(۲) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن گاه: $|A^n| = |A|^n$
(۳) اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n و k عددی حقیقی باشد، آن گاه: $|kA| = k^n |A|$

گام اول: برای محاسبه خواسته سؤال، از ماتریس A^9 فاکتور می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left| \frac{1}{4}(A^{10} - A^9) \right| = \left| \frac{1}{4} A^9 (A - I) \right| = \frac{1}{16} |A^9| |A - I| = \frac{1}{16} |A|^9 |A - I|$$

گام دوم: باید $|A|$ و $|A - I|$ را محاسبه کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - 4 = -1$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - I| = 0 - 4 = -4$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده از گام دوم در عبارت گام اول، داریم:

$$\left| \frac{1}{4}(A^{10} - A^9) \right| = \frac{1}{16} (-1)^9 (-4) = \frac{1}{4} = 0/25$$

۲۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & A \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $\frac{1}{4}A^3 + 2I$ کدام است؟

۰/۵ (۱)

۱ (۲)

-۳ (۳)

-۱/۵ (۴)

مشاوره نمونه مشابه این سؤال برای محاسبه $|A|$ در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ دیده می‌شود. همچنین نمونه‌های آن برای ماتریس 2×2 ، یکی از مدل‌های پرتکرار سؤالات امتحان نهایی است.

پاسخ: گزینه ۱

از طرفین تساوی داده‌شده، دترمینان بگیرید تا $|A|$ به دست آید.

Hint

کدس Box

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3

در این روش، ستون‌های اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم، سپس درایه‌های قطر اصلی و دو قطر موازی آن را مشخص می‌کنیم. درایه‌های روی هر قطر را در هم ضرب کرده و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم. سپس همین کار را برای قطر فرعی و دو قطر موازی آن انجام می‌دهیم و در نهایت اعداد حاصل را از هم کم می‌کنیم تا دترمینان به دست آید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

گام اول: از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & A \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (0+0+0) - (-2|A|+0+1) \Rightarrow |A| = 1$$

گام دوم: ماتریس A را بازنویسی کرده و ستون دوم ماتریس‌های A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم: در این مرحله ستون دوم ماتریس $\frac{1}{4}A^3 + 2I$ را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{1}{4}A^3 + 2I = \begin{bmatrix} \vdots & -1 & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{4} & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & 2 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & -1 & \vdots \\ \vdots & 1/5 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$-1 + 1/5 + 0 = 0/5$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم این ماتریس برابر است با:

۲۵ اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (m+1)x + y = -n \\ 3x + (m-1)y = 6 \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، بیشترین مقدار ممکن برای $m+n$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۱

شرط وجود بی‌شمار جواب را نوشته و به ازای هر مقدار m ، مقدار مناسب n را پیدا کنید.

Hint

درس‌Box

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ دستگاه معادلات}$$

(۱) یک جواب منحصر به فرد دارد، هرگاه: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

(۲) فاقد جواب است، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

(۳) بی‌شمار جواب دارد، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

گام اول: دستگاه معادلات بی‌شمار جواب دارد، پس ابتدا شرط $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ را بررسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{m+1}{3} = \frac{1}{m-1} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

گام دوم: به ازای هر یک از دو مقدار m و از شرط $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، مقدار n را محاسبه می‌کنیم.

$$m = 2 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-n}{6} \Rightarrow n = -6 \Rightarrow m + n = -4$$

$$m = -2 \Rightarrow \frac{1}{-3} = \frac{-n}{6} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m + n = 0$$

بنابراین بیشترین مقدار $m+n$ برابر صفر است.

دو نقطه A و B و دو خط متقاطع d و d' در صفحه مفروض اند. تعداد نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از دو خط d و d' نیز به یک فاصله باشند، کدام نمی تواند باشد؟

- (۲) ۱
(۴) بی شمار

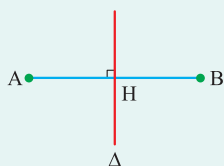
- (۱) صفر
(۳) ۲

مشاوره این سؤال براساس تعاریف ارائه شده در متن صفحه ۳۸ و تمرین ۱ (قسمت الف) صفحه ۳۹ کتاب درسی طراحی شده است.

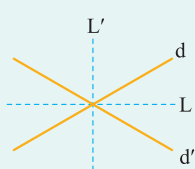
پاسخ: گزینه ۱

هر یک از دو مکان هندسی را به طور جداگانه تعیین کرده و اشتراک آن ها را مشخص کنید.

(۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B در آن صفحه به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره خط AB است.



(۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' در آن صفحه به یک فاصله هستند، نیمسازهای زوایای بین این دو خط است.



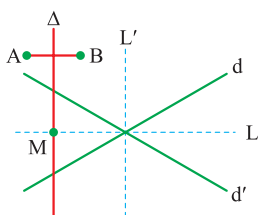
Hint

درس Box

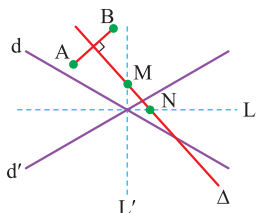
گام اول: مطابق درس باکس مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره خط AB و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای بین این دو خط است. محل برخورد این دو مکان هندسی جواب مسئله است.

پاسخ خیلی تشریحی

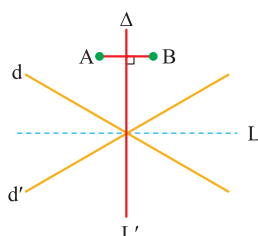
گام دوم: در صورتی که عمودمنصف پاره خط AB با یکی از دو نیمساز موازی بوده و دیگری را قطع کند، مسئله یک جواب دارد.



گام سوم: در صورتی که عمودمنصف پاره خط AB با هر دو نیمساز متقاطع باشد، مسئله دو جواب دارد.



گام چهارم: در صورتی که عمودمنصف پاره خط AB بر یکی از این دو نیمساز منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.



معادله دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ که بر خط $4x - 3y + 5 = 0$ مماس است، به صورت $x^2 + y^2 + ax + by = c$ بیان

شده است. حاصل $\frac{b+c}{a}$ کدام است؟

-۴ (۴)

۳ (۳)

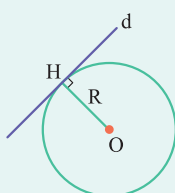
-۲ (۲)

(۱) صفر

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۰ امتحان نهایی هندسه (۳) خرداد ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۴

معادله استاندارد دایره را نوشته و با استفاده از اتحادها، آن را به صورت معادله ضمنی بنویسید.



(۱) می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطه تماس بر خط مماس بر دایره عمود است؛ بنابراین فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر اندازه شعاع دایره است.

(۲) فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط d به معادله $ax + by + c = 0$ ، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام اول: فاصله مرکز دایره از خط را پیدا می‌کنیم. این فاصله برابر شعاع دایره است:

$$R = \frac{|4(-1) - 3(2) + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

گام دوم: معادله استاندارد دایره را نوشته و آن را به معادله ضمنی تبدیل می‌کنیم.

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = -4$$

گام سوم: با مقایسه معادله به دست آمده در گام دوم با معادله صورت سؤال، مقادیر a ، b و c را پیدا کرده و حاصل عبارت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = c = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{-4-4}{2} = -4$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-1, 2)$ مرکز آن بوده و بر خط $4x - 3y + 5 = 0$ مماس باشد.

(سؤال ۱۰ - امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

فاصله مراکز دو دایره‌ای که از نقطه $(۱, ۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس‌اند، کدام است؟

$$۲\sqrt{۲} \quad (۱)$$

$$۴\sqrt{۲} \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۶ \quad (۴)$$

مشاوره محاسبه شعاع یا نوشتن معادله دایره مماس بر هر دو محور مختصات از سوالات پرتکرار کنکور در سال‌های گذشته است.

پاسخ: گزینه ۲

نقطه داده‌شده در ناحیه اول محورهای مختصات است، پس مرکز آن روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

معادله دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس است، براساس ناحیه‌ای که دایره قرار می‌گیرد، به صورت زیر است:

$$(۱) \text{ ناحیه اول: } (x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$(۲) \text{ ناحیه دوم: } (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$(۳) \text{ ناحیه سوم: } (x + R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

$$(۴) \text{ ناحیه چهارم: } (x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

گام اول: نقطه $(۱, ۲)$ در ناحیه اول محورهای مختصات است، پس معادله دایره مماس بر هر دو محور مختصات در این ناحیه را نوشته و نقطه را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow{(۱, ۲)} (۱ - R)^2 + (۲ - R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow ۱ - ۲R + R^2 + ۴ - ۴R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - ۶R + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (R - ۱)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱ \\ R = ۵ \end{cases}$$

گام دوم: مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع R که در ناحیه اول بر هر دو محور مختصات مماس است، به صورت (R, R) می‌باشد؛ بنابراین مراکز دو دایره عبارت‌اند از:

$$O_1(۱, ۱) \text{ و } O_2(۵, ۵)$$

گام سوم: فاصله مراکز این دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2 = \sqrt{(۵ - ۱)^2 + (۵ - ۱)^2} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

Hint

درس‌Box

پاسخ‌خیلی تشریحی

خط به معادله $x - 3y + 6 = 0$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اگر O' مرکز دایره باشد، تانژانت زاویه $BO'A$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

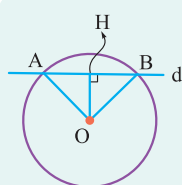
$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

طول وتر AB و فاصله مرکز دایره از این وتر را محاسبه کنید.

Hint

درس Box

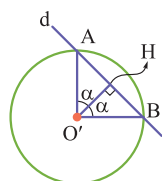


هرگاه فاصله مرکز دایره از یک خط، کمتر از شعاع دایره باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند که از وصل کردن آن دو نقطه، یک وتر حاصل می‌شود.

از طرفی عمودی که از مرکز دایره بر وتری از دایره رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر اگر $OH \perp AB$ ، آن‌گاه $AH = BH$.

گام اول: ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را تعیین می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



مرکز: $O(3, -2)$

$$\text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 4^2 - 4(-12)} = 5$$

گام دوم: فاصله مرکز دایره از خط را محاسبه می‌کنیم:

$$O'H = \frac{|3 - 3(-2) + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

گام سوم: مثلث $O'AB$ متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع $O'H$ ، نیمساز زاویه $AO'B$ است. مطابق شکل داریم:

$$\cos \alpha = \frac{O'H}{OA} = \frac{\frac{15}{\sqrt{10}}}{5} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5} \quad (\text{زاویه } 2\alpha \text{ حاده است.})$$

گام چهارم: با توجه به رابطه بین کسینوس و تانژانت داریم:

$$1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} = \frac{25}{16} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{3}{4}$$

دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(2, 4)$ و $(4, 2)$ همدیگر را قطع می کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره برابر با فاصله نقاط تقاطع آن ها باشد، فاصله مرکز یکی از دو دایره تا مبدأ مختصات کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

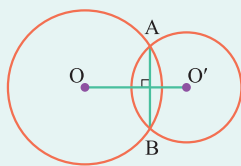
$2\sqrt{2}$ (۲)

$3\sqrt{2}$ (۱)

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۱ کنکور ریاضی داخل نوبت اول ۱۴۰۲ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

درس Box



هرگاه دو دایره متقاطع باشند، خطالمركزین دو دایره، عمودمنصف پارهخطی است که نقاط تقاطع دو دایره را به هم وصل می کند؛ یعنی در شکل، خط گذرنده از نقاط O و O' ، عمودمنصف پارهخط AB است.

گام اول: مطابق درس باکس می دانیم خطالمركزین دو دایره، عمودمنصف پارهخطی است که دو سر آن نقاط تقاطع دو دایره قرار دارند. با فرض $A(2, 4)$ و $B(4, 2)$ ، داریم:

$$m_{AB} = \frac{2-4}{4-2} = -1$$

$$(AB \text{ وسط}) M = \frac{(2, 4) + (4, 2)}{2} = (3, 3)$$

اگر خط گذرنده از مراکز دو دایره را d بنامیم، آن گاه داریم:

$$m_d = \frac{-1}{m_{AB}} = 1 \Rightarrow \text{معادله خط } d: y - 3 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x$$

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$$

گام دوم: فاصله نقاط تقاطع دو دایره برابر است با:

از طرفی فاصله مراکز دو دایره برابر فاصله نقاط تقاطع است و شعاع دو دایره یکسان است، پس:

$$O_1M = O_2M = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$$

$$O_1M = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (x-3)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2(x-3)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 1 \Rightarrow x-3 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow O_1(4, 4) \\ x=2 \Rightarrow O_2(2, 2) \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به مختصات مراکز دو دایره، فاصله آن ها از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OO_1 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{و} \quad OO_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(1, 4)$ و $(3, 2)$ همدیگر را قطع می کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره، برابر فاصله بین نقاط تقاطع باشد، فاصله بین نقاط برخورد یکی از دایره ها با محور x کدام است؟

(سؤال ۳۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

۶ (۲)

۸ (۱)

$4\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$A = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ و a_1, a_2, a_3 اعداد صحیح و b_1, b_2, b_3 همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند. اگر

و $A + 3 \mid B$ ، باقی مانده تقسیم عدد $11 - 3(A - 1)^2 + 2B^2$ بر ۸ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مشاوره باقی مانده بر ۸ باید شما را یاد این نکته بندازه که مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است.

پاسخ: گزینه ۲

A زوج است.

Hint

درس Box

بررسی یک تمرین مهم کتاب درسی:

تمرین مهمی در کتاب درسی وجود دارد که می‌گوید: «اگر a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 سه عدد صحیح و b_1, b_2, b_3 همان اعداد، ولی با ترتیب متفاوتی باشند، آن‌گاه $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است».

اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد، پس فرد است. از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب چند عدد، فقط وقتی فرد می‌شود که تک‌تک آن اعداد فرد باشند، پس $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3)$ فرد هستند. جمع ۳ عدد فرد، فرد است، ولی جمع این ۳ عدد صفر می‌شود، چون:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0 \quad (\text{تناقض})$$

(همون $a_1 + a_2 + a_3$)

در مورد این تمرین خوب است نکات زیر را به یاد داشته باشید:

(۱) این قضیه برای اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ که b_i ها همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند نیز برقرار است، به شرطی که n (تعداد اعداد) فرد باشد.

(۲) اگر b_i در پرانتزها را جابه‌جا کنیم، باز هم قضیه برقرار است؛ مثلاً عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ نیز زوج است.

(۳) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ (چون فقط ترتیب اعداد فرق دارد، پس مجموع اعداد یکسان می‌شود). تناقض حاصل در روش برهان خلف نیز از همین جا می‌آید.

(۴) تساوی زیر همواره درست است:

$$a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n$$

(۵) اگر k فرد باشد عبارت $(ka_1 - b_1)(ka_2 - b_2) \dots (ka_n - b_n)$ نیز زوج است.

(۶) عبارت $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)$ نیز زوج است.

گام اول: طبق درس باکس عدد A زوج است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: $A + 3$ فرد است و چون B مقسوم‌علیه عددی فرد است، پس B نیز فرد است. مربع عدد فرد B به صورت $8k + 1$ است، پس $B^2 \equiv 1$.

گام سوم: $A - 1$ نیز فرد است، پس شبیه بالا $(A - 1)^2 \equiv 1$ ، پس داریم:

$$2B^2 + 3(A - 1)^2 - 11 \equiv \underbrace{2(1) + 3(1) - 11}_{-6} \equiv 2$$

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $a + 2 \mid b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ بر ۸ را بیابید.

(ریاضیات گسسته - تمرین ۱۰ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

کتاب درسی

دو عدد $3k + 5$ و $2k + 1$ هر دو بر $a > 1$ بخش پذیرند. عدد a^1 به کدام دسته هم نهشتی تعلق دارد؟

$$[6]_9 \quad (4)$$

$$[1]_9 \quad (3)$$

$$[4]_9 \quad (2)$$

$$[0]_9 \quad (1)$$

مشاوره سوال مهم، مشابه ۱۴۰۴
حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینه ۳

اول a را به دست آورید و بعد از هم نهشتی به پیمانه ۹ استفاده کنید.

Hint

درس Box

دسته های هم نهشتی:

مجموعه اعدادی را که باقی مانده تقسیم آن ها بر عدد m مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می دهیم و به آن دسته هم نهشتی r به پیمانه m می گوئیم. مثلاً در هم نهشتی به پیمانه ۵، دسته های هم نهشتی به صورت $[0]_5, [1]_5, \dots, [4]_5$ بوده و هر کدام شامل اعداد زیر هستند:

$$[0]_5 = 5k, [1]_5 = 5k + 1, \dots, [4]_5 = 5k + 4$$

اگر باقی مانده تقسیم x بر m برابر r باشد، داریم:

$$x \equiv r \Leftrightarrow m \mid x - r \Leftrightarrow x = mq + r \Leftrightarrow x \in [r]_m$$

پیدا کردن باقی مانده با استفاده از هم نهشتی: مهم ترین کاربرد هم نهشتی، پیدا کردن باقی مانده اعداد بزرگ در تقسیم بر m است. مراحل کار به صورت زیر است:

(۱) یک هم نهشتی اولیه می نویسیم. اگر این هم نهشتی جوری باشد که سمت راست، ۱ یا -۱ باشد بهتر است.

(۲) با توان رسانی و ضرب و جمع، مقسوم را می سازیم.

(۳) اگر سمت راست منفی باشد یا بزرگ تر از پیمانه باشد، آن قدر از پیمانه به آن اضافه یا کم می کنیم تا در محدوده باقی مانده $(0 \leq r < m)$ قرار گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اول باید a را به دست آوریم:

$$a \mid 5k + 3 \xrightarrow{+} a \mid 5k + 3 - 5 \xrightarrow{+} a \mid -2 \xrightarrow{+} a \mid 7 \xrightarrow{a>1} a = 7$$

$$a \mid k + 2 \xrightarrow{\times(-5)} a \mid -5k - 1 \xrightarrow{+} a \mid -5k - 1 + 5k \xrightarrow{+} a \mid -1 \xrightarrow{+} a \mid 4$$

گام دوم: کافی است باقی مانده تقسیم عدد 7^7 را بر ۹ به دست آوریم (در گزینه ها دسته هم نهشتی به پیمانه ۹ داده شده است):

$$7^{7!} \equiv (-2)^{7!} \xrightarrow{زوج} (-2)^{7!} = 2^{7!}$$

گام سوم: $7!$ مضرب ۳ است، یعنی $7! = 3k$ (که k زوج است). حالا داریم:

$$2^{3k} = (2^3)^k \equiv (-1)^k = 1$$

اگر عدد طبیعی $a > 3$ اعداد $2 + 7m$ و $4 + 11m$ را عاد کند، کدام مورد نمی تواند عدد اول بزرگ تر از ۳ باشد؟

(سوال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

$$ak + 7 \quad (4)$$

$$ak + 5 \quad (3)$$

$$ak + 3 \quad (2)$$

$$ak + 1 \quad (1)$$

ریاضیات

۳۳

در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده از بیشترین مقدار خود ۲ واحد کم‌تر است. کدام عدد حتماً بر b بخش‌پذیر است؟

$a^2 - 9$ (۴)

$3a - 12$ (۳)

$2a + 4$ (۲)

$a^2 - 4$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

بیشترین مقدار باقی‌مانده $b - 1$ است.

Hint

گام اول: باقی‌مانده r همواره در شرط $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، پس بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر $b - 1$ است.

گام دوم: طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + \overbrace{b-1-2}^r \Rightarrow a + 3 = b(q+1)$$

گام سوم: به زبان عاد کردن داریم:

$$b \mid a + 3 \xrightarrow[\text{a-3 ضرب می‌کنیم.}]{\text{سمت راست را در}} b \mid (a+3)(a-3) \rightarrow b \mid a^2 - 9$$

پس $a^2 - 9$ همواره بر b بخش‌پذیر است.

تیزبازی

در تقسیم عدد a مثلاً بر ۵ بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر ۴ می‌تواند باشد، پس اگر باقی‌مانده ۲ واحد از بیشترین مقدار کم‌تر باشد، می‌توانیم آن را ۲ در نظر بگیریم. با این مثال می‌توانیم $a = 7$ بگیریم. با جای‌گذاری a در گزینه‌ها در گزینه (۱) عدد ۴۵ و در گزینه (۲) عدد ۱۸، در گزینه (۳) عدد ۹ و در گزینه (۴) عدد ۴۰ به دست می‌آید که فقط گزینه‌های (۱) و (۴) بر ۵ بخش‌پذیرند (گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند). با امتحان عددی دیگر، می‌توانیم گزینه (۱) را نیز رد کنیم.

ریاضیات

۳۴

در یک سال، اول اردیبهشت ماه روز یکشنبه است. اگر $\overline{2a2}$ روز بگذرد، به سه شنبه می‌رسیم. a چند مقدار مختلف

ممکن است داشته باشد؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۱ (۴)

۴ (۳)

مشاوره سؤال ترکیبی از تقویم نگاری و بخش پذیری بر اعداد خاص. مشابه این سؤال را در سال‌های آینده خواهید دید.

پاسخ: گزینه ۱

اختلاف روزها به پیمانه ۷، برابر ۲ است.

Hint

درس‌Box

تقویم نگاری:

فرض کنید تاریخی از سال در یک روز مشخص هفته باشد، می‌خواهیم بدانیم تاریخ دیگر چندشنبه است.

(۱) اختلاف روزهای دو تاریخ را به دست می‌آوریم.

(۲) باقی‌مانده عدد بالا را در تقسیم بر ۷ محاسبه می‌کنیم.

(۳) اگر تاریخ جلوتر را بخواهیم به اندازه باقی‌مانده از آن روز هفته، جلو می‌رویم و اگر تاریخ عقب‌تر را بخواهیم به اندازه باقی‌مانده عقب می‌رویم.

ویژگی تقسیم دو طرف هم‌نهستی و رقم یکان:

توضیح	ریاضی	ویژگی تقسیم
اگر عدد c که قرار است از دو طرف ساده شود با پیمانه، عامل اول مشترک نداشته باشد، آن را ساده می‌کنیم.	$ca \equiv cb, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$	۱
اگر عدد c با پیمانه، عامل d داشته باشد، c را از دو طرف ساده می‌کنیم، ولی پیمانه بر d تقسیم می‌شود.	$ca \equiv cb, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$	۲

اگر یکشنبه را صفر بگیریم، سه‌شنبه متناظر ۲ می‌شود، پس باقی‌مانده $\overline{2a2}$ بر ۷ برابر ۲ باید باشد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\overline{2a2} \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 200 + 10a + 2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 10a \equiv -200 \xrightarrow{(10,7)=1} a \equiv -20 \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{0 \leq a \leq 9} a = 1, 8$$

پس a دو مقدار دارد.

معادله هم‌نهشتی $143x + 91y - 7n = 2$ جواب دارد. مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار دورقمی و طبیعی عدد n کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

شرط وجود جواب این است که $7n + 2 \mid (143, 91)$.

Hint

درس‌Box

معادله هم‌نهشتی و روش حل آن:

برای حل معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b^m$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه m را قرار می‌دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b ، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

(۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید. (البته می‌توانیم با ضرب دو طرف هم‌نهشتی در عددی که نسبت به پیمانه، اول است ضرایب را ساده‌تر کنیم.)

شرط جواب معادله سیاله خطی:

معادله $ax + by = c$ وقتی جواب دارد که $(a, b) \mid c$.

گام اول: معادله را به صورت $143x + 91y = 7n + 2$ می‌نویسیم. شرط جواب داشتن معادله این است که $7n + 2 \mid (143, 91)$.

گام دوم: $13 = (11 \times 13, 7 \times 13) = (143, 91)$ ، پس معادله وقتی جواب دارد که $7n + 2 \mid 13$.

گام سوم: به زبان هم‌نهشتی داریم:

$$7n + 2 \equiv 0 \Rightarrow 7n \equiv -2 \xrightarrow{\times 2} 14n \equiv -4 \xrightarrow{14 \equiv 1} n \equiv -4 \Rightarrow n = 13k - 4$$

گام چهارم: به ازای $k = 2$ کوچک‌ترین عدد دورقمی، $n = 22$ به دست می‌آید که مجموع ارقام آن برابر ۴ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به ازای برخی مقادیر طبیعی n ، معادله سیاله $57x + 133y = 22n - 1$ دارای جواب است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد دورقمی n ، کدام است؟

(سوال ۳۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

کنکور

ریاضیات

۳۶ اگر $2a^3 \equiv m-1$ و عدد $3a-1$ بر m بخش پذیر باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی $m > 1$ کدام است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

مشاوره از فصل نظریه اعداد حداقل دو سؤال در کنکور می آید که بیشتر آن‌ها در سال‌های اخیر از هم‌نهشتی بوده است.

