بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

دفترچه سوال رسمی آزمون

واحد سنجش و ارزیابی باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست.   «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اوّل سال ۱۴۰۴

چهل وچهارمین دورهٔ المپیاد ریاضی

تعداد سؤالات		مدّت آزمون
پنج‌گزینه‌ای	پاسخ‌کوتاه	۲۱۰ دقیقه
۹	۱۶	

نام:	نام‌خانوادگی:	شمارهٔ صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید.

۲- یک برگ پاسخ‌برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته شده در پایین پاسخ‌برگ را با مداد مشکی بنویسید.

۳- برگهٔ پاسخ‌برگ را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۴- دفترچه سوال باید همراه پاسخ‌برگ تحویل داده شود.

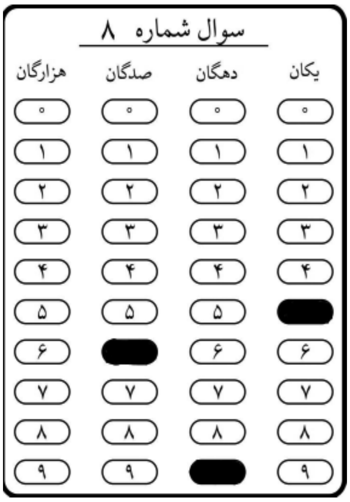
۵- سؤالات به دو شکل پاسخ‌کوتاه و پنج‌گزینه‌ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد.

۶- شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستانی از بین دانش‌آموزان پایهٔ دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند، به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان پایه دهم، به صورت آزمایشی و کسب تجربه، در آزمون مرحلهٔ دوم پذیرفته خواهند شد.

۷- وبگاه کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

دانش‌آموز عزیز، سوال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سوال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سوال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سوالات پاسخ‌کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سوال مشابه و دارای چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یکی از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.
جواب سوال‌های پاسخ‌کوتاه عددی نامنفی است. شما باید ارقام یکان، دهگان، صدگان و هزارگان قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید، به عنوان مثال اگر پاسخ ۶۹۵ باشد، شما باید در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبرو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.



در مورد سوال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.
هم‌چنین در انتهای برخی سوالات پاسخ‌کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده‌است که با علامت 🔔 نمایش داده خواهد شد. این‌بخش خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفا به دلیل جلوگیری از اشتباهات محاسباتی احتمالی است. توجه کنید تمام شکل‌های کشیده‌شده در سوالات نادقیق هستند.

۱. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که بتوان مربعی به ضلع n در صفحه را با استفاده از مربع‌هایی با طول ضلع‌های $۱, ۲, \ldots, n-۱$ با اضلاع موازی ضلع‌های مربع اصلی، پوشاند. (از هر یک از مربع‌های ذکر شده، دقیقاً یکی در اختیار داریم و مربع‌ها می‌توانند روی مرز یا درون یکدیگر اشتراک داشته باشند.)

۲. چند عدد طبیعی n وجود دارد که باقیمانده تقسیم $n!$ بر ۲۵ برابر ۵ باشد؟

۳. ABC یک مثلث قائم‌الزاویه از جنس کاغذ است که زاویه رأس A قائمه است و زاویه رأس B برابر ۷۰ درجه است. اگر بخواهیم نقطه D را بر روی وتر این مثلث انتخاب کنیم و مثلث را از خط AD تا بزنیم که شکل حاصل به صورت مثلث دیده شود، زاویه $\angle BAD$ چند تا از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (مقادیر به درجه هستند.)

$$۵, ۱۰, ۲۰, ۳۰, ۳۵, ۴۰, ۴۵, ۶۰, ۷۰, ۷۵$$

۴. فرض کنید برای عددهای حقیقی مثبت x, y, z تعریف کنیم:

$$f(x,y,z) = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}$$

کدام گزینه درست است؟

۱) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن هر یک از سه متغیر x, y, z افزایش می‌یابد.

۲) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y, z کاهش می‌یابد.

