

آزمون شماره (۱۷)

جمعه

۱۴۰۴/۱۲/۰۱

دفترچه
شماره ۱آزمون‌های سراسر
گاج

گزینه دروس را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۵۰	مدت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	حسابان ۲	اجباری	۱۰	۱	۸۰ دقیقه
	ریاضیات گسسته		۱۰	۱۱	
	هندسه ۳		۱۰	۲۱	
	حسابان ۱		۵	۳۱	
	هندسه ۲		۱۰	۳۶	
	آمار و احتمال		۵	۴۶	

ریاضیات



۱- خط $y+3x=4$ بر نمودار تابع f در $x=1$ مماس است. اگر داشته باشیم $g(3x^2-1)=f^2(\sqrt{x})+\sqrt[3]{f(x)}$ شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول $x=2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۲- تابع با ضابطه $f(x)=-2ax^3+3bx^2-3x$ مفروض است. هرگاه $g(x)=\begin{cases} f(x) & x>1 \\ f'(x) & x\leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر باشد، حاصل مشتق $\frac{1}{f}$ در $x=2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $-\frac{7}{36}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $-\frac{7}{6}$

۳- اگر قسمتی از نمودار $f(x)=\sqrt[5]{x^3-6x-2p}$ به شکل  باشد، p کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۴- تابع $f(x)=[\sqrt{3}x]-[x^2]$ در بازه $(1, 3)$ چند نقطه مشتق ناپذیر دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴) ۶

۵- اگر $f(x)=8\tan^3\frac{\pi}{\sqrt{3x+1}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، مشتق $f \circ g$ در $x=4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{45\pi}{8}$ (۲) $-\frac{45\pi}{8}$ (۳) $\frac{25}{6}$ (۴) $-\frac{15\pi}{16}$

۶- نیم‌مماس‌های رسم‌شده بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{4-ax^2}}$ در نقطه گوشه بر هم عمودند. مقدار $f'_+(0)-f'_-(0)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۷- اگر $f(x)=3-2x$ و $g(x)=2x^2-3x+1$ ، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g \circ f$ در نقطه‌ای به طول k با آهنگ تغییر متوسط تابع $f \circ g$ در بازه $[-1, 5]$ برابر باشد. k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+2}{x^3-8} = 2$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(-2-h)+1}{h^2-2h} = -1$ ، طول از مبدأ خط مماس بر منحنی تابع $f \circ g$ در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

- (۱) $-\frac{31}{16}$ (۲) ۳۱ (۳) ۱۶ (۴) $\frac{31}{16}$

۹- اگر $f(x)=\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 3x}$ و $f(x)=\frac{3}{y}$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} g(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۰- فرض کنید $f(x)=x^3+6x^2-2ax+b$ باشد. اگر باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $f'(x)$ به ترتیب برابر -4 و 4 باشد، حاصل $\frac{1}{y}ab$ کدام است؟

- (۱) -۱۷۶ (۲) -۳۵۲ (۳) -۴۸ (۴) -۹۶

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته

۱۱- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ در این صورت چند رمز یا کد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که تعداد رقم های به کار رفته از مجموعه های A و B یکسان نباشد؟

- (۱) ۱۲۸۰ (۲) ۱۲۲۰ (۳) ۱۲۹۶ (۴) ۱۵۸۴

۱۲- با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۶ (۳) ۵۲ (۴) ۶۲

۱۳- چند تابع $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ می توان تعریف کرد به طوری که مجموع مقادیر تابع عددی زوج باشد؟

- (۱) ۲۲۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۲۰

۱۴- چند جواب طبیعی برای معادله $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 3^7 \times 5^8$ برقرار است؟

- (۱) ۱۲۸۴ (۲) ۱۳۲۰ (۳) ۱۵۶۴ (۴) ۱۶۲۰

۱۵- چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن حداقل ۴ و حداکثر ۸ باشد؟

- (۱) ۲۷۰ (۲) ۲۹۵ (۳) ۳۱۵ (۴) ۳۳۰

۱۶- ۹ توپ یکسان را در ۳ ظرف A ، B و C می ریزیم. در چند حالت تعداد توپ های ظرف A از تعداد توپ های ظرف B بیشتر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

۱۷- می خواهیم از بین ۵ نوع نوشابه a ، b ، c ، d و e ۲۰ نوشابه انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است در صورتی که از هر نوع نوشابه حداقل ۲ نوشابه انتخاب کنیم و مجموع نوشابه های a و b برابر ۸ شود؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۵۰

۱۸- از بین جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ یک جواب انتخاب می کنیم. احتمال این که در این جواب $x_4 > x_1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{44}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{3}{22}$ (۴) $\frac{21}{42}$

۱۹- تعداد جواب های طبیعی معادله $x_1 + \sqrt{x_2 + x_3} + \frac{x_4}{3} + x_5 = 6$ کدام است؟

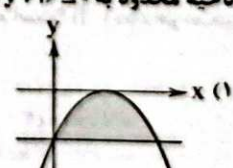
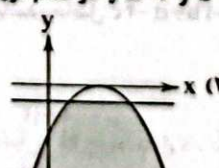
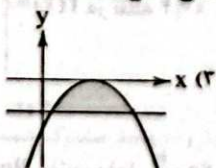
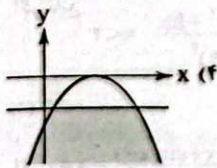
- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۲۰- در بسط $(a+b+c+d+e)^{13}$ چند جمله وجود دارد که توان a برابر ۵ باشد؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۵ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۰۰

هندسه (۲)

۲۱- ناحیه محدود به $x^2 - 8x + 4y + 16 \leq 0$ و $y \geq -3$ در کدام گزینه به درستی نشان داده شده است؟



۲۲- نقاط $A(5, 3, -1)$ ، $B(4, 2, 2)$ و $C(-1, 2, 2)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه CM کدام است؟

- (۱) $\sqrt{34/5}$ (۲) $\sqrt{52/5}$ (۳) $\sqrt{42/5}$ (۴) $\sqrt{72/5}$

محل انجام محاسبات

۲۳- مساحت ناحیه محصور بین نمودار $-2 \leq x-y \leq -4$ و محورهای مختصات کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۲۴- چند نقطه با مختصات صحیح در رابطه $|x|+|y| \leq 4$ صدق می‌کند؟

- ۲۸ (۱) ۳۱ (۲) ۵۲ (۳) ۴۱ (۴)

۲۵- چند نقطه در فضای سه بعدی وجود دارد که از صفحه‌های xOy ، xOz و yOz به ترتیب ۲، ۳ و ۵ واحد فاصله داشته باشند؟

- ۸ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۲۶- نقطه P روی محور x ها به گونه‌ای قرار دارد که از دو نقطه $A(1, 2, -3)$ و $B(4, -1, 5)$ به یک فاصله است. مجموع مختصات قرینه نقطه P نسبت به نقطه $M(6, 4, 5)$ کدام است؟

- ۲۲ (۱) ۵۵ (۲) ۷۶ (۳) ۵۶ (۴)

۲۷- بازتاب تمام پرتوهای نوری که موازی محور تقارن سهمی به معادله $y^2 - 8y + 4x - p = 0$ هستند، از نقطه $(5, 4)$ می‌گذرند. p کدام است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴)

۲۸- در یک آینه سهمی شکل، فاصله کانون تا رأس برابر ۲۴ و قطر قاعده آن ۱۰۰ واحد است. عمق این آینه در مرکز چند واحد است؟

- ۶۲۵ (۱) ۲۴ (۲) ۱۰۳۴ (۳) ۵۶ (۴)

۲۹- یک پرتو نوری در راستای خط $y=5$ بر سهمی به معادله $y^2=20x$ می‌تابد. معادله خط بازتاب کدام است؟

- ۳۷+۴x=۲۰ (۱) ۴y+۳x=۱۵ (۲) ۴y+۳x=-۲۰ (۳) ۴y+۳x=-۱۵ (۴)

۳۰- حجم ناحیه محدود به صفحات $x=3$ ، $x=-2$ ، $y=1$ ، $y=-5$ ، $z=1$ و $z=-4$ کدام است؟

- ۱۵۰ (۱) ۷۰ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

حسابان (۱)

۳۱- اگر $\frac{1}{3} \log_{\sqrt{5}} 6x = {}^3 \log_3 (x+4) + \log_3 (x-4)$ باشد، حاصل $1 - (\log_3 (x+1))$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۳۲- با توجه به معادله $(\sqrt[3]{6^a-8})(\sqrt[3]{6^b-8})=6^{1-a}$ ، حاصل $\log_6 (a^2b+6)$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۳۳- تابع $f(x) = \frac{x^2+ax+2b}{x+\sqrt{x+6}}$ در نقطه‌ای به طول x ناپیوسته است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{5}$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۳ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴)

۳۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2[-x]+d & x>2 \\ c & x=2 \\ \frac{x^3+ax^2+bx}{(x-2)^2} & x<2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته باشد، حاصل $2a-2b+d-3c$ کدام است؟ [نماد جزء صحیح است.]

- ۱۴ (۱) ۱۴ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴)

۳۵- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{b \sin^2 x - 1} = a \neq 0$ باشد، مقدار $2a - \frac{b}{3}$ کدام است؟

- ۷ (۱) $-\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{5}{6}$ (۴)

محل انجام محاسبات

هندسه (۲)

۳۶- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ ، $\hat{B} = 30^\circ$ ، $\hat{C} = 90^\circ$ است. اگر در این مثلث $BC = 16$ باشد و $A'B'C'$ تبدیل یافته مثلث ABC تحت تبدیل طولی T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۲۸ (۲)

۲۴ (۱)

۳۷- در مربع $ABCD$ نقطه $A(6, 3)$ و عرض رأس‌های C و D به ترتیب ۱ و ۵ است. اگر بازتاب نقطه C نسبت به محور y ها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات کدام است؟

 $3\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{17}$ (۳)

۴ (۲)

 $\sqrt{15}$ (۱)

۳۸- در شکل زیر بازتاب نقطه A نسبت به خط d_1 نقطه B است و بازتاب نقطه B نسبت به خط d_2 نقطه C است. اگر $OA = 12$ باشد، فاصله

AC کدام است؟

 $12\sqrt{2}$ (۱) $16\sqrt{2}$ (۲) $16\sqrt{3}$ (۳) $12\sqrt{3}$ (۴)

۳۹- اگر دوران یافته نقطه $A(2, 3)$ و $B(5, 2)$ نسبت به نقطه O به ترتیب $A'(1, 0)$ و $B'(1, 1)$ است. طول نقطه O کدام است؟

 $\frac{63}{22}$ (۴) $\frac{65}{22}$ (۳) $\frac{67}{22}$ (۲) $\frac{69}{22}$ (۱)

۴۰- دو پاره‌خط AB و $A'B'$ به ترتیب با طول‌های ۱۴ و ۲۱ واحد به فاصله ۳۵ واحد از یک‌دیگر، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصله دو مرکز تجانس با فرض $AA' = BB'$ کدام است؟

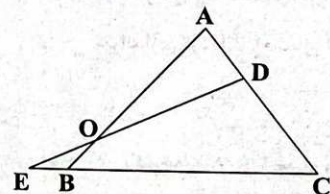
۸۴ (۴)

۸۱ (۳)

۷۲ (۲)

۶۵ (۱)

۴۱- در شکل زیر، نقطه D روی ضلع AC است که $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ و نقطه B تصویر نقطه A در تجانس به مرکز O و نسبت p است. اگر $OD = 4OE$ باشد، مقدار p کدام است؟

مقدار p کدام است؟ $\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{2}{13}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{2}{13}$ (۴)

۴۲- در بین مثلث‌هایی با مساحت ۶۰ واحد مربع که در ضلعی به اندازه ۱۰ واحد مشترک هستند، بیشترین مقدار شعاع دایره محاطی داخلی آن مثلث‌ها، کدام است؟

 $\frac{13}{3}$ (۴)

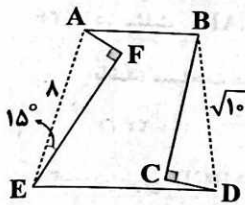
۴ (۳)

 $\frac{11}{3}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۱)

محل انجام محاسبات

۴۳- زمینی به شکل شش ضلعی داریم که $BC = 3CD$ است. اگر بدون تغییر محیط شش ضلعی، مساحت آن را تا حد امکان افزایش دهیم و در

این حالت مساحت شش ضلعی ۲ برابر مساحت شش ضلعی اولیه شود، مساحت شش ضلعی اولیه چقدر است؟



(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۲۰

(۴) ۲۱

۴۴- نقاط $C(x, 0)$ و $B(9, 10)$ ، $A(4, 2)$ سه رأس یک مثلث هستند. کمترین محیط مثلث کدام است؟

(۴) $17 + \sqrt{89}$ (۳) $15 + \sqrt{89}$ (۲) $13 + \sqrt{89}$ (۱) $11 + \sqrt{89}$

۴۵- اگر $A(1, 2)$ ، $B(13, 13)$ ، $C(x, 0)$ و $D(x+4, 0)$ در صفحه مختصات مفروض باشند، کمترین اندازه خط شکسته $ACDB$ کدام است؟

(۴) ۲۱

(۳) ۲۰

(۲) ۱۹

(۱) ۱۸

آمار و احتمال

۴۶- هادی و علی به همراه ۷ نفر از دوستانشان می‌خواهند در یک مراسم، سخنرانی کنند. احتمال آن‌که بین هادی و علی دقیقاً ۳ نفر از

دوستانشان سخنرانی کنند، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۱) $\frac{1}{12}$

۴۷- اگر مقادیر $P(A \cup B)$ و $P(B - A)$ ، $P(A - B)$ دنباله حسابی تشکیل دهند، حاصل $\frac{P(A \cup B) - P(A - B)}{P(A - B) + P(A \cap B)}$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۸- تاسی ناسالم داریم که در آن احتمال رو شدن هر عدد، متناسب با تعداد مقسوم‌علیه‌های آن عدد است. در یک پرتاب این تاس، احتمال

این‌که عددی زوج بیاید، کدام است؟

(۴) $\frac{9}{14}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{7}$

۴۹- سه نفر در یک مسابقه تیراندازی که احتمال اصابت تیر هر یک از آن‌ها به هدف به ترتیب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{25}$ و $\frac{1}{75}$ است، به سمت هدفی

تیراندازی کرده‌اند. احتمال آن‌که حداقل یکی از آن‌ها به هدف بزند، چقدر است؟

(۴) $\frac{39}{40}$ (۳) $\frac{19}{20}$ (۲) $\frac{37}{40}$ (۱) $\frac{17}{20}$

۵۰- در یک جعبه ۸ مهره سیاه و ۱۰ مهره سفید وجود دارد. دو مهره را به طور متوالی و بدون جای‌گذاری از جعبه خارج می‌کنیم، اگر مهره دوم

سیاه باشد، احتمال سفید بودن مهره اول کدام است؟

(۴) $\frac{12}{19}$ (۳) $\frac{10}{17}$ (۲) $\frac{7}{13}$ (۱) $\frac{5}{9}$

محل انجام محاسبات

آزمون شماره (۱۷)
جمعه
۱۴۰۴/۱۲/۰۱

دفترچه
شماره ۲

آزمون‌های سراسر گاج

گزینۀ دروس را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۶۰	مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

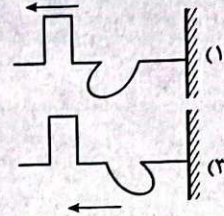
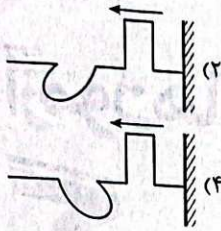
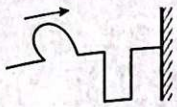
عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	شماره سؤال از	مدت پاسخگویی
۱	فیزیک ۳	اجباری	۲۵	۵۱	۷۵
	فیزیک ۱	زوج کتاب	۱۰	۷۶	۸۵
	فیزیک ۲		۱۰	۸۶	۹۵
۲	شیمی ۳	اجباری	۱۵	۹۶	۱۱۰
	شیمی ۱	زوج کتاب	۱۰	۱۱۱	۱۲۰
	شیمی ۲		۱۰	۱۲۱	۱۳۰

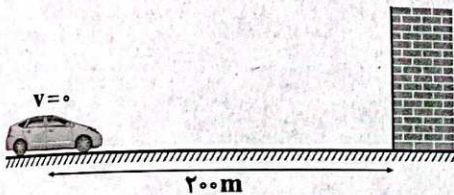
فیزیک



۵۱- شکل زیر یک موج مکانیکی است که در طول طنابی در حال عبور است و در انتها به یک میله که متصل است، برخورد کرده و بازتابیده می‌شود. موج بازتابیده مطابق با کدام گزینه است؟



۵۲- اتومبیلی مطابق شکل زیر، با شتاب ثابت $10 \frac{m}{s^2}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. پس از ۵ ثانیه، در همین لحظه صدای بوق اتومبیل توسط راننده به صدا در می‌آید و اتومبیل با سرعت ثابت به حرکت خودش ادامه می‌دهد. لحظه‌ای که راننده صدای بوق خودش را می‌شنود، فاصله‌اش تا مانع چند متر است؟ (سرعت صوت در هوا $300 \frac{m}{s}$ فرض شود).



۷۵ (۱)

 $\frac{375}{v}$ (۲)

۱۲۵ (۳)

۹۳/۷۵ (۴)

۵۳- وال عنبر با استفاده از پژواک امواج فراصوتی با بسامد $80 kHz$ مکانیابی می‌کند. اگر مجموع زمان رفت و برگشت امواج گسیل شده توسط وال در برخورد به مانع برابر $0.2s$ و مانع در فاصله 120 متری باشد، طول موج امواج گسیل شده چند سانتی‌متر است؟

۱/۵ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۷۵ (۱)

۵۴- چه تعداد از عبارات‌های زیر، نادرست است؟

(الف) در اجاق‌های خورشیدی برای گرم کردن آب یا مواد غذایی از امواج فرابنفش استفاده می‌شود.

(ب) قانون بازتاب عمومی برای سطوح ناصاف نیز برقرار است.

(ج) ضریب شکست خلأ برای تمام طول موج‌های امواج الکترومغناطیسی یکسان نیست.

(د) با افزایش دما، ضریب شکست هوا کاهش می‌یابد.

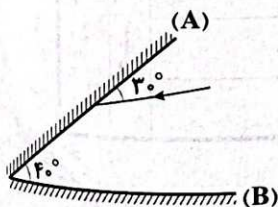
۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

صفر (۱)

۵۵- در شکل زیر، پرتوی نوری با زاویه 30° به آینه A می‌تابد و پس از بازتاب به آینه B می‌تابد. زاویه تابش در دومین برخورد به آینه A چند درجه است؟



۲۰ (۱)

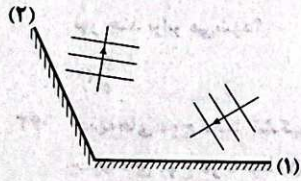
۳۰ (۲)

۴۰ (۳)

۷۰ (۴)

محل انجام محاسبات

- ۵۶- در شکل زیر، موج تختی ابتدا از مانع تخت (۱) و سپس از مانع تخت (۲) بازتاب می‌شود. اگر زاویه بین جبهه‌های موج تابیده به مانع (۱) و جبهه‌های موج بازتاب‌شده از مانع (۲) برابر 130° باشد، زاویه بین دو مانع چند درجه است؟



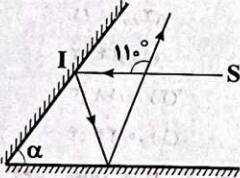
(۱) ۱۰۵

(۲) ۱۱۰

(۳) ۱۱۵

(۴) ۱۲۰

- ۵۷- در شکل زیر پرتوی SI به دو آینه متقاطع که زاویه بین آن‌ها α است، می‌تابد. با توجه به مسیر پرتوی نور، α چند درجه است؟



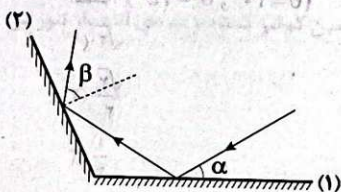
(۱) ۴۵

(۲) ۵۵

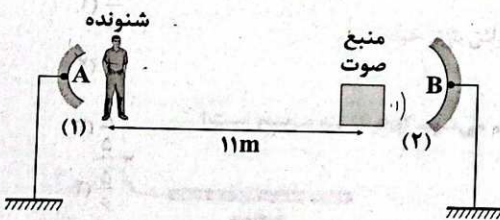
(۳) ۶۵

(۴) ۷۵

- ۵۸- مسیر حرکت پرتوی نوری در بازتاب از دو آینه تخت (۱) و (۲) مطابق شکل زیر است. اگر زاویه α ، 10° درجه افزایش یابد، زاویه β چند درجه و چگونه تغییر می‌کند؟ ($\alpha > 10^\circ$)

(۱) 20° کاهش می‌یابد.(۲) 10° کاهش می‌یابد.(۳) 20° افزایش می‌یابد.(۴) 10° افزایش می‌یابد.

- ۵۹- با توجه به شکل زیر، دو سطح کاو (۱) و (۲) روبه‌روی هم قرار دارند. فاصله کانونی سطح کاو (۱)، 25cm و فاصله کانونی سطح کاو (۲)، 75cm است. اگر فاصله دو نقطه A و B برابر 13m باشد، چشمه صوت به چه شکل جابه‌جا شود تا شنونده بیشترین شدت صوت را حس کند؟ (شنونده در سطح کاو (۱) قرار دارد).

(۱) $5/5$ متر به سمت راست(۲) $5/5$ متر به سمت چپ

(۳) ۱ متر به سمت راست

(۴) ۱ متر به سمت چپ

- ۶۰- اساس کار چه تعداد از دستگاه‌های زیر به درستی نوشته است؟

(الف) میکروفون سه‌موی ← بازتاب امواج مکانیکی (صوتی)

(ب) دستگاه لیتوتریپسی ← بازتاب امواج الکترومغناطیسی

(ج) دستگاه اندازه‌گیری تندی شارش خون ← مکان‌یابی پژواکی

(د) رادار دوپلری ← مکان‌یابی پژواکی با امواج الکترومغناطیسی

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

- ۶۱- با توجه به گزاره‌های زیر، کدام یک از آن‌ها صحیح است؟

(الف) اگر موج سینوسی از قسمت ضخیم طناب وارد قسمت نازک آن شود، طول موج آن کاهش می‌یابد.

(ب) تندی امواج روی سطح آب به عمق آب بستگی دارد.

(ج) هنگام ورود موج روی سطح آب از قسمت عمیق به قسمت کم‌عمق، فاصله بین جبهه‌های موج کاهش می‌یابد.