پاسخ: گزینه ۳

Hint سعی کنید از دو رابطه داده شده a را حذف کنید.

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

درس‌Box

از رابطه $a \equiv b \pmod{m}$ چه نتایجی می‌توانیم بگیریم؟	
دو طرف را با عدد صحیح یکسان جمع یا تفریق کنیم.	$a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$
دو طرف را در عدد صحیح c ضرب کنیم.	$ca \equiv cb \pmod{m}$
دو طرف را به توان عدد طبیعی n برسانیم.	$a^n \equiv b^n \pmod{m}$
مضارب پیمانه را به هر طرف که بخواهیم اضافه یا کم کنیم.	$a \equiv b \pm mk \pmod{m}$
به جای پیمانه، مقسوم‌علیه آن را قرار دهیم.	$k \mid m$ که $a \equiv b \pmod{m}$
پیمانه اختلاف دو طرف را عاد می‌کند.	$m \mid a - b$

گام اول: $m \equiv 0$ ، پس $2a^3 \equiv -1$ از طرفی $3a-1 \equiv 0$ پس $3a \equiv 1$.

گام دوم: از دو رابطه به دست آمده سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\begin{cases} 2a^3 \equiv -1 \xrightarrow{\times 27} 54a^3 \equiv -27 \\ 3a \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان ۳}} 27a^3 \equiv 1 \xrightarrow{\times 2} 54a^3 \equiv 2 \end{cases}$$

گام سوم: هر دو عدد -27 و 2 با عدد $54a^3$ به پیمانه m هم‌نهشت هستند، پس هر دو عدد نیز به پیمانه m هم‌نهشت هستند:

$$-27 \equiv 2 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 2 - (-27) = 29 \xrightarrow{m > 1} m = 29$$

مجموع ارقام m برابر ۱۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

۳۷

در گراف منتظم G از مرتبه ۱۲، رابطه $\Delta(G)^2 - 2\delta(G) = 4$ برقرار است. اندازه گراف کدام است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۴۸

(۳) ۲۸

(۴) ۲۴

مشاوره از فصل گراف یک سؤال در کنکور می‌آید. روی تعاریف مقدماتی گراف و انواع گراف (کامل، منتظم و مکمل) مسلط باشید.

پاسخ: گزینه ۴

درجه همه رأس‌ها برابر k است.

Hint

درس‌Box

در گراف k - منتظم درجه هر رأس برابر k است. در این گراف‌ها سه رابطه وجود دارد:

$$(۱) \quad kp = 2q$$

$$(۲) \quad 0 \leq k \leq p-1$$

(۳) k و p هم‌زمان فرد نیستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اگر G گراف k - منتظم باشد، درجه همه رأس‌ها برابر k است، پس $\delta(G) = \Delta(G) = k$ ، پس داریم:

$$k^2 - 2k = 4 \Rightarrow k^2 - 2k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 & \times \\ k = 4 & \checkmark \end{cases}$$

گام دوم: گراف ۴ - منتظم مرتبه ۱۲ است. در گراف k - منتظم رابطه $kp = 2q$ برقرار است، پس داریم:

$$4 \times 12 = 2q \Rightarrow q = 24$$

اگر حاصل ضرب درجه‌های رأس‌های گراف G از مرتبه ۶ برابر ۲۱۶ باشد، حاصل ضرب درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ کدام است؟

- (۲) ۹۶
(۴) ۲۱۶

- (۱) ۷۲
(۳) ۱۰۸

مشاوره سؤال بسیار مهمی است که مشابه آن بارها در کنکور آمده است. حتماً آن را خوب یاد بگیرید.

پاسخ: گزینه ۲

۲۱۶ را به ضرب ۶ عدد که تعداد اعداد فرد، زوج باشد تجزیه کنید.

Hint

درس Box

گراف مکمل:

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس‌های G است. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \quad (۱)$ $\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1 \quad (۲)$

گام اول: باید عدد ۲۱۶ را به حاصل ضرب ۶ عدد تجزیه کنیم:

$$216 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

گام دوم: امکان ندارد که درجه رأس‌ها به صورت بالا باشد، چون تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، پس ۲۱۶ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$216 = 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1$$

(دقت کنید درجه هر رأس حداکثر می‌تواند ۵ باشد)

گام سوم: مجموع درجه یک رأس در خود گراف و درجه آن رأس در گراف مکمل باید برابر $p-1$ یا ۵ باشد، پس اگر $\deg_G(a) = 4$

باشد، $\deg_{\bar{G}}(a) = 1$ می‌شود. شبیه همین، درجه رأس‌ها در $\bar{G}$ به دست می‌آید:

$$\bar{G} \text{ ضرب درجه‌ها در } 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 96$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

(سؤال ۴۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

- (۴) ۱۳

- (۳) ۱۹

- (۲) ۱۱

- (۱) ۱۷

۳۹ در گرافی از مرتبه ۱۰ رابطه $\sum_{a \in V(G)} |N_G[a]| = ۸۲$ برقرار است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه ۹ دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sum_{a \in V} |N_G[a]| = d(a) + ۱$$

Hint

گراف کامل:

درس Box

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف کامل مرتبه p	K_p	گرافی که هر دو رأس آن مجاورند (به هم وصل‌اند).	(۱) درجه همه رأس‌ها $p-۱$ است. (۲) گراف $(p-۱)$ - منتظم است. (۳) $q = \frac{p(p-۱)}{۲}$ (۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبه خود دارد.

$$|N_G(a)| = d(a) = \text{تعداد عضوهای همسایگی } a$$

$$|N_G[a]| = ۱ + d(a) = \text{تعداد عضوهای همسایگی بسته } a$$

گام اول: همسایگی باز یک رأس به تعداد درجه آن رأس عضو دارد، ولی در همسایگی بسته رأس a ، چون خود a نیز اضافه می‌شود به تعداد $۱ + d(a)$ عضو دارد، پس داریم:

$$۱ + d(a_۱) + ۱ + d(a_۲) + \dots + ۱ + d(a_{۱۰}) = ۸۲ \Rightarrow ۱۰ + \underbrace{d(a_۱) + \dots + d(a_{۱۰})}_{\text{مجموع درجات}} = ۸۲$$

گام دوم: مجموع درجات برابر $۲q$ است، پس:

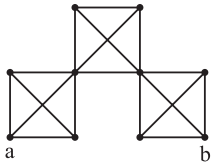
$$۱۰ + ۲q = ۸۲ \Rightarrow q = ۳۶$$

گام سوم: در گراف کامل مرتبه ۱۰، درجه‌ها برابر ۹ بوده و $\frac{۱۰ \times ۹}{۲} = ۴۵$ یال وجود دارد. ۹ یال را باید طوری حذف کنیم که تا حد امکان از رأس‌های کم‌تری برداشته شود تا رأس‌های درجه ۹ بیشتری باقی بماند.

گام چهارم: برای برداشتن ۹ یال حداقل ۵ رأس درگیر می‌شوند (چون در ۴ رأس حداکثر ۶ یال جا می‌گیرد)، پس حداکثر $۵ - ۵ = ۱۰$ رأس، می‌توانند از درجه ۹ باقی بمانند.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۴۰. گراف مقابل چند $a - b$ مسیر دارد؟

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۶۴ (۳)

۱۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

برای رسیدن از a به b ببینید از چه رأس‌هایی حتماً باید عبور کنید.

Hint

درس‌Box

تعریف مسیر: فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن $u - v$ مسیر می‌گوییم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر، همان تعداد یال‌های طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است.

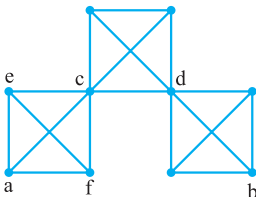
(۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است؛ پس تعداد مسیرهای به طول صفر، برابر تعداد رأس‌های (مرتبه گراف) است.

(۲) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یال‌های گراف (اندازه گراف) می‌شود.

(۳) در مسیر، رأس تکراری وجود ندارد.

گام اول: برای این که از a به b برسیم اول باید از a به c و بعد از c به d و بعد از d به b برسیم:

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: از a به c دقیقاً ۵ مسیر به صورت زیر داریم:

$ac / aec / afc / aefc / afec$

گام سوم: شبیه گام دوم از c به d نیز ۵ مسیر و از d به b نیز ۵ مسیر داریم.

گام چهارم: طبق اصل ضرب، $5 \times 5 \times 5 = 125$ مسیر از a به b وجود دارد.

متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 3$ s و $t_2 = 7$ s به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 2$ m و $x_2 = 18$ m عبور می‌کند. در 10° ثانیه اول، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

۱۰ (۴)

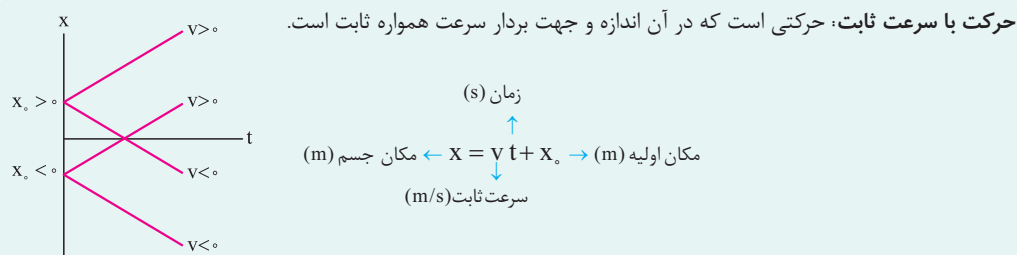
۷ / ۵ (۳)

۵ (۲)

۲ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

در این نوع حرکت سرعت لحظه‌ای (v) و سرعت متوسط (v_{av}) برابر هستند.

شیب نمودار مکان - زمان است.

محل تقاطع نمودار و محور مکان است و مکان متحرک در لحظه $t = 0$ را نشان می‌دهد.

بردار مکان: برداری است که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند.

هرگاه متحرک از مبدأ مکان عبور کند یعنی $x = 0$ است و بردار مکان، تغییر جهت می‌دهد.

در هر نوع حرکت روی محور x می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_{av} = \text{سرعت متوسط (m/s)}$$

$$x_1 = \text{مکان متحرک در لحظه } t_1 \text{ (m)}$$

$$x_2 = \text{مکان متحرک در لحظه } t_2 \text{ (m)}$$

گام اول: با توجه به داده‌های مسئله، x_0 و v را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

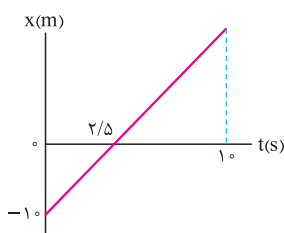
$$\begin{cases} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{18 - 2}{7 - 3} = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s} \\ x = vt + x_0 \Rightarrow 18 = 4(7) + x_0 \Rightarrow x_0 = -10 \text{ m} \end{cases}$$

گام دوم: لحظه‌ای را که متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور می‌کند به دست می‌آوریم:

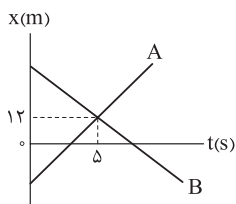
$$x = 4t - 10 = 0 \Rightarrow 4t = 10 \Rightarrow t = 2.5 \text{ s}$$

گام سوم: نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می‌کنیم. با توجه به این نمودار، بردار مکان متحرک از لحظه $t = 0$ تا $t = 2.5$ s در خلاف جهت محور x و از لحظه $t = 2.5$ s تا $t = 10$ s در جهت محور x است، بنابراین بردار مکان متحرک به مدت

7.5 s در جهت محور x است.



نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. فاصله دو متحرک در لحظه $t_1 = 3$ s چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t_2 = 9$ s است؟



(۱) ۳

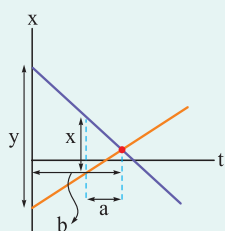
(۲) ۲

(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

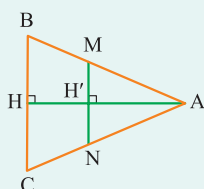
درس Box

در سؤالات حرکت شناسی و به ویژه مبحث نمودارهای مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت، لازم است که هر دانش آموز بتواند از تشابه مثلث ها استفاده کند:



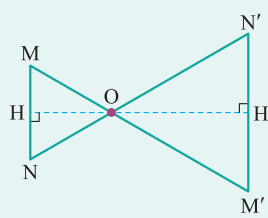
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

(۱)



$$\frac{AH'}{AH} = \frac{MN}{BC}$$

(۲)



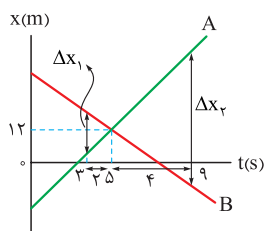
$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{OH}{OH'}$$

(۳)

با توجه به نمودار دو متحرک و شکل (۳) درس باکس که تشابه دو مثلث $\triangle MON$ و $\triangle M'ON'$ را نشان می دهد می توان نوشت:

$$\Delta x_1 = \text{فاصله دو متحرک در لحظه } t_1 = 3 \text{ s}$$

$$\Delta x_2 = \text{فاصله دو متحرک در لحظه } t_2 = 9 \text{ s}$$



$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{5-3}{9-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۴۳

متحرک A با سرعت ثابت در جهت محور x و متحرک B با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می کنند. تندی متحرک A، ۲ برابر تندی متحرک B است. اگر جهت بردار مکان دو متحرک A و B به ترتیب در لحظه های $t_1 = 8 \text{ s}$ و $t_2 = 20 \text{ s}$ تغییر کند، در چه لحظه ای بر حسب ثانیه دو متحرک به هم می رسند؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به وضعیت گفته شده در سؤال، نمودار x - t دو متحرک A و B را رسم کنید و لحظه به هم رسیدن دو متحرک را به دست آورید.

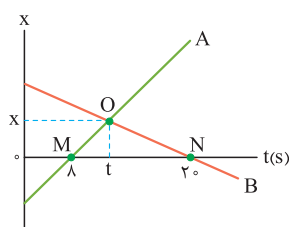
(۱) هرگاه متحرک از مبدأ مکان یا مبدأ محور ($x = 0$) عبور کند، x تغییر علامت می دهد و جهت بردار مکان آن عوض می شود.

(۲) وقتی دو متحرک A و B به هم می رسند یعنی در مکان یکسانی قرار دارند: $x_A = x_B$

(۳) در حرکت با سرعت ثابت، اندازه شیب خط نمودار مکان - زمان متحرک برابر است با تندی متحرک.

گام اول: با توجه به داده های سؤال، نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B را رسم می کنیم.

گام دوم: به کمک رابطه بین تندی متحرک های A و B، زمان به هم رسیدن آن ها را به دست می آوریم:



$$v_A = 2 |v_B| \Rightarrow |\text{شیب } MO| = 2 \times |\text{شیب } ON| \Rightarrow \frac{x}{t-8} = 2 \times \frac{x}{20-t}$$

$$\Rightarrow 2t - 16 = 20 - t \Rightarrow 3t = 36 \Rightarrow t = 12 \text{ s}$$

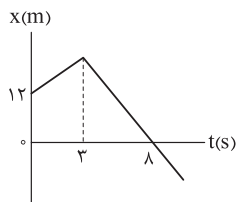
Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندوی متوسط متحرک برابر 3 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازه، چند

متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) $2 \vec{i}$
(۲) $-2 \vec{i}$
(۳) $7 \vec{i}$
(۴) $-7 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا مکان متحرک در لحظه $t = 3 \text{ s}$ را به دست آورید، سپس سرعت متوسط $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ در بازه‌های قبل و بعد از آن را محاسبه و در نهایت شتاب متوسط را از رابطه $a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ به دست آورید.

درس Box

شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

شتاب متوسط برابر تغییرات سرعت در واحد زمان است.

$$\vec{a}_{av} = \text{شتاب متوسط } (m/s^2)$$

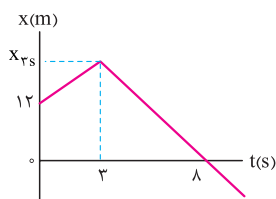
$$\vec{v}_1 = \text{سرعت متحرک در لحظه } t_1 (m/s)$$

$$\vec{v}_2 = \text{سرعت متحرک در لحظه } t_2 (m/s)$$

شتاب متوسط کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta \vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.

گام اول: با توجه به این که $s_{av} = 3 \text{ m/s}$ و بردار مکان در 8 ثانیه اول در جهت محور x است، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$s_{av} = \frac{(x_{rs} - 12) + (x_{rs} - 0)}{8} = 3 \Rightarrow \frac{2x_{rs} - 12}{8} = 3$$

$$\Rightarrow x_{rs} = 18 \text{ m}$$

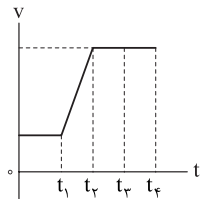
گام دوم: سرعت متحرک در مرحله 2 (س تا ۳) و 3 (۳ تا ۸) و سپس شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_1 = v_{(0 \rightarrow 3 \text{ s})} = \frac{18 - 12}{3} = 2 \text{ m/s} \\ v_2 = v_{(3 \rightarrow 8 \text{ s})} = \frac{0 - 18}{8 - 3} = -3.6 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{(-3.6 - 2)\vec{i}}{5} \Rightarrow \vec{a}_{av} = (-0.7 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

فیزیک

۴۵

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اندازه شتاب متوسط متحرک در کدام بازه زمانی بیشتر است؟

(۱) صفر تا t_2 (۲) صفر تا t_4 (۳) t_2 تا t_4 (۴) t_3 تا t_4

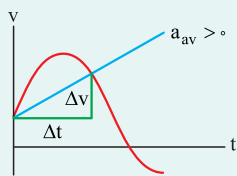
پاسخ: گزینه ۳

شیب خط قاطع نمودار در بازه های زمانی ذکر شده در گزینه ها را با هم مقایسه کنید.

Hint

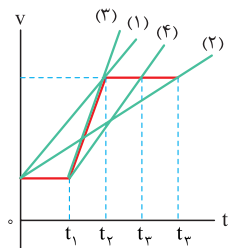
درسی Box

شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت - زمان را در آن دو لحظه قطع می کند.



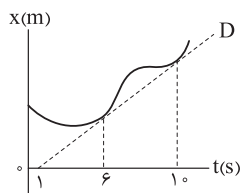
شیب خط نمودار سرعت - زمان را در هر یک از بازه های زمانی گزینه های داده شده رسم می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



با توجه به خطوط رسم شده، شتاب متوسط در بازه t_1 تا t_2 بیشتر است.

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر فاصله متحرک از مبدأ در لحظه $t_1 = 10 \text{ s}$ برابر 36 m باشد، در لحظه $t_1 = 6 \text{ s}$ ، تندی متحرک و فاصله متحرک از مبدأ، به ترتیب از راست به چپ، در SI کدام است؟ (خط D در لحظه های $t_1 = 6 \text{ s}$ و $t_2 = 10 \text{ s}$ بر نمودار مماس است).



(۱) $20, 4$

(۲) $20, 3/6$

(۳) $24, 4$

(۴) $24, 3/6$

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از این که شیب خط مماس بر نمودار در لحظات $t_1 = 6 \text{ s}$ و $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر تندیه های v_{6s} و v_{10s} است که با هم برابرند، خواسته های مسئله را به دست بیاورید.

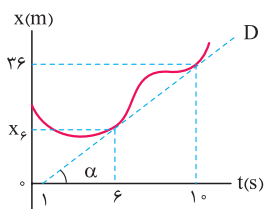
 Hint

 درس Box

در نمودار $x - t$ ، شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر سرعت لحظه ای در آن لحظه است.

علامت سرعت همان علامت شیب است.

گام اول: شیب خط D (خط مماس در لحظات t_1 و t_2) همان تندی متحرک در لحظات 6 s و 10 s است:



$$\text{شیب خط } D = v_{6s} = v_{10s} = \frac{36 - 0}{10 - 0} = \frac{36}{10} = 3.6$$

$$\Rightarrow v_{6s} = 3.6 \text{ m/s}$$

گام دوم: با نوشتن شیب خط D در مثلث کوچک تر، x_{6s} را به دست می آوریم:

$$\text{شیب خط } D = \frac{x_{6s} - 0}{6 - 0} \Rightarrow 3.6 = \frac{x_{6s}}{6} \Rightarrow x_{6s} = 21.6 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $v = -3t + 12$ است. اگر بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{i} (15 \text{ m})$ باشد، در کدام لحظه برحسب ثانیه متحرک برای دومین بار از مکان $x = 33 \text{ m}$ می گذرد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا معادله مکان - زمان متحرک $(x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0)$ را با توجه به معادله سرعت بنویسید و سپس با قراردادن $x = 33 \text{ m}$ در آن، لحظه مورد نظر را به دست آورید.

Hint

درس Box

معادلات حرکت با شتاب ثابت روی محور x به صورت زیر می باشد:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

$$\Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t \quad v = at + v_0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به داشتن معادله سرعت - زمان می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} v &= -3t + 12 \\ v &= at + v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -3 \text{ m/s}^2, v_0 = 12 \text{ m/s}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{x_0 = 15 \text{ m}} x = \frac{1}{2}(-3)t^2 + 12t + 15 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}t^2 + 12t + 15$$

گام دوم: با قراردادن $x = 33 \text{ m}$ ، لحظه مورد نظر را به دست می آوریم:

$$-\frac{3}{2}t^2 + 12t + 15 = 33$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}t^2 + 12t - 18 = 0 \xrightarrow{\Delta = 144 - 4(-\frac{3}{2})(-18) = 36} \begin{cases} t_1 = \frac{-12 + 6}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \text{ s} \\ t_2 = \frac{-12 - 6}{-3} = \frac{-18}{-3} = 6 \text{ s} \quad \checkmark \end{cases}$$

متحرکی روی محور x حرکت می کند و معادله سرعت - زمان آن به صورت $v = -3t + 24$ است. اگر متحرک در مبدأ زمان، از مکان $x = +18$ بگذرد، در کدام لحظه برای اولین بار، از مکان $x = +90$ می گذرد؟ (اندازه ها در SI است.)

(سوال ۱۶۱ کنکور ریاضی مهرداد ۱۳۹۰)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند در SI به صورت $x = t^2 - 10t + 5$ است. در ۴ ثانیه دوم،
تندی متوسط متحرک چند برابر اندازه سرعت متوسط آن است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۲)

۱ (۱)

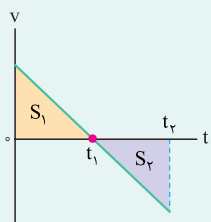
پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا معادله سرعت - زمان ($v = at + v_0$) را از معادله مکان - زمان داده شده به دست آورید. سپس با رسم نمودار سرعت - زمان و با استفاده از سطح زیر نمودار، خواسته مسئله را به دست آورید.