۳) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x, y افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن z کاهش می‌یابد.

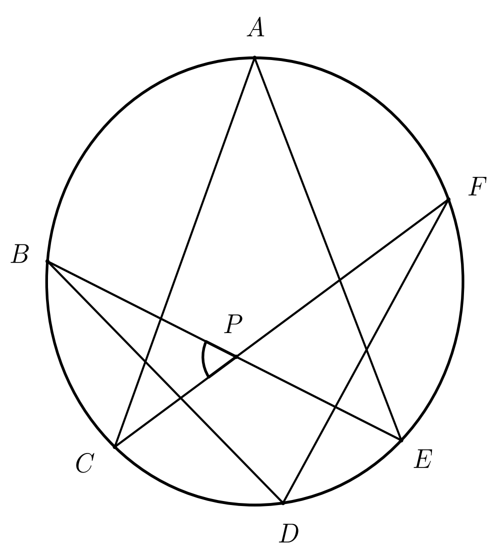
۴) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x, z افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y کاهش می‌یابد.

۵) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x همواره افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y, z بسته به مقدار آن‌ها ممکن است افزایش یا کاهش پیدا کند.

۵. به چند حالت می‌توان زیرمجموعه‌های A، B، C، D و E را از مجموعه تک‌عضوی $\{1\}$ انتخاب کرد به‌گونه‌ای که مجموعه $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap D) \cup E)$ تهی نباشد؟

🔔 حاصل عددی زوج است.

۶. در شکل زیر شعاع دایره ۱ است و $AC = AE = \sqrt{3}$ و $DB = DF = \sqrt{2}$. زاویه $\angle BPC$ چند درجه است؟



۷. چند عدد طبیعی $n \leq 100$ وجود دارد که عبارت

$$\log_2(\frac{\pi}{n} + \sin(\frac{\pi}{n}))$$

مثبت باشد؟

۸. چند عدد طبیعی ۳ رقمی داریم که اگر با هر کدام از ارقامش جمع شود حاصل مربع کامل شود؟

۹. در منطقه‌ای ۶ شهر داریم که می‌خواهیم بین هر دو شهر جاده‌ای احداث کنیم. جاده‌ها لزوماً به شکل خط راست نیستند و هیچ سه جاده‌ای در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. هر دو جاده‌ای که یکدیگر را قطع کنند یک چهارراه به وجود می‌آورند. برای احداث این جاده‌ها حداقل به چند چهارراه نیاز پیدا می کنیم؟

۱۰. تعداد توابع یک به یک و پوشای $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ که در دو ویژگی زیر صدق کند، چند تا است؟

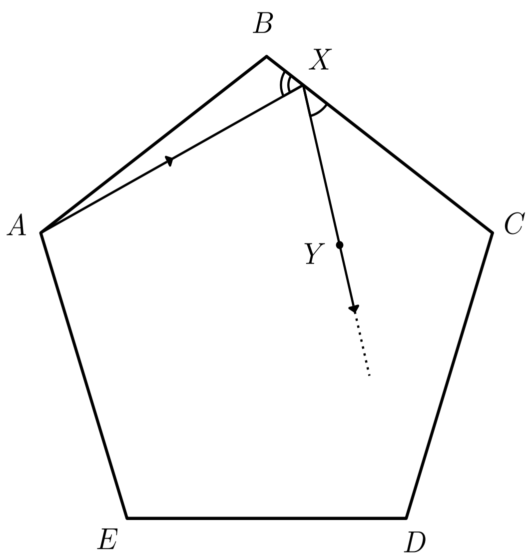
$$f(f(x)) + x = ۲f(x)$$

$$f(۱۴۰۴) = ۲۰۲۶$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۴۰۴ ۴) ۲۰۲۵ ۵) بی نهایت