(۴) «الف» و «ج»

(۳) «ب» و «ج»

(۲) «الف» و «ب»

(۱) «الف»

محل انجام محاسبات

۶۲- ضریب شکست مایعی $\frac{4}{3}$ و ضریب شکست شیشه $\frac{1}{5}$ است. اگر نوری به طور مایل از شیشه به مایع بتابد و وارد مایع شود، تندی انتشار نور چند برابر می شود؟

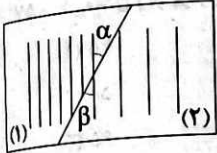
$$\frac{9}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۱)$$

۶۳- جبهه های موج تخت تشکیل شده در سطح آب یک تشت موج، در مرز دو ناحیه عمیق و کم عمق آن، به شکل زیر است. در مدتی که جبهه های موج در ناحیه (۱)، 15cm پیشروی می کنند، به ترتیب در این مدت جبهه های موج در ناحیه (۲) چند متر پیشروی می کنند و عمق کدام ناحیه نیز بیشتر است؟ ($\alpha = 3^\circ$, $\beta = 37^\circ$, $\sin 37^\circ = 0.6$)



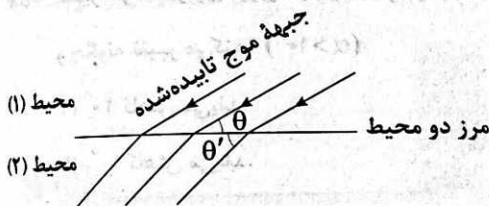
$$(۲), 1.8 \quad (۱)$$

$$(۱), 2.4 \quad (۲)$$

$$(۲), 0.18 \quad (۳)$$

$$(۱), 0.24 \quad (۴)$$

۶۴- مطابق شکل زیر، بعد از شکست موج در مرز جدایی دو محیط، فاصله بین دو جبهه موج در محیط دوم نسبت به محیط اول چقدر است؟ ($\theta = 3^\circ$, $\theta' = 45^\circ$)



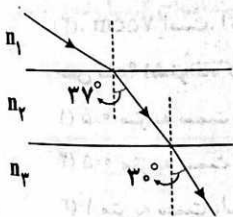
$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$1 \quad (۴)$$

۶۵- در شکل زیر، سطح جدایی محیط های شفاف با هم موازی هستند. نور از هوا وارد محیط (۲) و سپس وارد محیط (۳) می شود. طول موج نور در محیط (۲) چند برابر طول موج در محیط (۳) است؟ ($\sin 53^\circ = 0.8$)



$$\frac{8}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{6}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۴)$$

۶۶- پرتوی نور تک رنگی از محیط شفاف به ضریب شکست $\frac{1}{6}$ به هوا می تابد. اگر زاویه شکست ۲ برابر زاویه تابش باشد، زاویه بین پرتوی تابش و سطح جدایی دو محیط چند درجه است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)

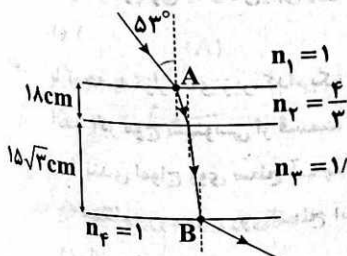
$$37 \quad (۲)$$

$$30 \quad (۱)$$

$$53 \quad (۴)$$

$$45 \quad (۳)$$

۶۷- مطابق شکل زیر، پرتوی نوری از هوا وارد محیط های شفاف با مرزهای موازی می شود و شکست می یابد. این پرتو فاصله A تا B را در چند نانوثانیه طی می کند؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$, $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)



$$1 \quad (۱)$$

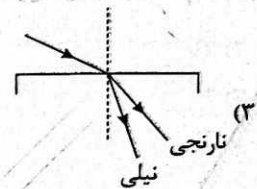
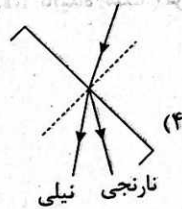
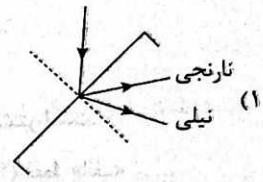
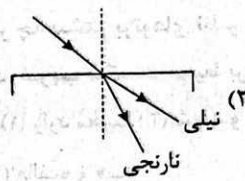
$$1/6 \quad (۲)$$

$$3/6 \quad (۳)$$

$$2/6 \quad (۴)$$

محل انجام محاسبات

۶۸- در شکل های زیر پرتوی فرودی که شامل نور نارنجی و نیلی است، از هوا وارد شیشه می شود. کدام شکل، شکست ممکن برای این دو پرتو را به درستی نشان می دهد؟



۶۹- کدام گزینه در مورد پدیده سراب صحیح است؟

(۱) با افزایش دما، چگالی هوا کاهش پیدا کرده و در نتیجه ضریب شکست لایه های هوای نزدیک به سطح زمین کمتر شده و تندی انتشار نور در نزدیکی سطح زمین بیشتر می شود.

(۲) در این پدیده تندی امواج نوری نزدیک به سطح زمین کمتر از لایه های بالاتر است.

(۳) علت پدیده سراب، حرکت روی خط راست امواج نوری است.

(۴) هیچ کدام

۷۰- کدام یک از موارد زیر در مورد پدیده پراش نادرست است؟

(۱) پدیده پراش هم برای امواج الکترومغناطیسی و هم امواج مکانیکی رخ می دهد.

(۲) در پدیده پراش، طول موج و تندی موج الکترومغناطیسی تغییر نمی کند.

(۳) در پدیده پراش هر چقدر پهنای شکاف از طول موج الکترومغناطیسی بیشتر باشد، پراش بازتر خواهد بود.

(۴) هیچ کدام

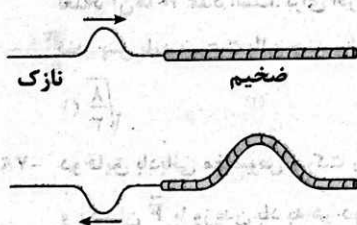
۷۱- با توجه به شکل زیر موجی در قسمت نازک در حال عبور است و وارد قسمت ضخیم می شود. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هنگام ورود موج به قسمت ضخیم، بسامد موج کاهش می یابد.

(۲) هنگام ورود موج به قسمت ضخیم، تندی موج افزایش می یابد.

(۳) طول موج موج بازتاب شده از طول موج عبوری بیشتر است.

(۴) بسامد موج عبوری نیز از بسامد موج بازتاب شده بیشتر است.



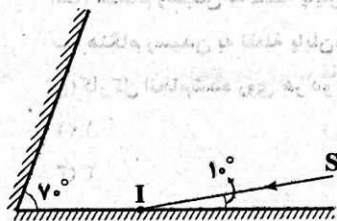
۷۲- در شکل زیر پرتوی SI در مجموع پس از چند بازتاب از مجموعه آینه ها خارج می شود و زاویه بازتابش در آخرین بازتاب چند درجه است؟

(۱) ۴ و ۵۰

(۲) ۴ و ۶۰

(۳) ۳ و ۵۰

(۴) ۳ و ۶۰



محل انجام محاسبات

۷۳- با توجه به گزاره‌های زیر، کدام گزینه درست است؟

(الف) در روزهای گرم به علت بالا رفتن دمای هوای نزدیک سطح زمین، چگالی و ضریب شکست آن کاهش می‌یابد.

(ب) در پدیدهٔ سراب با پایین آمدن هر چه بیشتر پرتوهای نظیر جبهه‌های موج، تندی امواج کاهش می‌یابد.

(ج) هر چه بسامد یک پرتو کم‌تر باشد، ضریب شکست محیط برای آن پرتو بیشتر است.

(د) اگر نورهای زرد و بنفش از محیط (۱) وارد محیط (۲) شوند و $n_2 > n_1$ باشد، انحراف نور زرد از بنفش بیشتر است.

(۴) فقط «الف»

(۳) «ب» و «د»

(۲) «الف» و «ب»

(۱) «الف» و «ج»

۷۴- در شکل زیر جبهه‌های موج تختی به آینهٔ M_1 تابیده است. اگر زاویهٔ بین دو آینه 120° باشد و جبهه‌های موج بازتاب از آینهٔ M_2 موازی با

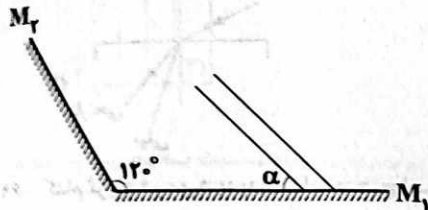
سطح آینهٔ M_1 باشد، α چند درجه است؟

(۱) 60°

(۲) 45°

(۳) 30°

(۴) 15°



۷۵- در آزمایش یانگ فاصله‌ی بین دو نوار روشن متوالی روی پرده در حالت اول 10 cm است. حال اگر طول موج نور تابشی 20% درصد کم‌تر از

طول موج اولیه باشد، فاصلهٔ بین دو نوار روشن متوالی روی پرده به اندازهٔ x تغییر می‌یابد. x کدام است؟

(۴) 0.2 mm

(۳) 0.02 mm

(۲) 0.2 cm

(۱) 2 cm

توجه: داوطلب گرامی، لطفاً از بین سؤالات زوج درس ۱ (فیزیک ۱)، شمارهٔ ۷۶ تا ۸۵ و زوج درس ۲ (فیزیک ۲)، شمارهٔ ۸۶ تا ۹۵، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

زوج درس ۱

فیزیک ۱ (سؤالات ۷۶ تا ۸۵)

۷۶- جسمی به جرم 8 kg روی سطح افقی ساکن است. اگر نیروی $F = 16\text{ N}$ موازی با سطح افقی که بدون اصطکاک است، به جسم وارد شود، کار انجام‌شده روی جسم در 3 ثانیهٔ دوم حرکت برابر چند ژول است؟

(۴) 800

(۳) 670

(۲) 432

(۱) 127

۷۷- بالونی به جرم 800 kg در حال حرکت در راستای قائم به سمت بالا است و کیسه‌های شنی که در کنار آن آویزان است، هر کدام 50 kg و

تعداد آن‌ها 10 عدد است. برای افزایش ارتفاع بیشتر باید نیمی از کیسه‌های شن را از بالن جدا کنیم، اما نمی‌خواهیم انرژی جنبشی آن تغییر

کند. پس باید سرعت بالن چند برابر شود؟

(۴) $\sqrt{\frac{26}{21}}$

(۳) $\sqrt{\frac{27}{26}}$

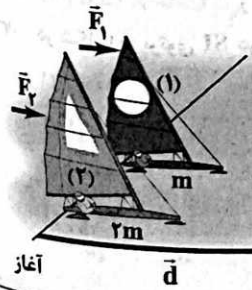
(۲) $\sqrt{\frac{19}{3}}$

(۱) $\sqrt{\frac{8}{3}}$

۷۸- دو قایق بادبانی مخصوص حرکت روی سطوح یخ‌زده، دارای جرم‌های m و $2m$ روی دریاچهٔ افقی و بدون اصطکاک قرار دارند و نیروی ثابت

و یکسان $\vec{F}$ با وزیدن باد به هر دو وارد می‌شود. هر دو قایق از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و پس از جابه‌جایی d از خط پایان

می‌گذرند. چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح است؟



(الف) هنگام رسیدن به نقطهٔ پایان، تندی قایق سنگین‌تر، نصف تندی قایق سبک‌تر است.

(ب) هنگام رسیدن به نقطهٔ پایان، انرژی جنبشی هر دو قایق یکسان است.

(ج) کار کل انجام‌شده روی هر دو قایق یکسان است.

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) هیچ‌کدام

(۳) ۳

محل انجام محاسبات

۷۹- جسمی را از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌کنیم و کار نیروی وزن در این جابه‌جایی -40 J است. حال اگر جسم را تا نقطه C از نقطه B

ببریم، انرژی پتانسیل گرانشی آن 10 J کاهش می‌یابد. اگر جرم جسم 2 kg باشد، $h_A - h_C$ چقدر است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

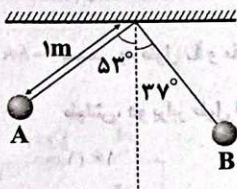
-۳ (۴)

۳ (۳)

-۱/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

۸۰- مطابق شکل زیر، آونگی از نقطه A با تندی $\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ عبور می‌کند. تندی آونگ هنگام عبور از نقطه B چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



از انرژی اتلافی صرف نظر کنید و $\sin 37^\circ = 0.6$

 $\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۳)

 $\sqrt{6}$ (۴)

۸۱- گلوله‌ای از سطح زمین با تندی $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. اگر در طول مسیر حرکت گلوله نیروی مقاومت هوا باعث

شود، تا ۴۰ درصد از انرژی آن در طول مسیر تلف شود، گلوله حداکثر تا ارتفاع h بالا می‌رود. حال اگر نیروی مقاومت هوا وجود نداشته باشد،

گلوله تا ارتفاع h' بالا می‌رود. $h' - h$ چند متر است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

۲۰ (۴)

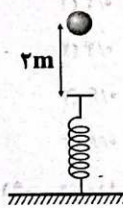
۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۸۲- با توجه به شکل زیر، گلوله‌ای به جرم 2 kg از ارتفاع ۲ متری بالای فنر رها می‌شود. هنگامی که گلوله به فنر برخورد می‌کند و نیمی از فنر را

فشرده می‌کند، تندی گلوله برابر $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ خواهد بود و ۴۵ ژول انرژی در فنر ذخیره می‌شود. تا این لحظه فنر چند سانتی‌متر فشرده شده است؟



$g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و از اتلاف انرژی صرف نظر کنید.)

۱۵ (۱)

۳۰ (۲)

۴۵ (۳)

۶۰ (۴)

۸۳- چتر بازی به جرم کل 100 kg از بالونی در ارتفاع 400 m از سطح زمین با سرعتی به بزرگی $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به بیرون بالون می‌پرد. او با سرعتی به بزرگی $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به

زمین می‌رسد. اگر در طول مسیر نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر ثابت باشد، نیروی مقاومت هوا چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

۹۹۸/۵ (۴)

۹۹/۸۵ (۳)

۹۹۷/۵ (۲)

۹۹/۷۵ (۱)

۸۴- خودرویی به جرم 2250 kg در مسیر افقی، در مدت ۵s تندی خود را از $1/8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ می‌رساند. در طی این حرکت توان متوسط

خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ ($1\text{ hp} = 750\text{ W}$)

۲ (۴)

۱/۸ (۳)

۱/۶ (۲)

۱/۴ (۱)

۸۵- پمپی با توان ورودی 4 kW و بازده ۲۵ درصد، آب را از مخزنی در عمق ۴۵ متری سطح زمین تا دهانه مخزن در سطح زمین، با تندی ثابت

بالا می‌آورد. اگر این پمپ ۲min کار کند، چند کیلوگرم آب از دهانه مخزن خارج می‌کند؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

 $\frac{800}{3}$ (۴) $\frac{700}{3}$ (۳)

۲۰۰ (۲)

 $\frac{500}{3}$ (۱)

محل انجام محاسبات

فیزیک ۲ (سؤالات ۸۶ تا ۹۵)

زوج درس ۲

۸۶- ظرفیت یک باتری ۴۰۰mAh است. اگر جریان ۱۰۰mA از آن گرفته شود، چند دقیقه طول می کشد تا باتری به طور کامل تخلیه شود؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۱۴۴۰۰ (۳) ۲۴۰۰ (۴) ۱۴۴۰

۸۷- مقاومت الکتریکی سیمی مسی به طول ۲۰۰m و قطر مقطع ۲mm برابر چند اهم است؟ ($\rho_{\text{مس}} = 2/7 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$, $\pi = 3$)

- (۱) ۴/۵ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷

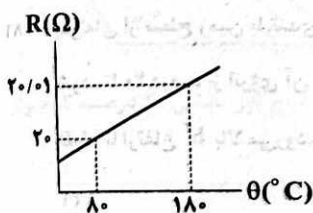
۸۸- سیمی به طول L و مقاومت $R = 12\Omega$ در اختیار داریم. $\frac{1}{4}$ سیم را بریده و کنار می گذاریم و مابقی سیم را از درون دستگاهی عبور می دهیم تا

طولش، دو برابر طول اولیه شود. حال سیم را به اختلاف پتانسیل چند ولت متصل کنیم تا جریان عبوری از آن برابر ۲A شود؟ (دما ثابت است.)

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۱۲۸

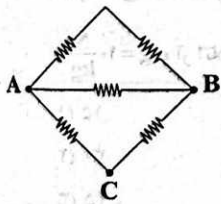
۸۹- نمودار زیر مربوط به تغییرات مقاومت سیم رسانایی برحسب دما است. اگر دمای این سیم را 200°C افزایش دهیم، مقاومت آن چند درصد

افزایش می یابد؟



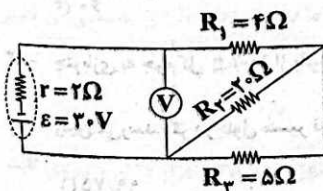
- (۱) ۰.۵٪
(۲) ۰.۱٪
(۳) ۰.۱۲۵٪
(۴) ۰.۲۵٪

۹۰- در مدار شکل زیر، مقاومت معادل بین دو نقطه A و B چند برابر مقاومت معادل بین دو نقطه C و B است؟ (مقاومت ها مشابه هستند.)



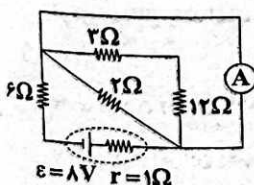
- (۱) ۰.۲
(۲) ۰.۴
(۳) ۰.۶
(۴) ۰.۸

۹۱- در مدار شکل زیر ولت سنج چند ولت را نشان می دهد؟



- (۱) ۳/۷۵
(۲) ۷/۵
(۳) ۱۵
(۴) ۲۲/۵

۹۲- در مدار شکل زیر، عددی که آمپرسنج نشان می دهد برابر چند آمپر است؟

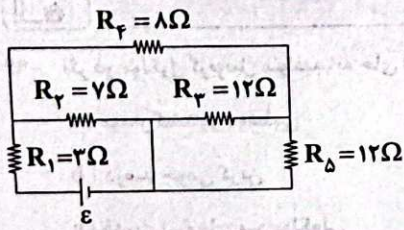


- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{7}{8}$
(۴) $\frac{8}{7}$

محل انجام محاسبات



۹۳- در مدار شکل زیر، توان مصرفی در مقاومت R_p چند برابر چند توان مصرفی در مقاومت R_d است؟



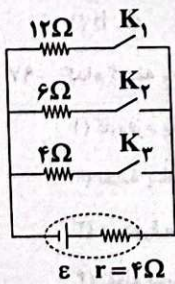
$$\frac{28}{3} \quad (1)$$

$$\frac{26}{3} \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۹۴- در مدار شکل زیر با بستن کدام کلید (یا کلیدها) توان خروجی باتری بیشینه است؟



(۱) فقط کلید K_3

(۲) کلیدهای K_1 و K_3

(۳) فقط کلید K_3 یا کلیدهای K_1 و K_3

(۴) کلیدهای K_1 و K_3

۹۵- اگر جریان عبوری از یک باتری از ۲A به ۳A برسد، توان خروجی آن از ۸W به ۶W می‌رسد. چه تعداد از موارد زیر درباره این باتری درست است؟

(الف) نیروی محرکه باتری ۸V است.

(ب) مقاومت درونی باتری ۱۵Ω است.

(ج) بیشینه توان خروجی برابر ۸W است.

(د) اگر جریان عبوری ۲A باشد، توان خروجی بیشینه است.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

شیمی



۹۶- اگر در مولکول کربونیل سولفید، به جای اتم گوگرد، اتم اکسیژن قرار بگیرد، کدام موارد کاهش می‌یابد؟ ($C=12, O=16, S=32: g.mol^{-1}$)

(a) مقدار گشتاور دوقطبی

(b) درصد جرمی کربن

(c) قدرت نیروهای بین مولکولی

(d) عدد اکسایش کربن

(f) c, a

(۳) d, a

(۲) c, b

(۱) d, b

۹۷- کدام گزینه نادرست است؟

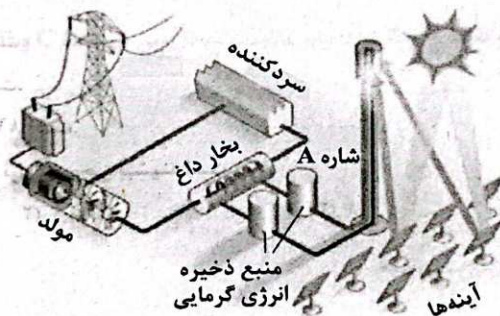
(۱) کلروفرم یک مولکول پنج‌اتمی است که اتم‌های پیرامون اتم مرکزی آن بر روی یک صفحه قرار ندارند.

(۲) نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول‌های آمونیاک و فسفر تری‌کلرید از نظر فرم مشابه یک‌دیگر است.

(۳) در دوره سوم جدول تناوبی کم‌ترین چگالی بار یون پایدار مربوط به عنصری است که در آخرین زیرلایه اشغال‌شده اتم آن، یک الکترون وجود دارد.

(۴) نقطه ذوب ترکیب یونی لیتیم برمید بالاتر از نقطه ذوب ترکیب یونی روبیدیم برمید است.

۹۸- شکل زیر، نمایی از فناوری پیشرفته برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی را نشان می‌دهد. کدام گزینه با آن نادرست است؟



(۱) تمام فرایندهای انجام‌شده در این فناوری، فیزیکی هستند.

(۲) آینه‌ها با جذب تابش خورشید، گرما را به برج گیرنده منتقل می‌کنند.

(۳) در شرایطی که تابش مستقیم خورشید نیز وجود ندارد، سامانه می‌تواند به تولید برق ادامه دهد.

(۴) انرژی گرمایی ابتدا به انرژی مکانیکی و سپس به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

۹۹- کدام مطالب در ارتباط با نمک خوراکی درست است؟

(آ) از واکنش فلز سدیم با گاز کلر، طی یک واکنش بسیار گرماده که با تولید نور زیادی همراه است، نمک خوراکی تشکیل می‌شود.

(ب) هر یون در شبکه بلور نمک خوراکی با ۶ یون دیگر احاطه شده است.

(پ) تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکه LiF با سدیم کلرید، بیشتر از تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکه سدیم کلرید با KBr است.

(ت) ترتیب $Na > Cl^- > Cl > Na^+$ را می‌توان به شعاع یون‌های سازنده نمک خوراکی و اتم‌های آن‌ها نسبت داد.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «پ» و «ت»

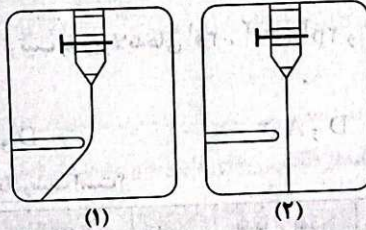
(۲) «آ» و «پ»

(۱) «آ» و «ب»

محل انجام محاسبات



۱۰۰- شکل‌های (۱) و (۲)، مسیر باریکه دو مایع خارج شده از مخزن را در دمای اتاق با نزدیک کردن میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها، کدام گزینه درباره ویژگی مایع‌های (۱) و (۲) درست است؟



(۱)

(۲)

- (۱) مایع شکل (۱) می‌تواند آب باشد که از سمت اتم هیدروژن جذب میله شده است.
 (۲) مایع شکل (۱) می‌تواند کلروفرم باشد که علامت بار جزئی در اتم‌های جانبی آن، منفی است.
 (۳) مایع شکل (۲) می‌تواند کربن تتراکلرید یا بوتان باشد که هر دو ناقطبی‌اند و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.
 (۴) مایع شکل (۲)، می‌تواند کربن تتراکلرید باشد که توزیع الکترون‌ها در مولکول آن، براساس نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی، نامتقارن است.

۱۰۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) ترتیب $N_3 < HF < NaCl$ را می‌توان به نقطه ذوب و نیز نقطه جوش این مواد نسبت داد.
 (۲) مس در مقایسه با آب و نیز در مقایسه با اکسیژن، در گستره دمایی بزرگ‌تری به حالت مایع است.
 (۳) در شرایطی که ترکیب یونی سدیم کلرید به حالت مایع است، فلز مس نمی‌تواند جامد باشد.
 (۴) مقایسه میان نقطه ذوب اکسیژن و نیتروژن، برخلاف مقایسه میان نقطه جوش آن‌ها است.

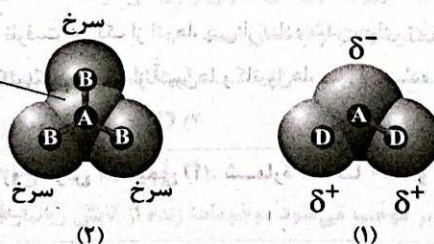
۱۰۲- کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر هسته اتم‌های سازنده یک مولکول بر روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن مولکول، به یقین ناقطبی است.
 (۲) تنها عاملی که می‌تواند تقارن و توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را در مولکول‌های چنداتمی به هم برزند، وجود جفت الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی است.
 (۳) اگر یک مولکول فقط یک از عنصر ساخته شده باشد، گشتاور دوقطبی آن به یقین برابر با صفر است.
 (۴) نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول‌ها برای نمایش احتمال حضور الکترون‌ها در مولکول‌ها به کار می‌رود.

۱۰۳- کدام مطلب در ارتباط با ترکیب‌های یونی نادرست است؟

- (۱) تمام ترکیب‌های یونی در دما و فشار اتاق به حالت جامدند.
 (۲) در ساختار هر کدام از ترکیب‌های یونی، دست‌کم یک فلز و یک نافلز وجود دارد.
 (۳) با وجود این‌که ترکیب‌های یونی از ذره‌های باردار تشکیل شده‌اند، اما در حالت جامد نمی‌توانند جریان برق را از خود عبور دهند.
 (۴) نیروهای جاذبه میان یون‌های ناهمنام در این ترکیب‌ها، بر نیروهای دافعه میان یون‌های همنام غالب است.

۱۰۴- با توجه به شکل‌های زیر، کدام مطالب زیر درست است؟



(۲)

(۱)

(آ) ترتیب $B > A > D$ را می‌توان به خاصیت نافلزی این اتم‌ها نسبت داد.