درس Box

در نمودار $v - t$ ، سطح زیر نمودار ابزار مفیدی برای محاسبه موارد زیر است:



$$v_{av} = \frac{S_1 - S_2}{t_r}$$

$$\Delta x = S_1 - S_2$$

$$s_{av} = \frac{S_1 + S_2}{t_r}$$

$$\ell = S_1 + S_2$$

v_{av} = سرعت متوسط (m/s)

s_{av} = تندی متوسط (m/s)

Δx = جابه جایی (m)

ℓ = مسافت (m)

گام اول: به کمک معادله مکان - زمان، معادله سرعت - زمان را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x &= t^2 - 10t + 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2, v_0 = -10 \text{ m/s}, x_0 = 5 \text{ m}$$

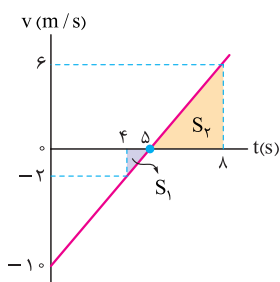
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 10$$

گام دوم: نمودار سرعت - زمان را رسم می کنیم:

$$v = 0 \Rightarrow 2t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{2} = 5 \text{ s}$$

$$t = 8 \text{ s} \Rightarrow v_8 = 2(8) - 10 = 6 \text{ m/s}$$

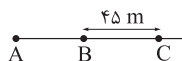
$$t = 4 \text{ s} \Rightarrow v_4 = 2(4) - 10 = -2 \text{ m/s}$$



$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1 \\ S_2 = \frac{1}{2}(4)(6) = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{s_{av(4s \rightarrow 8s)}}{v_{av(4s \rightarrow 8s)}} = \frac{\frac{S_1 + S_2}{4}}{\frac{S_2 - S_1}{4}} = \frac{S_1 + S_2}{S_2 - S_1} = \frac{1 + 12}{12 - 1} = \frac{13}{11} = \frac{13}{11}$$

در شکل زیر، متحرکی از نقطه A با شتاب ثابت 8 m/s^2 از حال سکون شروع به حرکت کرده و فاصله دو نقطه B و C را در مدت $1/5 \text{ s}$ طی می کند. فاصله دو نقطه A و B چند متر است؟



۳۲ (۲)

۳۶ (۱)

۲۵ (۴)

۴۵ (۳)

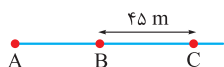
پاسخ: گزینه ۱



ابتدا معادله $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ را بین B و C به کار ببرید تا v_B را به دست آورید، سپس با نوشتن رابطه مستقل از زمان بین A و B، Δx_{AB} را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: از داشته های مسئله و به کمک معادلات شتاب ثابت، v_B را به دست می آوریم:



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\frac{a=8 \text{ m/s}^2, \Delta x_{BC}=45 \text{ m}}{v_0=v_B, t=1/5 \text{ s}} \rightarrow 45 = \frac{1}{2}(8)\left(\frac{1}{5}\right)^2 + v_B\left(\frac{1}{5}\right)$$

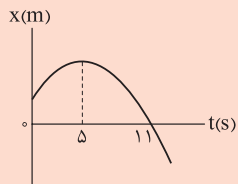
$$\Rightarrow 9 + \frac{1}{5}v_B = 45 \Rightarrow 9 + \frac{v_B}{5} = 45 \Rightarrow \frac{v_B}{5} = 36 \Rightarrow v_B = 180 \text{ m/s}$$

گام دوم: Δx_{AB} را به کمک رابطه مستقل از زمان بین A و B به دست می آوریم:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x_{AB} \xrightarrow{v_A=0, v_B=180 \text{ m/s}} \Delta x_{AB} = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{180^2}{2 \times 8} = 2025 \text{ m}$$

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر حداقل مسافت طی شده توسط متحرک در یک بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای برابر 6 m باشد، بیشینه فاصله متحرک از مبدأ چند

متر است؟



۷۵ (۱)

۱۰۸ (۲)

۱۵۰ (۳)

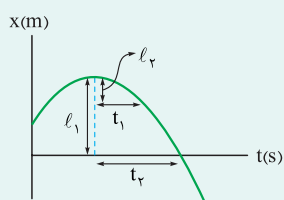
۲۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

در نمودار $x - t$ حرکت با شتاب ثابت، می‌توان از رابطه زیر در مقایسه با رأس سهمی استفاده کرد:

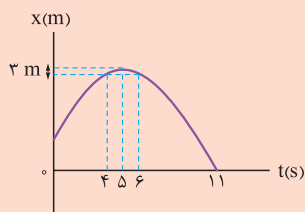
$$\ell_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \quad \text{و} \quad \ell_2 = \frac{1}{2}at_2^2$$



$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$$

با توجه به نمودار $x - t$ و روابط سهمی گفته شده در درس باکس، می‌توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



حداقل مسافت در بازه ۲ ثانیه، در بازه ۱ ثانیه‌ای اطراف لحظه تغییر جهت ($t = 5\text{ s}$) صورت گرفته است و جابه‌جایی در ۱ ثانیه اطراف آن 3 m بوده است.

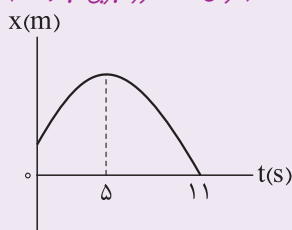
حداکثر فاصله از مبدأ در $t = 5\text{ s}$ رخ می‌دهد:

$$\frac{\ell_{(5\text{ s} \rightarrow 11\text{ s})}}{\ell_{(5\text{ s} \rightarrow 6\text{ s})}} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow \Delta x_{(5\text{ s} \rightarrow 11\text{ s})} = 3 \times 36 = 108\text{ m}$$

شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی است که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. یک بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای را چنان انتخاب می‌کنیم که تندی متوسط در آن بازه حداقل باشد. اگر این تندی متوسط 3 m/s باشد، در لحظه

(سوال ۱۸۹ کنکور تهرانی مهرداد ۱۴۰۱)

$t = 9\text{ s}$ ، متحرک در چند متری مبدأ محور است؟



۳۳ (۱)

۴۸ (۲)

۶۰ (۳)

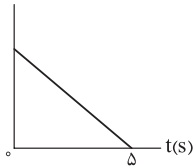
۷۵ (۴)

فیزیک

۵۱

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه جابه جایی متحرک در ثانیه دوم چند برابر اندازه جابه جایی آن در ثانیه سوم است؟

v(m/s)



$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7}{5} \quad (1)$$

$$\frac{21}{16} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از نمودار سرعت - زمان متحرک، سرعت اولیه آن را بر حسب a به دست آورید و سپس نسبت اندازه جابه جایی های خواسته شده را حساب کنید.

Hint

جابه جایی متحرک در ثانیه n ام:

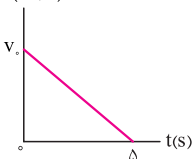
درس Box

$$\Delta x_n = (n - 0) a + v_0$$

گام اول: به کمک نمودار سرعت - زمان متحرک می توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

v (m / s)



$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=5]{v=0} 0 = 5a + v_0 \Rightarrow v_0 = -5a$$

گام دوم: نسبت جابه جایی متحرک در ثانیه دوم به جابه جایی آن در ثانیه سوم را حساب می کنیم:

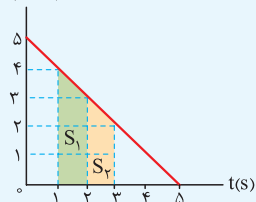
$$\Delta x = (n - 0) a + v_0$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} = \frac{(2 - 0) a + (-5a)}{(3 - 0) a + (-5a)} = \frac{-3/5 a}{-1/5 a} = \frac{3}{1} = 3$$

چون سؤال از ما نسبت جابه جایی ها را خواسته، می توانیم v_0 را هر عدد دلخواه مثبتی (مثلاً ۵) در نظر بگیریم:

یه جور دیگه

v (m / s)



$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\left(\frac{4+3}{2}\right) \times 1}{\left(\frac{3+2}{2}\right) \times 1} = \frac{7}{5}$$

راننده خودرویی که در مسیر مستقیم با تندی ثابت 90 km/h در حرکت است، مانعی را می بیند و ترمز می کند. اگر حرکت خودرو بعد از ترمز با شتاب ثابت به بزرگی 5 m/s^2 کند شود و خودرو بعد از دیده شدن مانع توسط راننده تا توقف کامل 80 m پیموده باشد، زمان واکنش راننده چند ثانیه است؟

۰/۹ (۴)

۰/۷ (۳)

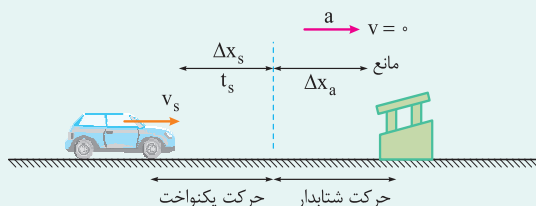
۰/۵ (۲)

۰/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

در مسائل متحرک با تندی ثابت که راننده با تأخیر (زمان واکنش t_s) ترمز می کند، روابط زیر حاکم است:



$$\Delta x_s = v_s t_s$$

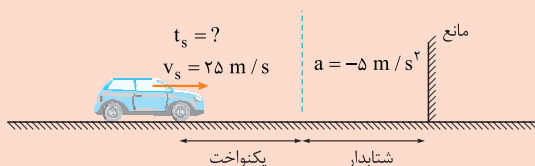
$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_s + \Delta x_a$$

$$\Delta x_a = \frac{1}{2} a t_a^2 + v_s t_a$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

گام اول: با توجه به اطلاعات مسئله، شکل مناسبی رسم می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\Delta x_s + \Delta x_a = 80 \text{ m} \quad (1)$$

گام دوم: Δx_s و Δx_a را برحسب داده های مسئله می نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_s &= 25 t_s \\ \Delta x_a &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \xrightarrow[v = 0]{a = -5 \text{ m/s}^2} \Delta x_a = \frac{0 - 25^2}{2(-5)} = \frac{125}{2} \text{ m} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(1)} 25 t_s + \frac{125}{2} = 80$$

$$\Rightarrow 25 t_s = 17.5 \Rightarrow t_s = 0.7 \text{ s}$$

راننده ای که در مسیر مستقیم با تندی ثابت 72 km/h در حرکت است، مانعی را می بیند و ترمز می کند. اگر حرکت خودرو بعد از ترمز با شتاب ثابت به بزرگی 5 m/s^2 کند شود و خودرو بعد از دیدن مانع تا توقف کامل 56 m پیموده باشد، زمان واکنش چند ثانیه است؟

(سوال ۱۶۳ کنکور ریاضی مهر ۱۳۹۱)

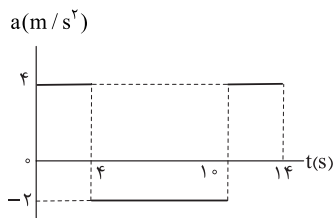
۱/۶ (۴)

۱/۲ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۶ (۱)

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر داده شده و سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{v}_0 = (-8 \text{ m/s})\vec{i}$ است. سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت حرکت آن برای دومین مرتبه تغییر می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



$$2\vec{i} \quad (1)$$

$$4\vec{i} \quad (2)$$

$$-2\vec{i} \quad (3)$$

$$-4\vec{i} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نمودار $v-t$ متحرک را رسم کنید و با توجه به سطوح زیر این نمودار، v_{av} را در بازه خواسته شده به دست آورید.

Hint

درس Box

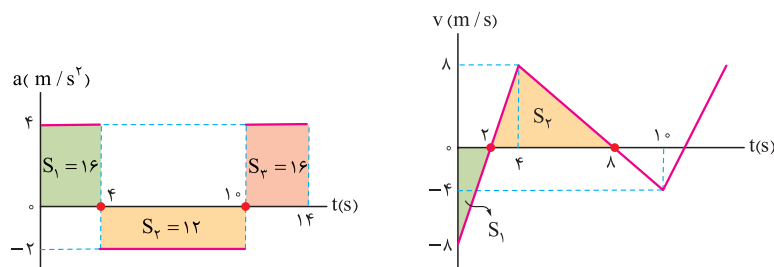
در نمودارهای $a-t$ که به صورت چندمرحله‌ای هستند، یکی از بهترین و سریع‌ترین گزینه‌ها برای شروع حل مسائل، رسم نمودار $v-t$ براساس نمودار $a-t$ است:

• وقتی نمودار $v-t$ محور زمان را قطع می‌کند، جهت حرکت عوض می‌شود.

• سطح زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی متحرک است.

گام اول: با توجه به این که سطح زیر نمودار $a-t$ برابر Δv است، نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



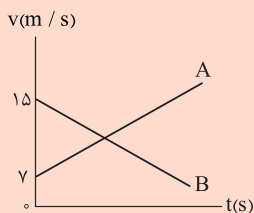
همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در لحظه $t = 8 \text{ s}$ جهت حرکت متحرک برای دومین بار تغییر کرده است.

گام دوم: با توجه به سطح زیر نمودار $v-t$ خواسته مسئله را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = (-S_1) + S_2 \rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{(-S_1) + S_2}{\Delta t} \vec{i} = \frac{-\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 2\right) + \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8\right)}{14} \vec{i} = (2 \text{ m/s})\vec{i}$$

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان قرار دارند و در لحظه $t = 12 \text{ s}$ دوباره به هم می‌رسند. فاصله بین دو متحرک در لحظه $t = 15 \text{ s}$ چند متر است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۲۴

(۳) ۳۰

(۴) ۵۴

پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از به هم رسیدن دو متحرک در لحظه $t = 12 \text{ s}$ ، سرعت نسبی و شتاب نسبی دو متحرک A و B را حساب کنید و سپس فاصله دو متحرک A و B را به کمک آن‌ها به دست آورید.

Hint

درس Box

روش سرعت نسبی: جهت ساده‌سازی محاسبات می‌توان از این روش در مسائل استفاده کرد.



گام اول: با توجه به داده‌های نمودار سرعت - زمان، در لحظه $t = 12 \text{ s}$ داریم:

$$\frac{x_A = x_B}{v_A = 7 \text{ m/s}, v_B = 15 \text{ m/s}} \rightarrow \frac{1}{2} a_A (12)^2 + 7(12) = \frac{1}{2} a_B (12)^2 + 15(12) \Rightarrow a_A - a_B = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2$$

گام دوم: پس از $t = 12 \text{ s}$ که دو متحرک به هم رسیده‌اند، از هم فاصله می‌گیرند:

$$d = x_A - x_B = \left(\frac{1}{2} a_A t^2 + v_A t \right) - \left(\frac{1}{2} a_B t^2 + v_B t \right) = \frac{1}{2} (a_A - a_B) t^2 + (v_A - v_B) t$$

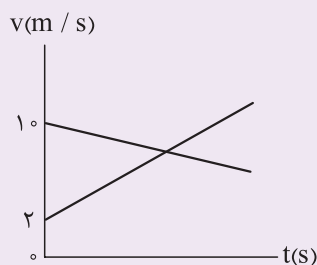
$$\frac{\Delta t = 15 - 12 = 3 \text{ s}}{a_A - a_B = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2, v_A - v_B = 8 \text{ m/s}} \rightarrow d = \frac{4}{3} t^2 + 8t \xrightarrow{t=3 \text{ s}} d = 6 + 24 = 30 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل زیر، نمودار سرعت - زمان دو متحرک است که روی محور x در لحظه $t_1 = 0 \text{ s}$ از یک نقطه با سرعت اولیه‌های نشان داده‌شده، می‌گذرند و در لحظه $t_2 = 20 \text{ s}$ دوباره به هم می‌رسند. فاصله بین آن‌ها در لحظه $t_3 = 30 \text{ s}$ ، چند

(سؤال ۱۶۳ کنکور ریاضی مه‌۱۳۹۰)

متر است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۴۰

(۳) ۸۰

(۴) ۱۲۰

۵۵

در مبدأ زمان دو متحرک A و B به ترتیب در مبدأ مکان و مکان $x = 68 \text{ m}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند. متحرک A با شتاب $\vec{a} (4 \text{ m/s}^2)$ شروع به حرکت می‌کند و پس از 6 s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B نیز ابتدا به مدت 10 s با شتاب $\vec{a} (2 \text{ m/s}^2)$ و سپس با سرعت ثابت حرکت می‌کند. چند ثانیه فاصله دو متحرک کم‌تر یا مساوی 12 m است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا وضعیت حرکت و فاصله دو جسم تا لحظه 6 s را مشخص کنید و سپس وضعیت حرکت را پس از 6 s تعیین کنید.

Hint

گام اول: معادله مکان هر یک از دو متحرک را می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{A0} t + x_{A0} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} (4) t^2 = 2t^2 & : t \leq 6 \text{ s} \\ t = 6 \text{ s} \Rightarrow x_{t=6 \text{ s}} = 2(6^2) = 72 \text{ m} \\ v_A = a_A t + v_{A0} = 4 \times 6 = 24 \text{ m/s} \\ x_A = v_A (t - 6) + x_{t=6 \text{ s}} \Rightarrow x_A = 24(t - 6) + 72 & : t > 6 \text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B0} t + x_{B0} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} (2) t^2 + 68 = t^2 + 68 & : t \leq 10 \text{ s} \\ t = 10 \text{ s} \Rightarrow x_{t=10 \text{ s}} = 10^2 + 68 = 168 \text{ m} \\ v_B = a_B t + v_{B0} = 2 \times 10 = 20 \text{ m/s} \\ x_B = v_B (t - 10) + x_{t=10 \text{ s}} \Rightarrow x_B = 20(t - 10) + 168 & : t > 10 \text{ s} \end{cases}$$

گام دوم: مکان هر یک از دو متحرک را در لحظه‌های $t = 6 \text{ s}$ و $t = 10 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$t = 6 \text{ s} \Rightarrow x_A = 72 \text{ m}$$

$$t = 6 \text{ s} \Rightarrow x_B = t^2 + 68 = 6^2 + 68 = 104 \text{ m}$$

پس اولین بار که $x_B - x_A = 12 \text{ m}$ می‌شود، بعد از $t = 6 \text{ s}$ است.

$$t = 10 \text{ s} \Rightarrow x_A = 24(t - 6) + 72 = 24(10 - 6) + 72 = 96 + 72 = 168 \text{ m}$$

$$t = 10 \text{ s} \Rightarrow x_B = 168 \text{ m}$$

یعنی دو متحرک در لحظه $t = 10 \text{ s}$ به یکدیگر می‌رسند. بنابراین اولین بار که دو متحرک به هم می‌رسند، در بازه زمانی $6 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$ قرار دارند و دومین بار که فاصله آن‌ها از هم به 12 m می‌رسد، بعد از $t = 10 \text{ s}$ است.

گام سوم: اگر در لحظه $6 \text{ s} < t_1 < 10 \text{ s}$ برای اولین بار فاصله دو متحرک از یکدیگر به 12 m برسد، داریم:

$$x_B - x_A = 12 \text{ m} \Rightarrow t_1^2 + 68 - (24(t_1 - 6) + 72) = 12$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 68 - 24t_1 + 144 - 72 = 12 \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

اگر در لحظه $t_2 > 10 \text{ s}$ برای دومین بار فاصله دو متحرک از یکدیگر به 12 m برسد، داریم:

$$x_A - x_B = 12 \Rightarrow 24(t_2 - 6) + 72 - (20(t_2 - 10) + 168) = 12$$

$$\Rightarrow 24t_2 - 144 + 72 - 20t_2 + 200 - 168 = 12 \Rightarrow t_2 = \frac{52}{4} = 13 \text{ s}$$

بنابراین در بازه زمانی $t_1 = 8 \text{ s}$ تا $t_2 = 13 \text{ s}$ یعنی به مدت 5 s فاصله این دو متحرک از یکدیگر کم‌تر یا مساوی 12 m است.

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر گلوله در مدت $1/2$ s از ارتفاع ۴۸ متری سطح زمین به ارتفاع ۲۴ متری سطح زمین برسد، H برابر چند متر است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$۶۷/۶ \text{ (۴)}$$

$$۶۸/۶ \text{ (۳)}$$

$$۵۶/۸ \text{ (۲)}$$

$$۵۷/۸ \text{ (۱)}$$

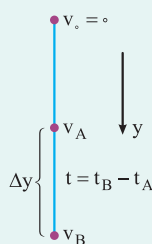
پاسخ: گزینه ۱

Hint

سوی مثبت محور y را رو به پایین بگیرید و از رابطه $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ سرعت گلوله در ارتفاع ۴۸ m از سطح زمین را به دست آورید؛ سپس با نوشتن رابطه مستقل از زمان، ارتفاع Δy_1 را به دست آورید و آن را با ۴۸ m جمع کنید و H را به دست آورید.

سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت است که در آن، جسم تنها تحت تأثیر نیروی وزن خود، رو به پایین حرکت می‌کند. به جای x در معادلات از y استفاده می‌کنیم و اگر جهت رو به پایین $(\downarrow)$ را مثبت فرض کنیم، $a = g$ است.

هنگام نوشتن معادلات حرکت سقوط آزاد بین دو نقطه دلخواه A و B در طول مسیر، سرعت اولیه (v_A) ، صفر نیست.



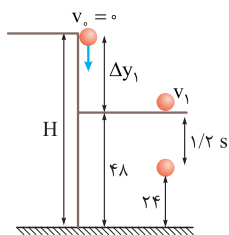
$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_A t$$

$$v_B = gt + v_A$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g\Delta y$$

گام اول: سرعت گلوله را در ارتفاع ۴۸ m از سطح زمین، به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\Delta y = 24 = \frac{1}{2}g(1/2)^2 + v_1(1/2) \Rightarrow v_1 = 14 \text{ m/s}$$

به کمک رابطه مستقل از زمان، فاصله Δy_1 را حساب می‌کنیم:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2g\Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1 = \frac{(14)^2}{2 \times 10} = 9.8 \text{ m}$$

گام دوم: مقدار H را به دست می‌آوریم:

$$H = 48 + 9.8 = 57.8 \text{ m}$$

در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصله زمانی 0.8 s از یک نقطه بالای سطح زمین رها می‌شوند. در لحظه‌ای که فاصله دو گلوله از یکدیگر به 32 m می‌رسد، مسافت طی‌شده توسط گلوله اول چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$98/8 \text{ (۴)}$$

$$96/8 \text{ (۳)}$$

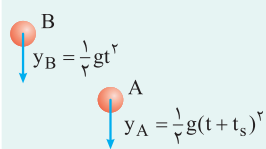
$$88/8 \text{ (۲)}$$

$$86/8 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

هنگامی که ۲ گلوله از ارتفاعی با اختلاف زمانی t_s رها شوند، چون حرکت هر دو گلوله با شتاب ثابت g است، می‌توان گفت که فاصله آن‌ها پس از سقوط گلوله دوم مانند حرکت با سرعت ثابت تغییر می‌کند:



$$y_B = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_A = \frac{1}{2}g(t+t_s)^2$$

$$d = y_A - y_B = \frac{1}{2}g(t+t_s)^2 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}g(t_s^2 + 2t_s t)$$

که در آن d بر حسب t ، تابعی درجه ۱ است.

گام اول: از رابطه درس باکس، زمان سقوط گلوله اول را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$d = \frac{1}{2}g(t_s^2 + 2t_s t)$$

$$\xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2, t_s=0.8 \text{ s}]{d=32 \text{ m}} \frac{1}{2}(10)(0.8^2 + 2(0.8)t) = 32 \Rightarrow 5(0.64 + 1.6t) = 32 \Rightarrow 1.6t = 5.76$$

$$\Rightarrow t = 3.6 \text{ s} \Rightarrow t_A = t + t_s = 3.6 + 0.8 = 4.4 \text{ s}$$

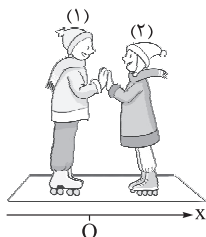
گام دوم: مسافت طی‌شده توسط گلوله اول را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y_A = \frac{1}{2}gt_A^2 = \frac{1}{2}g(4.4)^2 = 5(4.4^2) = 96.8 \text{ m}$$

فیزیک

۵۸

دو شخص (۱) و (۲) به ترتیب به جرم‌های ۷۵ kg و ۶۰ kg با کفش‌های چرخ‌دار روی سطح بدون اصطکاک روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص (۱)، شخص (۲) را به سمت راست هل می‌دهد. اگر اندازه شتاب شخص (۲) برابر ۲ m/s^2 باشد، شتاب شخص (۱) در SI برابر کدام است؟



$$(۱) \quad ۲/۵ \vec{i}$$

$$(۲) \quad -۲/۵ \vec{i}$$

$$(۳) \quad ۱/۶ \vec{i}$$

$$(۴) \quad -۱/۶ \vec{i}$$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به هم‌اندازه‌بودن نیروهای کنش و واکنش ($m_2 a_2 = m_1 a_1$)، شتاب شخص (۱) را به دست آورید.

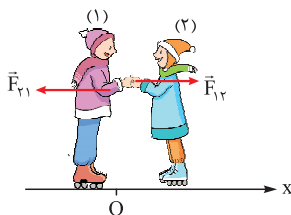
Hint

مطابق قانون سوم نیوتون، اگر جسم A نیرویی بر جسم B وارد کند، جسم B نیز نیرویی بر جسم A وارد می‌کند. این دو نیرو هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگرند:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

طبق قانون سوم نیوتون داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



شتاب شخص (۱) یعنی $\vec{a}_1$ در جهت نیروی $\vec{F}_{21}$ است، یعنی به طرف چپ.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Rightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$$

$$\Rightarrow \vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2 \xrightarrow{\substack{m_2=60 \text{ kg}, m_1=75 \text{ kg} \\ \vec{a}_2=(2 \text{ m/s}^2) \vec{i}}} \vec{a}_1 = -\frac{60}{75} (2) \vec{i} = (-1/6 \text{ m/s}^2) \vec{i}$$

چون شخص (۱) جرم بیشتری دارد، شتاب کم‌تری پیدا می‌کند، یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرفی نیروی خالص وارد بر شخص (۱) به طرف چپ است؛ بنابراین شتاب آن نیز به طرف چپ است، یعنی گزینه (۳) نیز رد می‌شود.