۱۱. یک پنج ضلعی منتظم با دیواره‌های آینه‌ای مطابق شکل زیر داریم. آینه‌ها طوری هستند که هر پرتوی نوری که به آن‌ها برخورد کند با زاویه نصف‌شده بازتاب می‌شود. به عنوان مثال در شکل زیر زاویه $\angle BXA$ دوبرابر زاویه $\angle YXC$ می‌باشد. اگر از رأس A پرتویی به نقطه‌ای دلخواه درون پاره‌خط BC بتابانیم که مطابق شکل برای اولین‌بار در نقطه X با آینه‌ها برخورد کند، برای ۱۴۰۴ امین بار با آینه کدام ضلع برخورد خواهد کرد؟

۱) BC ۲) CD ۳) DE ۴) AE ۵) بستگی به X دارد.



۱۲. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول مثبت وجود دارد به طوری که چندجمله‌ای $x^۲ + px + q$ ریشه صحیح داشته باشد؟

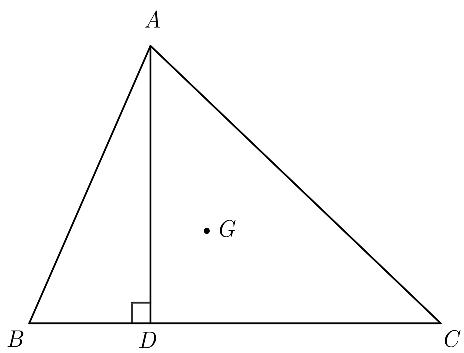
۱۳. تعداد توابع $f : \{۱, ۲, \cdots, ۶\} \to \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ را بیابید که برای هر x داشته باشیم:

$$f(f(f(x))) = x.$$

حاصل عددی فرد است.

۱۴. مثلث ABC داده شده است. اگر نقطه D پای ارتفاع رأس A و نقطه G مرکز ثقل این مثلث باشند و طول BD و DC و AC به ترتیب ۲ و ۴ و ۵ باشند. طول DG کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱۱\sqrt{۵}}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$ ۵) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$



۱۵. تابع $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را **فاصله‌اَفزا** می‌گوییم اگر برای هر دو عدد صحیح متمایز a, b، داشته باشیم:

$$|f(a) - f(b)| > |a - b|.$$

چندتا از عبارت‌های زیر در مورد این توابع همواره درست هستند؟

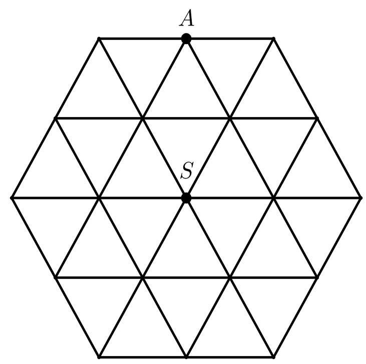
- تابع پوشای **فاصله‌اَفزا** وجود ندارد.
- تابع یک‌به‌یک **فاصله‌اَفزا** وجود ندارد.
- مجموع هر دو تابع **فاصله‌اَفزا** تابعی از همین نوع است.
- ترکیب هر دو تابع **فاصله‌اَفزا** تابعی از همین نوع است.
- ضرب هر دو تابع **فاصله‌اَفزا** تابعی از همین نوع است.

۱۶. مسعود اعداد ۱ تا ۲۰۰ را نوشته است و سعی دارد روش غربالی را روی آن‌ها اجرا کند. در این روش بعضی عددها حذف می‌شوند و دور بعضی دایره کشیده می‌شود. او ابتدا عدد ۱ را حذف می‌کند و سپس در هر مرحله دور کوچک‌ترین عددی که نه حذف شده و نه دورش دایره کشیده شده، به همراه کوچک‌ترین مضرب حذف نشده‌اش را دایره می کشد و بقیه مضارب آن را حذف می‌کند. پس از پایان این کار دور چند عدد دایره کشیده شده است؟

حاصل عددی زوج است.