- (ب) گشتاور دوقطبی مولکول (۲) برابر با صفر بوده و این مولکول می‌تواند گوگرد تری‌اکسید باشد.
 (پ) گشتاور دوقطبی مولکول (۱) بزرگ‌تر از صفر بوده و این مولکول می‌تواند نیتروژن دی‌اکسید باشد.
 (ت) مولکول (۱) دارای ساختار خمیده بوده و اتم مرکزی در آن دارای یک یا دو الکترون ناپیوندی است.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «پ» و «ت»

(۲) «آ» و «پ»

(۱) «آ» و «ب»

محل انجام محاسبات

۱۰۵- در کدام دو گونه، نوع نیروهای بین مولکولی غالب، متفاوت و علامت بار جزئی اتم مرکزی، مشابه است؟
 (۱) NF_3 ، H_2O (۲) SCl_2 ، OF_2 (۳) SO_3 ، CO_2 (۴) H_2S ، NH_3

۱۰۶- آرایش الکترونی اتم‌های A، X، D و E به ترتیب به زیرلایه‌های $3s^1$ ، $3s^2$ ، $2p^4$ و $2p^5$ ختم می‌شود. آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب یونی حاصل از کدام دو عنصر بیشتر است؟

E و X (۴)

D و A (۳)

D و X (۲)

E و A (۱)

۱۰۷- با توجه به داده‌های جدول زیر، کدام گزینه نادرست است؟

شعاع یونی	یون	شعاع یونی	یون
d	F^-	a	Na^+
e	O^{2-}	b	K^+
f	S^{2-}	c	Mg^{2+}

- (۱) مقایسه میان شعاع یون‌های سدیم، پتاسیم و منیزیم به صورت $c < a < b$ درست است.
 (۲) نقطه ذوب پتاسیم اکسید بالاتر از نقطه ذوب سدیم اکسید و پایین‌تر از نقطه ذوب منیزیم اکسید است.
 (۳) مقایسه میان شعاع یون‌های فلوئورید، اکسید و سولفید به صورت $d < e < f$ درست است.
 (۴) شعاع یون کلرید از d و نیز e بیشتر ولی از f کمتر است.

۱۰۸- با توجه به مطالب کتاب درسی که در ارتباط با فناوری پیشرفته‌ای است که برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی طراحی شده است،

مهم‌ترین دلیل به کارگیری نمک مذاب در این فناوری کدام است؟

- (۱) افزایش مستقیم بازده تبدیل انرژی خورشیدی به انرژی الکتریکی
 (۲) ذخیره و انتقال انرژی گرمایی در دماهای بالا بدون تجزیه شیمیایی
 (۳) جذب نور خورشید و تولید مستقیم جریان الکتریکی بدون آلودگی محیط زیست
 (۴) کاهش دمای فعالیت سامانه و جلوگیری از اتلاف گرما

۱۰۹- نسبت عدد کوئوردیناسیون کاتیون به عدد کوئوردیناسیون آنیون در کدام ترکیب یونی، عدد بزرگ‌تری است؟

- (۱) کلسیم فلوئورید (۲) پتاسیم اکسید (۳) آلومینیم اکسید (۴) سدیم کلرید

۱۱۰- در کدام گزینه، ویژگی «فرمولی مولکولی» یا «فرمول شیمیایی ترکیب یونی»، به درستی بیان و مثال مناسب آورده شده است؟

- (۱) در فرمول مولکولی، ساده‌ترین نسبت بین اتم‌های سازنده بیان می‌شود، مانند N_2O_5 .
 (۲) فرمول شیمیایی ترکیب یونی، ساده‌ترین نسبت آنیون‌ها و کاتیون‌های سازنده آن را نشان می‌دهد، مانند Na_3PO_4 .
 (۳) در فرمول مولکولی، شمار الکترون‌های ظرفیت هر یک از اتم‌ها، پس از ساده شدن، برای زیروند اتم دیگر نوشته می‌شود، مانند NF_3 .
 (۴) در فرمول شیمیایی ترکیب یونی، بار الکتریکی هر یک از آنیون‌ها و کاتیون‌ها، پس از ساده شدن، برای زیروند یون مخالف نوشته می‌شود، مانند SiO_2 .

توجه: داوطلب گرامی، لطفاً از بین سؤالات زوج درس ۱ (شیمی (۱)، شماره ۱۱۱ تا ۱۲۰) و زوج درس ۲ (شیمی (۲)، شماره ۱۲۱ تا ۱۳۰)، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

شیمی (۱) (سؤالات ۱۱۱ تا ۱۲۰)

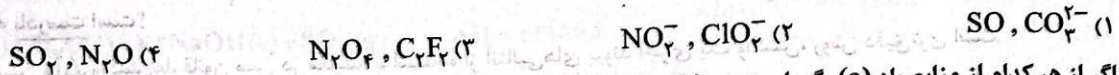
زوج درس ۱

- ۱۱۱- اگر فرمول مولکولی زغال سنگ به صورت $\text{C}_{135}\text{H}_{96}\text{O}_9\text{NS}$ باشد و در اثر سوختن کامل آن در اکسیژن، فقط گازهای CO_2 ، H_2O ، NO و SO_2 تولید شوند، در معادله موازنه‌شده واکنش سوختن کامل زغال سنگ، نسبت ضریب اکسیژن به ضریب زغال سنگ کدام است؟
 (۱) ۱۵۶ (۲) ۱۶۰/۵ (۳) ۳۲۱ (۴) ۳۱۲

محل انجام محاسبات

۱۱۲- کدام گزینه درست است؟

- (۱) سوخت هواپیما از جمله سوخت‌های فسیلی است که سوزاندن آن حجم کمی کربن دی‌اکسید تولید می‌کند.
 (۲) برای تبدیل CO_2 به مواد معدنی، کربن دی‌اکسید تولیدشده در مراکز صنعتی را با CaCO_3 واکنش می‌دهند.
 (۳) گرم شدن فضای درون گلخانه به دلیل به دام افتادن تابش فروسرخ است.
 (۴) گلخانه، گیاه یا میوه را از آسیب‌های ناشی از تغییر دما حفظ می‌کند، ولی در ارتباط با آفت‌ها، کارایی ندارد.
- ۱۱۳- با رعایت قاعده هشت‌تایی در کدام گزینه، نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به شمار الکترون‌های پیوندی در گونه اول (سمت راست) بزرگ‌تر از همین نسبت در گونه دوم است؟



- ۱۱۴- اگر از هر کدام از منابع باد (a)، گرمای زمین (b) و انرژی خورشید (c) برای تولید برق استفاده شود و ردپای کربن دی‌اکسید آن‌ها با هم برابر باشد، مقایسه میان برق تولیدی آن‌ها برحسب کیلووات ساعت به کدام صورت درست است؟
- (۱) $b > c > a$ (۲) $c > b > a$ (۳) $a > c > b$ (۴) $a > b > c$

- ۱۱۵- کدام مطالب زیر در ارتباط با اکسیدهای نیتروژن با فرمول کلی NO_x درست است؟
- (آ) با توجه به واکنش‌پذیری ناچیز گاز نیتروژن، این اکسیدها به طور معمول در هواکره تشکیل نمی‌شوند.
 (ب) در مواردی که دما بسیار بالا است مانند موتور خودرو، این اکسیدها تشکیل می‌شوند.
 (پ) در ساختار مولکول NO برخلاف مولکول NO_2 ، اتم نیتروژن قاعده هشت‌تایی را رعایت نمی‌کند.
 (ت) هوای آلوده کلانشهرها اغلب به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود و دلیل آن، وجود گاز دی‌نیتروژن مونوکسید است.
- (۱) «آ» و «ب» (۲) «پ» و «ت» (۳) «آ» و «ت» (۴) «ب» و «پ»

- ۱۱۶- برای دفن و ذخیره‌سازی بلندمدت گاز کربن دی‌اکسید در زیر زمین، کدام ویژگی زمین‌شناسی مهم‌ترین معیار انتخاب محل مناسب است؟
- (۱) سنگ‌های آذرین متراکم با تخلخل بسیار کم
 (۲) لایه‌های ضخیم نمک سنگی با نفوذپذیری بالا
 (۳) مخازن متخلخل و نفوذپذیر که توسط یک لایه نفوذناپذیر پوشیده شده‌اند.
 (۴) گسل‌های فعال که امکان خروج تدریجی کربن دی‌اکسید را فراهم می‌کنند.
- ۱۱۷- کدام مطلب زیر در ارتباط با اوزون تروپوسفری درست است؟

- (۱) یکی از آلاینده‌هایی است که بر اثر سوختن سوخت‌های فسیلی در خودروها، به طور مستقیم وارد هواکره می‌شود.
 (۲) در مقایسه با مولکول‌های اکسیژن، واکنش‌پذیری کم‌تری دارد.
 (۳) وجود اوزون در هوایی که تنفس می‌کنیم باعث بروز بیماری‌های عفونی ریوی می‌شود.
 (۴) غلظت اوزون تروپوسفری در هواکره، در تابستان بیشتر از زمستان است.

۱۱۸- برای نام‌گذاری ترکیب دوتایی از عنصرهای و از استفاده می‌شود. (نمادهای شیمیایی عناصر، فرضی هستند.)



- ۱۱۹- در لایه اوزون، انجام یک واکنش برگشت‌پذیر موجب می‌شود موجودات زنده از تابش زیانبار فرابنفش در امان بمانند. کدام مطلب در ارتباط با واکنش‌های شیمیایی مورد نظر نادرست است؟

- (۱) در جهت رفت واکنش شیمیایی انجام‌شده، مولکول اوزون به یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن تبدیل می‌شود.
 (۲) در جهت رفت واکنش شیمیایی انجام‌شده، مقداری انرژی به شکل فرابنفش، مصرف و در جهت برگشت، مقداری انرژی به شکل فروسرخ آزاد می‌شود.
 (۳) مقدار انرژی مصرف‌شده در جهت رفت، بیشتر از مقدار انرژی آزادشده در جهت برگشت است.
 (۴) حتی با تکرار پیوسته این واکنش برگشت‌پذیر، باز هم بخشی از تابش فرابنفش از لایه اوزون عبور کرده و به ساکنان زمین می‌رسد.

محل انجام محاسبات



۱۲۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در صد سال گذشته، میانگین جهانی pH آب دریاها و میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد به ترتیب کاهش و افزایش یافته‌اند.
- (۲) یکی از ویژگی‌های مهم واکنش‌های شیمیایی این است که همه آن‌ها از قانون پایستگی جرم پیروی می‌کنند.
- (۳) مقدار جذب پرتوهای خورشیدی توسط زمین بیشتر از مقدار جذب این پرتوها توسط هواکره است.
- (۴) با فرض این‌که لایه هواکره وجود نداشته باشد، دما در شب که خورشید حضور ندارد، کاهش و در روز افزایش می‌یابد.

شیمی (۲) (سؤالات ۱۲۱ تا ۱۳۰)

زوج درس ۲

۱۲۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) برای تعیین ΔH واکنش‌ها، قانون هس در مقایسه با استفاده از آنتالپی‌های پیوند اجزای یک واکنش، روش دقیق‌تری است.
 - (۲) گرمای واکنش تجزیه آب اکسیژنه را نمی‌توان به روش تجربی اندازه‌گیری کرد.
 - (۳) گرمای واکنش: $\text{HCl(aq)} + \text{KOH(aq)} \rightarrow \text{KCl(aq)} + \text{H}_2\text{O(l)}$ را می‌توان با استفاده از گرماسنج لیوانی اندازه‌گیری کرد.
 - (۴) عامل طعم و بوی رازانه، یک اتر آروماتیک و عامل طعم و بوی گشنیز، یک الکل خطی سیرنشده است.
- ۱۲۲- استفاده از زغال کک در شرکت‌های فولاد برای استخراج آهن به کدام دلیل (ها) انجام می‌شود؟
- (۱) فقط برای تأمین انرژی لازم جهت انجام واکنش
 - (۲) فقط به عنوان واکنش‌دهنده و تولید اکسید (های) کربن
 - (۳) به عنوان واکنش‌دهنده و تأمین‌کننده انرژی لازم جهت انجام واکنش
 - (۴) به عنوان واکنش‌دهنده و افزایش بازده واکنش از طریق افزایش حجم مواد داخل کوره

۱۲۳- کدام گزینه در ارتباط با یخچال صحرایی درست است؟

- (۱) هر چه دمای محیط بالاتر باشد، دمای داخل یخچال لزوماً کاهش بیشتری می‌یابد.
- (۲) افزایش رطوبت نسبی هوا باعث افزایش سرعت تبخیر و خنک‌کنندگی می‌شود.
- (۳) تبخیر آب باعث افزایش میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های باقی‌مانده آب می‌شود.
- (۴) خنک شدن ظرف سفالی داخلی ناشی از انجام یک فرایند آرام گرماگیر است.

۱۲۴- برای پیوند ، پیوند ، بدون در نظر گرفتن یگانه، دوگانه یا سه‌گانه بودن پیوند، از مفهوم «میانگین آنتالپی پیوند» استفاده می‌شود.

- (۱) اکسیژن - اکسیژن، همانند، گوگرد - اکسیژن
- (۲) کربن - کربن، همانند، کربن - اکسیژن
- (۳) کربن - گوگرد، برخلاف، اکسیژن - گوگرد
- (۴) کربن - نیتروژن، برخلاف، نیتروژن - نیتروژن

۱۲۵- شواهد تجربی نشان می‌دهند که تهیه آمونیاک به روش هابر از گازهای نیتروژن و هیدروژن یک واکنش دومرحله‌ای است. کدام مطالب در ارتباط با این واکنش و مراحل آن درست است؟

- (آ) آنتالپی واکنش مرحله دوم را نمی‌توان به روش تجربی تعیین کرد.
 - (ب) فراورده مرحله اول، ناپایدارتر از فراورده مرحله دوم است.
 - (پ) ΔH واکنش کلی، هم‌علامت با ΔH واکنش مرحله اول است.
 - (ت) در واکنش مرحله دوم همانند واکنش کلی، سطح انرژی مواد کاهش می‌یابد.
- (۱) «ب» و «پ» (۲) «آ» و «پ» (۳) «آ» و «ت» (۴) «ب» و «ت»

۱۲۶- بر اثر سوختن کامل نمونه‌ای از پروپن، ۰/۹ مول فراورده و ۳۰۸/۷ کیلوژول گرما تولید می‌شود و برای سوختن کامل نمونه‌ای از اتیلن، ۱/۲ مول اکسیژن

مصرف و ۵۶۴ کیلوژول گرما تولید می‌شود. با توجه به این داده‌ها بر اثر سوختن کامل ۰/۳ مول ۱- بوتن، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟

- (۱) ۸۱۷/۸ (۲) ۷۶۴/۶ (۳) ۸۴۱/۲ (۴) ۸۸۸/۴

محل انجام محاسبات

۱۲۷- برای ترکیبی با فرمول مولکولی C_5H_xO می توان a ایزومر آلدهیدی و b ایزومر کتونی در نظر گرفت. در این صورت کدام رابطه درست است؟
(فقط ساختارهایی مدنظر هستند که غیر حلقوی بوده و تمام پیوندهای کربن - کربن، یگانه باشد.)

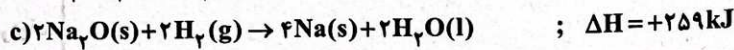
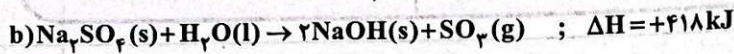
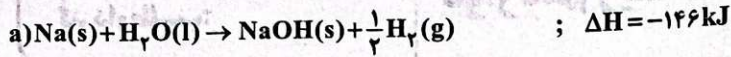
$$b-a=2 \quad (1)$$

$$a-b=2 \quad (2)$$

$$b-a=1 \quad (3)$$

$$a-b=1 \quad (4)$$

۱۲۸- با توجه به واکنش های زیر، اگر جرم فراورده تولید شده در واکنش: $Na_2O(s) + SO_3(g) \rightarrow Na_2SO_4(s)$ برابر با $56/8$ گرم باشد، مقدار گرمای مبادله شده چند کیلوژول است؟ ($O=16, Na=23, S=32; g \cdot mol^{-1}$)



$$332/2 \quad (4)$$

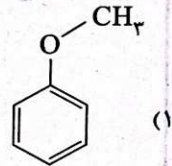
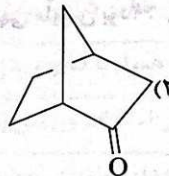
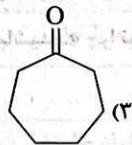
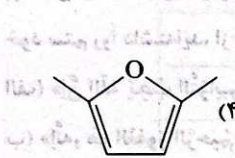
$$232/2 \quad (3)$$

$$323/2 \quad (2)$$

$$223/2 \quad (1)$$

۱۲۹- جرم مولی کدام ترکیب آلی، برابر با میانگین جرم مولی عامل طعم و بوی میخک و بادام به شمار می آید؟

$$(H=1, C=12, O=16; g \cdot mol^{-1})$$



۱۳۰- طی واکنشی می توان گاز متان را به گازهای اتان و هیدروژن تبدیل کرد. اگر حجم واکنش دهنده مصرفی در این واکنش در شرایط STP برابر با $100/8$ لیتر باشد، با توجه به داده های جدول زیر، ΔH واکنش چند کیلوژول است؟

$\Delta H(kJ \cdot mol^{-1})$	پیوند
۴۳۶	H—H
۴۱۰	C—H
۳۲۴	C—C

$$-150 \quad (1)$$

$$+150 \quad (2)$$

$$-135 \quad (3)$$

$$+135 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات



دفترچه تشریحی

سوالات تشریحی
دوازدهم ریاضینام:
نام خانوادگی:
کد داوطلب:

نام درس:

دین و زندگی، حسابان

ردیف	نمره	سؤال
۱	۰/۵	دین و زندگی (۲) براساس آیه ۵۳ سوره زمر «قُلْ يَا عِبَادِيَ الَّذِينَ أَسْرَفُوا عَلَىٰ أَنْفُسِهِمْ لَا تَقْنَطُوا مِن رَّحْمَةِ اللَّهِ...» «بگو ای بندگان من که بسیار به خود ستم روا داشته‌اید، از رحمت الهی ناامید نباشید...» چرا نباید از رحمت الهی مأیوس بود؟ الف) «إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ التَّوَّابِينَ» ب) «إِنَّهُ هُوَ الْغَفُورُ الرَّحِيمُ» ج) «التَّوْبَةُ تَطَهِّرُ الْقُلُوبَ»
۲	۰/۵	با دقت نظر در حدیث امیرالمؤمنین علی (ع): «يَا مَعْشَرَ التَّجَارِ، أَلْفَقَةَ، ثُمَّ الْفَتْخَرَ»، چرا یادگیری مسائل شرعی تجارت، مقدم بر تجارت است؟
۳	۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) در میان مخلوقات، انسان موجودی است که علاوه بر ایستادگی در برابر موانع بیرونی، می‌تواند در برابر موانع درونی نیز ایستادگی کند. ب) شرط‌بندی از امور زیان‌آور روحی و اجتماعی است و انجام آن، حتی در بازی‌های معمولی نیز حرام می‌باشد.
۴	۱	گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) بیت «بَارِئًا بَارِئًا» هر آن چه هستی باز / اگر کافر و گبر و بت پرستی باز» در تقابل با کدام حیلۀ شیطان است؟ ۱) ناامید کردن از رحمت الهی ۲) به تأخیر انداختن توبه (تسویف) ۳) گام به گام کشاندن به سوی گناه ب) چند مورد از موارد زیر، حکم آن «حرام بودن» است؟ الف) موسیقی غیرسنتی و مدرن. ب) مدگرایی و تجمل در پوشش و سایر ابعاد زندگی ج) خرید و یا استفاده از آثاری که پدیدآورنده آن، جایز نداند.



مفاهیم و اصطلاحات زیر را تعریف کنید.
الف) حکمت حکم و دستور:

ب) توبه در لغت و اصطلاح دینی:

هر یک از عبارت‌های سمت راست با کدام یک از عبارت‌های سمت چپ بیشتر ارتباط دارد؟ (در ستون سمت چپ یک مورد اضافی است).

سمت راست	سمت چپ
الف) شرکت در جشن شادی مانند جشن عروسی و یا تولد	۱- مستحب
ب) ورزشی که همراه با قمار و یا زیان آور باشد.	۲- واجب
ج) فراهم کردن امکانات ورزشی برای دور شدن افراد جامعه از فساد	۳- حرام
د) ایجاد پایگاه‌های اینترنتی و شبکه‌های اجتماعی در فضای مجازی	۴- جایز
	۵- واجب کفایی

مراحل تکمیلی توبه را نام ببرید.

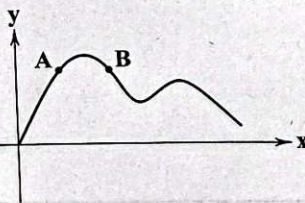
قرآن کریم رمز سعادت و رستگاری انسان‌ها را چه چیزی معرفی کرده است؟

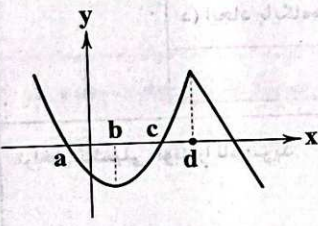
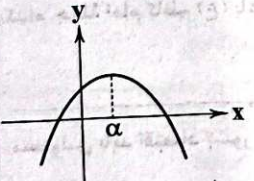
کدام جمله امام کاظم (ع) باعث شد تا «بشرین حارث» در سلک مردان پرهیزکار و خداپرست درآید؟

مسئولین باید اقتصاد کشور را به گونه‌ای مدیریت کنند که سه هدف محقق شود، دو هدف آن را بنویسید.

حسابان

در نمودار $y = f(x)$ ، شیب نمودار در نقاط A و B و شیب خط AB را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



ردیف	نمره	
۱۲	۱/۷۵	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟
۱۳	۱/۵	اگر $f(x) = \sqrt{x+7}$ ، $g(2) = 1$ و $g'(2) = 12$ ، آنگاه حاصل $(fog)'(2)$ را به دست آورید.
۱۴	۰/۷۵	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن مقداری منفی است؟ (ب) طول نقطه‌ای که مماس در آن افقی است؟ (پ) طول نقطه‌ای که تابع در آن مشتق پذیر نمی‌باشد؟ 
۱۵	۱/۵	اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر باشد، نمودار تابع $f'(x)$ را رسم کنید. (با ذکر دلیل) 



ردیف	سوال	نمره
۱۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	۲/۲۵
	الف) $f(x) = (x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{x} + 1\right)$	
	ب) $g(x) = \sin^3(\Delta x)$	
	ج) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x + 1}$	
۱۷	قضیه ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه f در a پیوسته است.	۱/۲۵
	موفق باشید.	۲۰

نظر سنجی آزمون های سراسری گاج

دانش آموز گرامی؛

لطفا بعد از پایان آزمون، به سوالات ۱ تا ۱۰ در قسمت نظر سنجی با دقت پاسخ دهید.

۱. سطح سوالات آزمون را چطور ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۲. نظم و هماهنگی آغاز آزمون را چگونه دیدید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۳. آیا از کیفیت دفترچه ها رضایت دارید؟

۱- بله ۲- خیر

۴. آیا زمان بندی آزمون با حجم سوالات متناسب بود؟

۱- بله ۲- خیر

۵. طبق مقررات آزمون های گاج، باید دفترچه پاسخ تشریحی فقط پس از آزمون توزیع شود.

در حوزه شما، توزیع دفترچه پاسخ تشریحی به درستی انجام شد؟

۱- بله ۲- خیر

۶. عملکرد مراقبان آزمون را چگونه ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

۷. آیا در حوزه شما، داوطلبان قبل از پایان زمان مجاز آزمون می توانستند محل را ترک کنند؟

۱- بله ۲- گاهی اوقات ۳- به ندرت ۴- خیر

۸. از چه طریقی با آزمون های گاج آشنا شده اید؟

۱- معرفی دوستان ۲- تبلیغات فضای مجازی ۳- مشاور تحصیلی ۴- ثبت نام مدارس

۹. تا به حال از کدامیک از خدمات گاج استفاده کرده اید؟

۱- گاج مارکت ۲- گاجینو ۳- دکتر IQ ۴- هر سه

۱۰. به طور کلی کیفیت برگزاری آزمون امروز را چطور ارزیابی می کنید؟

۱- خیلی خوب ۲- خوب ۳- متوسط ۴- ضعیف

دفترچه
شماره ۳

آزمون شماره (۱۷)
جمعه
۱۴۰۴/۱۲/۰۱

آزمون‌های سراسر کاج

گزینه درسی را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴
پاسخنامه دوازدهم ریاضی
دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۱۱۰	مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال از تا	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۱۰	۱	۸۰ دقیقه
	حسابان ۲	۱۰	۱۱	
	ریاضیات گسسته	۱۰	۲۱	
	هندسه ۳	۱۰	۳۱	
	حسابان ۱	۵	۳۶	
	هندسه ۲	۱۰	۴۶	
۲	فیزیک	۲۵	۵۱	۴۵ دقیقه
	فیزیک ۱	۱۰	۷۶	
	فیزیک ۲	۱۰	۸۶	
۳	شیمی	۱۵	۹۶	۲۵ دقیقه
	شیمی ۱	۱۰	۱۱۱	
	شیمی ۲	۱۰	۱۲۱	

گزینه‌نامه

شرط مشتق پذیری تابع چندضابطه‌ای در مرز دامنه:

- ۱) تابع در نقطه مرزی پیوسته باشد.
۲) در این نقطه، مشتق‌های راست و چپ تابع موجود و برابر باشد.