تیزبازی

اگر جرم جسمی ۲۰ درصد و اندازه نیروی خالص وارد بر آن ۴۰ درصد کاهش یابد، اندازه شتاب جسم چند درصد و چگونه تغییر می کند؟

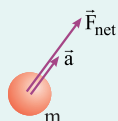
- (۱) ۲۰٪ افزایش می یابد. (۲) ۲۵٪ افزایش می یابد.
(۳) ۲۰٪ کاهش می یابد. (۴) ۲۵٪ کاهش می یابد.

پاسخ: گزینه ۴

قانون دوم نیوتون:

کارت Box

هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \text{شتاب} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \text{نیروی خالص (N)}$$

گام اول: جرم جسم و نیروی خالص وارد بر آن را در حالت دوم بر حسب مقادیر اولیه آن ها می نویسیم:

$$m_2 = m_1 - 0.2m_1 = 0.8m_1$$

$$F_2 = F_1 - 0.4F_1 = 0.6F_1$$

گام دوم: با توجه به قانون دوم نیوتون و مقایسه دو حالت، داریم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{0.6F_1}{F_1} = \frac{0.8m_1}{m_1} \times \frac{a_2}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$$

گام سوم: رابطه درصد تغییرات شتاب را می نویسیم:

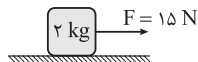
$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} \times 100 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}a_1 - a_1}{a_1} \times 100 = -25\%$$

علامت منفی نشان دهنده کاهش شتاب است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۶۰. در شکل زیر، نیروی افقی $F = ۱۵ \text{ N}$ ، جسمی به جرم ۲ kg را که روی سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی $۰/۵$ قرار دارد، از حال سکون به حرکت درمی‌آورد. اندازهٔ تکانهٔ جسم پس از $۱/۸ \text{ m}$ جابه‌جایی به چند کیلوگرم متر بر ثانیه می‌رسد؟ ($\mu_s = ۰/۷۵$ و $g = ۱۰ \text{ N/kg}$)



$$\begin{aligned} & ۶ \quad (۲) \\ & ۶\sqrt{۳} \quad (۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۳ \quad (۱) \\ & ۳\sqrt{۳} \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا از قانون دوم نیوتون ($a = \frac{F_{\text{net}}}{m}$) شتاب حرکت را به دست آورید و در نهایت با نوشتن رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت و تکانهٔ جسم را پس از $۱/۸ \text{ m}$ جابه‌جایی، به دست آورید.

Hint

درس Box

حاصل ضرب جرم یک جسم در سرعت آن را «تکانه» یا «اندازهٔ حرکت» می‌نامند و آن را با نماد $\vec{p}$ نشان می‌دهند.

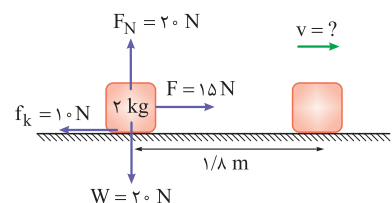
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

تکانه یک کمیت برداری و هم‌جهت با بردار سرعت متحرک است و یکای آن در SI، $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ می‌باشد.

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\Delta \vec{v} \quad \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right) \text{ تغییر تکانه } \Delta \vec{p}$$

گام اول: با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم. برای این کار، ابتدا نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{aligned} f_k &= \mu_k F_N \xrightarrow{F_N = mg = 2 \times 10 = 20 \text{ N}, \mu_k = 0/5} f_k = 0/5(20) = 10 \text{ N} \\ a &= \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{F - f_k}{m} = \frac{15 - 10}{2} = \frac{5}{2} = 2/5 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت و از آن‌جا تکانه را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{a = 2/5 \text{ m/s}^2, \Delta x = 1/8 \text{ m}} v = \sqrt{2 \times 2/5 \times 1/8} = \sqrt{1} = 1 \text{ m/s}$$

$$p = mv \xrightarrow{m = 2 \text{ kg}, v = 1 \text{ m/s}} p = 2(1) = 2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

جسمی روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می‌شود و به تدریج افزایش می‌یابد. وقتی اندازه نیروی F به 12 N می‌رسد، جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. زمانی که اندازه F به 14 N می‌رسد، شتاب جسم 1 m/s^2 و به ازای $F = 16 \text{ N}$ ، شتاب جسم $1/5 \text{ m/s}^2$ می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح چند برابر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح است؟

$$\frac{5}{6} (4)$$

$$\frac{2}{3} (3)$$

$$\frac{3}{4} (2)$$

$$\frac{3}{10} (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

ایستایی (f_s): نیروی اصطکاکی که وقتی دو جسم نسبت به هم ساکن هستند، بین آن‌ها ایجاد می‌شود و بیشینه مقدار آن زمانی است که در آستانه حرکت قرار گیرند:

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N$$

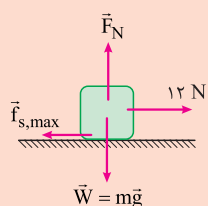
ضریب اصطکاک ایستایی

جنبشی (f_k): نیروی اصطکاکی که وقتی دو جسم نسبت به هم در حرکت باشند، بین آن‌ها ایجاد می‌شود و دارای مقدار ثابت $f_k = \mu_k F_N$ است.

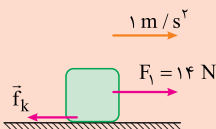
ضریب اصطکاک جنبشی

پاسخ خیلی تشریحی ✓

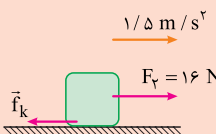
گام اول: حالت آستانه حرکت را بررسی می‌کنیم:



$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow f_{s, \max} = 12 \Rightarrow \mu_s F_N = 12 \Rightarrow \mu_s = \frac{12}{F_N}$$



گام دوم: حالت‌های شتاب‌دار را بررسی می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} F_{\text{net}} = ma_1 &\Rightarrow F_1 - f_k = ma_1 \Rightarrow 14 - f_k = m \\ F'_{\text{net}} = ma_2 &\Rightarrow F_2 - f_k = ma_2 \Rightarrow 16 - f_k = 1/5 m \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = 0/5 m$$

$$\Rightarrow m = 4 \text{ kg}$$

$$14 - f_k = 4 \Rightarrow f_k = 10 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow 10 = \mu_k \times F_N \Rightarrow \mu_k = \frac{10}{F_N}$$

$$\frac{\mu_k}{\mu_s} = \frac{F_N}{12} = \frac{5}{6}$$

جسمی روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می‌شود و به تدریج افزایش می‌یابد. وقتی اندازه نیروی F به 12 N می‌رسد، جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. زمانی که اندازه F به 14 N می‌رسد، شتاب جسم 1 m/s^2 و به ازای $F = 16 \text{ N}$ ، شتاب جسم $1/5 \text{ m/s}^2$ می‌شود. جرم جسم چند کیلوگرم است و ضریب اصطکاک جنبشی چه قدر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(سوال ۱۶۶ کنکور ریاضی مهر ۱۴۰۱)

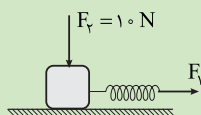
$$0/3 \text{ و } 2 (4)$$

$$0/25 \text{ و } 2 (3)$$

$$0/3 \text{ و } 4 (2)$$

$$0/25 \text{ و } 4 (1)$$

در شکل زیر، جسمی به جرم 5 kg توسط فنری افقی با شتاب ثابت به بزرگی $1/2 \text{ m/s}^2$ به صورت تندشونده روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/4$ و ثابت فنر 20 N/cm باشد، طول فنر نسبت به حالت عادی خود چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



۱۵ (۱)

۱۲ (۲)

۱/۵ (۳)

۱/۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا F_N و سپس f_k را به دست آورید، سپس با داشتن شتاب ($a = 1/2 \text{ m/s}^2$) و به کمک قانون دوم نیوتون ($F_{\text{net}} = ma$)، نیروی فنر (F_e) و در نهایت x را محاسبه کنید.

درس Box

نیروی کشش فنر متناسب با تغییر طول فنر (نسبت به طول طبیعی‌اش) است و از رابطه زیر که به قانون هوک معروف است، به دست می‌آید:

$$F_e = -kx$$

 F_e = نیروی کشسانی فنر (N)

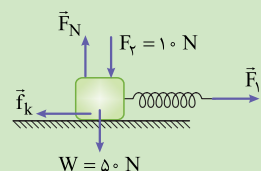
 k = ثابت فنر (N/cm)

 $x = \Delta L$ = تغییر طول فنر (cm)

● علامت منفی در رابطه قانون هوک به این معنی است که $\vec{F}_e$ در خلاف جهت $\vec{x}$ است.

گام اول: ابتدا F_N و f_k را محاسبه می‌کنیم:

 f_k = نیروی اصطکاک جنبشی (N)

 F_N = نیروی عمودی سطح (N)


$$F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow F_N = F_y + W = 10 + 50 = 60 \text{ N}$$

$$\Rightarrow f_k = \mu_k F_N = (0/4)(60) = 24 \text{ N}$$

گام دوم: از قانون دوم نیوتون در راستای x داریم:

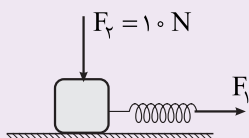
$$F_{\text{net},x} = ma_x \Rightarrow F_x - f_k = ma \Rightarrow F_x - 24 = 5(1/2) \Rightarrow F_x = 30 \text{ N}$$

$$\Rightarrow kx = 30 \Rightarrow 20x = 30 \Rightarrow x = 1/2 \text{ cm}$$

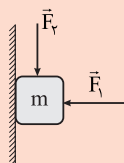
پاسخ خیلی تشریحی ✓

مطابق شکل زیر، جسمی به جرم 4 kg توسط فنری با سرعت ثابت روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/3$ و ثابت فنر 10 N/cm باشد، طول فنر چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(سوال ۶ - امتحان نهایی فردا ۱۴۰۳ رشته ریاضی)


 امتحان
نهایی

در شکل زیر، به جسم تکیه داده شده به دیوار قائم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانه حرکت است. اگر $F_1 = 2 \text{ mg}$ و $F_2 = \frac{1}{4} \text{ mg}$ باشد، به ترتیب، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند برابر وزن جسم است و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار چه قدر است؟ (م جرم جسم و g شتاب گرانش زمین است.)



$$\frac{1}{4}, \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

نیروهای F_N و $f_{s, \max}$ را بر حسب mg محاسبه کرده و سپس نیروی واکنش سطح را از رابطه $R = \sqrt{F_N^2 + f_{s, \max}^2}$ به دست آورید.



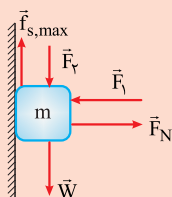
در نهایت $\frac{R}{mg}$ و $\mu_s = \frac{f_{s, \max}}{F_N}$ را محاسبه کنید.

دو نیروی اصطکاک ($\vec{f}$) و نیروی عمودی تکیه‌گاه ($\vec{F}_N$) از طرف سطح بر جسم وارد می‌شوند که در واقع دو مؤلفه از نیروی $\vec{R}$ هستند:

درس Box

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2} \quad \text{نیروی واکنش سطح}$$

گام اول: با توجه به آن که جسم در آستانه حرکت است، اصطکاک $f_{s, \max}$ بر آن اثر دارد:



$$\begin{cases} F_{\text{net}, x} = 0 \Rightarrow F_N = F_1 = 2 \text{ mg} \quad (I) \\ F_{\text{net}, y} = 0 \Rightarrow f_{s, \max} = F_2 + W = \frac{1}{4} \text{ mg} + \text{mg} = \frac{5}{4} \text{ mg} \quad (II) \end{cases}$$

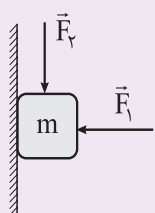
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: با توجه به مقادیر F_N و $f_{s, \max}$ ، خواسته‌های مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} R = \sqrt{f_{s, \max}^2 + F_N^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} \text{ mg}\right)^2 + (2 \text{ mg})^2} = \frac{5}{2} \text{ mg} \Rightarrow \frac{R}{mg} = \frac{5}{2} \\ f_{s, \max} = \mu_s F_N \Rightarrow \frac{5}{4} \text{ mg} = \mu_s (2 \text{ mg}) \Rightarrow \mu_s = \frac{5}{8} \end{cases}$$

در شکل زیر، جسم با نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 در تماس با دیوار، به حالت سکون قرار دارد. اگر $F_1 = 2 \text{ mg}$ و $F_2 = \frac{1}{4} \text{ mg}$ باشد، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند برابر وزن جسم است؟

(سؤال ۹۳ کنکور تهرانی مهر ۱۳۰۱)



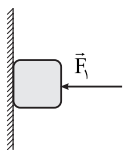
$$2 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$3/5 \quad (4)$$

در شکل زیر، اگر به جسم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ وارد شود، جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. پس از شروع حرکت، اگر به جسم نیروی افقی $\vec{F}_2$ وارد شود، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. اگر اندازه نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت اول و دوم به ترتیب R_1 و R_2 و زوایایی که این نیروها با نیروی وزن جسم می‌سازند، به ترتیب θ_1 و θ_2 باشد، کدام گزینه، درست است؟ (ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی دیواره قائم با جسم به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است.)



$$R_1 = \sqrt{2}R_2, \theta_2 > \theta_1 \quad (1)$$

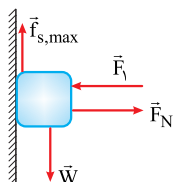
$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2, \theta_2 > \theta_1 \quad (2)$$

$$R_1 = \sqrt{2}R_2, \theta_1 > \theta_2 \quad (3)$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2, \theta_1 > \theta_2 \quad (4)$$

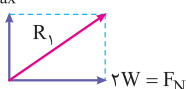
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جسم در آستانه حرکت به طرف پایین است:



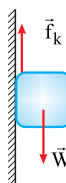
$$\begin{cases} F_{\text{net}, x} = 0 \Rightarrow F_N = F_1 \quad (1) \\ F_{\text{net}, y} = 0 \Rightarrow f_{s, \text{max}} = W \Rightarrow \mu_s F_N = W \Rightarrow F_N = \frac{W}{\mu_s} = \frac{W}{\frac{1}{3}} = 3W \xrightarrow{(1)} F_1 = 3W \end{cases}$$

$$f_{s, \text{max}} = W$$



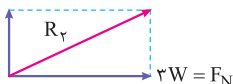
$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{F_N^2 + f_{s, \text{max}}^2} = \sqrt{(3W)^2 + W^2} = \sqrt{10}W = W\sqrt{10}$$

گام دوم: جسم با سرعت ثابت پایین می‌آید:



$$\begin{cases} F_{\text{net}, x} = 0 \Rightarrow F_2 = F_N \\ F_{\text{net}, y} = 0 \Rightarrow f_k = W \Rightarrow \mu_k F_N = W \Rightarrow F_N = \frac{W}{\mu_k} = \frac{W}{\frac{1}{4}} = 4W \end{cases}$$

$$f_k = W$$

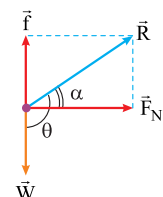


$$\Rightarrow R_2 = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{(4W)^2 + W^2} = \sqrt{17}W = W\sqrt{17}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{W\sqrt{10}}{W\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{17}} \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{17}}R_2$$

گام سوم: نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ را به راحتی محاسبه می‌کنیم:

• در حالت دوم (θ_2) با راستای قائم زاویه بزرگ‌تری می‌سازد.



$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\frac{W}{3W}}{\frac{W}{4W}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + 90^\circ > \alpha_2 + 90^\circ \Rightarrow \theta_1 > \theta_2$$

فیزیک

۶۵

توپي را از سطح زمين در راستاي قائم به سمت بالا پرتاب مي كنيم. اگر اندازه شتاب توپ هنگام بالارفتن، ۲ برابر اندازه شتاب آن هنگام پايين آمدن باشد، اندازه نيروي مقاومت هواي وارد بر توپ، با فرض ثابت بودن، چند برابر وزن جسم است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا شتاب بالارفتن و پايين آمدن را برحسب نيروي مقاومت هوا و جرم جسم به دست آوريد و با داشتن رابطه $a_{\text{down}} = 2a_{\text{up}}$ را به دست آوريد.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا شتاب بالارفتن و پايين آمدن را به دست مي آوريم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{بالارفتن} \\ \text{پايين آمدن} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{f}_D \uparrow \\ \vec{mg} \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} a_{\text{up}} = \frac{mg + f_D}{m} = g + \frac{f_D}{m} \quad (۱) \\ a_{\text{down}} = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m} \quad (۲) \end{array}$$

گام دوم: اکنون از تركيب رابطه هاي به دست آمده مي توان نوشت:

$$\frac{a_{\text{up}} = 2a_{\text{down}}}{(۱), (۲)} \rightarrow g + \frac{f_D}{m} = 2g - \frac{2f_D}{m} \Rightarrow \frac{3f_D}{m} = g \Rightarrow f_D = \frac{1}{3} mg$$

فیزیک

۶۶

فنری به ثابت 50 N/m و طول 30 cm را از نقطه‌ای آویزان می‌کنیم. جسمی به جرم 400 g را به سر دیگر فنر بسته و رها می‌کنیم. در لحظه‌ای که طول فنر به 42 cm می‌رسد، شتاب جسم چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟

$$(g = 10 \text{ N/kg})$$

- (۱) 5 ، به سمت بالا
(۲) 5 ، به سمت پایین
(۳) 15 ، به سمت بالا
(۴) 15 ، به سمت پایین

پاسخ: گزینه ۱

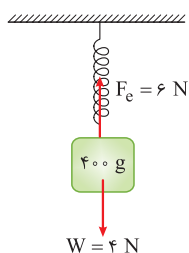
با توجه به قانون دوم نیوتون ($F_{\text{net}} = ma$) و محاسبه نیروی فنر و وزن، مقدار و جهت شتاب جسم را به دست آورید.

Hint

محیط کشسان: محیط‌هایی مانند فنر و آب هستند که کوچک‌ترین تغییر شکلی در آن‌ها باعث می‌شود نیروهای بازگرداننده‌ای ایجاد شود که تمایل به برگشتن محیط به وضعیت اولیه را دارند.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{cases} F_e = kx & \xrightarrow{x = \Delta L = 42 - 30 = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}} F_e = 50 \times (0.12) = 6 \text{ N} \\ W = mg = 0.4 \times 10 = 4 \text{ N} \end{cases}$$

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_e - W = ma \Rightarrow 6 - 4 = 0.4a$$

$$\Rightarrow 2 = 0.4a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2 \uparrow \text{ بالا}$$

چون جهت نیروی خالص ($\vec{F}_{\text{net}}$) رو به بالاست، شتاب نیز رو به بالا است.

جسمی به جرم 5 kg توسط یک ریسمان به سقف آسانسوری بسته شده و آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 و به صورت کندشونده به سمت پایین در حال حرکت است. اگر کابل آسانسور پاره شده و آسانسور سقوط آزاد کند، نیروی کشش ریسمان چند نیوتون تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۱۰ (۴)

۴۰ (۳)

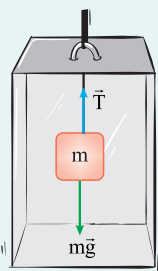
۵۰ (۲)

۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

کرتس Box

اگر جسمی به جرم m توسط یک ریسمان از سقف آسانسوری آویخته شده و آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی a در راستای قائم حرکت نماید، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow T - mg = ma$$

$$\Rightarrow T = m(g + a)$$

کندشونده $\left\{ \begin{array}{l} v < 0 \text{ شتاب } v > 0 \\ a < 0 \text{ رو به پایین } a < 0 \end{array} \right\}$ تندشونده

یکتواخت $\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ a = 0 \end{array} \right\}$

تندشونده $\left\{ \begin{array}{l} v < 0 \text{ شتاب } v > 0 \\ a > 0 \text{ رو به بالا } a > 0 \end{array} \right\}$ کندشونده

گام اول: نیروی کشش ریسمان را در حالتی که با شتاب 2 m/s^2 به صورت کندشونده رو به پایین می‌آید، به دست می‌آوریم:

$$T = m(g + a) \xrightarrow[m=2 \text{ m/s}^2]{m=5 \text{ kg}, g=10 \text{ m/s}^2} T = 5(10 + 2) = 60 \text{ N}$$

گام دوم: نیروی کشش ریسمان را در حالتی که کابل آسانسور پاره شده است، به دست می‌آوریم. در این حالت $a = -g$ بوده و نیروی کشش نخ به صفر می‌رسد.

$$T' = m(g + a) \xrightarrow[m=5 \text{ kg}]{a=-g} T' = 0$$

بنابراین تغییر نیروی کشش ریسمان بین دو حالت برابر است با:

$$T - T' = 60 - 0 = 60 \text{ N}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۸ اگر جرم گلوله‌ای برابر 20 g و اندازهٔ تکانهٔ آن برابر $800 \frac{\text{g} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ باشد، انرژی جنبشی گلوله چند ژول است؟

۱/۶ (۴)

۳/۲ (۳)

۱۶ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

با توجه به روابط تکانه و انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} p = mv \\ K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \end{cases}$$

با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال و رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} m = 20 \text{ g} = 20 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ p = 800 \text{ g} \cdot \text{m/s} = 800 \times 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\ K = ? (\text{J}) \end{cases}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{800 \times 800 \times 10^{-6}}{2 \times 20 \times 10^{-3}} = 16 \text{ J}$$

اندازهٔ تکانهٔ یک گلوله برابر $0.5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ است. اگر جرم گلوله برابر 10 g باشد، انرژی جنبشی آن چند ژول است؟

(سؤال ۱۰ - امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۳ رشتهٔ تفریحی)



فیزیک

۶۹

معادلهٔ تکانه - زمان متحرکی در SI به صورت $p = 2t^2 - 5t + 1$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم

چند نیوتون است؟

$-7\vec{i} \text{ (۴)}$

$7\vec{i} \text{ (۳)}$

$-14\vec{i} \text{ (۲)}$

$14\vec{i} \text{ (۱)}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم، برابر آهنگ تغییرات تکانهٔ وارد بر جسم است:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

۲ ثانیهٔ دوم یعنی از $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$. تکانهٔ جسم در این بازهٔ زمانی را از معادلهٔ داده شده به دست می آوریم:

$$2 \text{ ثانیهٔ دوم} \begin{cases} p = 2t^2 - 5t + 1 \\ t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow p_1 = 2(2)^2 - 5(2) + 1 = -1 \\ t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow p_2 = 2(4)^2 - 5(4) + 1 = 13 \end{cases}$$

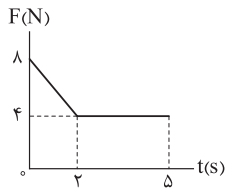
$$\Rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{13 - (-1)}{4 - 2} = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow \vec{F}_{av} = (7 \text{ N})\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۷۰. نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی بر حسب زمان به شکل زیر است. اگر جهت حرکت جسم در لحظه $t = 4 \text{ s}$ تغییر

کند، تکانه جسم در مبدأ زمان در SI کدام است؟



(۱) $20\vec{i}$

(۲) $-20\vec{i}$

(۳) $24\vec{i}$

(۴) $-24\vec{i}$

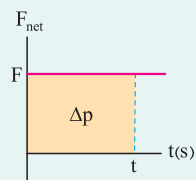
پاسخ: گزینه ۲

ابتدا سطح زیر نمودار تا لحظه $t = 4 \text{ s}$ را به دست آورید ($\Delta p_{(0-4)}$) و سپس با داشتن $p_{fs} = 0$ ، تکانه جسم در مبدأ زمان را حساب کنید.

Hint

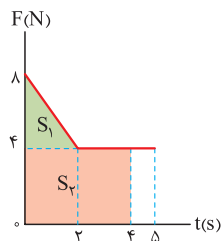
درس Box

سطح زیر نمودار نیروی خالص - زمان، برابر تغییرات تکانه است.