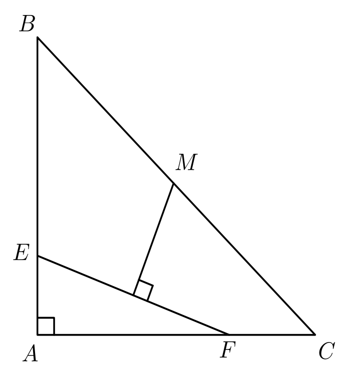
۱۷. در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم داریم که طول اضلاع آن ۲ است. شبکه‌ای درون آن رسم شده است که همه مثلث‌ها در آن متساوی الاضلاع هستند. علی در نقطه A و سینا در نقطه S ایستاده‌اند. سینا موقعیت علی را نمی‌داند و به صورت تصادفی دو بار و هر بار ۱ واحد روی شبکه حرکت می‌کند. بعد از هر حرکت سینا روی رأس یکی از مثلث‌های شبکه قرار دارد. پس از این دو حرکت، احتمال اینکه فاصله مستقیم سینا از علی بیش‌تر نشود چند است؟ (منظور از فاصله مستقیم دو نقطه طول پاره‌خط واصل بین آن‌ها است. به عنوان مثال فاصله مستقیم علی و سینا در ابتدا برابر $\sqrt{۳}$ است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ۵) $\frac{۱}{۴}$



۱۸. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC با رأس قائمه A و طول ساق ۱ داده شده است. نقاط E و F به ترتیب روی AB و AC طوری انتخاب شده‌اند که $AE = FC = \frac{۱}{۴}$ و عمودمنصف EF در M وتر را قطع کرده است. ME برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$ ۵) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۷}$



۱۹. مجموع تمام اعداد حقیقی α که به ازای آن‌ها، چندجمله‌ای‌های غیر ثابت $P(x)$ و $Q(x)$ با ضرایب حقیقی وجود داشته باشند که تساوی زیر برای هر عدد حقیقی x برقرار باشد، کدام گزینه است؟

$$P(x)^۳ + Q(x)^۳ = P(x)^۲ + \alpha P(x)Q(x) + Q(x)^۲$$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲ ۵) ۰

۲۰. سالنی به تعدادی لامپ که می‌دانیم حداکثر ۴۰ تا هستند مجهز شده است. برای تنظیم روشنایی این سالن یک دستگاه خودکار و دارای حس‌گر نور قرار داده شده است. این دستگاه صبح‌ها که به تدریج نور بیش‌تر می‌شود شروع به خاموش کردن برخی از لامپ‌های روشن می‌کند. روش آن بدین صورت است که در هر مرحله اگر n لامپ روشن باشد و d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه n باشد که $d < n$ دستگاه d لامپ را خاموش می‌کند. در این صورت حداکثر چند مرحله تا رسیدن به یک لامپ روشن طول می‌کشد؟

۲۱. کوچک‌ترین عدد حقیقی K که به ازای هر سه عدد حقیقی a, b, c که $a, b, c \in [۱, ۲]$ داشته باشیم:

$$a^۳ + b^۲ + c \leq Kabc$$

کدام گزینه است؟

۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۶}$ ۵) ۴

۲۲. ۸ نفر دور یک میز نشسته‌اند. جلوی هرکس یک لیوان چای و یک حبه قند قرار دارد. هر کس می‌تواند حبه قند خود را در لیوان خودش یا یکی از دو فرد مجاورش بیاندازد. بعد از انداختن همه حبه قندها، همه چای‌ها شیرین شده‌اند. این اتفاق به چند حالت مختلف می‌تواند رخ دهد؟

۲۳. نقاط متمایز X, Y, Z روی دایره محیطی مثلث ABC و متمایز از رئوس مثلث، به گونه‌ای قرار دارند که