۱) برای آن‌که تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول α به صورت

باشد، باید زیر رادیکال فرجه فرد، عامل $(x-\alpha)^2$ داشته باشد:

$$(x-\alpha)^2(x-\beta) = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x-\beta) \\ = x^3 + (-2\alpha - \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta$$

که با مقایسه پاسخ فوق و عبارت زیر رادیکال داریم:

$$\begin{cases} -2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha (*) \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = -6 \xrightarrow{(*)} \alpha^2 - 2\alpha^2 = -6 \Rightarrow -\alpha^2 = -6 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{6} \\ \alpha^2\beta = 2p \Rightarrow 2p = -2\alpha^3 \Rightarrow p = -\alpha^3 \end{cases}$$

به‌ازای $\alpha = -\sqrt{6}$ تابع به شکل $f(x) = \sqrt[3]{(x+\sqrt{6})^2(x-2\sqrt{6})}$ می‌شود:

$$f'_+(-\sqrt{6}) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^+} \frac{\sqrt[3]{(x+\sqrt{6})^2(x-2\sqrt{6})} - 0}{x + \sqrt{6}} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^+} \frac{\sqrt[3]{x-2\sqrt{6}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{6}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^+} \frac{\sqrt[3]{x-2\sqrt{6}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt[3]{-3\sqrt{6}}}{\sqrt[3]{0^+}} = -\infty$$

$$f'_-(-\sqrt{6}) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^-} \frac{\sqrt[3]{(x+\sqrt{6})^2(x-2\sqrt{6})}}{x + \sqrt{6}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^-} \frac{\sqrt[3]{x-2\sqrt{6}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt[3]{-3\sqrt{6}}}{\sqrt[3]{0^-}} = +\infty$$

مقادیر به دست آمده با شکل سؤال تطابق دارد، پس $\alpha = -\sqrt{6}$ قابل قبول است و $p = 2\sqrt{6}$ می‌باشد.

توجه: برای $\alpha = \sqrt{6}$ تابع به صورت خواهد بود.

گزینه‌نامه

یکی از نقاط مشتق‌ناپذیر، نقطه بازگشتی می‌باشد:

مشتق راست: $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	$+\infty$	$-\infty$
مشتق چپ: $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	$-\infty$	$+\infty$
نمودار		

۲) کافی است نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنیم. برای این منظور

نقاطی از بازه $(1, 3)$ که به‌ازای آن‌ها $\sqrt{3}x$ و x^2 صحیح شوند را مشخص می‌کنیم:

$$x^2 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$$

$$\sqrt{3}x = k \Rightarrow x = \frac{k}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$\sqrt{3}$ در هر دو مشترک است پس پیوستگی و مشتق‌پذیری آن‌ها را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم.

ریاضیات

۴) خط $y + 2x = 4$ بر نمودار تابع f در $x=1$ مماس است. پس:

$$\begin{cases} f'(1) = -2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$g(3x^2 - 1) = f^2(\sqrt{x}) + \sqrt[3]{f(x)}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 6xg'(3x^2 - 1) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\right)f(\sqrt{x}) + \frac{f'(x)}{3\sqrt[2]{f^2(x)}}$$

$$\xrightarrow{x=1} 6g'(2) = 2\left(\frac{1}{2}f'(1)\right)f(1) + \frac{f'(1)}{3\sqrt[2]{f^2(1)}} \Rightarrow 6g'(2) = -2 - 1$$

$$\Rightarrow g'(2) = -\frac{3}{2}$$

گزینه‌نامه

برای نوشتن معادله یک خط مماس، به یک نقطه و شیب نیاز داریم:

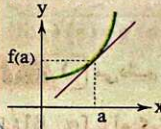
$$x_0 = a \xrightarrow{\text{در تابع قرار دهیم}} y_0 = f(a)$$

شیب مماس همان مقدار مشتق است باید $x_0 = a$ را در f' قرار دهیم:

$$x_0 = a \xrightarrow{\text{در مشتق قرار دهیم}} m = f'(a)$$

معادله خط مماس در نقطه‌ای به طول a :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



۳

$$f'(x) = -6ax^2 + 6bx - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 1 \\ f'(x) & x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -2ax^3 + 3bx^2 - 3x & x > 1 \\ -6ax^2 + 6bx - 3 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} -6ax^2 + 6bx - 3 & x > 1 \\ -12ax + 6b & x \leq 1 \end{cases}$$

در تابع دو ضابطه‌ای شرط مشتق‌پذیری تابع در نقاط مرزی آن است که تابع در آن نقاط پیوسته باشد و مشتق چپ و راست نیز برابر باشند. پس داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -2a + 3b - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -6a + 6b - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2a + 3b = -6a + 6b \Rightarrow 4a = 3b \quad (1)$$

$$\begin{cases} g'_+(1) = -6a + 6b - 3 \\ g'_-(1) = -12a + 6b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6a + 6b - 3 = -12a + 6b$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) مقدار $b = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید پس $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$ می‌باشد.

$$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \xrightarrow{f'(2)=-7, f(2)=-6} y' = \frac{7}{36}$$

هم عمودند. پس: $f'_-(0) = -\frac{\sqrt{a}}{2}$ و $f'_+(0) = \frac{\sqrt{a}}{2}$ است. چون نیم‌مماس‌ها در نقطه گوشه بر

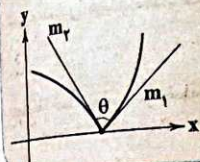
$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\right) = -1 \Rightarrow a = 4$$

$$f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{\sqrt{4}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{4}}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

دورسنامه

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق راست و چپ در $x=a$ هر دو موجود ولی نابرابر (یکی موجود یکی نامتناهی) باشند، تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر است و به این نقطه، نقطه گوشه‌ای می‌گویند. در نقاط گوشه‌ای اگر مشتق چپ و راست موجود ولی نابرابر باشند، می‌توانیم تانژانت زاویه بین خطوط نیم‌مماس چپ و راست را از طریق فرمول زیر محاسبه کنیم:

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$



۱/۷ می‌دانیم اگر تابعی از درجه دوم باشد، آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[\alpha, \beta]$ با آهنگ لحظه‌ای آن در $\frac{\alpha+\beta}{2}$ برابر است.

چون fog و gof هر دو از درجه ۲ هستند، پس ابتدا برای یافتن آهنگ تغییر متوسط تابع fog در بازه $[-1, 5]$ ، آهنگ لحظه‌ای آن را در $\frac{5-1}{2} = 2$ به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط} = (fog)'(2)$$

$$(fog)'(2) = (gof)'(k) \Rightarrow g'(2)f'(g(2)) = f'(k)g'(f(k)) (*)$$

$$\begin{cases} f'(x) = -2 \\ g'(x) = 4x - 3 \end{cases} (**)$$

$$(**), (*) \Rightarrow (5)(-2) = (-2)(4(3-2k)-3) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

دورسنامه

• آهنگ متوسط تغییر: آهنگ متوسط تغییر تابعی مانند $y=f(x)$ روی بازه $[x_1, x_2] = [a, a+\Delta x]$ برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

• آهنگ لحظه‌ای تغییر: آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه x_0 برابر است با: $\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+2}{x^2-8} = 2 \Rightarrow g(2)+2=0 \Rightarrow g(2)=-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{12} g'(2) = 2 \Rightarrow g'(2) = 24$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^-} ([\sqrt{3}x] - [x^2]) = [3^-] - [3^-] = 2 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3})^+} ([\sqrt{3}x] - [x^2]) = [3^+] - [3^+] = 2 - 2 = 0 \\ f(\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

پس تابع در $x=\sqrt{3}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه تابع f فقط در ۹ نقطه از بازه $(1, 3)$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

دورسنامه

مشتق‌پذیری روی بازه:

۱) تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۲) در توابع بَرَاکَت، صحیح‌کننده‌های داخل بَرَاکَت کاندید مشتق‌ناپذیری هستند. هر جا $[f(x)]$ پیوسته باشد، مشتق‌پذیر هم هست و مشتق آن صفر است و هر جا که پیوسته نباشد مشتق‌پذیر نیست.

۴/۵

$$h(x) = (fog)(x) \Rightarrow h'(x) = (fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

با توجه به این‌که مشتق $h(x)$ را در نقطه $x=4$ می‌خواهیم، پس داریم:

$$h'(4) = g'(4) \cdot f'(g(4)) (*)$$

حال می‌بایست مشتق توابع $f(x)$ و $g(x)$ را محاسبه کنیم:

$$f'(x) = 24 \tan^2 \frac{\pi}{\sqrt{3x+1}} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{\sqrt{3x+1}}) \left(\frac{-\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{3x+1}} \right) \left(\frac{2\sqrt{3x+1}}{3x+1} \right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$g(4) = \frac{4}{2} + \sqrt{2 \times 4 + 1} = 5$$

$$g'(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad (**)$$

$$f'(5) = 24(1+1) \times \left(\frac{-3\pi}{8 \times 16} \right) = -\frac{9\pi}{8}$$

از ترکیب روابط $(*)$ و $(**)$ مشتق تابع $(fog)(x)$ در نقطه ۴ برابر $-\frac{15\pi}{16}$ به دست می‌آید.

دورسنامه

- برای مشتق توابع مرکب از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

- مشتق تابع تانژانت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = \tan(u) \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

۲/۶ نقطه گوشه نقطه‌ای روی نمودار تابع پیوسته f است که در آن نقطه، f حداقل یک مشتق یک‌طرفه حقیقی داشته باشد، اما مشتق‌پذیر نباشد.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-\sqrt{4-ax^2}} - 0}{x} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-ax^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-ax^2}}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax^2}}{x \times 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a}|x|}{2x}$$

برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $f'(x)$ بر $f''(x)$ ریشه‌های معادله $f''(x)=0$ را حساب می‌کنیم.

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+12=0 \Rightarrow x=-2$$

حال در ضابطه‌های $f(x)$ و $f'(x)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-2)=4 \Rightarrow 12-24-2a=4 \Rightarrow a=-8 \\ f(-2)=-4 \Rightarrow -8+24-22+b=-4 \Rightarrow b=12 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای a و b حاصل $\frac{1}{3}ab$ برابر -48 می‌باشد.

دورستانه

مشتق مرتبه دوم:

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

۴/۱۱

$$\left(\binom{4}{0} \binom{5}{4} + \binom{4}{1} \binom{5}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} \right) \times 4! \\ = (1 + 4 \times 10 + 6 \times 20 + 4 \times 10) \times 24 = 66 \times 24 = 1584$$

دورستانه

نکات:

۱ اگر بخواهیم n شی را در یک صف قرار دهیم، تعداد حالات ممکن $n!$ است.

۲ اگر بخواهیم از بین n شی، k شی را انتخاب کنیم به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

۴/۱۲

$$a, a, b, c \rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{4}{1} \times \frac{4!}{3!} = 4 \times 12 = 48$$

$$a, a, a, c \rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{4}{1} \times \frac{4!}{3!} = 4 \times 4 = 16$$

$$a, a, b, b \rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{4}{2} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times 6 = 36$$

$$\text{کل حالات} = 48 + 16 + 36 = 100$$

دورستانه

قضیه جایگشت با تکرار

اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(-2-h)+1}{h^2-2h} = -1 \Rightarrow f''(-2-0)+1=0$$

$$\Rightarrow f''(-2) = -1 \Rightarrow f(-2) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(-2-h)+1)(f''(-2-h)-f(-2-h)+1)}{h(h-2)} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(-2-h)+1)}{-h} \times \frac{(f''(-2-h)-f(-2-h)+1)}{-(h-2)} = -1$$

$$\Rightarrow f'(-2) \times \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{2} = -1 \Rightarrow f'(-2) \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow f'(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow f(g(2)) = f(-2) = -1$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 24f'(-2) = 24 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -16$$

$$y+1 = -16(x-2) \xrightarrow{y=0} x = \frac{31}{16}$$

دورستانه

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگر تابع g در نقطه $x=a$ تابع f در نقطه $x=g(a)$ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه:

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a))$$

۳/۹

$$g(x) = \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{9x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{9(x - \frac{\pi}{9})} = \frac{f(\frac{\pi}{9}) - \frac{\pi}{2}}{9(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{9})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{9})}{9(x - \frac{\pi}{9})} \\ = \frac{1}{9} f'(\frac{\pi}{9})$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{9}) = \sin \frac{\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} g(x) = \frac{1}{9} f'(\frac{\pi}{9}) = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

دورستانه

به کمک قاعده زنجیری برای مشتق توابع مثلثاتی داریم:

$$1 \quad y = \sin(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cos(f(x))$$

$$2 \quad y = \cos(f(x)) \Rightarrow y' = -f'(x) \sin(f(x))$$

$$3 \quad y = \tan(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)(1 + \tan^2(f(x)))$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2ax + b$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 2a$$

$$f''(x) = 6x + 12$$

۳/۱۰

۱۶/۳ اگر تعداد توپهای ظرف A، B و C به ترتیب x_1 ، x_2 و x_3 باشد داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$n(S) = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

اگر فرض کنیم $x_1 = x_2$ باشد، آن گاه داریم:

$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow 2x_1 + x_3 = 9$ ، $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4$
در ۵ حالت از ۵۵ حالت، $x_1 = x_2$ است، پس در نصفی از ۵۰ حالت دیگر $x_1 > x_2$ است، بنابراین مسئله دارای ۲۵ جواب است.

دورسنامه

نکته: در این گونه مسائل ابتدا تعداد کل حالات را به دست می آوریم و تعداد حالاتی که $x_1 = x_2$ از کل حالات کسر می کنیم سپس در نصف حالات $x_1 > x_2$ است و در نصف دیگر حالات $x_1 < x_2$ است.

۱۷/۳ اگر تعداد نوشابه های انتخاب شده a، b، c، d و e به

ترتیب x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 و x_5 باشد، داریم:

$$x_1 + x_2 = 8 \quad (x_1 \geq 2, x_2 \geq 2)$$

$$\text{تعداد حالات} = \binom{8+2-1-2-2}{2-1} = \binom{5}{1} = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$\Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = 12 \quad (x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, x_5 \geq 2)$$

$$\text{تعداد حالات} = \binom{12+3-1-2-2-2}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$\text{تعداد کل جوابها} = 5 \times 28 = 140$$

دورسنامه

نکته: اگر برخی مجهول ها دارای شرط از پایین باشند، مثلاً سؤال بگوید $x_i \geq b$ در این صورت تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ از دستور زیر به دست می آید.

$$\text{تعداد جواب} = \binom{n+k-1-b}{k-1}$$

۱۸/۱

$$n(S) = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$$

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{9+2-1}{2-1} = \binom{10}{1} = 10$$

$$x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{7+2-1}{2-1} = \binom{8}{1} = 8$$

$$x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{5+2-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$$

$$x_1 = x_2 = 3 \Rightarrow x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$$

$$x_1 = x_2 = 4 \Rightarrow x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{1+2-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

۱۳/۳ عددی که از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب می شوند باید به

صورت های زیر باشند:

حالت اول: همه زوج

$$\text{تعداد توابع} = 2^5 = 32$$

حالت دوم: سه تا زوج و دو تا فرد

$$\text{تعداد توابع} = \binom{5}{2} \times 2^2 \times 2^3 = 10 \times 4 \times 8 = 320$$

حالت سوم: یک زوج و چهار تا فرد

$$\text{تعداد توابع} = \binom{5}{1} \times 2^4 \times 2^1 = 5 \times 16 \times 2 = 160$$

$$\text{تعداد توابع} = 32 + 320 + 160 = 512$$

دورسنامه

نکته: اگر مجموعه A دارای n عضو و مجموعه B دارای m عضو باشد،

تعداد توابعی که از مجموعه A بر روی مجموعه B می توان نوشت برابر m^n است.

۱۴/۴

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 3^7 \times 5^8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3^{a_1} \times 5^{b_1} \\ x_2 = 3^{a_2} \times 5^{b_2} \\ x_3 = 3^{a_3} \times 5^{b_3} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 8 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$\text{تعداد کل جواب} = 36 \times 45 = 1620$$

دورسنامه

نکته: تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)

$$\text{معادله } x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \text{ برابر } \binom{n-1}{k-1} \text{ می باشد.}$$

۱۵/۳ عدد چهاررقمی را به شکل abcd فرض می کنیم.

$$1) a+b+c+d \leq 8 \Rightarrow a+b+c+d+t=8 \quad (a \geq 1)$$

$$\text{تعداد جواب} = \binom{8+5-1-1}{5-1} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \times 7!} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11}{24} = 330$$

$$2) a+b+c+d \leq 3 \Rightarrow a+b+c+d+t=3 \quad (a \geq 1)$$

$$\text{تعداد جواب} = \binom{3+5-1-1}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$$

بنابراین جواب مسئله $330 - 15 = 315$ است.

دورسنامه

نکته: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله

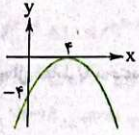
$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \text{ برابر } \binom{n+k-1}{k-1} \text{ می باشد.}$$

ریاضیات ۷

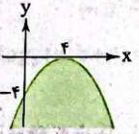
۲۱ | ۳ ابتدا معادله سهمی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$(x^2 - 8x + 16) = -4y \Rightarrow (x-4)^2 = -4y \Rightarrow \begin{cases} S(4, 0) \\ a = 1 \end{cases}$$

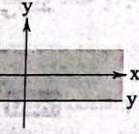
سهمی قائم رو به پایین
حال این سهمی را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



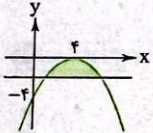
با توجه به نامعادله $x^2 - 8x + 4y + 16 \leq 0$ نقاط داخل سهمی مدنظر است:



حال نقاط مدنظر در نامعادله $y \geq -3$ را مشخص می‌کنیم:



حال بین این دو ناحیه اشتراک می‌گیریم:



۲۲ | ۱ ابتدا باید مختصات وسط AB را به دست آوریم:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

حال باید طول میانه CM را به دست آوریم:

$$CM = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{1}{4} + 4} = \sqrt{34/5}$$

دورسنامه

۱ می‌دانیم برای به دست آوردن مختصات نقطه‌ای که در وسط یک پاره‌خط قرار دارد کافی است بین مختصات دو سر پاره‌خط میانگین بگیریم:

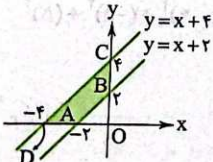


$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

۲ برای به دست آوردن فاصله دو نقطه A و B کافی است از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

۲۳ | ۲ ابتدا باید نمودار داده‌شده را رسم کنیم:



$$S_{ABCD} = S_{\triangle OCD} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 8 - 2 = 6$$

در $(10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30)$ حالت $x_1 = x_2$ است. پس در نصف باقی حالات $x_2 > x_1$ است.

$$n(A) = \frac{220 - 30}{2} = 95$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{95}{220} \Rightarrow P(A) = \frac{19}{44}$$

دورسنامه

احتمال

اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را $n(S)$ و تعداد اعضای پیشامد A را $n(A)$ نمایش دهیم، احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهند که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

۱۹ | ۱ اگر $\frac{x_2}{3} = t$ باشد، داریم $x_1 + \sqrt{x_2 + x_3} + t + x_5 = 6$

$$\begin{aligned} \text{حالت ۱: } x_2 + x_3 &= 4 \Rightarrow x_1 + t + x_5 = 4 \\ \text{(I)} \end{aligned}$$

$$\text{(I) جواب معادله} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$$\text{(II) جواب معادله} = \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$\text{جواب حالت اول} = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{حالت ۲: } x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow x_1 + t + x_5 = 3$$

$$\text{(I) جواب معادله} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{8}{1} = 8$$

$$\text{(II) جواب معادله} = \binom{3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$\text{جواب حالت دوم} = 8 \times 1 = 8$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 9 + 8 = 17$$

دورسنامه

نکته: در معادله $x_1 + x_2 + \frac{x_3}{a} + \dots + x_k = n$ تعداد جواب‌ها با جواب

معادله $x_1 + x_2 + t + \dots + x_k = n$ برابر است. (دقت کنید که $\frac{x_3}{a}$ است و

اگر $\frac{bx_3}{a}$ باشد و $b \neq 1$ باشد، این رابطه صحیح نیست.)

۲۰ | ۲ اگر توان‌های b, c, d و e به ترتیب x_1, x_2, x_3, x_4 باشد، داریم:

$$\begin{aligned} 5 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 13 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ \text{جواب} &= \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{6 \times 8!} = 165 \end{aligned}$$

دورسنامه

یادآوری: هر یک از جملات بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_i)^n$ به صورت $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i}$ است که $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = n$ است.

اگر قرینه نقطه P را P' بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned}x_{P'} &= 2x_M - x_P = 2 \times 6 - 14 = \frac{22}{3} \\y_{P'} &= 2y_M - y_P = 2 \times 4 - 0 = 8 \\z_{P'} &= 2z_M - z_P = 2 \times 5 - 0 = 10 \\P' \text{ مجموع مختصات} &= \frac{22}{3} + 8 + 10 = \frac{76}{3}\end{aligned}$$

دورنامه

نکته: برای یافتن قرینه نقطه A نسبت به نقطه M کافی است از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$M \text{ نسبت به } A' \text{ قرینه } A' = 2M - A$$

۲/۲۷ چون پرتوهای نوری موازی محور تقارن سهمی بر سهمی می‌تابند، پس طبق خاصیت بازتابندگی سهمی بازتاب تمامی آن‌ها از کانون سهمی عبور می‌کنند، پس نقطه (۴، ۵) همان کانون سهمی است. ابتدا معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$y^2 - 8y + 16 = -4x + p + 16$$

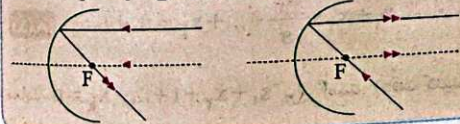
$$\Rightarrow (y-4)^2 = -4\left(x - \frac{p}{4} - 4\right)$$

بنابراین با یک سهمی افقی رو به چپ روبه‌رو هستیم که در آن $a=1$ و رأس سهمی به‌صورت $S\left(\frac{p}{4} + 4, 4\right)$ است، پس برای به‌دست آوردن مختصات کانون باید به اندازه a واحد به سمت چپ حرکت کنیم:

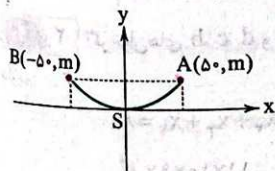
$$\frac{p}{4} + 4 - 1 = 5 \Rightarrow p = 8$$

دورنامه

تذکره: اگر یک شعاع نوری موازی محور تقارن سهمی بر آن بتابد بازتاب آن حتماً از کانون سهمی عبور می‌کند و برعکس، یعنی اگر یک شعاع نوری از کانون سهمی بر آن بتابد بازتابش موازی محور سهمی خواهد بود:



۱/۲۸ سهمی شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



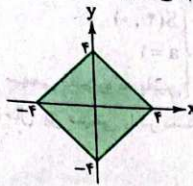
فرض می‌کنیم عمق آینه m باشد:

$$x^2 = 4ay \xrightarrow{a=24} x^2 = 4 \times 24 \times y \Rightarrow x^2 = 96y$$

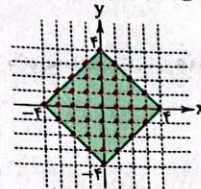
حال می‌دانیم نقطه A روی سهمی است، پس مختصات آن در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$(50)^2 = 96 \times y \Rightarrow 2500 = 96y \Rightarrow y = \frac{625}{24}$$

۴/۲۲ ابتدا نمودار رابطه $|x| + |y| \leq 4$ را رسم می‌کنیم:



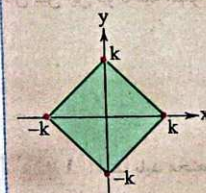
حال نقاط با مختصات صحیح را در نمودار رسم شده می‌یابیم:



با توجه به شکل ۴۱ نقطه با مختصات صحیح در رابطه داده‌شده صدق می‌کنند.

دورنامه

نکته: معادله $|x| + |y| = k$ یک لوزی است که محل برخورد آن با محورها مختصات $\pm k$ است.



۱/۲۵ نقطه $A(\alpha, \beta, \gamma)$ را در نظر می‌گیریم و فاصله‌اش از هر کدام از صفحه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه } xoy = |\gamma| = 2 \Rightarrow \gamma = \pm 2 \\ \text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه } xoz = |\beta| = 3 \Rightarrow \beta = \pm 3 \\ \text{فاصله نقطه } A \text{ از صفحه } yoz = |\alpha| = 5 \Rightarrow \alpha = \pm 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\pm 5, \pm 3, \pm 2)$$

بنابراین ۸ نقطه با این مشخصات یافت می‌شود.

دورنامه

نکته: فاصله نقطه $A(\alpha, \beta, \gamma)$ از صفحات xoy ، xoz و $yo z$ به ترتیب برابر است با $|\alpha|$ ، $|\beta|$ و $|\gamma|$ است.