سطح زیر نمودار تا لحظه $t = 4 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم، چون در لحظه $t = 4 \text{ s}$ جهت حرکت تغییر کرده است، یعنی سرعت در این لحظه، صفر بوده و تکانه نیز برابر صفر است.

پاسخ خیلی تشریحی



$$\Delta p = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(2)(4) + 4(4) = 20 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

$$p_{fs} - p_0 = 20 \xrightarrow{p_{fs}=0} p_0 = -20 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \Rightarrow \vec{p}_0 = (-20 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}})\vec{i}$$

فیزیک

۷۱

اگر ماهواره‌ای از ارتفاع ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین به ارتفاع ۳۶۰۰ کیلومتری سطح زمین منتقل شود، وزن آن چند درصد تغییر می‌کند؟ (شعاع کره زمین ۶۴۰۰ km است).

۵۶ / ۲۵ (۴)

۳۶ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

کزنس Box

نیروی گرانشی (وزن) که از طرف زمین بر هر جسم در ارتفاع h از سطح زمین وارد می‌شود، برابر است با:

$$W = G \frac{M_e m}{(R_e + h)^2}$$

(kg) جرم زمین (kg) جرم جسم
 (N) وزن (m) شعاع زمین (m) فاصله از سطح زمین
 ثابت جهانی گرانش

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به رابطه وزن $(W = G \frac{M_e m}{(R_e + h)^2})$ می‌توان نوشت:

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2} \right)^2 = \left(\frac{6400 + 1600}{6400 + 3600} \right)^2 = \left(\frac{8000}{10000} \right)^2 = 0.64$$

اکنون درصد تغییرات نیروی وزن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{W_2 - W_1}{W_1} \times 100 = \frac{-0.36 W_1 - W_1}{W_1} \times 100 = \frac{-0.36 W_1}{W_1} \times 100 = -36\% \Rightarrow 36 \text{ درصد کاهش می‌یابد.}$$

فیزیک

۷۲ جرم زمین و ماه به ترتیب $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ و $7/2 \times 10^{22} \text{ kg}$ است. در حالتی که فاصله مرکز ماه و مرکز زمین $4 \times 10^5 \text{ km}$

باشد، اندازه نیروی گرانشی که زمین و ماه به هم وارد می کنند، تقریباً چند نیوتون است؟ $(G = 6/67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2})$

$$1/8 \times 10^{20} \quad (2)$$

$$1/8 \times 10^{14} \quad (1)$$

$$7/2 \times 10^{20} \quad (4)$$

$$7/2 \times 10^{14} \quad (3)$$

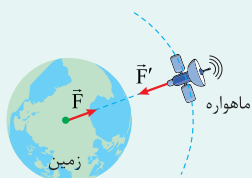
پاسخ: گزینه ۲

با جای گذاری صحیح مقادیر در رابطه $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ، نیروی گرانشی بین ماه و زمین را به دست آورید.

Hint

درس Box

طبق قانون سوم نیوتون، نیروی گرانشی بین هر ۲ جسم، هم اندازه و در خلاف جهت یکدیگرند.



$$F = F'$$

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

قانون گرانش عمومی نیوتون

نیروی گرانشی میان دو ذره، با حاصل ضرب جرم دو ذره نسبت مستقیم و با مربع فاصله آنها از یکدیگر نسبت وارون دارد.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F = F_1 = F_2$$

r = بزرگی نیروی گرانشی میان دو ذره (N)

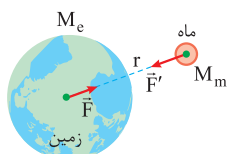
$$G = \text{ثابت گرانش عمومی} = \left(\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right) = 6/67 \times 10^{-11}$$

m_1 و m_2 = جرم های دو ذره (kg)

r = فاصله دو ذره از یکدیگر (m)

طبق رابطه گرانش عمومی $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ می توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$F = G \frac{M_e M_m}{r^2} = 6/67 \times 10^{-11} \times \frac{6 \times 10^{24} \times 7/2 \times 10^{22}}{16 \times 10^{16}} \approx 1/8 \times 10^{20} \text{ N}$$

فیزیک

۷۳

پره یک بالگرد با دوره 0.08 s به طور یکنواخت می چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پره بالگرد، چه قدر است؟

۳۰۰۰ (۴)

۲۲۵۰ (۳)

۱۵۰۰ (۲)

۷۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می توانیم با استفاده از دوره T ، تعداد دور بر دقیقه (rpm) را به دست آوریم:

$$\text{rpm} = \frac{60}{T}$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ تعداد دور بر دقیقه پره بالگرد برابر است با:

$$\text{rpm} = \frac{60}{T} = \frac{60}{0.08} = 750 \text{ دور بر دقیقه}$$

پره یک بالگرد با دوره 0.04 s به طور یکنواخت می چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پره بالگرد، چه قدر است؟

(سؤال ۱۶۹ کنکور ریاضی مهر ۱۴۰۱)

۱۵۰۰ (۴)

۳۰۰۰ (۳)

۴۵۰۰ (۲)

۶۰۰۰ (۱)

فیزیک

۷۴ خودرویی به جرم 1500 kg در سطحی افقی روی محیط دایره‌ای به شعاع 6 m با تندی ثابت 12 m/s در حال حرکت است. اندازه نیرویی که سطح افقی به خودرو وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$3/6 \times 10^4 \quad (2)$$

$$3/6 \times 10^3 \quad (1)$$

$$3/9 \times 10^4 \quad (4)$$

$$3/9 \times 10^3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا نیروی $F_N = mg$ را محاسبه کنید، سپس نیروی $f_s = m \frac{v^2}{r}$ را به دست آورید و در آخر نیروی واکنش سطح $R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2}$ را حساب کنید.

Hint

نیروی مرکزگرا: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک نیروی خالص رو به مرکز، سبب ایجاد شتاب مرکزگرا می‌شود. به این نیروی خالص که منجر به حرکت دایره‌ای می‌شود، نیروی مرکزگرا می‌گوییم. با توجه به قانون دوم نیوتون، می‌توان نوشت:

$$F_c = ma_c$$

$$\Rightarrow F_c = m \frac{v^2}{r}$$

$$F_c = \text{اندازه نیروی مرکزگرا (N)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$v = \text{تندی (m/s)}$$

$$r = \text{شعاع مسیر (m)}$$

نیروی مرکزگرا به شکل‌های مختلف می‌تواند تأمین شود، مانند نیروی کشش نخ، نیروی اصطکاک، نیروی گرانشی، نیروی الکتریکی و ...

نکته

گام اول: اصطکاک ایستایی بین لاستیک و جاده، نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$F_N = mg \xrightarrow[m=1500 \text{ kg}]{g=10 \text{ N/kg}} F_N = 15000 \text{ N}$$

$$F_c = ma_c \Rightarrow f_s = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow[m=1500 \text{ kg}, v=12 \text{ m/s}]{r=6 \text{ m}} f_s = \frac{1500 \times 144}{6} = 36000 \text{ N}$$

گام دوم: اکنون نیروی واکنش سطح را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2} = \sqrt{(36000)^2 + (15000)^2} = 3/9 \times 10^4 \text{ N}$$

ماهواره‌ای روی مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد. اگر فاصله ماهواره از سطح زمین برابر 1600 km باشد، دوره گردش آن چند ثانیه است؟ (شتاب گرانش در سطح زمین $\pi^2 \text{ m/s}^2$ و شعاع کره زمین 6400 km است.)

$$5\sqrt{2} \times 10^3 \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{2} \times 10^3 \text{ (۱)}$$

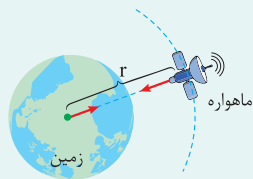
$$5\sqrt{2} \times 10^4 \text{ (۴)}$$

$$\sqrt{2} \times 10^4 \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

هنگامی که ماهواره‌ای به دور زمین می‌چرخد، نیروی گرانشی وارد بر آن، نقش نیروی مرکزگرا را دارد. تندی حرکت ماهواره و دوره چرخش آن به صورت زیر است:



$$F = G \frac{M_e m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_e}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}} T = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{\sqrt{GM_e}} \xrightarrow{GM_e = gR_e^2} T = \frac{2\pi \sqrt{r^3}}{\sqrt{gR_e^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{R_e} \sqrt{\frac{r^3}{g}}$$

با توجه به رابطه اثبات شده در درس باکس می‌توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$T = \frac{2\pi}{R_e} \sqrt{\frac{r^3}{g}}$$

$$\frac{r = R_e + h = (6400 + 1600) \times 10^3 \text{ m} = 8 \times 10^6 \text{ m}}{R_e = 6400 \text{ km} = 64 \times 10^5 \text{ m}, g = \pi^2 \text{ m/s}^2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{64 \times 10^5} \sqrt{\frac{(8 \times 10^6)^3}{\pi^2}} = \frac{10^{-5}}{32} \sqrt{8^3 \times 10^{18}} = \frac{10^4}{32} \sqrt{8^3 \times 10^3}$$

$$\Rightarrow T = 5\sqrt{2} \times 10^3 \text{ s}$$

کدام گزینه در مورد اوره نادرست است؟



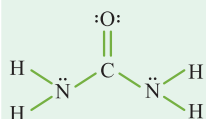
- (۱) یک ترکیب آلی با مولکول‌های قطبی است.
 (۲) هر مولکول آن دارای ۸ پیوند اشتراکی بوده و در هگزان حل نمی‌شود.
 (۳) عدد اکسایش اتم کربن در آن با عدد اکسایش اتم کربن در متانول برابر است.
 (۴) همانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.

پاسخ: گزینه ۳

ویژگی‌های اوره:

● فرمول شیمیایی آن $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ است.

● ساختار لوویس آن به صورت روبه‌رو است:



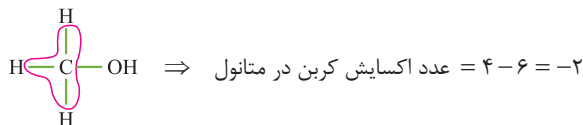
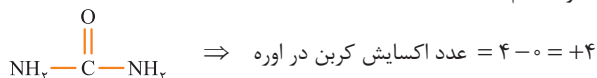
(۸ جفت‌الکترون پیوندی و ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی)

● مولکولی قطبی است و در حلال‌های قطبی مانند آب حل می‌شود.

● توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود یا آب را دارد.

● در ساختار آن گروه عاملی آمیدی ($-\text{C}(=\text{O})-\text{N}-$) وجود دارد.● جرم مولی آن 60 g.mol^{-1} است.فرمول مولکولی اوره و متانول به ترتیب $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ و CH_3OH است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



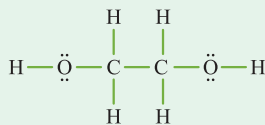
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): وجود گروه عاملی آمیدی ($-\text{C}(=\text{O})-\text{N}-$) در ساختار اوره باعث قطبیت آن می‌شود.گزینه (۲): اوره یک مولکول قطبی است و در حلال‌های ناقطبی مانند هگزان (C_6H_{14}) حل نمی‌شود.گزینه (۴): فرمول مولکولی اتیلن گلیکول به صورت $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$ است و در ساختار آن پیوند $\text{O}-\text{H}$ وجود دارد. اتیلن گلیکولو اوره به ترتیب به دلیل داشتن پیوندهای $\text{O}-\text{H}$ و $\text{N}-\text{H}$ ، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارند.

ویژگی‌های اتیلن گلیکول:

● فرمول شیمیایی آن به صورت $\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2$ یا $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$ است.

● ساختار لوویس آن به صورت روبه‌رو است:



● یک دی‌الکل است و در تهیه پلی‌استرها کاربرد دارد.

● مولکولی قطبی است و با تشکیل پیوند هیدروژنی در آب حل می‌شود.

● به عنوان ضدیخ در رادیاتور خودروها کاربرد دارد.



کدام مورد، جزء مخلوط‌های ناهمگن اما پایدار است؟

کلوئید

(۲) آب قند

(۱) شربت معده

(۴) گلاب

(۳) شیر

پاسخ: گزینه ۳

مقایسه ویژگی انواع مخلوط‌ها:



نوع مخلوط ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن (به ظاهر همگن)	همگن
پایداری	ناپایدار است؛ ته‌نشین می‌شود.	پایدار است؛ ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است؛ ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب قند، آب نمک

در میان مواد داده‌شده، آب قند و گلاب، محلول‌اند و شربت معده و شیر، مخلوط ناهمگن‌اند. پس تا این‌جا گزینه‌های (۲) و (۴) پُر! شربت معده و شیر به ترتیب سوسپانسیون و کلوئید هستند. کلوئیدها برخلاف سوسپانسیون‌ها، پایدارند و ذرات سازنده آن‌ها با گذشت زمان ته‌نشین نمی‌شوند. (درستی گزینه (۳))

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام موارد در رابطه با اولتیک اسید با فرمول مولکولی $C_{17}H_{33}COOH$ درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

(الف) در زنجیره هیدروکربنی این ترکیب، یک پیوند دوگانه وجود دارد.

(ب) اگر ساختار این مولکول به صورت مقابل باشد، در بخش A، ۳ اتم وجود دارد.

(ج) از واکنش هر مول از آن با ۴۰ گرم سدیم هیدروکسید، ۳۰۲ گرم صابون جامد حاصل می‌شود.

(د) نیروی بین مولکولی غالب در این مولکول همانند روغن زیتون از نوع وان‌دروالس است.

(۲) الف و د

(۱) الف و ج

(۴) ب و د

(۳) ب و ج

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «الف» و «د» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

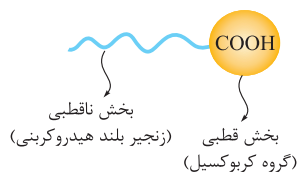
(الف)

فرمول مولکولی اسیدهای چرب با ساختار $R-\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}-OH$ و با زنجیره هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.

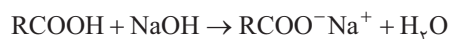
از آن‌جا که فرمول مولکولی اولیه اسید به صورت $C_{18}H_{34}O_2$ است پس یک پیوند دوگانه در بخش هیدروکربنی (R) آن وجود دارد.

(ب) الگوی اسیدهای چرب به صورت زیر است:

در بخش قطبی این مولکول، گروه کربوکسیل ($-COOH$) که حاوی ۴ اتم است، وجود دارد.

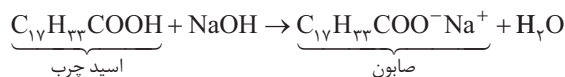


(ج) از واکنش اسید چرب با $NaOH$ ، صابون جامد طی معادله واکنش زیر حاصل می‌شود:



همان‌طور که مشخص است، برای تولید صابون، یک اتم H از گروه کربوکسیل اسید چرب حذف شده و Na^+ به ساختار اضافه

می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

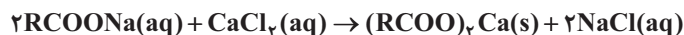


$$1 \text{ mol اسید چرب} \times \frac{1 \text{ mol صابون}}{1 \text{ mol اسید چرب}} \times \frac{304 \text{ g صابون}}{1 \text{ mol صابون}} = 304 \text{ g صابون}$$

(د) نیروی بین مولکولی غالب در روغن زیتون و اسیدهای چرب که مولکول‌هایی ناقطبی هستند، از نوع جاذبه وان‌دروالسی است.



۱۸ / ۸۷۵ گرم از یک صابون سدیم ۱۸ کربنه را به ۲۰۰ میلی لیتر از یک نمونه آب سخت که غلظت کلسیم کلرید در آن ۱۲۵ / ۰ مولار است، وارد می کنیم. اگر ۸۰ درصد این صابون سبب شود تا سختی آب به طور کامل از بین برود، در فرمول ساختاری این صابون چند پیوند دوگانه وجود دارد؟ (صابون فاقد پیوند سه گانه است؛ $\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که ۸۰ درصد از صابون توانسته با تمام کلسیم کلرید (CaCl_2) موجود در محلول واکنش دهد و یون کلسیم را از محلول خارج کند، جرم مولی صابون (M) را به دست می آوریم.

استفاده از کسر تبدیل:

$$200 \text{ mL آب سخت} \times \frac{1 \text{ L آب سخت}}{1000 \text{ mL آب سخت}} \times \frac{0.125 \text{ mol CaCl}_2}{1 \text{ L آب سخت}} \times \frac{2 \text{ mol صابون}}{1 \text{ mol CaCl}_2} \times \frac{M \text{ g صابون}}{1 \text{ mol صابون}} \times \frac{100}{80} = 18/875 \text{ g صابون}$$

$$\Rightarrow \frac{0.2 \times 0.125 \times 2 \times M \times 100}{80} = 18/875 \Rightarrow \Delta M = 1510 \Rightarrow M = 302 \text{ g.mol}^{-1}$$

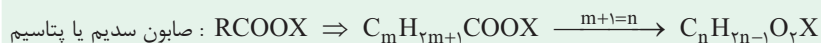
استفاده از کسر تناسب:

په چور دیگه

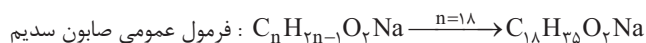
$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{18/875 \times \frac{100}{80}}{2 \times M} = \frac{0.125 \times 0.2}{1} \Rightarrow M = 302 \text{ g.mol}^{-1}$$

اگر R گروه آلکیل (زنجیره هیدروکربنی سیر شده) باشد، خواهیم داشت:

نکته



حالا فرمول صابون جامد مورد نظر را در صورتی که R، زنجیره هیدروکربنی سیر شده (آلکیل) باشد، می نویسیم و جرم مولی آن را می سباییم:



$$\text{جرم مولی صابون} = (18 \times 12) + (35 \times 1) + (2 \times 16) + 23 = 306 \text{ g.mol}^{-1}$$

هر پیوند دوگانه سبب کم شدن دو اتم هیدروژن از ساختار صابون می شود؛ با توجه به اختلاف جرم مولی صابون با زنجیره هیدروکربنی سیر شده و محاسبه شده ($306 - 302 = 4$)، صابون مورد نظر ۲ پیوند دوگانه در زنجیر هیدروکربنی (R) خود

دارد. *هواستون* باشد که علاوه بر زنجیر هیدروکربنی، در بخش قطبی صابون (گروه: $\text{C}=\text{O}$) نیز یک پیوند دوگانه وجود دارد، پس در صابون مورد نظر، ۳ پیوند دوگانه (دوتا در زنجیر هیدروکربنی و یکی در بخش قطبی صابون) وجود دارد.

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر، در کدام گزینه آمده است؟

- اضافه کردن نمک خوراکی و شکر به آب، باعث تغییر pH آب نمی شود.
- شیمی دان ها پس از کشف ساختار اسید و باز، با ویژگی ها و برخی از واکنش های آنها آشنا شدند.
- لوویس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.
- آمونیاک، خاصیت بازی دارد و افزودن آن به آب در دمای ثابت، سبب افزایش حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ می شود.

(۲) درست - نادرست - نادرست - نادرست

(۱) درست - نادرست - نادرست - درست

(۴) درست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - درست - نادرست

پاسخ: گزینه ۱

عبارتهای اول و چهارم، درست و عبارتهای دوم و سوم نادرست اند.

بررسی عبارتها:

عبارت اول، نمک خوراکی (NaCl) و شکر ($C_{12}H_{22}O_{11}$)، اسید یا باز آرنیوس نیستند، زیرا با حل شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم $[H^+]$ یا یون هیدروکسید $[OH^-]$ را تغییر نمی دهند؛ بنابراین pH آب تغییری نمی کند.

عبارت دوم: قبل از آن که ساختار اسید و بازها شناخته شود، شیمی دان ها علاوه بر ویژگی های اسیدها و بازها، با برخی واکنش های آنها نیز آشنا بودند.

عبارت سوم: آرنیوس (نه لوویس!) نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

عبارت چهارم: آمونیاک یک باز ضعیف است که با حل شدن در آب، سبب افزایش غلظت OH^- و کاهش غلظت H^+ می شود.

$$\frac{[OH^-] \uparrow}{[H^+] \downarrow} \Rightarrow \uparrow$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شمار یون‌های حاصل از اضافه کردن x گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید به آب با شمار یون‌های حاصل از اضافه کردن $2/08$ گرم باریم کلرید به آب برابر است. x و مجموع pH این دو محلول در دمای 25°C کدام است؟ (حجم نهایی هر دو محلول را یک لیتر در نظر بگیرید؛ $\text{N} = 14$, $\text{O} = 16$, $\text{Cl} = 35/5$, $\text{Ba} = 137$; g.mol^{-1})

$$8/8, 0/81 (2)$$

$$1/8, 0/81 (1)$$

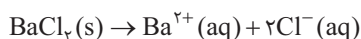
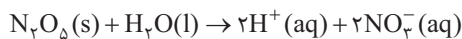
$$8/8, 1/08 (4)$$

$$1/8, 1/08 (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا معادله انحلال دی‌نیتروژن پنتاکسید (N_2O_5) و باریم کلرید (BaCl_2) را می‌نویسیم:



حالا شمار یون‌ها در $2/08$ گرم BaCl_2 را به دست می‌آوریم؛ از انحلال هر مول BaCl_2 در آب، ۳ مول یون تولید می‌شود:

$$2/08 \text{ g BaCl}_2 \times \frac{1 \text{ mol BaCl}_2}{208 \text{ g BaCl}_2} \times \frac{3 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol BaCl}_2} = 0/03 \text{ mol یون}$$

حالا حساب می‌کنیم در چند گرم (x) دی‌نیتروژن پنتاکسید (N_2O_5)، $0/03$ مول یون وجود دارد. *هواستون باشه* که از انحلال هر مول N_2O_5 در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود:

$$0/03 \text{ mol یون} \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{4 \text{ mol یون}} \times \frac{108 \text{ g N}_2\text{O}_5}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5} = 0/81 \text{ g N}_2\text{O}_5$$

استفاده از کسر تناسب:

یه جور دیگه

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$1 \text{ BaCl}_2 \sim 3 \text{ یون} \quad \frac{2/08}{208} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 0/03 \text{ mol}$$

$$\text{N}_2\text{O}_5 \sim 4 \text{ یون} \quad \frac{x}{108} = \frac{0/03}{4} \Rightarrow x = 0/81 \text{ g}$$

بریم سراغ قسمت دوم سؤال:

باریم کلرید (BaCl_2) یک ترکیب یونی است که انحلال آن در آب غلظت یون H^+ یا OH^- موجود در آب و در نتیجه pH آب را تغییر نمی‌دهد؛ پس pH محلول حاوی آن برابر با ۷ (خنثی) است، اما دی‌نیتروژن پنتاکسید (N_2O_5)، اسید آرنیوس است و با توجه به معادله انحلال آن در آب ۲ مول H^+ تولید می‌کند؛ بنابراین غلظت H^+ و در نهایت pH آن را محاسبه می‌کنیم:

$$0/81 \text{ g N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{108 \text{ g N}_2\text{O}_5} \times \frac{2 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5} = 0/015 \text{ mol H}^+$$

$$[\text{H}^+] = \frac{\text{مول H}^+}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{0/015 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 15 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 15 \times 10^{-3} = -(\log 3 + \log 5 - 3 \log 10) = -(0/5 + 0/7 - 3) = 1/8$$

پس مجموع pH هر دو محلول برابر $8/8$ است.

محلول N_2O_5 در آب، اسیدی ($\text{pH} < 7$) و محلول BaCl_2 در آب، خنثی ($\text{pH} = 7$) است؛ پس مجموع pH و محلول قطعاً بیشتر از ۷ است، یعنی قسمت دوم سؤال، نیازی به حل نداشت.

تیزبازی

اگر ماده A، الکترولیت و ماده B، غیرالکترولیت باشد، کدام مورد به یقین درست است؟

در محلول یون ایجاد می‌کند. در محلول آن، یون وجود ندارد.

(۱) ماده A در آب، محلول و ماده B در آب، نامحلول است.

(۲) ذرات سازنده A در حالت خالص، ذرات باردار هستند.