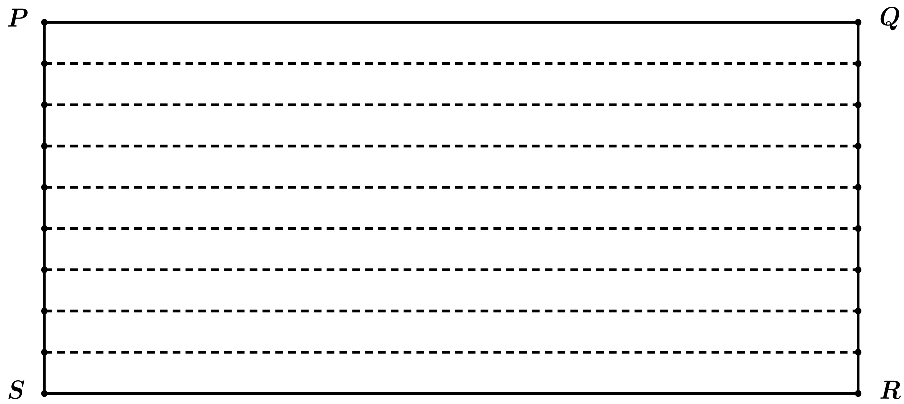
$$AX = AB, BY = BC, CZ = CA$$

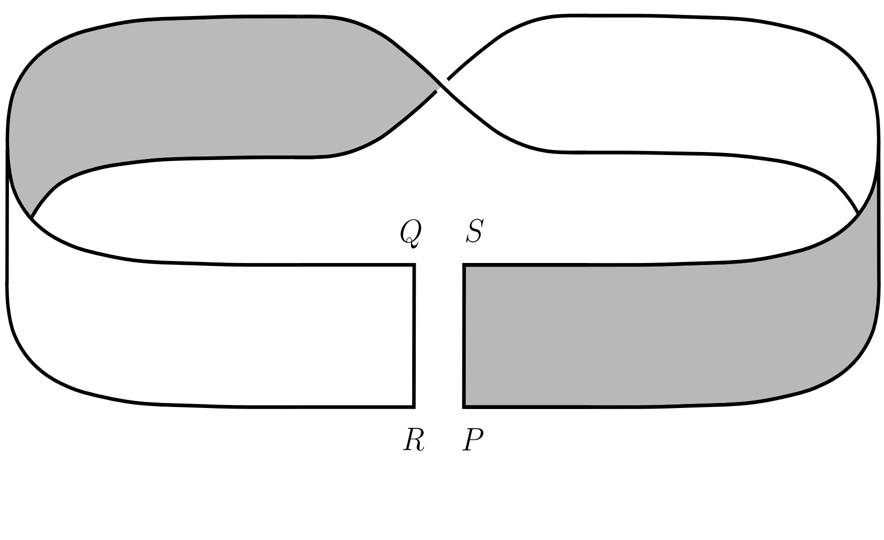
می دانیم مثلثی با طول اضلاع برابر با طول پاره‌خط‌های CX, AY, BZ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° است. اختلاف کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC با ۱۵ درجه چند است؟

۲۴. تعداد اعداد طبیعی n را بیابید که اگر $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_k$ تمام شمارنده‌های مثبت n باشند، آن‌گاه i وجود داشته‌باشد که $d_i + ۲۵ = d_{k-۱}$ برقرار باشد.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲ ۵) بی نهایت

۲۵. ایمان یک نوار مستطیلی به شکل زیر دارد. این مستطیل با ۸ خط موازی با خط PQ به ۹ مستطیل هم‌نهشت تقسیم شده‌است. این خطوط با خط‌چین در شکل بالاتر مشخص شده‌اند. او می‌خواهد اضلاع PS و QR را طوری به هم بچسباند که نقطه P به R و نقطه Q به S بچسبد. او این کار را مطابق شکل پایین‌تر، با پشت و رو کردن یک نیمه از نوار و سپس چسباندن اضلاع یاد شده انجام می‌دهد. ایمان پس از چسباندن اضلاع، شکل حاصل را از ۸ خط‌چین مشخص شده برش می‌زند. با این‌کار در نهایت شکل حاصل چند تکه خواهد بود؟





این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

این صفحه جهت استفاده به‌عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است