۳/۲۶ چون نقطه P روی محور xها است، پس مختصات آن به فرم $P(\alpha, 0, 0)$ است:

$$|PA| = |PB| \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{(\alpha-4)^2 + (-1)^2 + (5)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha-1)^2 + 13 = (\alpha-4)^2 + 26$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 13 = \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 26$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 28 \Rightarrow \alpha = \frac{14}{3}$$

بنابراین مختصات نقطه P برابر است با: $\left(\frac{14}{3}, 0, 0\right)$

ریاضیات ۱

۳۲۲ ابتدا هر یک از عبارات‌های داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{a-3} = \sqrt{(3^2)^{a-3}} = 3^{\frac{2(a-3)}{2}} = 3^{a-3}$$

$$\sqrt[3]{6^b-8} = \sqrt[3]{(4^3)^{b-8}} = 4^{\frac{3(b-8)}{3}} = 4^{b-8} = (2^2)^{b-8} = 2^{2b-16}$$

$$6^{-a} = (2 \times 3)^{-a} = 2^{-a} \times 3^{-a}$$

$$\begin{cases} 3^{a-3} = 3^{1-a} \Rightarrow a-3=1-a \Rightarrow 2a=+4 \Rightarrow a=2 \\ 2^{2b-16} = 2^{1-a} \Rightarrow 2b-16=1-a \xrightarrow{a=2} 2b-16=-1 \Rightarrow b=\frac{15}{2} \end{cases}$$

برای محاسبه حاصل خواسته‌شده، باید عبارت زیر را به دست آوریم:

$$\log_6(a^2b+6) = \log_6(4 \times \frac{15}{2} + 6) = \log_6 36 = 2$$

دورستانه

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک x و y دو عدد مثبت حقیقی باشند، آن‌گاه:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| ۱ $a^0 = 1$ | ۵ $(ab)^x = a^x b^x$ |
| ۲ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ | ۶ $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ |
| ۳ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ | ۷ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ |
| ۴ $(a^x)^y = a^{xy}$ | |

۳۲۳ با توجه به این‌که $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} f(x) = \frac{4}{5}$ است، x_0 ریشه مشترک

صورت و مخرج می‌باشد، پس:

$$x + \sqrt{x+6} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+6} = -x \Rightarrow x+6 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \xrightarrow{x < 0} x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2b}{x + \sqrt{x+6}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 4 - 2a + 2b = 0 \Rightarrow 2a = 4 + 2b \Rightarrow a = 2 + b \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (b+2)x + 2b}{x + \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+b)}{(x+\sqrt{x+6})(x-\sqrt{x+6})} \times \frac{(x-\sqrt{x+6})}{(x-\sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+b)(-4)}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+b)(-4)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{(-2+b)(-4)}{-5} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = 3 \quad (2)$$

از عبارت‌های (۱) و (۲) مقدار $a = 5$ به دست می‌آید:

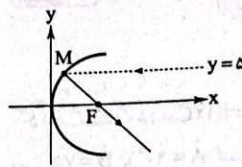
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + \sqrt{x+6}} = \frac{9 + 10 + 6}{-2 + 2} = 5$$

دورستانه

رفع ابهام در حضور رادیکال

اگر با جایگذاری در حد به عبارت $\frac{\text{صفر فردی}}{\text{صفر فردی}}$ برسیم، می‌گوییم جواب مبهم است و باید رفع ابهام کنیم. در رفع ابهام رادیکالی باید در مزدوج ضرب کنیم تا عامل صفرکننده (عامل ابهام) از حد بیرون کشیده شود.

۱/۲۹ با توجه به معادله داده‌شده، سهمی افقی به سمت راست است:



$$y^2 = 20x \Rightarrow \begin{cases} S(0,0) \\ 4a = 20 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow F(5,0) \end{cases}$$

از طرفی خط $y = 5$ سهمی را قطع می‌کند، پس داریم:

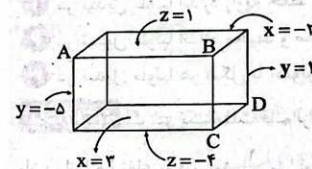
$$y^2 = 20x \xrightarrow{y=5} 25 = 20x \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow M(\frac{5}{4}, 5)$$

$$m_{MF} = \frac{5-0}{\frac{5}{4}-5} = \frac{5}{-\frac{15}{4}} = \frac{-20}{15} = \frac{-4}{3}$$

معادله خط بازتاب:

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \Rightarrow 3y + 4x = 20$$

۱/۳۰ ناحیه محدود به صفحات ذکر شده در صورت سؤال یک مکعب مستطیل است که برای به‌دست آوردن حجم آن کافی است طول یال‌های آن مکعب مستطیل را به‌دست آوریم:



$$|AB| = |1 - (-5)| = 6$$

$$|BC| = |1 - (-4)| = 5$$

$$|DC| = |2 - (-2)| = 4$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

۲/۳۱

$$\log_3(x+4) + \log_3(x-4) = \log_3(x+4)(x-4) = \log_3(x^2 - 16)$$

از فرمول $a^{\log_a x} = x$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{5} \log_{\sqrt{5}} 6^x = \log_5 6^x = 6^x \Rightarrow x^2 - 16 = 6^x \Rightarrow x^2 - 16 - 6^x = 0 \\ \frac{1}{3} \log_3(x^2 - 16) = x^2 - 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (غق)} \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\log_3(x+1)) - 1 = (\log_3 9) - 1 = 2 - 1 = 1$$

دورستانه

برای اعداد حقیقی a ، b و c همواره داریم:

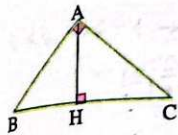
- ۱ $a^{\log_a x} = x, a > 0, a \neq 1, x > 0$
- ۲ $\log_b a + \log_b c = \log_b ac, a, b, c > 0, b \neq 1$
- ۳ $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}, a, b, c > 0, b \neq 1$

۳ ۳۶

$$\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 60^\circ \\ \hat{B} = 50^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 50^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 70^\circ$$

پس $\hat{B} = 70^\circ$ و $\hat{A} = 90^\circ$ است و می‌دانیم در چنین مثلثی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است، پس:



$$AH = \frac{1}{4} BC = \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 16 = 32$$

چون تبدیل T طولی است، پس مساحت مثلث $A'B'C'$ با مساحت مثلث ABC برابر است.

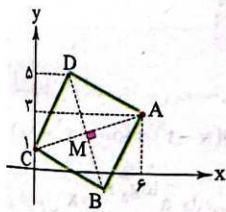
دوستانه

نکات تبدیل طولی

- ۱ در تبدیل طولی اندازه زاویه حفظ می‌شود.
 - ۲ در تبدیل طولی اندازه محیط و مساحت شکل حفظ می‌شود.
 - ۳ در تبدیل طولی هر شکل با تصویرش هم‌نهشت است.
- یادآوری:** اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه زاویه‌های حاده 15° و 75° باشد، اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است.

۳ ۳۷

چون نقطه C، نقطه ثابت تبدیل در بازتاب نسبت به محور y است، پس نقطه C روی محور yها است. $C(0, 1)$



$$\text{محل تلاقی قطرهای مربع} = M = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (3, 2)$$

$$\text{شیب قطر AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{3-1}{6-0} = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند، پس قطر BD دارای شیب (-3) است و از $M(3, 2)$ می‌گذرد.

$$y - y_M = -3(x - x_M) \Rightarrow y - 2 = -3(x - 3) \Rightarrow y = -3x + 11$$

نقطه D روی خط $y = -3x + 11$ است، پس داریم:

$$5 = -3x + 11 \Rightarrow -6 = -3x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D(2, 5)$$

بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC نقطه B است. اگر $B(\alpha, \beta)$ باشد، داریم:

$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (3, 2) = \left(\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\beta+5}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha+2}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = 4 \\ \frac{\beta+5}{2} = 2 \Rightarrow \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(4, -1)$$

$$OB = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

۱ ۳۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2[-(2^+)] + d = -6 + d$$

$$f(2) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + ax^2 + bx}{(x-2)^2}$$

چون مخرج دارای ۲ عامل صفرکننده است، باید صورت نیز حداقل ۲ عامل صفرکننده داشته باشد تا حاصل حد موجود باشد، پس صورت کسر به فرم $x(x^2 + ax + b)$ دارای ۲ عامل $(x-2)$ است، یعنی:

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow b = 4, a = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)^2}{(x-2)^2} = 2$$

پس طبق پیوستگی تابع $f(x)$ در $x=2$ داریم:

$$d - 6 = 2 = c \Rightarrow d = 8, c = 2$$

پس خواسته سؤال از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$2(-4) - 2(4) + 8 - 6 = -14$$

دوستانه

اگر تابع f در نقطه $x=a$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد، آن‌گاه در این نقطه پیوسته است:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است.

۲ ۳۵

حد صورت کسر صفر است و حد کل کسر صفر نیست، پس حد مخرج هم صفر بوده که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر می‌باشد:

$$b \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{b}{4} - 1 = 0 \Rightarrow b = 4$$

با جایگذاری $b=4$ مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 x + \sin x - 1}{4 \sin^2 x - 1} = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x + 1)(4 \sin x - 1)}{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

پس مقدار a برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد:

$$3a - \frac{b}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

دوستانه

رفع ابهام حدهای مثلثاتی:

در رفع ابهام به کمک اتحادهای مثلثاتی، اگر به حالت صفرحدی برسیم در ابتدا باید عامل ابهام را خارج کنیم. برای این کار باید از اتحادهای مثلثاتی استفاده کنیم و تابع را ساده کنیم و عامل‌هایی را از صورت و مخرج حذف کنیم تا به جواب نهایی دست یابیم.

$$m_{BB'} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_{L'} = -4$$

$$y - y_Q = m(x - x_Q) \Rightarrow y - \frac{2}{3} = -4(x - 2)$$

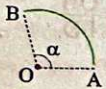
$$\Rightarrow y = -4x + \frac{22}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} -\frac{1}{3}x + 2 = -4x + \frac{22}{3} \Rightarrow \frac{11}{3}x = \frac{22}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{1}$$

دورنما

دوران

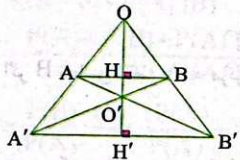
دوران R به مرکز نقطه O و زاویه α تبدیلی در صفحه است که هرگاه اگر تصویر نقطه A برابر نقطه B شود، داشته باشیم:



$$\textcircled{1} OA = OB$$

$$\textcircled{2} \angle AOB = \alpha$$

اگر نقاط O و O' به ترتیب مرکز تجانس مستقیم و معکوس باشند، داریم:



$$AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} OH = 2k \\ OH' = 3k \end{cases}$$

$$HH' = 25 \Rightarrow OH' - OH = 25 \Rightarrow 3k - 2k = 25 \Rightarrow k = 25$$

$$\Rightarrow OH = 50, OH' = 150$$

$$AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle O'AB \sim \triangle O'A'B' \Rightarrow \frac{O'H}{O'H'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{O'H}{O'H'} = \frac{14}{21} \Rightarrow \frac{O'H}{O'H'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{O'H}{O'H + O'H'} = \frac{2}{2+3}$$

$$\Rightarrow \frac{O'H}{35} = \frac{2}{5} \Rightarrow O'H = 14$$

$$OO' = OH + HO' = 50 + 14 \Rightarrow OO' = 64$$

دورنما

تجانس

اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه M, O, M' روی یک خط راست باشند.

$$\text{ب) } OM' = |k| OM$$

ج) اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

$$k=2 \quad \begin{array}{c} O \quad \quad M \quad \quad M' \end{array}$$

$$OM' = 2OM$$

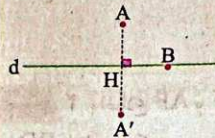
$$k=\frac{1}{2} \quad \begin{array}{c} O \quad \quad M' \quad \quad M \end{array}$$

$$OM' = \frac{1}{2} OM$$

دورنما

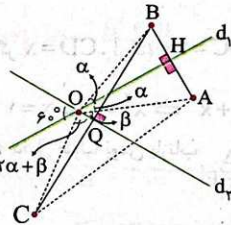
بازتاب

برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم: $S_d(A) = A'$



اگر نقطه B روی خط d باشد، در این صورت تصویر این نقطه خودش است و به آن نقطه ثابت تبدیل گوییم. $S_d(B) = B$

۴ ۳۸



$$\alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 120^\circ$$

در مثلث OAC: $\angle AOC = 2\alpha + 2\beta = 120^\circ$ است:

$$\begin{cases} S_{d_1}(A) = B \\ S_{d_1}(O) = O \end{cases} \xrightarrow{\text{طولیا بودن}} OA = OB = 12$$

$$\begin{cases} S_{d_2}(B) = C \\ S_{d_2}(O) = O \end{cases} \xrightarrow{\text{طولیا بودن}} OB = OC = 12$$

در مثلث OAC داریم:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AC^2 = 144 + 144 - 2 \times 12 \times 12 \times (-\frac{1}{2}) \Rightarrow AC = 12\sqrt{3}$$

دورنما

نکات بازتاب

۱) بازتاب یک تبدیل طولیا است.

۲) چون بازتاب طولیا است، زاویه بین دو خط را حفظ می‌کند.

۱ ۳۹

محل برخورد عمودمنصف‌های AA' و BB' نقطه O است.

$$AA' \text{ وسط } H = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

$$m_{AA'} = \frac{3-0}{2-1} = 3 \Rightarrow m_L = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_H = m(x - x_H) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad (1)$$

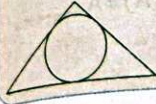
$$BB' \text{ وسط } Q = (2, \frac{3}{2})$$

دورسنامه

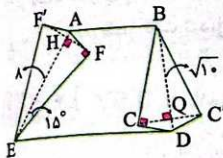
نکات:

۱ در بین مثلث‌هایی که یک ضلع و مساحت معلومی دارند، کم‌ترین محیط مربوط به مثلث متساوی‌الساقین است.

۲ شعاع دایره محاطی داخلی هر مثلث به مساحت S و محیط p از رابطه $r = \frac{S}{p}$ به دست می‌آید.



۲/۲۳ اضلاع AF و EF را نسبت به AE و اضلاع BC و CD را نسبت به BD بازتاب می‌کنیم.



اگر $CD = x$ ، آن‌گاه $BC = 3x$.

$$\Delta BDC: BD^2 = BC^2 + CD^2 \Rightarrow 10 = 9x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

به دلیل طولی بودن بازتاب $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BC'D}$ و $S_{\Delta AFE} = S_{\Delta A'F'E}$

$$FH = \frac{1}{4}AE = \frac{1}{4}(8) = 2$$

$$S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2}FH \times AE = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

اگر مساحت شش‌ضلعی اولیه S و شش‌ضلعی ثانویه S' باشد، داریم:

$$S' = S + 2S_{\Delta AEF} + 2S_{\Delta BCD} \Rightarrow S' = S + 2(8) + 2\left(\frac{3}{2}\right)$$

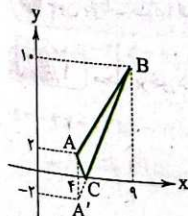
$$\Rightarrow 2S = S + 19 \Rightarrow S = 19$$

دورسنامه

نکته: اگر بخواهیم بدون تغییر در محیط یک مثلثی، مساحت آن مثلثی را افزایش دهیم، از بازتاب استفاده می‌کنیم.

۲/۲۴ بازتاب A نسبت به محور x را A' می‌نامیم که $A'(4, -2)$ است.

اگر A' را به B وصل کنیم محور x را در نقطه C قطع می‌کند و کم‌ترین مقدار $AC + BC$ برابر $A'B$ است که:



$$A'B = \sqrt{(4-9)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 13$$

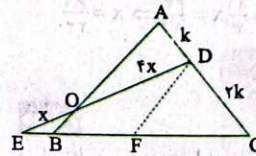
$$AB = \sqrt{(4-9)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} = \sqrt{19}$$

$$ABC \text{ کم‌ترین محیط} = AB + AC + BC = \sqrt{19} + 13$$

اگر k منفی باشد، M' روی نیم‌خط OM و نقاط M' و M در دو طرف نقطه O قرار دارند.

$$k = -2 \quad \begin{array}{c} M' \quad \quad O \quad \quad M \\ OM' = 2OM \end{array}$$

۴/۴۱ از نقطه D موازی AB رسم می‌کنیم تا BC را در F قطع کند.



$$OD = 2OE \Rightarrow \begin{cases} OD = 2x \\ OE = x \end{cases}$$

$$\Delta EFD: OB \parallel DF \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{ED} = \frac{OB}{FD} \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{OB}{FD} \Rightarrow FD = 2OB$$

$$\Delta ACB: DF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{CD}{CA} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow \frac{rk}{rk} = \frac{DF}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{3}DF \Rightarrow AO + OB = \frac{2}{3} \times 2OB$$

$$\Rightarrow AO = \frac{1}{3}OB \Rightarrow OB = \frac{2}{13}OA$$

اگر B تجانس نقطه A به مرکز O و نسبت p باشد، داریم:

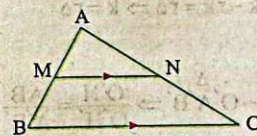
$$\frac{OB}{OA} = |p| \Rightarrow |p| = \frac{2}{13}$$

چون مرکز تجانس بین دو نقطه A و B است، $p < 0$ است، پس:

$$p = -\frac{2}{13}$$

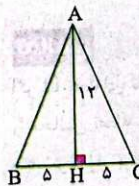
دورسنامه

یادآوری:



$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$S = \frac{1}{2}AH \times BC \Rightarrow 60 = \frac{1}{2} \times AH \times 10 \Rightarrow AH = 12$$



شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه $\frac{S}{p}$ به دست می‌آید، پس محیط این مثلث

باید کم‌ترین مقدار باشد و از بین مثلث‌های مفروض کم‌ترین محیط مربوط به مثلث متساوی‌الساقین است.

$$\Delta ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\Rightarrow AB = 13 \Rightarrow AC = 13$$

$$2p = AB + BC + AC = 13 + 10 + 13 = 36 \Rightarrow p = 18$$

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{60}{18} \Rightarrow r = \frac{10}{3}$$

دوستانه

اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود عددی است حقیقی که $0 \leq P(A) \leq 1$.

۴۷/۲ با توجه به این که $P(A-B)$ ، $P(B-A)$ و $P(A \cup B)$ دنباله حسابی تشکیل می‌دهند، داریم:

$$\begin{aligned} P(A-B) + P(A \cup B) &= 2P(B-A) \\ \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 2(P(B) - P(A \cap B)) \\ \Rightarrow 2P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) &= 2P(B) - 2P(A \cap B) \\ \Rightarrow 2P(A) &= P(B) \quad (*) \\ \frac{P(A \cup B) - P(A-B)}{P(A-B) + P(A \cap B)} &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B)}{P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(A)} \quad (*) \quad \frac{2P(A)}{P(A)} = 2 \end{aligned}$$

دوستانه

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۴۸/۴

عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقسوم علیه	۱	۱,۲	۱,۳	۱,۲,۴	۱,۵	۱,۲,۳,۶

$$P(1) = x, P(2) = P(3) = P(5) = 2x, P(4) = 3x, P(6) = 4x$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow x + 2x + 2x + 3x + 2x + 4x = 1 \Rightarrow 14x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{14}$$

حال احتمال پیشامد $A = \{2, 4, 6\}$ برابر است با:

$$P(A) = 2x + 3x + 4x = 9x = \frac{9}{14}$$

دوستانه

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس گویند.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ فضای نمونه‌ای و $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشند، همواره داریم:

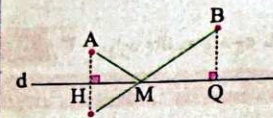
$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۱)$$

$$P(S) = 1 \quad (۲)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (۳)$$

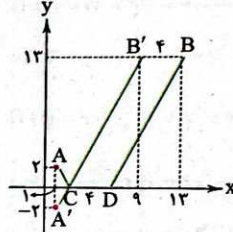
دوستانه

اگر بخواهیم از نقطه A به خط d برویم و سپس به نقطه B برویم در ضمن کوتاه‌ترین مسیر ممکن را طی کرده باشیم، ابتدا بازتاب نقطه A نسبت به خط d را به دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم و سپس A' را به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند، مسیر AMB جواب مسئله است و دو مثلث AHM و BMQ متشابه هستند.



$$A'B = \text{طول کوتاه‌ترین مسیر } AMB$$

۴۵/۴ ابتدا نقطه B را با برداری به طول ۴ موازی محور x به طرف محور y انتقال می‌دهیم تا نقطه $B'(9, 13)$ به دست آید و بازتاب نقطه A نسبت به محور x را $A'(1, -2)$ می‌نامیم که A' است و A' را به B' وصل می‌کنیم تا محور x را در نقطه C قطع کند، مسیر $ACDB$ جواب مسئله است.

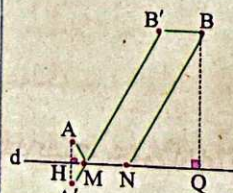


$$A'B' = \sqrt{(1-9)^2 + (-2-13)^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

$$ACDB \text{ مسیر} = AC + CD + DB = \underbrace{AC + DB}_{A'B'} + 4 = 17 + 4 = 21$$

دوستانه

اگر بخواهیم از نقطه A به خط d برویم و مسیر L را روی خط d طی کنیم و سپس به نقطه B برویم و در ضمن این مسیر، کوتاه‌ترین مقدار خود باشد، ابتدا بازتاب نقطه A نسبت به خط d را به دست می‌آوریم (نقطه A') سپس نقطه B را با برداری به طول L و موازی d انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به دست آید و A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع کند، از M روی خط d به اندازه L حرکت می‌کنیم تا به نقطه N برسیم و مسیر $AMNB$ جواب مسئله است.



$$AMNB \text{ مسیر} = A'B' + L$$

$$n(S) = 9!$$

۴۶/۲ تعداد کل حالات برابر است با:

برای آن که تعداد حالات مطلوب را بشماریم، به این ترتیب عمل می‌کنیم که ۳ نفر از ۷ نفر دوست را انتخاب کرده و بین هادی و علی قرار می‌دهیم که تعداد حالات آن برابر با $P(7, 3)$ می‌باشد، سپس این ۵ نفر (علی و هادی و ۳ نفر از دوستان) را یک نفر فرض کرده، با ۴ نفر دیگر به ۵! جایگشت دارند. خود هادی و علی نیز به ۲ حالت می‌توانند جای خود را عوض کنند، بنابراین:

$$n(A) = P(7, 3) \times 5! \times 2 = 10 \times 7!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10 \times 7!}{9!} = \frac{5}{36}$$

کل مسافتی که موج در مدت زمان رفت و برگشت طی می کند را $2L$ در نظر می گیریم. با توجه به این که نوع حرکت موج با سرعت ثابت است داریم:

$$\Delta x = v \cdot t \quad \Delta x = 2L \Rightarrow 240 = v \times 0.2 \Rightarrow v = 1200 \frac{m}{s}$$

حال داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{1200}{180 \times 10^3} = \frac{12}{1800} = 1/150 cm$$

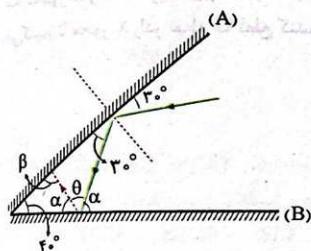
موارد «الف» و «ج» نادرست هستند.

پرسش عبارت های نادرست:

الف) در اجاق های خورشیدی برای گرم کردن آب یا مواد غذایی از امواج فرسرخ استفاده می شود.

ج) ضریب شکست خلأ برای تمام طول موج های امواج الکترومغناطیسی یکسان است.

مطابق قانون عمومی بازتاب داریم:



$$\alpha + \theta = 180^\circ - 70^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 110^\circ \quad (1)$$

$$2\alpha + \theta = 180^\circ \quad (2)$$

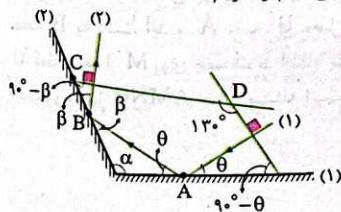
$$(2) - (1) \Rightarrow \alpha = 70^\circ$$

$$\alpha + \beta + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + \beta + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 70^\circ$$

در نتیجه زاویه تابش به آینه A برابر است با:

$$90^\circ - \beta = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

مسیر پرتوها را رسم می کنیم و داریم:

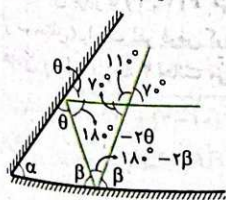


دقت کنید که مجموع زوایای داخلی چهارضلعی 360° است.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \theta = 180^\circ \\ \alpha + (90^\circ - \beta) + 130^\circ + (90^\circ - \theta) = 360^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + (\beta + \theta) = 180^\circ \\ \alpha - (\beta + \theta) = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = 230^\circ \Rightarrow \alpha = 115^\circ$$

با استفاده از قانون عمومی بازتاب آینه ها داریم:



اگر پیشامد اصابت تیر هر یک از این سه نفر به هدف را به ترتیب A، B و C در نظر بگیریم، چون A، B و C دویه دو نسبت به هم مستقل اند، می توان نوشت:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A')P(B')P(C') = 1 - 0.75 \times 0.4 \times 0.25 = \frac{37}{40}$$

دوستانه

پیشامدهای A و B را مستقل می گوئیم، هرگاه وقوع یکی از آن ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل اند، اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می شوند.