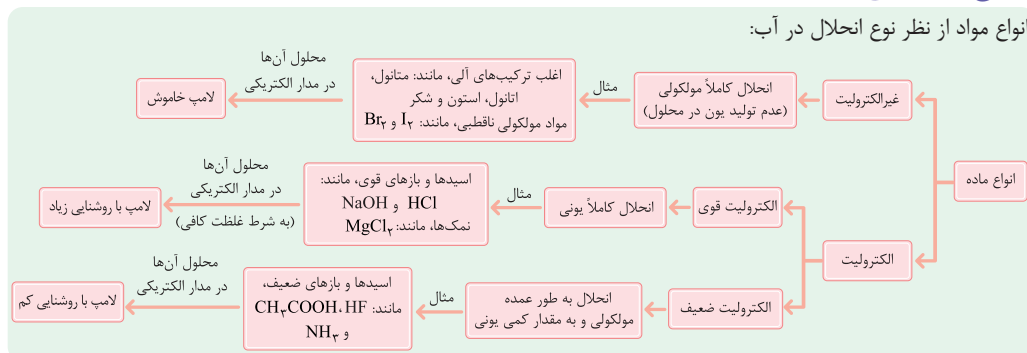
یعنی یونی است؟

(۳) ماده B، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.

(۴) با افزایش غلظت مولی محلول B، رسانایی الکتریکی آن تغییری نمی‌کند.

پاسخ: گزینه ۴

انواع مواد از نظر نوع انحلال در آب:



مواد غیرالکترولیت (B) به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و محلول آن‌ها رسانای جریان برق نیست؛ بنابراین با افزایش غلظت این مواد در آب، رسانایی الکتریکی محلول آن‌ها تغییری نمی‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

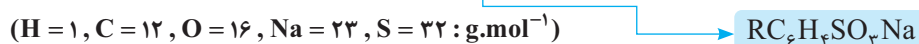
گزینه (۱): ماده A (الکترولیت) می‌تواند یک ماده نامحلول در آب مثل AgCl باشد. این ترکیب یونی اگرچه به مقدار بسیار کم در آب حل می‌شود، اما همان مقدار ناچیز حل شده هم تقریباً به طور کامل به یون تفکیک می‌شود. در ضمن مواد غیرالکترولیت (B) در آب به صورت مولکولی حل می‌شوند نه این‌که در آب نامحلول باشند!

گزینه (۲): برخی الکترولیت‌ها (A) مانند HCl ، یک ماده مولکولی هستند و ذرات تشکیل‌دهنده آن‌ها یون‌ها نیستند!

گزینه (۳): ماده B ممکن است استون ($\text{H}_3\text{C}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{CH}_3$) باشد که توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را ندارد. (H متصل به FON ندارد!)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد دربارهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی درست است؟



(۱) با جایگزین کردن گروه CO_3^- ترکیب $RCOONa$ با SO_3^- به دست می‌آید.

(۲) واحدهای سازندهٔ آن با پیوند کووالانسی (اشتراکی) به یکدیگر متصل‌اند.

(۳) عدد اکسایش گوگرد در آن با عدد اکسایش گوگرد در هیدروژن سولفید برابر است.

(۴) اگر جرم مولی آن، $348 g.mol^{-1}$ و زنجیر هیدروکربنی در آن سیر شده باشد، تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی آن برابر ۱۱ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

مقایسهٔ صابون و پاک‌کنندهٔ غیرصابونی



غیرصابونی با فرمول $RC_6H_4SO_3Na$	صابونی با فرمول $RCOONa$	پاک‌کننده ویژگی
(۹ جفت ناپیوندی)	(۵ جفت ناپیوندی)	ساختار
	R	بخش ناقطبی (آب‌گریز و چربی‌دوست)
$-SO_3^-$	$-COO^-$	بخش قطبی (آب‌دوست و چربی‌گریز)
دارد	ندارد	حلقهٔ بنزن
طی واکنش‌های پیچیده، از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی	از واکنش چربی یا روغن‌های مختلف با سدیم هیدروکسید	نحوهٔ تولید
واکنش نمی‌دهد و رسوبی تشکیل نمی‌شود.	واکنش می‌دهد و رسوب می‌کند.	واکنش با یون‌های موجود در آب سخت
بیشتر	کم‌تر	قدرت پاک‌کنندگی

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا به کمک فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی $(RC_6H_4SO_3Na)$ ، تکلیف گروه R که یک زنجیرهٔ هیدروکربنی

سیر شده است و در نتیجه شمار اتم‌های کربن و هیدروژن را معلوم می‌کنیم.

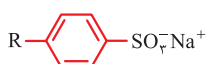
$$C_nH_{2n+1}C_6H_4SO_3Na \text{ جرم مولی} = 12n + 2n + 1 + (6 \times 12) + (4 \times 1) + 32 + (3 \times 16) + 23 = 14n + 180$$

$$\Rightarrow 14n + 180 = 348 \Rightarrow n = 12$$

بنابراین فرمول کلی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی مورد نظر به صورت $C_{12}H_{25}C_6H_4SO_3Na$ یا $C_{18}H_{29}SO_3Na$ می‌باشد و اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن و کربن آن برابر با $11 = 29 - 18$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

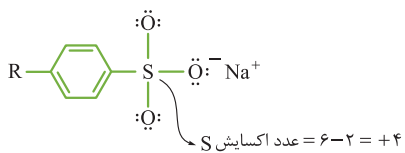
گزینهٔ (۱): تنها پاک‌کنندهٔ غیرصابونی که در کتاب درسی بررسی شده، علاوه بر $-SO_3^-$ ، حلقهٔ بنزنی نیز دارد.



گزینهٔ (۲): پیوند میان کاتیون (Na^+) و آنیون، از نوع پیوند یونی است.

گزینه (۳): فرمول مولکولی هیدروژن سولفید به صورت H_2S است.

$$H_2S \text{ در } S \text{ عدد اکسایش } S = 0 \Rightarrow 2(+1) + S = 0 \Rightarrow S = -2$$



«در دمای یکسان، از بین اسیدهای.....، اسیدی با.....، K_a کوچک‌تری دارد.»

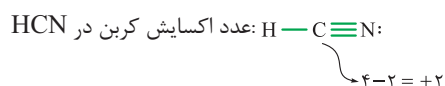
- (۱) فورمیک اسید و استیک اسید - جرم مولی بیشتر
- (۲) نیترواسید و نیتریک اسید - تعداد اکسیژن کمتر
- (۳) هیدروبرمیک اسید و هیدروفلوئوریک اسید - توانایی برقراری پیوند هیدروژنی
- (۴) هیدروسانیک اسید و کرینیک اسید - عدد اکسایش بیشتر برای کربن

 نکته

مقایسه K_a و قدرت اسیدی: $\text{HF} > \text{HNO}_3 > \text{HCOOH} > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{H}_2\text{CO}_3 > \text{HCN}$
 هیدروفلوئوریک اسید نیترو اسید فورمیک اسید استیک اسید کربنیک اسید هیدروسیانیک اسید

✓ **یاسخ خیلے، تشریحی،**

$$\text{H}_2\text{CO}_3 \text{ در اکسایش کربن در: } 2(+1) + \text{C} + 3(-2) = 0 \Rightarrow \text{C} = +4$$



بنابراین عدد اکسایش کربن در H_2CO_3 که K_a بزرگ‌تری دارد، بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینہ (۱):

در کرپه‌کسیلیک اسیدها، با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد.



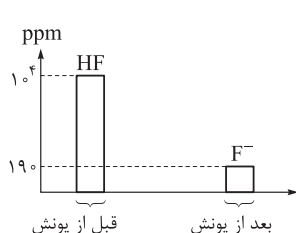
با توجه به این که CH_3COOH شمار اتم‌های کربن و هیدروژن بیشتری نسبت به HCOOH دارد، جرم مولی آن بیشتر است، اما K_a و قدرت اسیدی کم‌تری دارد.

گزنه (۲): نیترواسید (HNO_3) برخلاف نیتریک اسید (HNO_2)، یک اسید ضعیف است و K_a کوچکتری دارد.

گزینه ۳: هیدروفلوئوریک اسید (HF) برخلاف هیدروبرمیک اسید (HBr)، پیوند H-F داشته و توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد. همچنین HF اسید ضعیف‌تری نسبت به HBr است و K_a کوچک‌تری دارد.

 نکته

نمودار زیر، غلظت برخی گونه‌ها را در محلول HF قبل و بعد از یونش آن در ۱ لیتر آب در دمای معین نمایش می‌دهد. کدام مورد نادرست است؟ (چگالی محلول را 1 g.mL^{-1} در نظر بگیرید، $H = 1, F = 19 : \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) رسانایی الکتریکی این محلول کمتر از رسانایی الکتریکی محلول HCl

با غلظت مولی یکسان است.

(۲) درصد یونش این اسید در آب برابر با ۲٪ است.

(۳) مجموع شمار یون‌ها در محلول برابر با 0.2 مول است.

(۴) ثابت یونش هیدروفلوئوریک اسید در شرایط آزمایش به تقریب برابر 2×10^{-3} است.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): HF، یک اسید ضعیف و HCl، یک اسید قوی است. در غلظت‌های مولی برابر، به یقین رسانایی الکتریکی HCl بیشتر از HF است، چون مجموع غلظت یون‌ها در نمونه HCl بیشتر بوده و این اسید به طور کامل یونیده می‌شود.

گزینه (۲): ابتدا از طریق فرمول زیر، غلظت مولی اولیه اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی (M)} = \frac{10^4 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}} \xrightarrow{a=\text{ppm} \times 10^{-4}} M_{\text{HF}} = \frac{10 \times 10^4 \times 10^{-4} \times 1}{20} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت مولی F^- را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$M_{F^-} = \frac{10 \times a \times d}{\text{جرم مولی}} \xrightarrow{a=\text{ppm} \times 10^{-4}} M_{F^-} = \frac{10 \times 190 \times 10^{-4} \times 1}{19} = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت مولی H^+ و F^- برابر است:

$$[H^+] = [F^-] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

مقدار درصد یونش (α) برابر است با:

$$\text{درصد یونش} = \frac{[H^+]}{[H^+] + [F^-]} \times 100 = \frac{0.1}{0.1 + 0.1} \times 100 = 50\%$$

گزینه (۳): با توجه به این که غلظت مولی هر یک از یون‌های H^+ و F^- برابر 0.1 مولار است و حجم محلول نیز ۱ لیتر است، بنابراین مجموع شمار یون‌های موجود در محلول برابر 0.2 مول خواهد بود.

گزینه (۴):

$$K_a = \frac{[H^+][F^-]}{[HA]} = \frac{0.1 \times 0.1}{0.5 - 0.1} = \frac{0.01}{0.4} = 2.5 \times 10^{-2}$$

در بارهٔ محلول‌هایی به حجم یکسان از آمونیاک (I) و باریم هیدروکسید (II) با pH برابر، کدام مورد درست است؟

NH_3 (باز ضعیف) $\rightarrow$ Ba(OH)_2 (باز قوی)

۱) غلظت مولار محلول (II) دو برابر محلول (I) است.

۲) شمار یون‌های هیدروکسید در محلول (II)، نصف محلول (I) است.

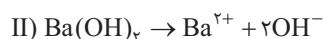
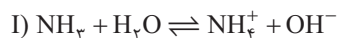
۳) هر دو محلول، با حجم یکسانی از محلول ۱/۰ مولار هیدروکلریک اسید به طور کامل واکنش می‌دهند.

۴) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (II) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (I) برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به برابر بودن pH محلول، $[\text{H}^+]$ و در نتیجه $[\text{OH}^-]$ دو محلول با هم برابر است. در محلول NH_3 ، $[\text{OH}^-]$ با $[\text{NH}_4^+]$ برابر است.



$$\text{pH}_I = \text{pH}_{II} \Rightarrow [\text{OH}^-]_I = [\text{OH}^-]_{II} \Rightarrow [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-]_I = [\text{OH}^-]_{II}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

در بازهای ضعیف $[\text{OH}^-] = M\alpha$

در بازهای قوی دوظرفیتی $[\text{OH}^-] = 2M$

آمونیاک (NH_3) یک باز ضعیف و باریم هیدروکسید (Ba(OH)_2) یک باز قوی ($\alpha \cong 1$) دوظرفیتی است. با توجه به pH و در نتیجه $[\text{OH}^-]$ برابر، داریم:

$$\text{NH}_3 \Rightarrow [\text{OH}^-] = M_I \alpha$$

$$\text{Ba(OH)}_2 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 2M_{II}$$

$$[\text{OH}^-]_I = [\text{OH}^-]_{II} \Rightarrow M_I \alpha = 2M_{II} \Rightarrow M_{II} = \frac{M_I \alpha}{2}$$

بنابراین نسبت غلظت مولی دو محلول به درجهٔ یونش باز ضعیف نیز بستگی دارد.

گزینهٔ (۲): با توجه به برابر بودن $[\text{OH}^-]$ دو محلول، در حجم یکسان، شمار یون‌های OH^- نیز در دو محلول یکسان است.

گزینهٔ (۳): وقتی pH یک باز ضعیف (NH_3) و یک باز قوی (Ba(OH)_2) برابر، قطعاً غلظت اولیهٔ باز ضعیف بیشتر بوده است. با توجه به این که غلظت اولیهٔ دو باز یکسان نیست، پس حجم متفاوتی از آن‌ها با محلول HCl واکنش می‌دهند.

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 حجم باز × غلظت باز × ظرفیت باز حجم اسید × غلظت اسید × ظرفیت اسید

در مسائل خنثی شدن اسید و باز، از غلظت اولیهٔ اسید و باز (M) استفاده می‌کنیم و نه غلظت یون‌های H^+ و OH^- !

گول نخوری ✗

pH محلول ۱/۰ مولار باز BOH با ثابت یونش 10^{-5} ، چند واحد با pH آب خالص تفاوت دارد و در این محلول، غلظت مولی یون هیدروکسید چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است؟ (دما را 25°C در نظر بگیرید.)

$$10^4, 4 \quad (2)$$

$$10^4, 4 \quad (1)$$

$$10^9, 3 \quad (4)$$

$$10^3, 3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با استفاده از رابطه ثابت یونش، غلظت OH^- و در نتیجه H^+ را به دست می‌آوریم؛ *هواستون باشه* که در این جا چون K_b مقدار کوچکی است، می‌توان از $[\text{OH}^-]$ در مخرج کسر ثابت یونش صرف نظر کرد:

$$K_b = \frac{[\text{OH}^-]^2}{M - [\text{OH}^-]} \approx \frac{[\text{OH}^-]^2}{M} \Rightarrow [\text{OH}^-]^2 = K_b M \Rightarrow [\text{OH}^-] = \sqrt{K_b M} = \sqrt{10^{-5} \times 10^{-1}} = 10^{-3}$$

$$[\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{10^{-3}} = 10^{-11}$$

pH محلول برابر است با:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 10^{-11} = 11$$

pH آب خالص در دمای 25°C برابر ۷ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta\text{pH} = 11 - 7 = 4$$

برای قسمت دوم سؤال هم داریم:

$$\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-3}}{10^{-11}} = 10^8$$



در دو ظرف جداگانه، دو لیتر از محلول‌های نیترواسید و استیک اسید وجود دارد. اگر pH محلول نیترواسید برابر ۱/۴ و جرم NO_3^- در محلول نیترواسید، ۲/۵ گرم بیشتر از جرم CH_3COO^- در محلول استیک اسید باشد، غلظت تعادلی نیترواسید، چند برابر غلظت تعادلی استیک اسید است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

اسید	نیترواسید	استیک اسید
ثابت یونش	4×10^{-4}	5×10^{-5}

۱/۲۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

۲/۵ (۴)

۲/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳



با استفاده از مقدار pH محلول اسید HNO_3 ، $[\text{H}^+]$ و در نتیجه $[\text{NO}_3^-]$ را به دست بیار و تبدیل به جرم کن و از طریق فرمول $K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{NO}_3^-]}{[\text{HNO}_3]}$ ، غلظت تعادلی HNO_3 رو به دست بیار. از طرفی با توجه به داده‌های سؤال، جرم CH_3COO^- و در نتیجه غلظت مولی آن را حساب کن و از طریق فرمول ثابت یونش، غلظت تعادلی CH_3COOH را به دست بیار. بر این اساس نسبت مورد نظر محاسبه می‌شه!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به دست آوردن جرم NO_3^- و غلظت تعادلی HNO_3 :



$$\text{HNO}_3 \text{ در } [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/4} = 10^{-2+3/4} = 10^{-2} \times \underbrace{10^{3/4}}_{(10^{3/2})^2} = 2 \times 10^{-2} = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = [\text{NO}_3^-] = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{NO}_3^- \text{ جرم } 2\text{L} : \text{محلول} \times \frac{0.04 \text{ mol NO}_3^-}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{46 \text{ g NO}_3^-}{1 \text{ mol NO}_3^-} = 3.68 \text{ g NO}_3^-$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{NO}_3^-]}{[\text{HNO}_3]_{\text{تعادلی}}} \Rightarrow 4 \times 10^{-4} = \frac{0.04 \times 0.04}{[\text{HNO}_3]_{\text{تعادلی}}} \Rightarrow [\text{HNO}_3]_{\text{تعادلی}} = 4 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: با توجه به فرض سؤال، جرم CH_3COO^- برابر با ۱/۱۸ = ۲/۵ - ۳/۶۸ گرم است؛ بنابراین غلظت تعادلی CH_3COOH را حساب می‌کنیم:



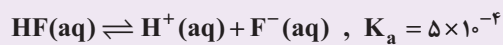
$$\text{CH}_3\text{COO}^- \text{ غلظت مولار } = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{1/18 \text{ g}}{2 \text{ L}} = \frac{59 \text{ g.mol}^{-1}}{2 \text{ L}} = 0.01 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{تعادلی}}} \Rightarrow 5 \times 10^{-5} = \frac{10^{-2} \times 10^{-2}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{تعادلی}}} \Rightarrow [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{تعادلی}} = 2 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{[\text{HNO}_3]_{\text{تعادلی}}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{تعادلی}}} = \frac{4}{2} = 2$$

اگر در دمای معین و در دو ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HF در محلول، دو برابر غلظت تعادلی استیک اسید در محلول و pH محلول هیدروفلوئوریک اسید، برابر ۱/۳ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است.) ($F = 19, O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



(سوال ۹۵ کنکور تهری ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۰ / ۸۶۲ (۲)

۰ / ۷۸۰ (۴)

۰ / ۸۳۲ (۱)

۰ / ۸۸۰ (۳)

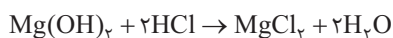
کدام مطلب درست است؟ ($Mg = ۲۴, Na = ۲۳, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)

- (۱) پتاسیم هیدروکسید برخلاف آمونیاک بازی قوی است، زیرا یونش آن در آب به صورت کامل و برگشتناپذیر است.
- (۲) در محلول ۰/۰۱ مولار متیل آمین همانند نیتریک اسید، غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده بیشتر از غلظت یون‌های آب پوشیده است.
- (۳) یک گرم منیزیم هیدروکسید در مقایسه با دو گرم جوش شیرین، مقدار اسید معدۀ بیشتری را خنثی می‌کند.
- (۴) افزودن جوش شیرین به پاک‌کننده صابونی، مشکل پاک‌کنندگی آن در آب سخت را برطرف می‌کند.

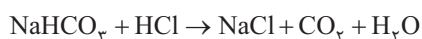
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اسید معدۀ همان هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) است. باید تعداد مول HCl خنثی‌شده توسط هر یک از بازهای $Mg(OH)_2$ و $NaHCO_3$ را حساب کنیم:



$$۱ \text{ g } Mg(OH)_2 \times \frac{۱ \text{ mol } Mg(OH)_2}{۵۸ \text{ g } Mg(OH)_2} \times \frac{۲ \text{ mol } HCl}{۱ \text{ mol } Mg(OH)_2} = \frac{۲}{۲۹} \text{ mol } HCl$$



$$۲ \text{ g } NaHCO_3 \times \frac{۱ \text{ mol } NaHCO_3}{۸۴ \text{ g } NaHCO_3} \times \frac{۱ \text{ mol } HCl}{۱ \text{ mol } NaHCO_3} = \frac{۱}{۴۲} \text{ mol } HCl$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده **تابلونه‌که!** ۱ گرم $Mg(OH)_2$ مقدار بیشتری HCl را نسبت به ۲ گرم $NaHCO_3$ خنثی می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱):

تفاوت یونش و تفکیک:



یونش: فرایندی است که در آن یک ترکیب مولکولی، به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یعنی وقتی ترکیب مورد نظر (مثل HCl) در ابتدا به صورت مولکولی بوده و در ساختار آن یون وجود ندارد، اما بر اثر حل شدن در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، برای آن واژه «یونش» را به کار می‌بریم.

تفکیک یونی: فرایندی است که در آن یک ترکیب یونی به یون‌های سازنده خود تبدیل می‌شود؛ پس **مواستون باشه** که حق نداریم برای ترکیب‌های یونی از واژه «یونش» استفاده کنیم، به **باش** برای این ترکیب‌ها، از واژه «تفکیک یونی» استفاده می‌کنیم. بدین معنی که ترکیب مورد نظر (مانند $NaOH$) از ابتدا در ساختار خود دارای یون بوده است و بر اثر حل شدن در آب، یون‌ها فقط از یکدیگر تفکیک شده‌اند.



پتاسیم هیدروکسید (KOH) یک ترکیب یونی است و حق نداریم برای ترکیب‌های یونی از واژه «یونش» استفاده کنیم!

گزینه (۲): نیتریک اسید (HNO_3) یک اسید قوی است و در محلول آن، خبری از مولکول‌های یونیده‌نشده اسید نیست.

گزینه (۴): جوش شیرین ($NaHCO_3$) با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} موجود در آب سخت واکنش نمی‌دهد؛ پس نمی‌تواند قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب سخت را افزایش دهد!



بد نیست بدانید که $Mg(HCO_3)_2$ و $Ca(HCO_3)_2$ مانند $NaHCO_3$ ، در آب محلول‌اند؛ بنابراین اضافه کردن جوش شیرین به شوینده‌ها نمی‌تواند به دلیل واکنش آن با یون‌های کلسیم و منیزیم باشد.

اضافه کردن جوش شیرین به شوینده‌ها با هدف افزایش قدرت پاک‌کنندگی به دلیل واکنش آن با چربی‌ها و تولید صابون است.

مقدار کربن دی اکسید حاصل از واکنش ۴ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $\text{pH} = 0.7$ با مقدار کافی سدیم هیدروژن کربنات، با مقدار گاز کربن دی اکسید حاصل از سوختن کامل چند مول بنزین برابر است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۴)
☐ ۳ (۶) ☐ ۴ (۸)

پاسخ: گزینه ۱

اول با استفاده از pH ، غلظت HCl را به دست بیار و با توجه به واکنش HCl و NaHCO_3 ، مول CO_2 تولید شده را حساب کن. در نهایت با توجه به مول CO_2 به دست آمده، مول بنزین (C_8H_{18}) را محاسبه کن.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

غلظت مولی محلول HCl را حساب می کنیم:

$$[\text{HCl}] = [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-0.7} = 10^{-1} \times 10^{+0.3} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

معادله واکنش HCl با NaHCO_3 را نوشته و مول کربن دی اکسید (CO_2) را حساب می کنیم:



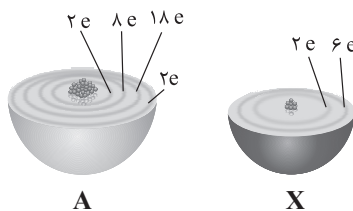
$$4 \text{ L HCl}(\text{aq}) \times \frac{0.2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ L HCl}(\text{aq})} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol HCl}} = 0.8 \text{ mol CO}_2$$

حالا باید حساب کنیم چند مول بنزین، 0.8 مول کربن دی اکسید تولید می کند. از سوختن کامل ۱ مول بنزین (C_8H_{18})، ۸ مول کربن دی اکسید تولید می شود.



$$0.8 \text{ mol CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol C}_8\text{H}_{18}}{8 \text{ mol CO}_2} = 0.1 \text{ mol C}_8\text{H}_{18}$$

با توجه به شکل مقابل، کدام مطلب درست است؟



(۱) به ازای تشکیل ۵ / ۰ مول فرآورده از واکنش A و X، $3/0 \times 10^{23}$ الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

(۲) عنصر قبل از A در جدول دوره‌ای، خاصیت کاهندگی کم‌تری نسبت به A دارد و با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد.

(۳) در واکنش با عناصر فلوئور و کلر، ترکیبات XF_3 و XCl_3 و با عدد اکسایش برابر تشکیل می‌دهد.