پیشامد سفید بودن مهره اول: A
پیشامد سیاه بودن مهره دوم: B

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')}$$

$$= \frac{\frac{1}{18} \times \frac{1}{17}}{\frac{1}{18} \times \frac{1}{17} + \frac{1}{18} \times \frac{1}{17}} = \frac{1}{17}$$

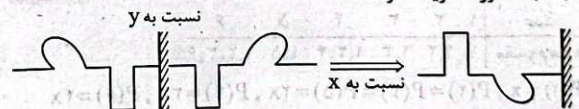
دوستانه

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A طبق قانون بیز داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

فیزیک

در بازتاب یک بُعد، همواره موج بازتابیده نسبت به محور Y و بعد نسبت به محور X قرینه خواهد شد.

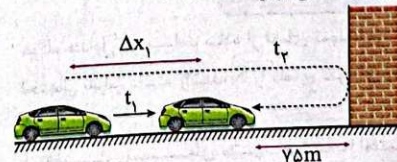


ابتدا مسافتی که اتومبیل در 5 ثانیه اول حرکت کرده را به دست می آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \times 10 \times 25 = 125m$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 10 \times 5 = 50 \frac{m}{s}$$

حال در این لحظه فاصله اتومبیل تا مانع برابر 75m است.



$$t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{\Delta x}{50} = \frac{150 - \Delta x}{300}$$

$$\Rightarrow 6\Delta x = 150 - \Delta x \Rightarrow 7\Delta x = 150 \Rightarrow \Delta x = \frac{150}{7}$$

$$\text{فاصله تا مانع} = 75 - \frac{150}{7} = \frac{375}{7}m$$

۳۶۳ رابطه قانون شکست عمومی را بین دو ناحیه (۱) و (۲) می‌نویسیم:

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{v_r}{v_i} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\frac{L_r}{\Delta t}}{\frac{L_i}{\Delta t}} \Rightarrow \frac{\sin 37^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{L_r}{L_i}$$

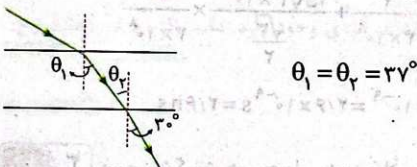
$$\Rightarrow \frac{0.6}{1} = \frac{L_r}{15} \Rightarrow L_r = 15 \times 0.6 = 9 \text{ cm} = 0.09 \text{ m}$$

از آن جایی که فاصله بین جبهه‌های موج در محیط (۲) بیشتر از محیط (۱) است، بنابراین λ_r بزرگ‌تر از λ_i و ناحیه (۲) عمق بیشتری دارد.

۳۶۴ در تغییر محیط انتشار، همواره بسامد نیز ثابت است، در نتیجه داریم:

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{v_r}{v_i} = \frac{\lambda_r}{\lambda_i} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

۳۶۵ هنگامی که یک پرتو از محیطی وارد محیط دیگر می‌شود و می‌خواهد از آن خارج شود، زاویه شکست با زاویه تابش آن برابر است. در نتیجه $\theta_i = \theta_r = 37^\circ$ برقرار است.



حال خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \frac{10}{1} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

۴۶۶ هنگامی که پرتو از محیطی با ضریب شکست بیشتر وارد محیطی با ضریب شکست کمتر می‌شود، پرتو از خط عمود دور خواهد شد. دقت داشته باشید ضریب شکست هوا برابر ۱ است.

$$\theta_r = 2\theta_i$$

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{n_i}{n_r} \Rightarrow \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = 1/6$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\theta_i}{\sin \theta_i} = 1/6 \Rightarrow \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i} = 1/6$$

$$\Rightarrow 2 \cos \theta_i = 1/6 \Rightarrow \cos \theta_i = 1/12 \Rightarrow \theta_i = 37^\circ$$

دقت داشته باشید سؤال زاویه بین پرتوی تابیده شده و سطح جدایی دو محیط یعنی α را می‌خواهد.

$$\alpha + \theta_i = 90^\circ \Rightarrow \alpha + 37^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 53^\circ$$

۴۶۷ ابتدا تندی نور در محیط‌های (۲) و (۳) را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v_r}{v_i} = \frac{n_i}{n_r} \Rightarrow \frac{v_r}{3 \times 10^8} = \frac{1}{4} \Rightarrow v_r = \frac{3}{4} \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{v_r}{v_i} = \frac{n_i}{n_r} \Rightarrow \frac{v_r}{3 \times 10^8} = \frac{1}{1/6} \Rightarrow v_r = \frac{3 \times 10^8}{1/6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(180^\circ - 2\theta) + (180^\circ - 2\beta) + \gamma = 180^\circ$$

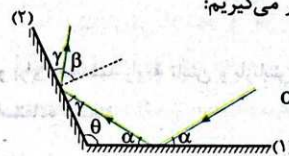
$$360^\circ - 2\theta - 2\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$2\theta + 2\beta = 360^\circ + \gamma - 180^\circ$$

$$2\theta + 2\beta = 250^\circ \Rightarrow \theta + \beta = 125^\circ$$

$$\alpha + \theta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 125^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 55^\circ$$

۴۵۸ زاویه بین دو آینه را θ در نظر می‌گیریم:



$$\alpha + \theta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ - \theta$$

زاویه بین دو آینه یعنی θ ثابت است. در نتیجه $\alpha + \gamma$ مقداری ثابت است.

$$\alpha + \gamma = \alpha' + \gamma' \xrightarrow{\alpha' = \alpha + 10^\circ} \alpha + \gamma = (\alpha + 10^\circ) + \gamma'$$

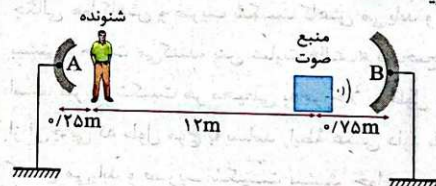
$$\Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha + 10^\circ + \gamma' \Rightarrow \gamma = 10^\circ + \gamma' \Rightarrow \gamma' = \gamma - 10^\circ$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ, \beta' + \gamma' = 90^\circ \xrightarrow{\gamma' = \gamma - 10^\circ} \beta' + \gamma - 10^\circ = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\gamma = 90^\circ - \beta} \beta' + 90^\circ - \beta - 10^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta' = \beta + 10^\circ$$

۴۵۹ وقتی چشمه در سطح کانن (۲) قرار بگیرد، شنونده می‌تواند

بیشترین شدت صوت را دریافت کند.



چون شنونده باید بیشترین شدت دریافتی را داشته باشد، منبع صوت باید در فاصله 0.75m از سطح قرار بگیرد، پس ۱ متر باید به سمت راست جابه‌جا شود.

۴۶۰ تمام موارد صحیح هستند.

۴۶۱ بررسی عبارت‌ها:

الف) با ورود موج سینوسی از قسمت ضخیم به قسمت نازک، جرم کاهش

می‌یابد. با توجه به رابطه $v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$ جرم کاهش یافته پس تندی زیاد

می‌شود، چون بسامد ثابت می‌ماند مطابق $\lambda = \frac{v}{f}$ طول موج نیز افزایش

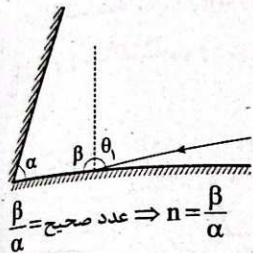
خواهد یافت.

ب و ج) تندی امواج روی سطح آب به عمق آب بستگی دارد، پس با ورود موج سطحی از قسمت عمیق به کم‌عمق، فاصله بین جبهه‌های موج کاهش و در نتیجه طول موج کاهش خواهد یافت.

۴۶۲

$$\frac{v_{\text{مایع}}}{v_{\text{شیشه}}} = \frac{n_{\text{شیشه}}}{n_{\text{مایع}}} = \frac{1/5}{4/3} = \frac{3}{20} = \frac{9}{8}$$

نکته: برای محاسبه تعداد بازتاب از آینه‌ها داریم:



$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{عدد صحیح} \Rightarrow n = \frac{\beta}{\alpha}$$

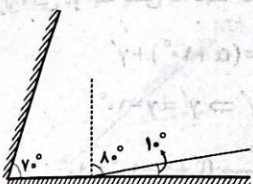
$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{عدد غیر صحیح} \Rightarrow n = \left[\frac{\beta}{\alpha} \right] + 1$$

و برای محاسبه زاویه تابش و بازتابش آخرین پرتو نیز می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\theta_n = |(n-1)\alpha - \theta_1|$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{17^\circ}{7^\circ} = \frac{2}{1} \Rightarrow n = [2/1] + 1 = 2 + 1 = 3$$

عدد غیر صحیح



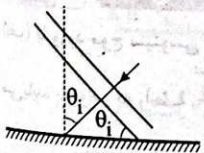
$$\theta_n = |(n-1)\alpha - \theta_1|$$

$$\theta_r = |(3-1) \times 7^\circ - 17^\circ| = |14^\circ - 17^\circ| = 3^\circ$$

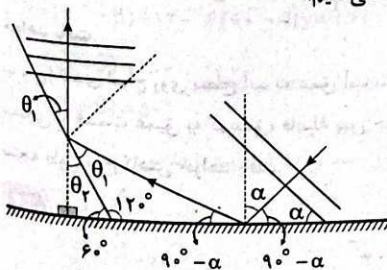
۴/۷۳ در پدیده سراب چون هوای نزدیک سطح زمین بسیار داغ است، چگالی هوا کاهش و ضریب شکست کاهش می‌یابد و در نتیجه پرتوها با تندی بیشتری حرکت می‌کنند، پس عبارت «الف» صحیح و عبارت «ب» نادرست است. ضریب شکست هر محیطی به جز خلأ به طول موج نور بستگی دارد؛ پس از آن جایی که طول موج با بسامد رابطه عکس دارد با افزایش بسامد، طول موج کاهش می‌یابد و ضریب شکست بیشتر خواهد شد. بنابراین عبارت «ج» نادرست است و از آن جایی که طول موج نور بنفش کمتر از زرد است، شکست آن بیشتر خواهد بود. در نتیجه فقط عبارت «الف» صحیح است.

۱/۷۴ زاویه بین جبهه‌های موج و سطح آینه برابر با زاویه تابش است.

دقت کنید که جبهه‌های موج عمود بر پرتوی موج است.



حال از نمودار پرتویی استفاده می‌کنیم.



$$\theta_r + 9^\circ + 6^\circ = 18^\circ$$

$$\theta_r + 15^\circ = 18^\circ \Rightarrow \theta_r = 3^\circ$$

به کمک رابطه اسنل دکارت زاویه بین پرتو نور با خط عمود بر مرز در محیط‌های (۲) و (۳) را پیدا می‌کنیم.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 53^\circ = \frac{4}{3} \times \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow \sin \theta_2 = 0.6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 53^\circ = \frac{1}{6} \times \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow \sin \theta_2 = 0.5 \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

اگر ضخامت هر محیط e فرض شود، طول مسیر طی شده X برابر $\frac{e}{\cos \theta}$ خواهد بود و با توجه به رابطه $t = \frac{X}{v}$ خواهیم داشت:

$$t = \frac{X}{v} = \frac{\frac{e}{\cos \theta}}{v} = \frac{e}{\cos \theta} \times \frac{n}{c}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 = \frac{e_1}{\cos \theta_1} \times \frac{n_1}{c} + \frac{e_2}{\cos \theta_2} \times \frac{n_2}{c}$$

$$\Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{18 \times 10^{-2}}{0.8} \times \frac{4}{3 \times 10^8} + \frac{15 \sqrt{3} \times 10^{-2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1/6}{3 \times 10^8}$$

$$\Rightarrow t_{\text{کل}} = 10^{-9} + 1/6 \times 10^{-9} = 2/6 \times 10^{-9} \text{ s} = 2/6 \text{ ns}$$

۳/۶۸ ضریب شکست هر محیطی به جز خلأ، به طول موج نور بستگی دارد. شکست امواج به طول موج هم بستگی دارد، بنابراین برای طول موج‌های بیشتر ضریب شکست کمتر است، در نتیجه چون طول موج نارنجی از نیلی بیشتر است، شکست آن کمتر خواهد بود.

۱/۶۹ علت رخ دادن پدیده سراب شکست امواج نوری است. وقتی امواج نوری از لایه‌های بالا به سمت پایین حرکت می‌کنند، تندی امواج افزایش می‌یابد در نتیجه ضریب شکست کمتر خواهد شد.

۳/۷۰ در پدیده پراش هرگاه پهنای شکاف در حدود طول موج باشد، پراش بازتر خواهد بود.

۳/۷۱ با توجه به این که موج از محیطی وارد محیط دیگر می‌شود که ویژگی‌های فیزیکی آن متفاوت است، تندی و طول موج تغییر خواهد کرد. اما بسامد آن ثابت می‌ماند، زیرا بسامد به ویژگی‌های منبع انتشار موج بستگی دارد. حال دقت کنید جرم واحد طول قسمت ضخیم طناب بیشتر از قسمت نازک آن است، پس مطابق رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ، جرم واحد طولی آن افزایش و تندی موج کاهش خواهد یافت.

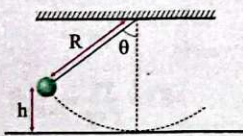
با توجه به رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ و ثابت بودن بسامد، طول موج در قسمت نازک بیشتر از طول موج در قسمت ضخیم است.

نتیجه‌گیری:

$$\lambda_{\text{نازی}} > \lambda_{\text{ضخیم}} \Rightarrow v_{\text{نازی}} > v_{\text{ضخیم}}, f_{\text{نازی}} = f_{\text{ضخیم}}$$

۴/۸۰ نکته: برای محاسبه ارتفاع جسمی که حرکت دورانی دارد مثل آونگ یا حرکت گوی در داخل کاسه کروی شکل باید:

$$h = R(1 - \cos\theta)$$



حال باید ارتفاع آونگ در نقاط A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$h_A = R(1 - \cos 37^\circ) = 0.4 \text{ m}$$

$$h_B = R(1 - \cos 27^\circ) = 0.2 \text{ m}$$

اکنون خواهیم داشت:

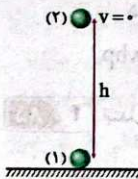
$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$\Rightarrow mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow 1 \times 0.4 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1 \times 0.2 + \frac{1}{2}v_B^2$$

$$\Rightarrow 4 + 1 = 2 + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 6 \Rightarrow v_B = \sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴/۸۱ در حالت اول اتلاف انرژی وجود دارد. دقت کنید در نقطه اوج، تندی گلوله صفر است.



$$E_f - E_1 = -0.4E_1 \Rightarrow E_f = 0.6E_1$$

$$\Rightarrow mgh = 0.6 \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow 1 \times h = 12 \Rightarrow h = 12 \text{ m}$$

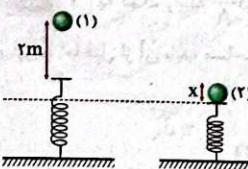
در حالت دوم اتلاف انرژی وجود ندارد. در نتیجه:

$$E_1 = E_f \Rightarrow mgh' = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 1 \times h' = 20 \Rightarrow h' = 20 \text{ m}$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$h' - h = 20 - 12 = 8 \text{ m}$$

۲/۸۲ مبدأ پتانسیل را هنگامی که نیمی از فنر فشرده شده است در نظر می‌گیریم.



$$E_1 = E_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\text{فنر}}$$

$$\Rightarrow 2 \times 1 \times (2 + x) = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + 45$$

$$\Rightarrow 2 \times (2 + x) = 46 \Rightarrow 40 + 2 \times x = 46$$

$$\Rightarrow 2 \times x = 6 \Rightarrow x = 0.3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

با توجه به زاویه متقابل به رأس، θ_1 با θ_2 برابر است:

$$\theta_2 = \theta_1 = 30^\circ$$

در نتیجه:

$$\theta_1 + 12^\circ + 9^\circ - \alpha = 18^\circ \Rightarrow 30^\circ + 12^\circ + 9^\circ - \alpha = 18^\circ$$

$$\Rightarrow 24^\circ - \alpha = 18^\circ \Rightarrow \alpha = 6^\circ$$

۱/۷۵ پهنای نوار با طول موج رابطه مستقیم دارد. اگر پهنای نوار در حالت اول را w و پهنای نوار در حالت دوم را w' در نظر بگیریم داریم:

$$\lambda' = 0.8\lambda \Rightarrow w' = 0.8w \Rightarrow w' = 0.8 \times 10 = 8 \text{ cm}$$

$$x = w' - w = 8 - 10 = -2 \text{ cm} \Rightarrow 2 \text{ cm} \text{ کاهش می‌یابد.}$$

۲/۷۶ ابتدا باید شتاب حرکت جسم و در نهایت جابه‌جایی جسم در ۳ ثانیه دوم را محاسبه کنیم.

$$F = ma \Rightarrow 16 = 8 \times a \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

جابه‌جایی در t ثانیه m حرکت را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = (v_0 - 0.5)at^2 + v_0t \xrightarrow{v_0=0} \Delta x = (2 - 0.5) \times 2 \times 9$$

$$\Delta x = d = 27 \text{ m}$$

حال کار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$W = Fd \cos \theta \Rightarrow W = 16 \times 27 \times \cos 0 = 432 \text{ J}$$

۴/۷۷ جرم اولیه بالن به همراه کیسه‌های شن برابر است با:

$$m_1 = m_{\text{بالن}} + m_{\text{کیسه شن}} = 800 + 500 = 1300 \text{ kg}$$

$$m_2 = m_{\text{بالن}} + m_{\text{جدید}} = 800 + 250 = 1050 \text{ kg}$$

جرم ثانویه برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{1050}{1300} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{1300}{1050} = \frac{26}{21} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{26}{21}}$$

۲/۷۸ نیروی خالص و جابه‌جایی هر دو قایق یکسان است، پس کل کار

هر دو قایق یکسان و مطابق قضیه کار و انرژی جنبشی، انرژی جنبشی هر دو

قایق هنگام رسیدن به انتهای یکسان است.

اما تندی آن‌ها یکسان نخواهد بود، زیرا:

$$W_{t_1} = W_{t_2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{t_1}^2 = \frac{1}{2}mv_{t_2}^2 \Rightarrow mv_{t_1}^2 = 2mv_{t_2}^2$$

$$\Rightarrow v_{t_1}^2 = 2v_{t_2}^2 \Rightarrow v_{t_1} = \sqrt{2}v_{t_2}$$

۲/۷۹ کار نیروی وزن قرینه تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی است.

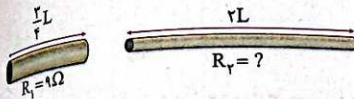
$$W_{AB} = -(U_B - U_A) \Rightarrow -40 = -(U_B - U_A)$$

$$\Rightarrow U_C - U_B = -10 \Rightarrow \begin{cases} U_B - U_A = 40 \\ U_C - U_B = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_C - U_A = 30 \Rightarrow mgh_C - mgh_A = 30 \Rightarrow mg(h_C - h_A) = 30$$

$$\Rightarrow 20(h_C - h_A) = 30 \Rightarrow h_C - h_A = 1.5 \Rightarrow h_A - h_C = -1.5 \text{ m}$$

حال جرم ثابت است. در نتیجه داریم:



$$A_1 L_1 = A_2 L_2 \Rightarrow A_1 \times \frac{L}{2} = A_2 \times 2L \Rightarrow A_1 \times \frac{1}{2} = 2A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{4} A_1$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{R_2}{1} = \frac{2L}{L} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{1} = 8 \Rightarrow R_2 = 8 \Omega$$

به کمک رابطه $R = \frac{V}{I}$ داریم:

$$8 = \frac{V}{1} \Rightarrow V = 8V$$

با استفاده از رابطه $\Delta R = R_1 \alpha \Delta T$ ابتدا ضریب دمایی را

محاسبه می‌کنیم:

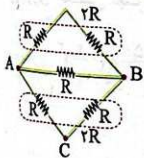
$$\Delta R = R_1 \alpha \Delta T \Rightarrow (20.01 - 20) = 20 \times \alpha \times 100 \Rightarrow \alpha = \frac{0.01}{2000}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

درصد تغییرات مقاومت را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta R \times 100 = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 2000 \times 100 = 1\%$$

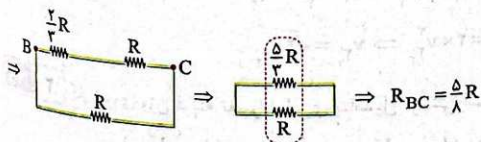
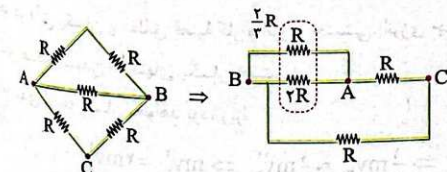
ابتدا مقاومت معادل بین دو نقطه A و B را به دست می‌آوریم:



$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{2}{R} \Rightarrow R_{AB} = \frac{R}{2}$$

حال مقاومت معادل بین دو نقطه C و B را به دست می‌آوریم:



در نتیجه:

$$\frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$$

۴/۸۳



$$E_2 - E_1 = W_{fD} \Rightarrow K_2 - U_1 - K_1 = W_{fD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - mgh_1 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{fD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 100 \times 16 - 100 \times 10 \times 400 - \frac{1}{2} \times 100 \times 4 = W_{fD}$$

$$\Rightarrow 800 - 400000 - 200 = W_{fD}$$

$$\Rightarrow W_{fD} = -399400 J$$

$$\Rightarrow W_{fD} = -f_D \times h \Rightarrow -399400 = -f_D \times 400$$

$$\Rightarrow -f_D = \frac{399400}{400} \Rightarrow f_D = 998.5 N$$

با استفاده از رابطه توان خواهیم داشت:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow P = \frac{\Delta K}{t} = \frac{\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)}{t} = \frac{\frac{1}{2} \times 2250 (2/5^2 - 0/5^2)}{5}$$

$$= \frac{1125 \times 6}{5} = 1350 W \xrightarrow{1hp = 750 W} P = \frac{1350}{750} = 1.8 hp$$

ابتدا توان مفید پمپ را محاسبه می‌کنیم:

$$R_a = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{P_{\text{مفید}}}{4000} \times 100 \Rightarrow P_{\text{مفید}} = 1000 W$$

حال داریم:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{m \times 10 \times 45}{2 \times 60} = 1000$$

$$\Rightarrow 45m = 12000 \Rightarrow m = \frac{12000}{45} kg$$

ظرفیت بار الکتریکی باتری را با آمپر. ساعت بیان می‌کنند.

$$\Delta q = I \times \Delta t \Rightarrow 400 = 100 \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 4h = 240 min$$

چون Δq بر حسب mAh و جریان بر حسب mA است نیازی به تبدیل یکا نداشت.

۳/۸۷ به کمک رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ می‌توانیم، مقاومت سیم را به دست

بیآوریم. اما قبل از آن باید، مساحت مقطع سیم را محاسبه کنیم:

$$A = \pi r^2 = \pi (1 \times 10^{-3})^2 = 3.14 \times 10^{-6} m^2$$

$$R = \rho \frac{L}{A} = 2/7 \times 10^{-7} \times \frac{200}{3.14 \times 10^{-6}} = 18.5 \Omega$$

۴/۸۸ با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، طول سیم با مقاومت سیم رابطه

مستقیم دارد و با بریدن $\frac{1}{4}$ سیم و کنار گذاشتن آن، $\frac{3}{4}$ طول سیم باقی می‌ماند. بنابراین مقاومت سیم برابر ۹۵۲ خواهد بود.

۹۵/۳ توان خروجی باتری از رابطه $P = \varepsilon I - I^2 r$ محاسبه می شود.

$$P = \varepsilon I - I^2 r \Rightarrow \begin{cases} 8 = \varepsilon \times 2 - 2 \times 4 \\ 6 = \varepsilon \times 3 - 3 \times 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2\varepsilon - 8 \\ 6 = 3\varepsilon - 27 \end{cases}$$

عبارت «الف» درست و عبارت «ب» نادرست هستند. $\Rightarrow r = 2\Omega, \varepsilon = 8V$

بیشینه توان خروجی از رابطه $P = \frac{\varepsilon^2}{4r}$ محاسبه می شود.

$$P_{\max} = \frac{64}{4 \times 2} = 8W \Rightarrow \text{عبارت «ج» درست است.}$$

اگر جریان در مدار برابر $I = \frac{\varepsilon}{2r}$ باشد توان خروجی بیشینه است.

$$I = \frac{8}{2 \times 2} = 1A \Rightarrow P_{\max} \Rightarrow \text{عبارت «د» هم درست است.}$$

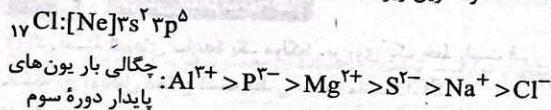
شیمی

۹۶/۴ اگر در مولکول SCO به جای اتم S، اتم O قرار گیرد مولکول CO_2 ایجاد می شود.

بررسی موارد:

- (a) مقدار گشتاور دوقطبی در SCO بزرگتر از صفر و در CO_2 برابر با صفر است.
 (b) درصد جرمی C در CO_2 بیشتر از SCO است، زیرا جرم مولی CO_2 کمتر از جرم مولی SCO است.
 (c) قدرت نیروهای بین مولکولی در مولکول قطبی SCO بیشتر از مولکول ناقطبی CO_2 است.
 (d) عدد اکسایش C در SCO و CO_2 یکسان و برابر با +4 است.

۹۷/۳ در دوره سوم جدول تناوبی کمترین چگالی بار یون پایدار مربوط به Cl است که در آخرین زیرلایه اشغال شده اتم آن، ۵ الکترون وجود دارد:



۹۸/۲ آینه ها فقط تابش خورشید را بازتاب می دهند.

دوربین آینه ای

هنرنمایی شاره های مولکولی و یونی برای تولید برق

خورشید منبعی تجدیدپذیر است که انرژی خود را با پرتوهای الکترومغناطیسی به سوی ما گسیل می کند. دانشمندان در برخی کشورهای توسعه یافته برای استفاده بهینه از انرژی رایگان خورشید فناوری پیشرفته را برای تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی به کار گرفته اند. به شکل زیر که یکی از این فناوری ها را نشان می دهد، دقت کنید:



آینه ها بازتاب خورشیدی، آن ها را روی برج گیرنده متمرکز می کنند. با متمرکز شدن پرتوهای خورشیدی بر روی گیرنده برج، دمای سدیم کلرید مذاب (شاره یونی یا همان شاره A) افزایش می یابد و این شاره بسیار داغ به منبع ذخیره انرژی گرمایی سرازیر می شود تا حتی در روزهای ابری و شب هنگام، انرژی لازم برای تبدیل آب (شاره مولکولی) به بخار داغ را فراهم کند. بخار داغ، توربین را برای تولید انرژی الکتریکی به حرکت در می آورد.

۹۱/۳ هر ۳ مقاومت R_1, R_2 و R_3 موازی هستند. پس مقاومت

معادل آن برابر است با:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{5+1+4}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$

حال جریان در مدار را به دست می آوریم:

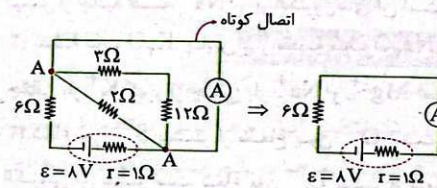
$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{30}{2+2} = 7.5A$$

ولت سنج موازی با باتری و R_{eq} است.

$$V = IR_{eq} = 7.5 \times 2 = 15V$$

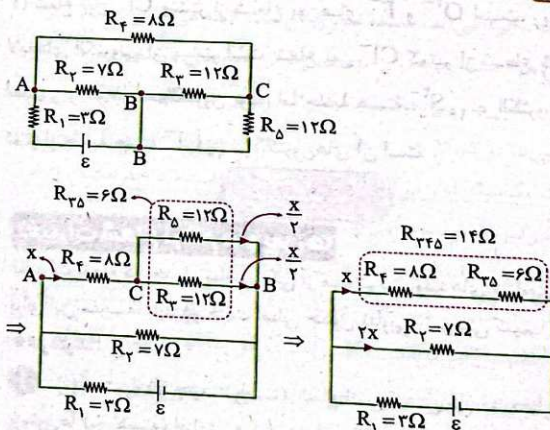
پس داریم:

۹۲/۴ ابتدا مدار را ساده می کنیم:



$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{8}{6+1} = \frac{8}{7}A$$

۹۳/۱ ابتدا مدار را ساده می کنیم:



حال با استفاده از رابطه $P = RI^2$ داریم:

$$\frac{P_r}{P_5} = \frac{R_r I_r^2}{R_5 I_5^2} = \frac{7 \times (2x)^2}{12 \times (\frac{x}{2})^2} = \frac{7 \times 4x^2}{12 \times \frac{x^2}{4}} = \frac{7 \times 4x^2 \times 4}{12 \times x^2} = \frac{28}{3}$$

۹۴/۳ برای این که توان خروجی باتری بیشینه شود، باید مقاومت خارجی

با مقاومت درونی باتری برابر باشد.

$$R_{eq} = r$$

اگر K_1 و K_2 همزمان بسته شوند، مقاومت معادل خارجی 4Ω است و در نتیجه توان خروجی بیشینه است.

اگر کلید K_3 فقط بسته شود هم توان خروجی بیشینه است.

$$R_{eq} = 4\Omega \Rightarrow R_{eq} = r$$

(۲) نیروی بین مولکولی غالب در OF_2 همانند SCl_2 از نوع وان دروالسی است.
 (۳) نیروی بین مولکولی غالب در CO_2 همانند SO_2 از نوع وان دروالسی است. بار جزئی اتم مرکزی در CO_2 (کربن) همانند اتم مرکزی در SO_2 (گوگرد) مثبت است.
 ۱۰۶/۲ عدد اتمی عناصرهای $\text{A}, \text{X}, \text{D}$ و E به ترتیب برابر با ۱۱، ۱۲، ۸ و ۹ است. در واقع این عناصرها به ترتیب $\text{Na}, \text{Mg}, \text{O}$ و F هستند. آنتالپی فروپاشی ترکیب MgO بیشتر از سه ترکیب Na_2O ، NaF و MgF_2 است. زیرا چگالی بار O^{2-} بیشتر از F^- و چگالی بار Mg^{2+} بیشتر از Na^+ است.

۱۰۷/۲ بررسی گزینه‌ها:

(۱) شعاع یون K^+ بیشتر از شعاع یون Na^+ است، زیرا شمار لایه‌های الکترونی آن بیشتر است. شعاع یون Na^+ بیشتر از شعاع یون Mg^{2+} است، زیرا دو ذره هم‌الکترون بوده، اما جاذبه هسته Mg^{2+} بر الکترون‌های آن بیشتر از جاذبه هسته Na^+ بر الکترون‌های آن است.
 (۲) نقطه ذوب K_2O پایین‌تر از نقطه ذوب Na_2O و MgO است. زیرا چگالی بار K^+ کم‌تر از چگالی بار Na^+ و Mg^{2+} است.
 (۳) شعاع یون S^{2-} بیشتر از شعاع یون O^{2-} است، زیرا شمار لایه‌های الکترونی آن بیشتر است. شعاع یون O^{2-} بیشتر از شعاع یون F^- است، زیرا دو ذره هم‌الکترون بوده، اما جاذبه هسته O^{2-} بر الکترون‌های آن کم‌تر از جاذبه هسته F^- بر الکترون‌های آن است.
 (۴) شعاع یون Cl^- بیشتر از شعاع یون‌های F^- و O^{2-} است، زیرا شمار لایه‌های الکترونی آن بیشتر است. شعاع یون Cl^- کم‌تر از شعاع یون S^{2-} است، زیرا دو ذره هم‌الکترون بوده، اما جاذبه هسته S^{2-} بر الکترون‌های آن کم‌تر از جاذبه هسته Cl^- بر الکترون‌های آن است.

درست‌ها

تغییرات شعاع در اتم‌ها و یون‌ها

تغییرات شعاع در جدول تناوبی یکی از مهم‌ترین روندهای تناوبی است. برای این مقایسه، باید دو جهت اصلی جدول تناوبی را بررسی کنیم:

در اتم‌ها

- در یک دوره (از چپ به راست): شعاع اتمی کاهش می‌یابد. دلیل: تعداد پروتون‌ها (بار هسته) افزایش می‌یابد، ولی الکترون‌ها همه در یک لایه انرژی، ثابت باقی می‌مانند.
- نتیجه: بیشتر شدن نیروی جاذبه هسته بر الکترون‌ها $\rightarrow$ فشرد شدن اتم $\rightarrow$ کم شدن شعاع
- در یک گروه (از بالا به پایین): شعاع اتمی افزایش می‌یابد. دلیل: در هر دوره پایین‌تر، یک لایه جدید الکترونی به اتم اضافه می‌شود. این باعث می‌شود حتی با افزایش بار هسته‌ای، الکترون‌ها دورتر از هسته قرار گیرند.

در یون‌ها

- در یک گروه از بالا به پایین، تعداد لایه‌های الکترونی یون‌ها زیاد می‌شود. پس می‌توان گفت تغییرات شعاع یونی و شعاع اتمی در یک گروه از بالا به پایین، مشابه است (افزایش می‌یابد).
- در یک دوره از جدول تناوبی، هرچه مقدار بار مثبت بیشتر باشد، شعاع کوچک‌تر و هرچه مقدار بار منفی بیشتر باشد، شعاع بزرگ‌تر است.
- نکته: برای عنصرهایی که تعداد الکترون برابر دارند، شعاع به شکل زیر مقایسه می‌شود: شعاع کاتیون‌ها $<$ شعاع اتم‌ها $<$ شعاع آنیون‌ها

مطابق یک قاعده کلی، هرچه تفاوت میان نقطه ذوب و جوش یک ماده خالص بیشتر باشد، آن ماده در گستره دمایی بیشتری به حالت مایع بوده و نیروهای جاذبه میان ذره‌های سازنده مایع، قوی‌تر است. با توجه به این نکته، شاره A باید یک ترکیب یونی باشد، زیرا یک ماده یونی در گستره دمایی بیشتری به حالت مایع باقی می‌ماند و به مدت بیشتری گرما را در خود نگه می‌دارد.

۹۹/۲ بررسی عبارات نادرست:

(ب) هر یون در شبکه بلور نمک خوراکی با ۶ یون ناهمنام دیگر احاطه شده است.
 (ت) ترتیب $\text{Na} > \text{Cl}^- > \text{Na}^+ > \text{Cl}$ را می‌توان به شعاع یون‌های سازنده نمک خوراکی و اتم‌های آن‌ها نسبت داد.

۱۰۰/۱

میلۀ مالش داده‌شده به موی سر، دارای بار منفی است. بنابراین مایع (۱) می‌تواند مولکول قطبی آب باشد که از سمت اتم‌های هیدروژن که بار جزئی مثبت دارد، جذب میلۀ شده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) در کلروفرم (CHCl_3)، بار جزئی اتم کناری هیدروژن، مثبت است.
 (۳) بوتان در دمای اتاق، گازی شکل است.
 (۴) توزیع الکترون‌ها در مولکول ناکتیلی CCl_4 ، متقارن است.

۱۰۱/۳

نقطه ذوب NaCl پایین‌تر از نقطه ذوب فلز Cu است. بنابراین در شرایطی که سدیم کلرید به حالت مایع است، فلز مس همچنان می‌تواند جامد باشد.

۱۰۲/۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) اگر هسته اتم‌های سازنده یک مولکول بر روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن مولکول ممکن است قطبی باشد، مانند SCO .
 (۲) یکی از عواملی که می‌تواند تقارن و توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را در مولکول‌های چنداتمی به هم برزند، وجود جفت‌الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی است.

(۳) اگر یک مولکول فقط از یک عنصر ساخته شده باشد، گشتاور دوقطبی آن می‌تواند بزرگ‌تر از صفر باشد، مانند O_3 .

۱۰۳/۲

در ساختار شماری از ترکیب‌های یونی مانند NH_4Br ، NH_4ClO_4 و ... اتم فلزی وجود ندارد.

۱۰۴/۱ بررسی عبارات نادرست:

(پ) مولکول (۱) نمی‌تواند NO_2 باشد. زیرا مطابق شکل خاصیت نافلزی اتم مرکزی (A) بیشتر از اتم‌های کناری (D) است، در حالی که در NO_2 خاصیت نافلزی اتم N کم‌تر از اتم O است.
 (ت) مولکول (۱) دارای ساختار خمیده بوده و اتم مرکزی در آن دارای یک یا دو جفت‌الکترون ناپیوندی است.

۱۰۵/۴

نیروی بین مولکولی غالب در NH_3 از نوع پیوند هیدروژنی و در H_2S از نوع وان دروالسی است. بار جزئی اتم مرکزی در NH_3 (نیتروژن) همانند اتم مرکزی در H_2S (گوگرد)، منفی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) نیروی بین مولکولی غالب در H_2O از نوع پیوند هیدروژنی و در NF_3 از نوع وان دروالسی است. بار جزئی اتم مرکزی در H_2O (اکسیژن) برخلاف اتم مرکزی در NF_3 (نیتروژن)، منفی است.

دروسنامه

موازنه به روش وارسی

مطابق قانون پایستگی جرم، جرم کل مواد موجود در مخلوط واکنش شیمیایی، ثابت است؛ یعنی جرم مواد، قبل و بعد از انجام واکنش با هم برابر است.

روش وارسی:

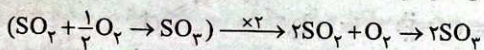
(a) در این روش ابتدا ترکیبی که دارای بیشترین تعداد اتم (پیچیده‌ترین ترکیب) است را در نظر می‌گیریم.

(b) اجزای این ترکیب نباید در طرف دیگر واکنش به صورت عنصر تک‌اتمی باشند، مثلاً در $\text{CH}_4 \rightarrow \text{C} + \text{H}_2$ نمی‌توان از کربن متان، موازنه را شروع کرد و می‌بایست موازنه از هیدروژن متان آغاز شود.

(c) بهتر است موازنه از عنصری شروع شود که در هر دو سمت واکنش، در یک ترکیب وجود دارد؛ مثلاً در $\text{CH}_4 + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ موازنه از کربن متان آغاز می‌شود.

(d) عناصر موجود در ترکیب منتخب را تا حد امکان در هر دو طرف واکنش، با کوچک‌ترین عدد صحیح ممکن، موازنه می‌کنیم.

(e) در نهایت اگر ضریبی به صورت کسری باقی ماند، کل معادله واکنش را در مخرج آن کسر ضرب کرده و معادله را بازنویسی می‌کنیم:



نکات موازنه کردن اجزای واکنش‌ها به روش وارسی

۱) شمارش اتم‌ها: ابتدا شمارش هر اتم را در دو سمت واکنش انجام می‌دهید. (اصلاً شایر برون موازنه کردن در هر دو سمت واکنش تعدادش برابر باشد)

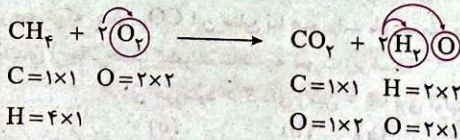
۲) شروع موازنه از ترکیب پیچیده‌تر: معمولاً موازنه از ترکیبی شروع می‌شود که دارای بیشترین تعداد و نوع اتم است.

نکته: می‌توان موازنه را از عنصری که فقط در یک ترکیب آمده است نیز شروع کرد.

۳) استفاده از کوچک‌ترین ضرایب: همواره باید دقت کنید برای موازنه از کوچک‌ترین اعداد صحیح استفاده کنید.

۴) ضرایب کسری: اگر ضریب گونه‌ای در هر مرحله از موازنه کردن، به صورت کسری به دست آمد، بلافاصله تمام ضرایب معلوم را در مخرج کسر ضرب می‌کنیم تا همه ضرایب، عددی صحیح شوند.

۵) تغییر در اندیس‌ها (زیروندها) ممنوع: در موازنه، تنها ضریب استوکیومتری اجزای واکنش می‌تواند تغییر کند. در زیروندها مطلقاً تغییری ایجاد نمی‌شود.



۶) ضریب ۱ در موازنه نوشته نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) سوزاندن سوخت فسیلی در هواپیماها، حجم انبوهی CO_2 تولید می‌کند.
- ۲) برای تبدیل CO_2 به مواد معدنی، کربن دی‌اکسید تولیدشده در مراکز صنعتی را با MgO یا CaO واکنش می‌دهند.
- ۳) گلخانه، گیاه یا میوه را از آسیب‌های ناشی از تغییر دما و آفت‌ها حفظ می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بارده نهایی به توربین و چرخه بستگی دارد و نمک مذاب به تنهایی نمی‌تواند موجب افزایش بازده شود.

۳) برق در این فناوری با چرخش توربین و ژنراتور (مبدل) تولید می‌شود.

۴) استفاده از نمک مذاب برای تولید دمای بالا به کار می‌رود، نه کاهش دما!!

نسبت عدد کوئوردیناسیون کاتیون به عدد کوئوردیناسیون آنیون

در یک ترکیب یونی برابر با «نسبت زیروند آنیون در فرمول ترکیب یونی به زیروند کاتیون» است.

برای ترکیب‌های NaCl و Al_2O_3 ، K_2O ، CaF_2 نسبت عدد کوئوردیناسیون کاتیون به عدد کوئوردیناسیون آنیون، به ترتیب برابر با $\frac{3}{1}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{1}$ است.

دروسنامه

از شبکه بلوری تا عدد کوئوردیناسیون

آرایش یون‌ها در ترکیب‌های یونی به شکل یک الگوی تکراری است، به گونه‌ای که هر کاتیون با شماره معینی آنیون و هر آنیون با شماره معینی کاتیون احاطه شده است. آرایش یون‌ها در بلور یک نمک با توجه به اندازه‌های نسبی کاتیون و آنیون از الگوی خاصی پیروی می‌کند و این الگو در سرتاسر بلور تکرار می‌شود. به ساختاری که بر اثر چیده شدن ذره‌های سازنده یک ماده (ذره‌های سازنده در ترکیب‌های یونی، یون‌ها هستند) در سه‌بعد به وجود می‌آید، شبکه بلوری آن ماده گفته می‌شود.

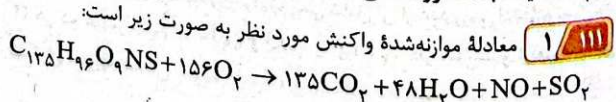
نکته: واژه شبکه بلور برای توصیف آرایش سه‌بعدی و منظم اتم‌ها (مانند فلزها)، مولکول‌ها و یون‌ها (ترکیب‌های یونی) در حالت جامد به کار می‌رود. وقتی یون‌ها در شبکه بلور به هم نزدیک می‌شوند، یون‌های با بار ناهمنام در مجاورت یک‌دیگر قرار می‌گیرند و یون‌های با بار همنام تا حد امکان از هم فاصله می‌گیرند. در نتیجه نیروی جاذبه بین یون‌های با بار ناهمنام خیلی بیشتر از نیروی دافعه میان یون‌های با بار همنام است.

به شمار نزدیک‌ترین یون‌های ناهمنام پیرامون هر یون در شبکه بلور، عدد کوئوردیناسیون می‌گویند. در بلور NaCl هر یون سدیم به وسیله شش یون کلرید و هر یون کلرید نیز به وسیله شش یون سدیم احاطه شده است. به این ترتیب می‌توان گفت عدد کوئوردیناسیون یون‌های سدیم و کلرید در بلور سدیم کلرید برابر ۶ است.

نکته: در حالت کلی، عدد کوئوردیناسیون یون‌ها در شبکه بلور، به اندازه نسبی کاتیون‌ها و آنیون‌ها و در نتیجه ساختار کلی شبکه بلور بستگی دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) در فرمول مولکولی، شمار اتم‌های سازنده هر عنصر در یک مولکول نوشته می‌شود، نه ساده‌ترین نسبت بین اتم‌های سازنده!!
- ۳) الکترون‌های ظرفیت اتم‌های N و F به ترتیب برابر با ۵ و ۷ است. در این صورت فرمول ترکیب مولکولی مورد نظر باید به صورت N_7F_5 نوشته شود.
- ۴) SiO_2 یک جامد کووالانسی است، نه جامد یونی!!



گزینه‌ها

نیتروژن

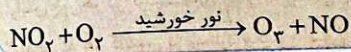
گاز نیتروژن فراوان‌ترین گاز هواکره است که در دما و فشار اتاق به صورت مولکول‌های دواتمی N_2 یافت می‌شود.



لایه ظرفیت

این گاز را می‌توان به روش تقطیر جزء جزء هوای مایع از سایر گازها جدا کرد. گاز نیتروژن به جو بی‌اثر مشهور است و در بسته‌بندی مواد خوراکی، پر کردن تایلر خودروها، انجماد مواد غذایی در صنعت سرماسازی و نگهداری نمونه‌های بیولوژیک به کار برده می‌شود. نقطه جوش گاز نیتروژن در حدود $-196^\circ C$ است. این گاز نسبت به دیگر گاز دواتمی فراوان هواکره (گاز اکسیژن)، از واکنش‌پذیری بسیار ناچیزی برخوردار است.

اکسیدی از این عنصر (NO_2) به رنگ قهوه‌ای دیده می‌شود که در هوای آلوده کلاشهرها وجود دارد. گاز نیتروژن دی‌اکسید در هوای آلوده و در حضور نور خورشید طبق واکنش زیر می‌تواند گاز اوزون تروپوسفری تولید کند.



۱۱۶ ۳ CO_2 را می‌توان به جای رها کردن در هواکره، در مکان‌های عمیق و امن در زیر زمین ذخیره و نگهداری کرد. سنگ‌های متخلخل در زیر زمین، میدان‌های قدیمی گاز و چاه‌های قدیمی نفت که خالی از این مواد هستند، جاهای مناسبی برای دفن این گاز هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) در سنگ متراکم امکان تزریق کربن دی‌اکسید وجود ندارد.
- (۲) نمک سنگی نفوذپذیری خیلی کمی دارد و برای مخزن مناسب نیست. اما برای پوشش خوب است.
- (۳) گسل فعال، خطر نشت کربن دی‌اکسید را به همراه دارد و پروژه به طور کامل شکست می‌خورد.

۱۱۷ ۴ با توجه به واکنش تشکیل اوزون تروپوسفری که در حضور نور خورشید انجام می‌شود، غلظت این آلاینده در تابستان بیشتر از زمستان است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) بر اثر سوختن سوخت‌های فسیلی در خودروها، O_3 به طور مستقیم وارد هواکره نمی‌شود.
- (۲) واکنش‌پذیری O_3 به مراتب بیشتر از O_2 است.
- (۳) اوزون عامل عفونی نیست. تنفس در هوایی که اوزون تروپوسفری در آن وجود دارد، حساسیت‌زاست و به ریه آسیب وارد می‌کند.

۱۱۸ ۳ برای نام‌گذاری ترکیب مولکولی حاصل از G یا همان ^{14}Si و M یا همان ^{35}Br از پیشوند یونانی «تترا» استفاده می‌شود:

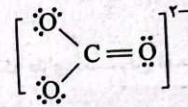
سیلیسیم تترابرمید: $SiBr_4$

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) فلز قلیایی خاکی A یا همان ^{38}Sr فقط یک کاتیون تک‌اتمی (Sr^{2+}) تشکیل می‌دهد و برای نام‌گذاری ترکیب یونی شامل آن از عدد رومی استفاده نمی‌شود.
- (۲) فلز واسطه D یا همان ^{21}Sc فقط یک کاتیون تک‌اتمی (Sc^{3+}) تشکیل می‌دهد و برای نام‌گذاری ترکیب یونی شامل آن از عدد رومی استفاده نمی‌شود.
- (۳) هر دو عنصر L یا ^{19}K و Q یا ^{12}Mg فلز هستند و ترکیب دواتمی تشکیل نمی‌دهند.

۲ | بررسی گزینه‌ها:

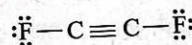
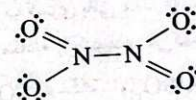
(۱) با توجه به ساختار لوویس دو گونه CO_3^{2-} و SO_3 نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به شمار الکترون‌های پیوندی برای این دو گونه به ترتیب برابر با $\frac{4}{4}$ و $\frac{4}{4}$ بوده که با هم برابر است:



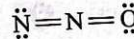
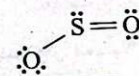
(۲) با توجه به ساختار لوویس دو گونه ClO_3^- و NO_3^- نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به شمار الکترون‌های پیوندی برای این دو گونه به ترتیب برابر با $\frac{4}{4}$ و $\frac{6}{4}$ است:



(۳) با توجه به ساختار لوویس دو گونه C_2F_4 و N_2O_4 نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به شمار الکترون‌های پیوندی برای این دو گونه به ترتیب برابر با $\frac{6}{4}$ و $\frac{10}{4}$ است:



(۴) با توجه به ساختار لوویس دو گونه N_2O و SO_2 نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به شمار الکترون‌های پیوندی برای این دو گونه به ترتیب برابر با $\frac{4}{4}$ و $\frac{6}{4}$ است:



گزینه‌ها

الکترون‌های ناپیوندی

برای پیدا کردن شمار الکترون‌های ناپیوندی در اتم عنصرهای اصلی (دسته‌های s و p)، می‌توان با شمار الکترون‌های لایه ظرفیت و شمار الکترون‌های پیوندی از رابطه زیر، شمار الکترون‌های ناپیوندی را به دست آورد:

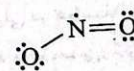
شمار الکترون‌های پیوندی = شمار الکترون‌های ظرفیت - شمار الکترون‌های ناپیوندی

۱۱۹ ۴ با فرض تولید یکسان برق از منابع مورد نظر، مقایسه میان ردپای کربن دی‌اکسید آن‌ها به صورت زیر است:

- باد > گرمای زمین > انرژی خورشید: ردپای CO_2 در صورتی که ردپای CO_2 این منابع با هم برابر باشد، مقایسه میان برق تولیدی آن‌ها برحسب کیلووات ساعت به صورت زیر است:
- انرژی خورشید > گرمای زمین > باد: برق تولیدی (kW.h)
- (a) (b) (c)

۱ | بررسی عبارت‌های نادرست:

(پ) در هیچ‌کدام از مولکول‌های NO و NO_2 ، اتم نیتروژن قاعده هشت‌تایی را رعایت نمی‌کند:



(ت) هوای آلوده کلاشهرها اغلب به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود و دلیل آن، وجود گاز نیتروژن دی‌اکسید است.