(۴) امروزه از واکنش دومین عنصر دوره سوم با X، در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

اول بیاید تکلیف اتم‌های A و X را مشخص کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

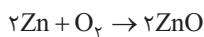
$$\begin{array}{ccccccc} & \text{لایه چهارم} & \text{لایه سوم} & \text{لایه دوم} & \text{لایه اول} & & \\ & 2 & 18 & 8 & 2 & & \\ \text{عدد اتمی A} & : & 2 & + & 8 & + & 18 & + & 2 & = 30 \Rightarrow A: {}_{30}\text{Zn} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{لایه دوم} & \text{لایه اول} & & & & \\ & 6 & 2 & & & & \\ \text{عدد اتمی X} & : & 6 & + & 2 & = 8 \Rightarrow X: {}_8\text{O} \end{array}$$

عنصر قبل از ${}_{30}\text{Zn}$ (A)، ${}_{29}\text{Cu}$ است که خاصیت کاهندگی کم‌تری نسبت به Zn داشته و نمی‌تواند با محلول هیدروکلریک اسید (HCl) واکنش دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



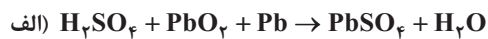
در این واکنش، Zn کاهنده است و عدد اکسایش آن، از صفر به +۲ رسیده است:

$2 \times 1 \times 2 = 4$ = تغییر عدد اکسایش در کاهنده $\times$ شمار اتم‌های اکسایش یافته در کاهنده $\times$ ضریب کاهنده = شمار الکترون‌های مبادله شده به ازای تشکیل ۲ مول فرآورده (ZnO)، ۴ مول الکترون مبادله شده است؛ بنابراین به ازای تشکیل ۵ / ۰ مول از آن، ۱ مول $(6/0 \times 10^{23})$ الکترون مبادله می‌شود.

گزینه (۳): در واکنش ${}_8\text{O}$ با ${}_{17}\text{Cl}$ و مولکول‌های OF_2 و OCl_2 تشکیل می‌شود. با توجه به مقایسه خلصت نافلزی عنصرها ($F > O > Cl$)، عدد اکسایش اکسیژن در OF_2 و OCl_2 به ترتیب برابر +۲ و -۲ است.

گزینه (۴): منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$)، دومین عنصر دوره سوم است. در گذشته (نه امروزه!) از واکنش ${}_{12}\text{Mg}$ و ${}_8\text{O}$ در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شد.

تغییر عدد اکسایش اتم اکسندۀ در واکنش «ب»، چند برابر تغییر عدد اکسایش اتم کاهندۀ در واکنش «الف» است؟



۱ (۴)

۰ / ۷۵ (۳)

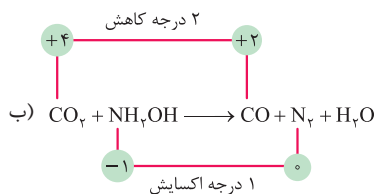
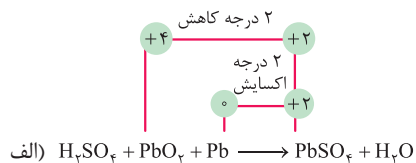
۰ / ۵ (۲)

۰ / ۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را ببینیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



اتم C که در واکنش «ب» کاهش یافته، اکسندۀ و اتم Pb که در واکنش «الف» اکسایش یافته، کاهندۀ است.

$$\frac{\text{تغییر عدد اکسایش C}}{\text{تغییر عدد اکسایش Pb}} = \frac{2}{2} = 1$$

با توجه به نیم‌واکنش‌های زیر، پاسخ پرسش‌های (الف) و (ب) به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟
 الف) کدام فلز در محیط مرطوب و خنثی اکسایش نمی‌یابد، اما در محیط اسیدی اکسایش می‌یابد؟
 ب) emf فرایند خوردگی آهن گالوانیزه بر اثر خراش در هوای مرطوب و خنثی کدام است؟



آهن با روکش Zn

(۲) قلع - ۳۲V / ۰

(۱) نقره - ۳۲V / ۰

(۴) نقره - ۱۶V / ۱

(۳) قلع - ۱۶V / ۱

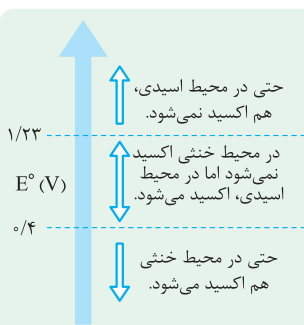
پاسخ: گزینه ۴

بررسی سؤالات:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

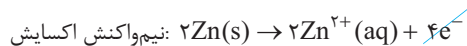
(الف)

E° اکسیژن در محیط خنثی، $+0/4V$ و در محیط اسیدی، $+1/23V$ است؛ بنابراین فلزهایی که E° آن‌ها بین این دو عدد است، در محیط‌های خنثی اکسید نمی‌شوند، اما در محیط‌های اسیدی اکسایش می‌یابند.



E° نقره (Ag) بین $+0/4V$ و $+1/23V$ قرار دارد؛ بنابراین در محیط خنثی اکسید نمی‌شود، اما در محیط اسیدی، اکسید می‌شود. پس گزینه‌های (۲) و (۳) پُر!

ب) در آهن گالوانیزه، سطح آهن با فلز روی (Zn) پوشیده می‌شود و در اثر خراش در محیط مرطوب، فلز روی اکسایش می‌یابد (آند) و فلز آهن محافظت می‌شود. دقت کنید که نیم‌واکنش کاهش مربوط به مولکول‌های اکسیژن است.



$$emf = E^\circ(\text{آند}) - E^\circ(\text{کاتد}) = 0/4 - (-0/76) = 1/16V$$

کدام گزینه نادرست است؟ ۹۴

- (۱) سوخت‌های فسیلی رایج‌ترین سوخت برای خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند.
 (۲) در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن به منظور تولید جریان برق، واکنش سوختن هیدروژن انجام می‌شود.
 (۳) تعداد مراحل تبدیل انرژی شیمیایی به الکتریکی در روش سنتی بیشتر از سلول سوختی است.
 (۴) در تولید انرژی الکتریکی، استفاده از هیدروژن در سلول سوختی، باعث افزایش بازده نسبت به سوختن آن در موتور درون‌سوز می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

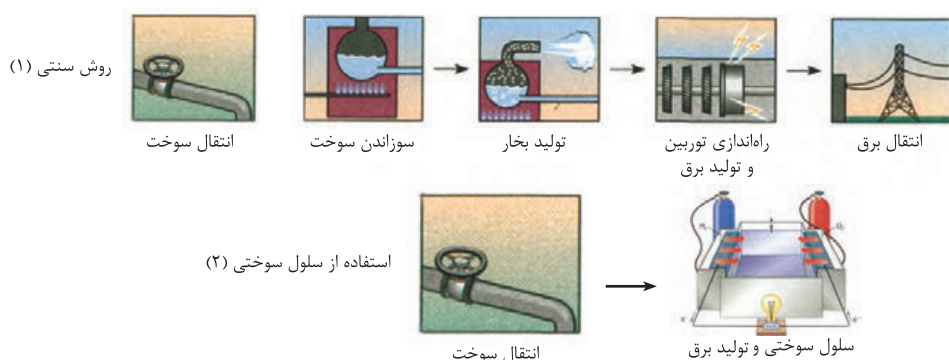
پاسخ خیلی تشریحی ✓

در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، گاز هیدروژن به آرامی و به صورت کنترل‌شده اکسید می‌شود.
 (واکنش از نوع اکسایش است نه سوختن!)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): کاملاً درسته!

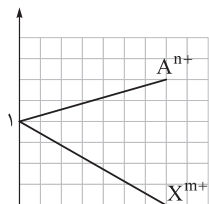
گزینه (۳): با توجه به تصویر کتاب درسی، مراحل تبدیل انرژی شیمیایی موجود در یک سوخت به انرژی الکتریکی در روش سنتی نسبت به استفاده از سلول سوختی، بیشتر است.



گزینه (۴): سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز بازدهی نزدیک به ۲۰ درصد دارد، در حالی که اکسایش آن در سلول سوختی بازده را تا سه برابر افزایش می‌دهد.

نمودار تغییرات غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی به صورت زیر است. کدام مطلب درست است؟

غلظت مولی



زمان (دقیقه)

$$E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = -0.76\text{V}, E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = +0.34\text{V}$$

$$E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0.44\text{V}, E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = +0.8\text{V}$$

$$E^\circ(\text{K}^+/\text{K}) = -2.90\text{V}, E^\circ(\text{Al}^{3+}/\text{Al}) = -1.66\text{V}$$

(۱) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «پتاسیم - آهن» باشد که emf آن $2/46\text{V}$ است.

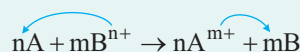
(۲) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «مس - نقره» باشد که برای واکنش با هر مول عامل اکسند، دو مول عامل کاهنده نیاز است.

(۳) اگر X ، نقره باشد، A می‌تواند روی باشد و ولتاژ آن بیش از یک ولت است.

(۴) اگر A ، آلومینیم باشد، X می‌تواند مس باشد و در این سلول آنیون‌ها از دیواره متخلخل به نیم‌سلول A وارد می‌شوند.

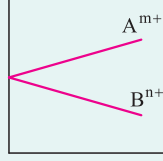
پاسخ: گزینه ۳

معادله کلی واکنش انجام‌شده در یک سلول گالوانی را که از دو الکترود فلزی تشکیل شده است، می‌توان به صورت زیر نشان داد:



طبق این واکنش، الکترود A نقش آند (E° کم‌تر) و الکترود B نقش کاتد (E° بیشتر) را دارد.

غلظت



زمان

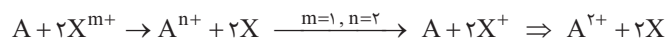
همچنین با تولید یون A^{m+} (یون الکترود آندی)، غلظت آن در محلول افزایش یافته و با مصرف یون B^{n+} (یون الکترود کاتدی) غلظت آن در محلول کاهش می‌یابد.

نسبت تغییرات غلظت این دو یون در یک بازه زمانی مشخص برابر با نسبت ضریب استوکیومتری آن‌ها در معادله کلی واکنش است.

$$\frac{\Delta[A^{m+}]}{\Delta[B^{n+}]} = \frac{A^{m+} \text{ ضریب}}{B^{n+} \text{ ضریب}} = \frac{n}{m}$$

با توجه به نمودار داده‌شده، در یک بازه زمانی مشخص، غلظت A^{n+} ، ۲ واحد افزایش و غلظت X^{m+} ، ۴ واحد کاهش یافته است.

بنابراین در سلول مورد نظر، A نقش آند و X نقش کاتد را دارد و معادله واکنش کلی انجام‌شده به صورت زیر است:



در سلول نقره (X) - روی (A)، Ag با E° بیشتر، نقش کاتد و Zn با E° کم‌تر، نقش آند را دارد.



$$\text{emf} = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0.8 - (-0.76) = 1.56\text{V}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

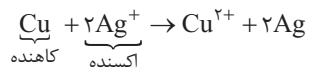
گزینه (۱): در شکل، شیب تغییرات غلظت یون آند، نصف تغییرات غلظت یون کاتد است؛ یعنی بار یون آند دو برابر بار کاتیون

کاتد است. در این جا قفیه برعکسه! K ، آند و کاتیون آن K^+ و Fe ، کاتد و کاتیون آن Fe^{2+} است.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۲): در سلول گالوانی مس - نقره، یون نقره گونه اکسند و مس گونه کاهنده است.



در این سلول به ازای مصرف ۱ مول کاهنده، ۲ مول اکسند مصرف می شود.

گزینه (۴): نمودار نمی تواند مربوط به سلول گالوانی مس - آلومینیم باشد، زیرا نسبت بار کاتیون در آند به کاتیون در کاتد برابر با ۲ نیست.



در شرایط معین، در سلول گالوانی $\text{Al} - \text{SHE}$ ، $\frac{33}{6}$ میلی لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد تولید می شود. اگر تغییر جرم تیغه آندی در این سلول، نصف تغییر جرم تیغه کاتدی در سلول گالوانی «منیزیم - نقره» باشد، تعداد الکترون های مبادله شده در سلول «منیزیم - نقره» چه مضربی از 10^{20} است؟

$$(\text{Mg} = 24, \text{Al} = 27, \text{Ag} = 108 : \text{g.mol}^{-1})$$

$$3 / 0.1 (2)$$

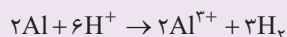
$$1 / 505 (1)$$

$$6 / 0.2 (4)$$

$$4 / 515 (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

در سلول Al-SHE ، آلومینیم نقش آند و SHE ، نقش کاتد را دارد و معادله موازنه شده واکنش کلی سلول به صورت زیر است:



جرم آلومینیم مصرف شده را به دست می آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$\frac{33}{6} \text{ mL H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{22400 \text{ mL H}_2} \times \frac{2 \text{ mol Al}}{3 \text{ mol H}_2} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} = 0.27 \text{ g Al}$$

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{2 \times 27} = \frac{\frac{33}{6}}{10000 \times 3 \times \frac{22.4}{2}} \Rightarrow x = 0.27 \text{ g Al}$$

در سلول منیزیم - نقره، Mg نقش آند و Ag نقش کاتد را دارد.

$$(\text{Ag}) \text{ تغییر جرم کاتد} = 2 \times 0.27 = 0.54 \text{ g}$$

در این سلول با مصرف ۱ مول نقره، ۱ مول الکترون مبادله می شود؛ پس خواهیم داشت:



استفاده از کسر تبدیل:

$$0.54 \text{ g Ag} \times \frac{1 \text{ mol Ag}}{108 \text{ g Ag}} \times \frac{1 \text{ mol e}^-}{1 \text{ mol Ag}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ e}^-}{1 \text{ mol e}^-} = 3.01 \times 10^{20} \text{ e}^-$$

$$\text{Ag} \sim 1 \text{ e}^-$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{تعداد ذره} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.54}{108} = \frac{x}{6.02 \times 10^{23} \times 1} \Rightarrow x = 3.01 \times 10^{20}$$

اگر تغییر جرم آند، در سلول گالوانی استاندارد «منیزیم - نقره»، نصف تغییر جرم کاتد در سلول گالوانی استاندارد «منگنز - کروم» باشد و $\frac{3}{24}$ گرم به جرم کاتد در سلول «منیزیم - نقره» اضافه شود، به تقریب چند الکترون در سلول «منگنز - کروم» مبادله شده است؟ (بازه های زمانی انجام واکنش ها، متفاوت در نظر گرفته شود.)

$$(\text{Mg} = 24, \text{Cr} = 52, \text{Mn} = 55, \text{Ag} = 108 : \text{g.mol}^{-1})$$

$$E^\circ (\text{Ag}^+ / \text{Ag}) = +0.80 \text{ V}, \quad E^\circ (\text{Cr}^{3+} / \text{Cr}) = -0.74 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Mn}^{2+} / \text{Mn}) = -1.18 \text{ V}, \quad E^\circ (\text{Mg}^{2+} / \text{Mg}) = -2.37 \text{ V}$$

(سوال ۱۰۳ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

$$1 / 5 \times 10^{22} (2)$$

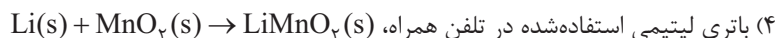
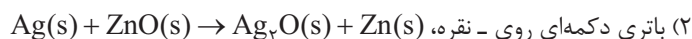
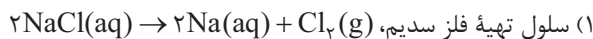
$$2 / 5 \times 10^{22} (1)$$

$$2 / 0 \times 10^{22} (4)$$

$$5 / 0 \times 10^{22} (3)$$

با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد، جمله داده شده را به درستی کامل می کند؟

«معادله واکنش کلی انجام شده در به صورت است.»

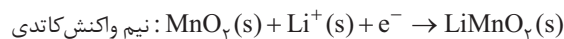
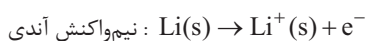


مشاوره آشنایی با انواع سلول های الکتروشیمیایی معرفی شده در کتاب درسی و شناسایی گونه های اکسند و کاهنده و همچنین نیم واکنش های کاهش و اکسایش در آنها، از مهم ترین و پرتکرارترین مباحث در کنکور سراسری است.

پاسخ: گزینه ۴

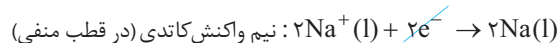
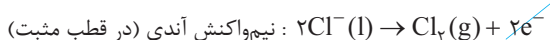
پاسخ خیلی تشریحی ✓

در باتری های لیتیومی، لیتیم اکسایش یافته و Li^+ و e^- تولید می شود: سپس این گونه های تولید شده در نیم واکنش کاتدی مصرف می شوند.

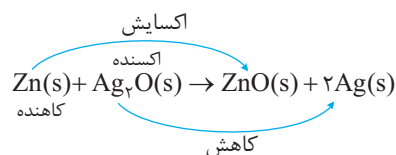


بررسی سایر گزینه ها:

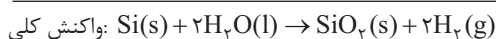
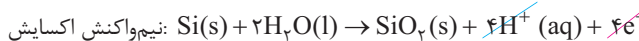
گزینه ۱: برای تهیه سدیم، NaCl مذاب (l) را برق کافت می کنند (نه (aq)) هم چنین Na تولید شده نیز به حالت مذاب (l) است.



گزینه ۲: در باتری روی - نقره، فلز روی (Zn) نقش آند و نقره اکسید (Ag_2O) نقش کاتد را دارد.



گزینه ۳: در سلول نور الکتروشیمیایی، Si در آند، اکسایش و H_2O در کاتد کاهش می یابد.



با به نگاه به معادله هم می شه فهمید گزینه (۳) غلطه! چون در سمت راست، اصلاً اکسیژن وجود نداره! طبق قانون پایستگی جرم، چنین چیزی امکان پذیر نیست.

در کدام فرایند زیر، عدد اکسایش اتم کربن از کم‌ترین مقدار به بیشترین مقدار ممکن خود می‌رسد؟

+۴

-۴

(۱) تبدیل اتن به اتیلن گلیکول

(۲) تبدیل فرمالدهید (CH_2O) به فورمیک اسید

(۳) سوختن کامل متان

(۴) تجزیه گرمایی کلسیم کربنات

پاسخ: گزینه ۳



دامنه تغییرات عدد اکسایش عنصرها:

(۱) هیدروژن دارای عدد اکسایش صفر (در حالت آزاد)، +۱ (در ترکیب‌های دوتایی با نافلزها و ترکیب‌های آلی) یا -۱ (در ترکیب‌های دوتایی با فلزها) است. (از -۱ تا +۱)

(۲) برای فلزهای گروه ۱ و ۲، پایین‌ترین عدد اکسایش، صفر و بالاترین عدد اکسایش، برابر با شماره گروه عنصر است. به طور کلی در همه فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (عدد اکسایش عنصر در حالت آزاد)، زیرا فلزها هیچ‌وقت نمی‌توانند الکترون بگیرند و به یون منفی تبدیل شوند. در ضمن خواندیم که برخی فلزها در ترکیب‌هایشان، فقط یک نوع عدد اکسایش دارند:

عنصر	فلزهای گروه ۱	فلزهای گروه ۲	آلومینیم ($_{13}\text{Al}$)	اسکاندیم ($_{21}\text{Sc}$)	روی ($_{30}\text{Zn}$)	نقره ($_{47}\text{Ag}$)
عدد اکسایش در ترکیب‌ها	+۱	+۲	+۳	+۳	+۲	+۱

(۳) فلزهای واسطه اعداد اکسایش متنوعی دارند. بهتر است بالاترین عدد اکسایش چند فلز واسطه مهم را بلد باشید:

عنصر	$_{23}\text{V}$	$_{24}\text{Cr}$	$_{25}\text{Mn}$	$_{26}\text{Fe}$	$_{29}\text{Cu}$
بالاترین عدد اکسایش	+۵	+۶	+۷	+۳	+۲

(۴) برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید: (از چپ به راست بخوانید.)

۱۸- شماره گروه = پایین‌ترین عدد اکسایش

دامنه تغییرات عدد اکسایش در گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ (به جز اکسیژن و فلوئور)

(عدد یکان شماره گروه) + ۱۰- شماره گروه = بالاترین عدد اکسایش

مثال

شماره گروه	۱۴ (C, Si, ...)	۱۵ (N, P, ...)	۱۶ (S, ...)	۱۷ (Cl, ...)
پایین‌ترین عدد اکسایش	$14 - 18 = -4$	$15 - 18 = -3$	$16 - 18 = -2$	$17 - 18 = -1$
بالاترین عدد اکسایش	+۴	+۵	+۶	+۷

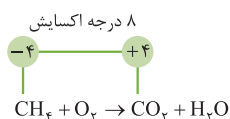
توجه در مورد دامنه تغییرات عدد اکسایش، استثناهایی هم به چشم می‌خورد. مواردی که دانستن آن‌ها برای شما اجباری است، عبارت‌اند از:

(الف) دامنه تغییرات عدد اکسایش اکسیژن (متعلق به گروه ۱۶) از -۲ تا +۲ است.

(ب) عدد اکسایش فلوئور تنها می‌تواند اعداد صفر (در F_2) و -۱ (در ترکیب‌ها) باشد.

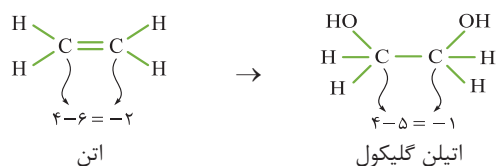
در واکنش سوختن کامل متان (CH_4) عدد اکسایش اتم کربن، از -۴ به +۴ می‌رسد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

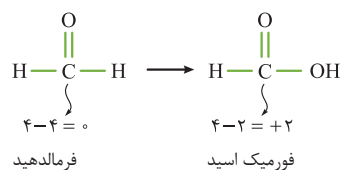


بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): تبدیل اتن به اتیلن گلیکول این موردیاس:



گزینه (۲): در این تبدیل عدد اکسایش کربن از ۰ به +۲ تغییر می‌کند.



گزینه (۴): در این واکنش، عدد اکسایش کربن تغییری نمی‌کند.



$$\text{CaCO}_3 = ۲ + \text{C} + ۳(-۲) = ۰ \Rightarrow \text{C} = +۴$$

$$\text{CO}_2 = \text{C} + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow \text{C} = +۴$$

با توجه به عبارت‌های داده‌شده که مربوط به فلزهای X ، Y و Z در دمای 25°C هستند، کدام مورد نادرست است؟

- فلزهای X و Y با محلول $1/0$ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.
- قدر مطلق پتانسیل الکترودی X از Y بزرگ‌تر است.
- در سلول گالوانی $Y - Z$ ، الکتروود Z کاتد است.
- (۱) در سلول گالوانی تشکیل‌شده از دو فلز X و Y ، جهت جریان الکترون‌ها به سمت فلز Y است.
- (۲) در سلول گالوانی X و Z ، جهت حرکت آنیون‌ها به سمت الکتروود X است.
- (۳) اگر قطعه‌ای از فلز Z در داخل محلولی از کاتیون‌های X^{2+} قرار گیرد، پس از مدتی دمای محلول همان 25°C باقی خواهد ماند.
- (۴) ترتیب $Y^{2+} > Z^{2+} > X^{2+}$ را می‌توان به مقایسه قدرت اکسندگی این گونه‌ها نسبت داد.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اول ببینیم از هر داده چه نتیجه‌ای می‌گیریم:

• E° فلزهای X و Y منفی است و در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از هیدروژن ($E^\circ = 0$) قرار دارند.

H_2	یا	H_2
X		Y
Y		X

• با توجه به این که E° هر دو منفی است، X در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از Y قرار دارد.

H_2
Y
X

• در سلول‌های گالوانی، E° مثبت‌تر، کاتد است پس فلز Z بالاتر از Y و X در سری الکتروشیمیایی جای دارد.

H_2	یا	Z
Z		H_2
Y		Y
X		X

مقایسه قدرت کاهندگی فلزها برخلاف قدرت اکسندگی کاتیون‌های آنهاست:

$$X^{2+} < Y^{2+} < Z^{2+} \Rightarrow \text{قدرت اکسندگی: } X > Y > Z$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در سلول‌های گالوانی جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است. در این جا X آند و Y کاتد سلول گالوانی را تشکیل می‌دهد؛ پس جهت حرکت الکترون‌ها به سمت Y است.

گزینه (۲): در یک سلول گالوانی، کاتیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل به سمت کاتد و آنیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل به سمت آند می‌روند. در سلول گالوانی X و Z ، X نقش آند و Z نقش کاتد را دارد. پس در این جا آنیون‌های نیم‌سلول Z (نیم‌سلول کاتدی)، به سمت نیم‌سلول X می‌روند.