نام گذاری ترکیبات دوتایی یونی:

می دانیم که ترکیبات یونی دوتایی از یک فلز و یک نافلز ایجاد شده اند. پس در این ترکیبات، یون هایی با بار مثبت (کاتیون) و یون هایی با بار منفی (آنیون) وجود دارد. در گام نخست برای نام گذاری، باید کاتیون ها و آنیون ها را از یکدیگر تشخیص دهیم.

شناسایی کاتیون ها:

- ۱ کاتیون های تک اتمی، فلز هستند.
- ۲ در صورتی که فرمول شیمیایی را داشته باشیم، برای نوشتن نام ترکیب، نام کاتیون (همان فلز) بدون پیشوند و پسوند آورده می شود.
- ۳ از آن جایی که برخی از فلزات دسته های d و p کاتیون های متفاوتی ایجاد می کنند، برای شناسایی درست آن ها، از اعداد رومی استفاده می شود.

عدد	نماد رومی	عدد	نماد رومی
۱	I	۶	VI
۲	II	۷	VII
۳	III	۸	VIII
۴	IV	۹	IX
۵	V	۱۰	X

این اعداد پس از نام کاتیون و در داخل پرانتز نوشته می شوند، مثلاً تیتانیوم (II) اکسید: TiO .

برخی کاتیون های چند ظرفیتی:

عنصر	یون ها	عنصر	یون ها
سرب	Pb^{2+}, Pb^{4+}	منگنز	Mn^{2+}, Mn^{3+}
قلع	Sn^{2+}, Sn^{4+}	کروم	Cr^{2+}, Cr^{3+}
تیتانیوم	Ti^{2+}, Ti^{4+}	وانادیم	V^{2+}, V^{3+}
نیکل	Ni^{2+}, Ni^{3+}	آهن	Fe^{2+}, Fe^{3+}
کبالت	Co^{2+}, Co^{3+}	مس	Cu^{+}, Cu^{2+}

شناسایی آنیون ها:

- ۱ آنیون های تک اتمی، نافلز هستند.
- ۲ اگر آنیون تک اتمی (مثلاً Cl^{-}) بود، همراه با پسوند «ید» نوشته می شود.
- ۳ اگر آنیون چند اتمی بود، از نام مخصوص به آن، استفاده می شود.

برخی از آنیون های چند اتمی:

آنیون	نماد	آنیون	نماد
نیتрат	NO_3^{-}	فسفات	PO_4^{3-}
سولفات	SO_4^{2-}	هیدروکسید	OH^{-}
کربنات	CO_3^{2-}	سیانید	CN^{-}

در گام بعدی، پس از شناسایی آنیون و کاتیون، نام ترکیب را مطابق روش زیر می نویسیم:

نام کاتیون (در صورت نیاز همراه با نماد رومی) + نام آنیون

نکات:

- ۱ این روش نام گذاری مختص ترکیبات یونی است.
- ۲ در مجموع بار ترکیبات یونی خنثی است.
- ۳ تنها زمانی نوشتن اعداد رومی الزامی است که عنصر دارای چند حالت یونی (چند ظرفیتی) باشد.
- ۴ از ترکیبات یونی هیچ گاه با اصطلاح «فرمول مولکولی» یاد نمی شود.

۱۱۹ | ۳

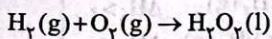
مقدار انرژی مصرف شده در جهت رفت، برابر با مقدار انرژی آزاد شده در جهت برگشت است.

۱۲۰ | ۴

لایه هواکره برای زمین همانند لایه پلاستیکی برای گلخانه است و سبب گرم شدن کره زمین می شود. به طوری که اگر این لایه وجود نداشت، میانگین دمای کره زمین به $18^{\circ}C$ - کاهش می یافت.

۱۲۱ | ۲

گرمای واکنش تشکیل آب اکسیژنه را نمی توان به روش تجربی اندازه گیری کرد:



زیرا در این واکنش، بخشی از گازهای هیدروژن و اکسیژن به جای تبدیل شدن به آب اکسیژنه، به آب تبدیل می شوند.

۱۲۲ | ۳

زغال کک واکنش دهنده ای رایج در استخراج آهن و تأمین کننده انرژی لازم برای انجام واکنش است.

۱۲۳ | ۴

بررسی گزینه ها:

(۱) دمای بالاتر لزوماً منجر به خنک کنندگی بیشتر نمی شود، زیرا رطوبت و جریان هوا هم مهم هستند.

(۲) رطوبت بالا منجر می شود تبخیر کم تر گردد.

(۳) در فرایند تبخیر، مولکول های پراورزی تر آب از حالت مایع خارج می شوند. بنابراین دما و در واقع میانگین انرژی جنبشی مولکول های باقی مانده آب، کم می شود.

(۴) تبخیر آب یک فرایند گرماگیر است و در ظرف سفالی یخچال صحرایی به آرامی، آب تبخیر می شود.

۱۲۴ | ۴

برای پیوندهای اکسیژن - اکسیژن، کربن - اکسیژن و نیتروژن - نیتروژن، بسته به نوع پیوند ممکن است از مفهوم «میانگین آنتالپی پیوند» استفاده شود. در واقع برای پیوندهای $O=O$ ، $C \equiv O$ و $N \equiv N$ که فقط در مولکول های دواتمی O_2 ، CO و N_2 وجود دارد، از مفهوم «میانگین آنتالپی پیوند» استفاده نمی شود.

برای سایر پیوندهای اشاره شده در گزینه ها، در هر حالتی از مفهوم «میانگین آنتالپی پیوند» استفاده می شود.

دروسنامه

آنتالپی پیوند

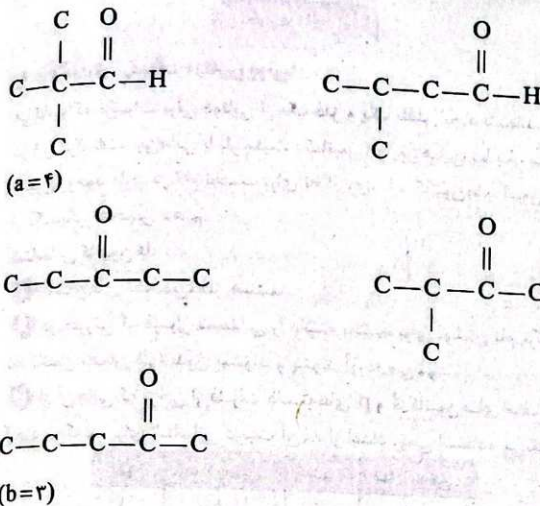
مقدار انرژی مصرف شده در فشار ثابت هنگام شکستن یک مول پیوند بین دو اتم گازی و تبدیل آن به اتم های گازی جدا از هم را آنتالپی پیوند می گویند.

یکای آنتالپی پیوند، $kJ \cdot mol^{-1}$ است. چون شکستن پیوند همواره نیاز به جذب انرژی دارد، پس فرایندی گرماگیر بوده و مقدار آن همواره مثبت ($\Delta H > 0$) است.

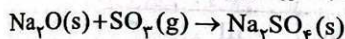
میانگین آنتالپی پیوند

در مولکول هایی که اتم مرکزی به چند اتم کناری یکسان با پیوندهای اشتراکی متصل است، به جای واژه آنتالپی، عبارت «میانگین آنتالپی» را به کار می برند.

هر چه تعداد پیوندهای بین دو اتم بیشتر باشد، گرمای مورد نیاز برای شکستن این پیوندها نیز بیشتر است. برای محاسبه آنتالپی یک واکنش گازی می توان از آنتالپی پیوند یا میانگین آنتالپی پیوند استفاده کرد.



معادله واکنش هدف به صورت زیر است:



برای رسیدن به واکنش هدف، باید تغییرات زیر را بر روی واکنش‌های کمکی اعمال کنیم:

✓ ضرایب واکنش (c) را در عدد $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.

✓ واکنش (b) را وارونه کنیم.

✓ ضرایب واکنش (a) را در عدد ۲ ضرب کنیم.

سپس هر سه واکنش را با هم جمع کنیم.

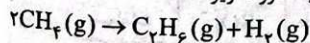
$$\Delta H(\text{هدف}) = \frac{1}{2} \Delta H_c - \Delta H_b + 2\Delta H_a = \frac{1}{2}(259) - (-418) + 2(-146) = -58.0 \text{ kJ}$$

ΔH به دست آمده مربوط به تولید یک مول فراورده ($142 \text{ g Na}_2\text{SO}_4$) است. اگر جرم فراورده تولید شده برابر $56/8$ گرم باشد، مقدار گرمای مبادله شده برابر است با:

$$? \text{ kJ} = 56/8 \text{ g} \times \frac{58.0 \text{ kJ}}{142 \text{ g}} = 232/2 \text{ kJ}$$

۲/۱۲۹ عامل طعم و بوی بادام یک آلدید یا فرمول مولکولی $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}$ و عامل طعم و بوی میخک یک کتون با فرمول مولکولی $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}$ است. اگر نصف مجموع این دو فرمول مولکولی را در نظر بگیریم به فرمول $\text{C}_7\text{H}_{10}\text{O}$ می‌رسیم که با ساختار گزینه (۲) مطابقت دارد. جرم مولی $\text{C}_7\text{H}_{10}\text{O}$ برابر با میانگین جرم مولی عامل طعم و بوی بادام و میخک به شمار می‌رود.

معادله واکنش موردنظر به صورت زیر است:



ΔH این واکنش را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta H(\text{واکنش}) = \left[\begin{array}{c} \text{مجموع آنتالپی} \\ \text{پیوندهای فراورده‌ها} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{مجموع آنتالپی} \\ \text{پیوندهای واکنش دهنده} \end{array} \right]$$

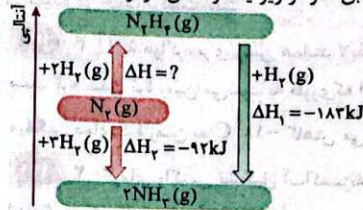
$$\Delta H(\text{واکنش}) = \left[\frac{1}{2} \Delta H(\text{C}=\text{H}) \right] - \left[\Delta H(\text{C}-\text{C}) + 6 \Delta H(\text{C}-\text{H}) \right]$$

$$+ \Delta H(\text{H}-\text{H}) = \left[\frac{1}{2}(410) \right] - \left[(324) + (436) \right] = +60 \text{ kJ}$$

ΔH به دست آمده مربوط به مصرف ۲ مول واکنش دهنده ($44/8 \text{ L CH}_4$) است. در صورتی که $100/8$ لیتر واکنش دهنده مصرف شود، ΔH برابر است با:

$$? \text{ kJ} = 100/8 \text{ L CH}_4 \times \frac{+60 \text{ kJ}}{44/8 \text{ L CH}_4} = +135 \text{ kJ}$$

۴/۱۲۵ شواهد تجربی نشان می‌دهند که تهیه آمونیاک به روش هابر از گازهای نیتروژن و هیدروژن مطابق نمودار زیر یک واکنش دوجمله‌ای است.



مرحله اول: $\text{N}_2(g) + 2\text{H}_2(g) \rightarrow \text{N}_2\text{H}_4(g) \quad \Delta H_1 > 0$

مرحله دوم: $\text{N}_2\text{H}_4(g) + \text{H}_2(g) \rightarrow 2\text{NH}_3(g) \quad \Delta H_2 < 0$

واکنش کلی: $\text{N}_2(g) + 3\text{H}_2(g) \rightarrow 2\text{NH}_3(g) \quad \Delta H < 0$

بررسی عبارت‌ها:

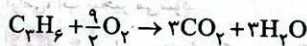
(ا) آنتالپی واکنش مرحله اول را نمی‌توان به روش تجربی تعیین کرد. زیرا بر اثر واکنش میان گازهای N_2 و H_2 ، علاوه بر تولید هیدرازین (N_2H_4)، مقداری آمونیاک (NH_3) نیز تولید می‌شود.

(ب) فراورده مرحله اول (N_2H_4) در مقایسه با فراورده مرحله دوم (NH_3) سطح انرژی بالاتری دارد و ناپایدارتر است.

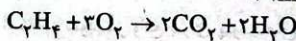
(پ) واکنش مرحله اول، گرماگیر ($\Delta H > 0$) اما واکنش کلی، گرماده ($\Delta H < 0$) است.

(ت) واکنش مرحله دوم، همانند واکنش کلی، گرماده ($\Delta H < 0$) بوده و سطح انرژی مواد در آن کاهش می‌یابد.

۱/۱۲۶ ابتدا با توجه به داده‌های سؤال، آنتالپی سوختن اتیلن (C_2H_4) و پروپن (C_3H_6) را به دست می‌آوریم:



$$? \text{ kJ} = (2+3) \text{ mol فراورده} \times \frac{308/2 \text{ kJ}}{9/2 \text{ mol فراورده}} = 2058 \text{ kJ}$$



$$? \text{ kJ} = 3 \text{ mol O}_2 \times \frac{564 \text{ kJ}}{2 \text{ mol O}_2} = 1410 \text{ kJ}$$

با افزایش یک گروه متیلن ($-\text{CH}_2-$) در پروپن نسبت به اتن 648 کیلوژول آنتالپی سوختن افزایش یافته است.

$$2058 - 1410 = 648 \text{ kJ}$$

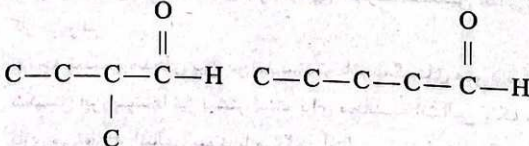
۱- بوتن نسبت به پروپن یک گروه متیلن بیشتر دارد و آنتالپی سوختن آن بایستی حدود 648 kJ از پروپن بیشتر باشد.

$$2058 + 648 = 2706 \text{ kJ} \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_4\text{H}_8) = -2706 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$? \text{ kJ} = 0/3 \text{ mol} \times 2706 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} = 811/8 \text{ kJ}$$

۴/۱۲۷ با توجه به داده‌های سؤال، ترکیب موردنظر دارای گروه عاملی کربونیل ($-\text{C}-$) بوده و فرمول مولکولی آن به صورت $\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}$ است.

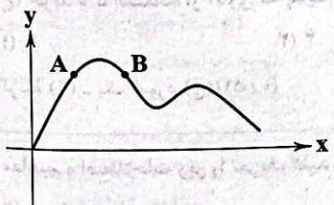
هر کدام از ساختارهای زیر یک آلدید یا یک کتون بوده و فرمول مولکولی آن‌ها با فرمول مولکولی مورد نظر مطابقت دارد. شمار ایزومرهای آلدیدی (a) و کتونی (b) به ترتیب برابر با ۴ و ۳ است.





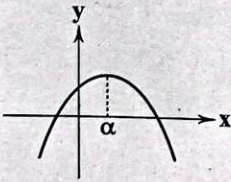
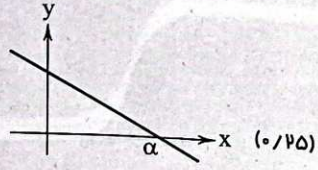
دین و زندگی (۳)

نمره		
۰/۵	براساس آیه ۵۳ سوره زمر «قُلْ يَا عِبَادِيَ الَّذِينَ أَسْرَفُوا عَلَىٰ أَنْفُسِهِمْ لَا تَقْنَطُوا مِن رَّحْمَةِ اللَّهِ...». «بگو ای بندگان من که بسیار به خود ستم روا داشته‌اید، از رحمت الهی ناامید نباشید...» چرا نباید از رحمت الهی مأیوس بود؟ الف) «إِنَّ اللَّهَ يُجِبُّ التَّوْبَةَ» ب) «إِنَّهُ هُوَ الْغَفُورُ الرَّحِيمُ» ج) «التَّوْبَةُ تَطَهِّرُ الْقُلُوبَ» گزینه «ب»، «إِنَّهُ هُوَ الْغَفُورُ الرَّحِيمُ» (۵/۵)	۱
۰/۵	با دقت نظر در حدیث امیرالمؤمنین علی (ع): «يَا مَعْشَرَ التَّجَارِ الْفَقِةَ، ثُمَّ الْمَتَجَرِّ»، چرا یادگیری مسائل شرعی تجارت، مقدم بر تجارت است؟ تا گرفتار کسب حرام نگردیم. (۵/۵)	۲
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) در میان مخلوقات، انسان موجودی است که علاوه بر ایستادگی در برابر موانع بیرونی، می‌تواند در برابر موانع درونی نیز ایستادگی کند. درست (۵/۵) ب) شرط‌بندی از امور زیان‌آور روحی و اجتماعی است و انجام آن، حتی در بازی‌های معمولی نیز حرام می‌باشد. درست (۵/۵)	۳
۱	گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) بیت «باز آ باز آ هر آن چه هستی باز آ / گر کافر و گبر و بت پرستی باز آ» در تقابل با کدام حیلۀ شیطان است؟ ۱) ناامید کردن از رحمت الهی ۲) به تأخیر انداختن توبه (تسویف) ۳) گام به گام کشاندن به سوی گناه گزینه ۱) - ناامید کردن از رحمت الهی (۵/۵) ب) چند مورد از موارد زیر، حکم آن «حرام بودن» است؟ الف) موسیقی غیرسنتی و مدرن. ب) مدگرایی و تجمل در پوشش و سایر ابعاد زندگی ج) خرید و یا استفاده از آثاری که پدیدآورنده آن، جایز نداند. ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ گزینه ۳) - یک (مورد ج) (۵/۵)	۴
۲	مفاهیم و اصطلاحات زیر را تعریف کنید. الف) حکمت حکم و دستور: هر دستور خداوند، دلایل خاص خود را دارد که «حکمت» آن حکم و دستور نامیده می‌شود. (۱) ب) توبه در لغت و اصطلاح دینی: توبه در لغت به معنای بازگشت است و در اصطلاح دینی، به معنای بازگشت از گناه به سوی خداوند و قرار گرفتن در دامن عفو و غفران اوست. (۱)	۵

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره												
۶	هر یک از عبارت‌های سمت راست با کدام یک از عبارت‌های سمت چپ بیشتر ارتباط دارد؟ (در ستون سمت چپ یک مورد اضافی است). <table border="1"> <thead> <tr> <th>سمت راست</th><th>سمت چپ</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الف) شرکت در جشن شادی مانند جشن عروسی و یا تولد</td><td>۱- مستحب</td></tr> <tr> <td>ب) ورزشی که همراه با قمار و یا زیان‌آور باشد.</td><td>۲- واجب</td></tr> <tr> <td>ج) فراهم کردن امکانات ورزشی برای دور شدن افراد جامعه از فساد</td><td>۳- حرام</td></tr> <tr> <td>د) ایجاد پایگاه‌های اینترنتی و شبکه‌های اجتماعی در فضای مجازی</td><td>۴- جایز</td></tr> <tr> <td></td><td>۵- واجب کفایی</td></tr> </tbody> </table> الف) ۴ (جایز) (۰/۵) ب) ۳ (حرام) (۰/۵) ج) ۵ (واجب کفایی) (۰/۵) د) ۱ (مستحب) (۰/۵)	سمت راست	سمت چپ	الف) شرکت در جشن شادی مانند جشن عروسی و یا تولد	۱- مستحب	ب) ورزشی که همراه با قمار و یا زیان‌آور باشد.	۲- واجب	ج) فراهم کردن امکانات ورزشی برای دور شدن افراد جامعه از فساد	۳- حرام	د) ایجاد پایگاه‌های اینترنتی و شبکه‌های اجتماعی در فضای مجازی	۴- جایز		۵- واجب کفایی	۲
سمت راست	سمت چپ													
الف) شرکت در جشن شادی مانند جشن عروسی و یا تولد	۱- مستحب													
ب) ورزشی که همراه با قمار و یا زیان‌آور باشد.	۲- واجب													
ج) فراهم کردن امکانات ورزشی برای دور شدن افراد جامعه از فساد	۳- حرام													
د) ایجاد پایگاه‌های اینترنتی و شبکه‌های اجتماعی در فضای مجازی	۴- جایز													
	۵- واجب کفایی													
۷	مراحل تکمیلی توبه را نام ببرید. ۱- تلاش در جهت دور شدن از گناه (۰/۵) ۲- جبران حقوق الهی و حقوق مردم (۰/۵)	۱												
۸	قرآن کریم رمز سعادت و رستگاری انسان‌ها را چه چیزی معرفی کرده است؟ تزکیه نفس (۰/۵)	۰/۵												
۹	کدام جمله امام کاظم (ع) باعث شد تا «بشرین حارث» در سلک مردان پرهیزکار و خداپرست درآید؟ «اگر بنده می‌بود، بندگی می‌کرد و حرمت صاحب خود را نگه می‌داشت.» (۰/۵)	۰/۵												
۱۰	مسئولین باید اقتصاد کشور را به گونه‌ای مدیریت کنند که سه هدف محقق شود، دو هدف آن را بنویسید. ۱- استقلال اقتصادی و عدم سلطه و نفوذ بیگانگان ۲- پیشروی به سوی عدالت و قسط و کاهش فاصله طبقاتی ۳- حرکت به سوی آبادانی و عمران در عین دوری از نیازدگی و تجمل‌گرایی (ذکر دو مورد کافی است، هر مورد (۰/۵))	۱												
۱۱	حسابان در نمودار $y = f(x)$، شیب نمودار در نقاط A و B و شیب خط AB را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.  مثبت m_A صفر m_{AB} منفی m_B (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱												



راهنمای تصحیح

نمره	۱۲	یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟
۱/۷۵		$\text{آهنگ متوسط} = \frac{m(4) - m(0)}{4 - 0} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2} \quad (0/75)$ $m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \quad (0/75)$ $\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1 \quad (0/75)$
۱/۵	۱۳	اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$، $g(2) = 1$ و $g'(2) = 12$، آنگاه حاصل $(fog)'(2)$ را به دست آورید. $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(2) = g'(2)f'(g(2)) \quad (0/75)$ $\Rightarrow (fog)'(2) = 12f'(1) \quad (0/75)$ $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+7)^2}} \quad (0/75)$ $f'(1) = \frac{1}{12} \quad (0/75)$ $\Rightarrow (fog)'(2) = 1 \quad (0/75)$
۰/۷۵	۱۴	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن مقداری منفی است؟ $a \quad (0/75)$ ب) طول نقطه‌ای که مماس در آن افقی است؟ $b \quad (0/75)$ پ) طول نقطه‌ای که تابع در آن مشتق پذیر نمی‌باشد؟ $d \quad (0/75)$
۱/۵	۱۵	اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر باشد، نمودار تابع $f'(x)$ را رسم کنید. (با ذکر دلیل)  $x \in (-\infty, \alpha)$، صعودی $f(x) \Rightarrow f'(x) > 0$ (۰/۷۵) نمودار f' در بالای محور x ها (۰/۷۵) $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ نقطهٔ تلاقی f' با محور x ها (۰/۷۵) $x \in (\alpha, +\infty)$، نزولی $f(x) \Rightarrow f'(x) < 0$ (۰/۷۵) نمودار f' در پایین محور x ها (۰/۷۵) توجه کنید که f' یک تابع درجهٔ اول (خطی) با شیب منفی است. 

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{x} + 1\right)$ $f'(x) = 3(x^2 - 6)^2 (2x) \left(\frac{1}{x} + 1\right) + \frac{1}{x^2} (x^2 - 6)^3$ ب) $g(x) = \sin^2(\Delta x)$ $g'(x) = 2 \sin(\Delta x) \cos(\Delta x)$ ج) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x + 1}$ $h'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)\sqrt{x}}{(x^2 - 2x + 1)^2}$	۲/۲۵
۱۷	(قضیه) ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه f در a پیوسته است. کافی است نشان دهیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a})$ $= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $= 0 \times f'(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ در $x = a$ پیوسته است.	۱/۲۵
۲۰	موفق باشید.	