گزینه (۳):

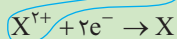
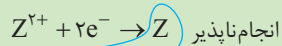
پیش‌بینی انجام‌پذیری واکنش‌ها:

گونه سمت راست از نیم‌واکنش پایین‌تر (E° کم‌تر) در سری الکتروشیمیایی، می‌تواند با گونه سمت چپ از نیم‌واکنش بالاتر (E° بیشتر)، به طور خودبه‌خودی واکنش دهد.

واکنش انجام‌پذیر است. $\rightarrow$ $\underbrace{\text{چپ بالاتر}}_{\text{اکسنده قوی‌تر}} + \underbrace{\text{راست پایین‌تر}}_{\text{کاهنده قوی‌تر}}$

نکته: 

از آن جا که Z در سری الکتروشیمیایی بالاتر از X است، X نسبت به Z کاهنده قوی تری است و در نتیجه نمی تواند X^{2+} را به صورت فلزی آزاد کند و واکنش انجام نمی شود و دما نیز تغییر نمی کند.



عبارت های داده شده زیر مربوط به فلزهای X، Y و Z در دمای $25^\circ C$ هستند. (سؤال ۱۱ - امتحان نوبتی فرورد ۱۴۰۴)

• فلزهای X و Y یا محلول $1 M$ / هیدروکلریک اسید واکنش می دهند و گاز هیدروژن تولید می کنند.

• قدرمطلق پتانسیل الکترودی X از Y بزرگ تر است.

• در سلول گالوانی $Y - Z$ الکتروود Z کاتد است.

الف) در سلول گالوانی تشکیل شده از دو فلز X و Y جهت جریان الکترون ها به سمت کدام فلز است؟

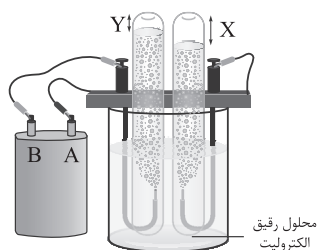
ب) در سلول گالوانی X و Z جهت حرکت آنیون ها به سمت کدام الکتروود (X یا Z) است؟

پ) قطعه ای از فلز Z در داخل محلولی از کاتیون های X^{2+} قرار می گیرد، پس از مدتی دمای محلول کدام یک از اعداد (۲۳ یا ۲۵ یا ۲۷) است؟ چرا؟

ت) با گذشت زمان در سلول X و Z جرم تیغه X چه تغییری می کند؟

ث) اگر بخواهیم در فرایند آبکاری، ظرفی از جنس فلز X را با فلز Z روکش دهیم، در این صورت فلز X به کدام قطب باتری متصل می شود؟ در این فرایند محلول الکتروولیت حاوی کاتیون های کدام فلز است؟

با توجه به شکل زیر که مربوط به برقکافت آب است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) گاز X را می‌توان به عنوان سوخت وارد قطب منفی سلول سوختی

آند

هیدروژن

ب) در این فرایند با گذشت زمان، غلظت ماده حل شده در الکترولیت افزایش می‌یابد.

ج) واکنش کلی برقکافت آب، مانند واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن است.

د) B قطب مثبت باتری است و pH محلول الکترولیت در اطراف الکترود متصل به آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

۲) ب و د

۱) الف و ج

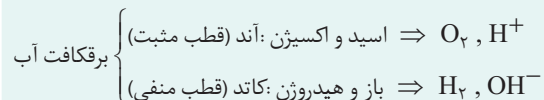
۴) ج و د

۳) الف و ب

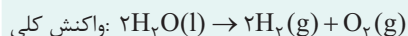
پاسخ: گزینه ۲

برقکافت آب

یکی از کاربردهای سلول‌های الکترولیتی، برقکافت مواد است. برقکافت آب فرایندی است که در آن، جریان برق از آب عبور داده می‌شود و طی آن، آب به عنصرهای سازنده‌اش (H_2 و O_2) تجزیه می‌شود. نیم‌واکنش‌های انجام شده در سلول الکترولیتی برقکافت آب به صورت زیر است:



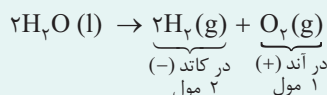
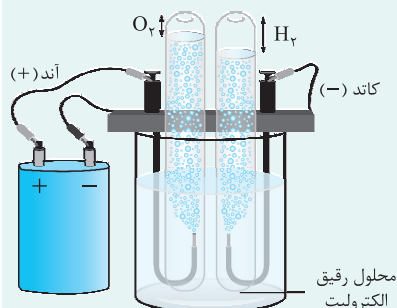
با جمع کردن نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، واکنش کلی برقکافت آب به دست می‌آید:



۱) مقدار یون‌های H^+ و OH^- در آب خالص بسیار کم است؛ به همین دلیل آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد؛ بنابراین برای برقکافت آب، باید اندکی الکترولیت (مانند H_2SO_4 ، KNO_3 و ...) به آب اضافه کرد.

۲) در برقکافت آب، در کاتد یون OH^- و در آند یون H^+ تولید می‌شود. پس محیط پیرامون کاتد، بازی ($pH > 7$) و محیط پیرامون آند، اسیدی ($pH < 7$) می‌شود؛ بنابراین کاغذ pH در محلول پیرامون کاتد به رنگ آبی و در محلول پیرامون آند، به رنگ سرخ درمی‌آید. ولی *هواستون باشه* که pH کل الکترولیت تغییری نمی‌کند، زیرا ضرایب H^+ و OH^- در نیم‌واکنش‌ها با هم برابر است.

۳) در برقکافت آب، گاز هیدروژن در کاتد و گاز اکسیژن در آند، تولید می‌شود. با توجه به ضرایب استوکیومتری در واکنش کلی، حجم گاز هیدروژن تولید شده در کاتد، دو برابر حجم گاز اکسیژن تولید شده در آند است.



$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \text{ g} & 1 \times 32 &= 32 \text{ g} \\ \text{جرم گاز آند} &= 4 & \text{جرم گاز کاتد} &= 32 \\ \frac{1}{2} &= \frac{4}{32} & \frac{32}{4} &= 8 \end{aligned}$$

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

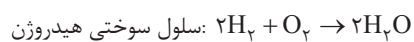
پاسخ خیلی تشریحی ✓

در برقکافت آب، حجم گاز هیدروژن تولید شده در کاتد، دو برابر حجم گاز اکسیژن تولید شده در آند است؛ پس در این جا، گاز X که حجم بیشتری دارد، H_2 و گاز Y با حجم کم‌تر، O_2 است.

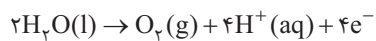
بررسی عبارت‌ها:

(الف) در سلول سوختی هیدروژن، گاز H_2 در آند (قطب منفی) اکسایش می‌یابد.

(ب) با عبور جریان برق از درون آب، مولکول‌های آب تجزیه شده و به گازهای H_2 و O_2 تبدیل و از آب خارج می‌شوند؛ بنابراین با گذشت زمان در این سلول، مقدار مولکول آب کاهش و غلظت ماده‌ای که به عنوان الکترولیت به آب اضافه شده، افزایش می‌یابد. (ج) واکنش کلی برقکافت آب، وارونه واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن است.



(د) دیدیم که گاز Y همان O_2 است که در آند تولید می‌شود. از طرفی می‌دانیم که در سلول‌های الکترولیتی، آند به قطب مثبت باتری متصل می‌شود؛ پس B قطب مثبت باتری است. نیم‌واکنش انجام‌شده در اطراف قطب مثبت این سلول به صورت زیر است:



اما دقت کنید که با تولید H^+ ، pH محلول در اطراف قطب مثبت، کاهش می‌یابد.

کدام مورد نادرست است؟

- ۱) خوردگی آهن یک فرایند الکتروشیمیایی خودبه‌خودی است که در آن، آهن، کاهنده و گاز اکسیژن، اکسنده است.
- ۲) سرعت خوردگی آهن به عواملی نظیر رطوبت، دما و وجود مواد اکسیدکننده در محیط بستگی دارد.
- ۳) هر چه اختلاف پتانسیل کاهشی استاندارد بین آهن و ماده اکسیدکننده بیشتر باشد، سرعت خوردگی کم‌تر خواهد بود.
- ۴) تشکیل زنگار سبز بر سطح مس، نمونه‌ای از فرایند خوردگی به شمار می‌آید.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هر چه تفاوت E° نیم‌سلول‌ها بیشتر باشد، emf سلول و در نتیجه قدرت آن بیشتر خواهد بود؛ از آن‌جا که اکسیژن در محیط اسیدی قدرت اکسندگی و E° بزرگ‌تری نسبت به محیط خنثی دارد، سرعت خوردگی آهن در محیط اسیدی بیشتر خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱): در فرایند خوردگی آهن، بخشی از سطح فلز آهن به عنوان آند عمل کرده و Fe در ابتدا به Fe^{2+} و سپس Fe^{3+} تبدیل می‌شود. در این فرایند، Fe کاهنده و O_2 اکسنده است.

گزینه ۲): کاملاً درسته!

گزینه ۴): زنگار سبز بر سطح مس و زنگ‌زدن آهن، نمونه‌هایی از خوردگی هستند.

اگر در شرایط معین، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تجزیه ۶/۱۲۵ گرم پتاسیم کلرات مطابق معادله
 $2\text{KClO}_3(\text{s}) \rightarrow 2\text{KCl}(\text{s}) + 3\text{O}_2(\text{g})$ با شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب
 برابر باشد، جرم فراورده تولیدشده در قطب منفی سلول، چند گرم است؟

($\text{K} = 39$, $\text{Cl} = 35.5$, $\text{Mg} = 24$, $\text{O} = 16$: g.mol^{-1})

کاتد

$$3/6 (2)$$

$$1/8 (1)$$

$$10/65 (4)$$

$$5/325 (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

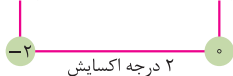
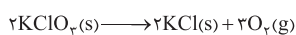


برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله‌شده در یک واکنش اکسایش - کاهش می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

شمار الکترون‌های مبادله‌شده
 تغییر عدد اکسایش اتم در اکسند $\times$ ضریب اکسند $\times$ شمار اتم‌های کاهش‌یافته در اکسند =
 براساس معادله موازنه‌شده

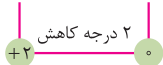
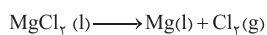
شمار الکترون‌های مبادله‌شده
 تغییر عدد اکسایش اتم در کاهند $\times$ ضریب کاهند $\times$ شمار اتم‌های اکسایش‌یافته در کاهند =
 براساس معادله موازنه‌شده

گام اول: ابتدا شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تجزیه پتاسیم کلرات و برقکافت منیزیم کلرید مذاب را به دست می‌آوریم:

ضریب KClO_3

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

تغییر عدد اکسایش هر اتم O تعداد اتم O در KClO_3

تغییر عدد اکسایش هر اتم O تعداد اتم O در KClO_3 ضریب MgCl_2

$$1 \times 1 \times 2 = 2$$

تغییر عدد اکسایش هر اتم Mg تعداد اتم Mg در MgCl_2

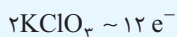
تغییر عدد اکسایش هر اتم Mg تعداد اتم Mg در MgCl_2

گام دوم: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در اثر تجزیه ۶/۱۲۵ گرم پتاسیم کلرات را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$6/125 \text{ g KClO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KClO}_3}{122.5 \text{ g KClO}_3} \times \frac{12 \text{ mol e}^-}{2 \text{ mol KClO}_3} = 0.3 \text{ mol e}^-$$

استفاده از کسر تناسب:

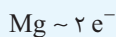


$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{6/125}{2 \times 122.5/5} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{6}{20} = 0.3 \text{ mol e}^-$$

گام سوم: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تجزیه «پتاسیم کلرات» با «سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب» برابر است؛ از طرفی در
 قطب منفی سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب، منیزیم تولید می‌شود؛ بنابراین از مول الکترون به جرم منیزیم تولیدشده می‌رسیم:

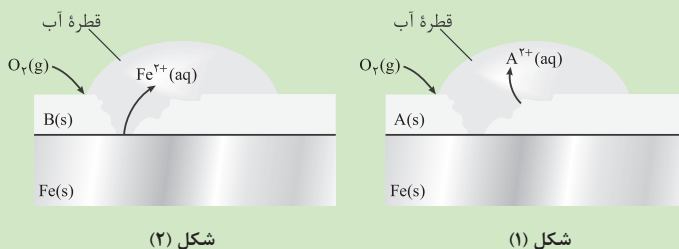
$$0.3 \text{ mol e}^- \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{2 \text{ mol e}^-} \times \frac{24 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} = 3.6 \text{ g Mg}$$

استفاده از کسر تناسب:



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{24/12} = \frac{0.3}{2} \Rightarrow x = 3.6 \text{ g Mg}$$

با توجه به شکل‌های زیر که دو قطعه آهن را نشان می‌دهند که با لایه نازکی از فلزهای A و B پوشیده شده‌اند، کدام موارد نادرست است؟



الف) قدرت کاهندگی فلز A از فلز B بیشتر است.

ب) مجموع ضرایب گونه‌ها در معادله موازنه‌شده نیم‌واکنش کاهش انجام‌شده در شکل (۲) برابر ۱۱ است.

ج) برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی می‌توان از ورقه آهنی مانند شکل (۱) استفاده کرد.

د) در شکل (۱)، آهن نقش کاتد را دارد و کاهش می‌یابد.

۲) ب و ج

۱) الف و د

۴) ج و د

۳) الف و ب

پاسخ: گزینه ۴

عبارت‌های «ج» و «د» نادرست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

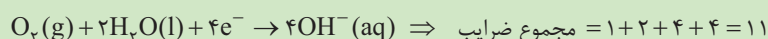
شکل (۱) مربوط به حفاظت کاتدی آهن است و در شکل (۲) آهن خورده می‌شود.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در شکل (۱)، فلز A اکسید شده است؛ یعنی قدرت کاهندگی فلز A از آهن بیشتر است. از طرفی در شکل (۲)، فلز آهن خورده شده است؛ یعنی قدرت کاهندگی فلز آهن از B بیشتر است.

قدرت کاهندگی: $A > Fe > B$

ب) نیم‌واکنش کاهش در شکل (۲)، مربوط به مولکول‌های اکسیژن به صورت زیر است:



ج) برای ساخت قوطی روغن نباتی از حلبی استفاده می‌شود. در حلبی روکشی از جنس قلع روی آهن ایجاد می‌شود و با توجه به این که قدرت کاهندگی فلز آهن از قلع بیشتر است، در صورت خراشیده شدن حلبی، آهن زنگ می‌زند؛ بنابراین شکل (۲) می‌تواند نشان‌دهنده آن باشد.

د) درسته که در شکل (۱) آهن نقش کاتد را دارد، اما نیم‌واکنش کاهش مربوط به مولکول‌های اکسیژن است.

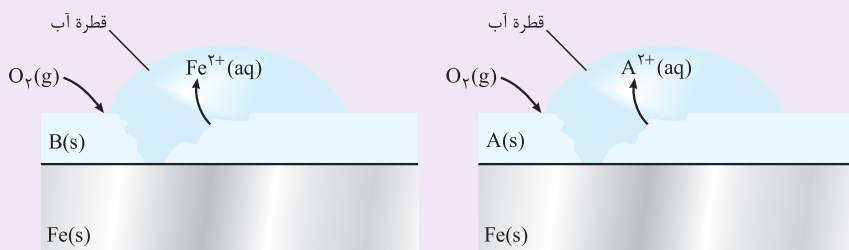
آند، کاتد و نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در سه فرایند مهم کتاب درسی:



فرایند	آند	نیم‌واکنش اکسایش	کاتد	نیم‌واکنش کاهش
خوردگی آهن	آهن	$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$	آهن	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
آهن سفید (گالوانیزه) خراش‌دیده	روی	$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$	آهن	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
حلبی خراش‌دیده	آهن	$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$	قلع	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

شکل زیر دو قطعه آهن را نشان می‌دهد که با لایه نازکی از فلز A و B پوشیده شده است. با توجه به آن پاسخ دهید.

(سؤال ۶ - امتحان نهایی دی ۱۴۰۲)



شکل (۲)

شکل (۱)

الف) کدام فلز (A) یا (B)، قدرت کاهندگی بیشتری دارد؟ چرا؟

ب) نیم‌واکنش موازنه شده کاهش را بنویسید.

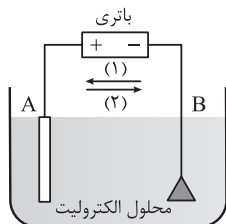
پ) برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی، ورقه‌های آهن را با لایه نازکی از کدام فلز (روی یا قلع) می‌پوشانند؟ دلیل بنویسید.

$$E^{\circ}(\text{Fe}^{2+} / \text{Fe}) = -0.44 \text{ V}$$

$$E^{\circ}(\text{Sn}^{2+} / \text{Sn}) = -0.14 \text{ V}$$

$$E^{\circ}(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) = -0.76 \text{ V}$$

اگر شکل زیر مربوط به فرایند آبکاری باشد، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟



- (۱) نیم‌واکنش کاهش بر روی الکترود B انجام می‌شود.
- (۲) پیکان (۱) جهت جابه‌جایی الکترون‌ها را در مدار بیرونی نشان می‌دهد.
- (۳) محلول الکترولیت شامل کاتیون‌های فلز A است.
- (۴) E° فلز A نسبت به B، می‌تواند کمتر یا بیشتر باشد.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه (۲) برخلاف سایر گزینه‌ها، نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

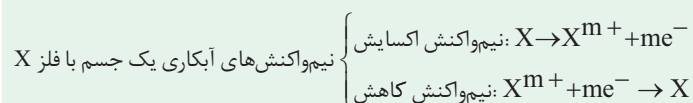
● اگر در آبکاری، هدف، پوشش فلز X بر روی یک جسم باشد، آن جسم در کاتد و فلز X در آند قرار می‌گیرد و از نمک محلول فلز X به عنوان الکترولیت استفاده می‌شود.

جسم مورد آبکاری ← نقش کاتد ← متصل شدن به قطب منفی باتری ← پس از مدتی جرم آن افزایش می‌یابد.

فلز پوشاننده ← نقش آند ← متصل شدن به قطب مثبت باتری ← پس از مدتی جرم آن کاهش می‌یابد.

الکترولیت سلول ← نمکی از فلز پوشاننده یعنی همان آند

● در فرایند آبکاری، نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی هر دو مربوط به فلز پوشاننده هستند.



در شکل نشان داده شده، A نقش آند (قطب مثبت) و B نقش کاتد (قطب منفی) را دارد.

در فرایند آبکاری، جهت حرکت الکترون‌ها از آند به کاتد (پیکان ۲) است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): جسم B نقش کاتد را دارد و در آن، کاتیون‌های موجود در الکترولیت کاهش می‌یابند.

گزینه (۳): الکترولیت باید حاوی یون‌های فلز پوشاننده A باشد.

گزینه (۴): در سلول‌های الکترولیتی، بدون توجه به موقعیت فلزها در سری الکتروشیمیایی و E° آن‌ها، فلزی که به قطب مثبت

باتری متصل باشد، آند و فلزی که به قطب منفی باتری متصل باشد، کاتد است، یعنی در سلول‌های الکترولیتی برخلاف سلول‌های

گالوانی، تنها نوع اتصال تیغه‌ها به قطب‌های مثبت و منفی باتری، تعیین‌کننده آند و کاتد است؛ بنابراین در آبکاری، E° فلز

پوشاننده می‌تواند کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از E° فلز سازنده جسم مورد نظر باشد.

- (۱) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه شده مربوط به فرایند هال، ۴ برابر تغییر عدد اکسایش هر اتم آلومینیم است.
- (۲) تولید قوطی های آلومینیمی از قوطی های کهنه نسبت به تهیه همان تعداد قوطی ها از فرایند هال، ۹۳ درصد در مصرف انرژی صرفه جویی می کند.
- (۳) در فرایند هال، با گذشت زمان از جرم آند کاسته می شود.
- (۴) فلز آلومینیم در مقابل اکسایش مقاوم بوده و وسایل تولیدی از آن، برای مدت طولانی استحکام خود را حفظ می کنند.

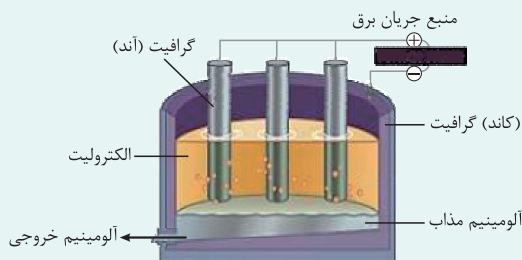
پاسخ: گزینه ۴

فرایند هال

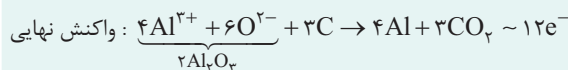
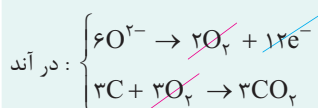
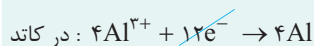
درس Box

آلومینیم در طبیعت به شکل ترکیب یافت می شود. در صنعت این فلز را از برقکافت Al_2O_3 مذاب در یک سلول الکترولیتی به دست می آورند. تولید آلومینیم به این روش به افتخار شیمی دان آمریکایی جناب «چارلز مارتین هال»، فرایند هال نامیده می شود. بریم سراغ نکات سلول الکترولیتی مربوط به فرایند هال:

- (۱) الکترولیت مورد استفاده در این سلول، حاوی Al_2O_3 مذاب است.
- (۲) آند و کاتد این سلول، هر دو از جنس گرافیت هستند. دیواره ها و کف این سلول، نقش کاتد (قطب منفی) را دارند، در حالی که میله های گرافیتی بالای سلول، نقش آند (قطب مثبت) را دارند.
- (۳) در کاتد این سلول، نیم واکنش $Al^{3+}(l) + 3e^- \rightarrow Al(l)$ انجام می شود.
- (۴) در آند این سلول، ابتدا نیم واکنش $2O^{2-}(l) \rightarrow O_2(g) + 4e^-$ انجام می شود سپس گرافیت موجود در آند با گاز اکسیژن تولید شده واکنش داده و طبق معادله $O_2(g) + C \rightarrow CO_2(g)$ (گرافیت)، گاز کربن دی اکسید تولید می کند.



با ضرب نیم واکنش های نوشته شده در عدد مناسب و جمع کردن آن ها، واکنش کلی سلول به دست می آید:



(۵) در سلول الکترولیتی مربوط به فرایند هال، گرافیت کاتد نقشی در نیم واکنش کاتدی ندارد، اما گرافیت آند، نقش واکنش دهنده را هم بازی می کند، به همین دلیل رفته رفته! از جرم آن کم می شود.

(۶) با توجه به این که چگالی آلومینیم مذاب تولید شده در کاتد بیشتر از الکترولیت موجود در سلول است، آلومینیم مذاب پایین تر از الکترولیت مذاب، بر روی کاتد گرافیتی (ته ظرف) ته نشین می شود و به کمک یک لوله از قسمت پایینی سلول جمع آوری می شود. (شکل رو ببینید!)

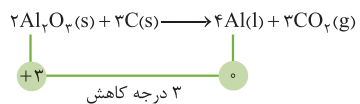
(۷) فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی، هزینه بالایی دارد. از طرفی فلز آلومینیم یکی از مهم ترین منابع تجدیدناپذیر طبیعت است، بنابراین با بازیافت فلز آلومینیم می توان علاوه بر افزایش عمر این منبع، برخی از هزینه های تولید آن را کاهش داد.

نوجه تولید قوطی های آلومینیمی از قوطی های کهنه، فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

آلومینیم فلزی فعال است و به سرعت در هوا اکسایش می‌یابد! این فلز در مقابل خوردگی مقاوم است نه اکسایش!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): واکنش کلی فرایند هال به صورت زیر است:



$$\text{مجموع ضرایب} = 2 + 3 + 4 + 3 = 12$$

گزینه (۲): تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد و ۹۳ درصد در انرژی صرفه‌جویی می‌شود.

گزینه (۳): میله‌های گرافیتی در این سلول نقش آند را دارند و با گاز اکسیژن واکنش داده و مصرف می‌شوند؛ بنابراین با گذشت زمان، جرم آن کاهش می‌یابد.