المپیاد ریاضی

پاسخنامه رسمی آزمون
واحد سنجش و ارزیابی باشگاه دانش‌پژوهان جوان

نام و نام خانوادگی: | جنسیت:
کد ملی: | کد حوزه:
منطقه حوزه: | شماره صندلی:
استان: | کد داوطلبی:

لطفا داخل این کادر چیزی ننویسید و گزینه‌ها را با مداد مشکلی نرم پر کنید. مثال قابل قبول: موارد غیر قابل قبول:

سوال	یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
سوال شماره ۱	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۳	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۴	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۵	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۶	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۷	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۸	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۰	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۱	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۲	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۳	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۴	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۵	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۶	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۷	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۸	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۱۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲۰	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲۱	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲۲	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲۳	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲۴	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
سوال شماره ۲۵	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

اینجانب .... به کد ملی .... دفترچه‌ی سوالات المپیاد ریاضی شامل ۲۵ سوال را دریافت نمودم.

محل امضا و اثر انگشت دانش‌آموز:

شفائی ابر
مسعود شفائی ابر

۱. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که بتوان مربعی به ضلع n در صفحه را با استفاده از مربع‌هایی با طول ضلع‌های $۱, ۲, \dots, n - ۱$ با اضلاع موازی ضلع‌های مربع اصلی، پوشاند. (از هر یک از مربع‌های ذکر شده، دقیقاً یکی در اختیار داریم و مربع‌ها می‌توانند روی مرز یا درون یکدیگر اشتراک داشته باشند.)

پاسخ: ۶

شرطی لازم برای اینکه بتوان با مربعی به ضلع n این‌کار را کرد این است که مجموع مساحت‌های مربع‌های با طول ضلع‌های $۱, ۲, \dots, n - ۱$ از مساحت مربع به طول ضلع n کمتر نباشد. برای $n \leq ۴$ داریم:

$$۱^۲ + ۲^۲ + \dots + (n - ۱)^۲ < n^۲$$

و در نتیجه این‌کار را نمی‌توان انجام داد. همچنین:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۳۰$$

بنابراین برای پوشاندن مربع به ضلع ۵ مربع‌ها باید حداکثر در ۵ خانه اشتراک داشته باشند. اما مربع‌های به ضلع ۳ و ۴ حداقل در ۴ خانه و مربع‌های به ضلع ۲ و ۳ حداقل در ۲ خانه اشتراک خواهند داشت. پس با مربعی به ضلع ۵ نیز نمی‌توان این‌کار را انجام داد. با مربع به طول ضلع ۶ به این صورت این‌کار امکان‌پذیر است. مربع های به طول ضلع ۵ و ۴ و ۳ و ۲ را در چهار گوشه قرار می دهیم و مربع به طول ضلع یک را در جای دلخواهی قرار می دهیم.

۲. چند عدد طبیعی n وجود دارد که باقیمانده تقسیم $n!$ بر ۲۵ برابر ۵ باشد؟

پاسخ: ۱

روشن است که $n!$ باید بر ۵ بخش پذیر باشد. پس $n \geq ۵$ است. همچنین نباید بر ۲۵ بخش پذیر باشد. بنابراین $n < ۱۰$ است. در بین اعداد ۵ تا ۹ نیز تنها !۹ باقی مانده اش بر ۲۵ برابر ۵ است.

۳. ABC یک مثلث قائم‌الزاویه از جنس کاغذ است که زاویه رأس A قائمه است و زاویه رأس B برابر ۷۰ درجه است. اگر بخواهیم نقطه D را بر روی وتر این مثلث انتخاب کنیم و مثلث را از خط AD تا بزنیم که شکل حاصل به صورت مثلث دیده شود، زاویه $\angle BAD$ چند تا از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (مقادیر به درجه هستند.)

$$۵, ۱۰, ۲۰, ۳۰, ۳۵, ۴۰, ۴۵, ۶۰, ۷۰, ۷۵$$

پاسخ: ۵

حالت‌های مطلوب حالت‌هایی هستند که قرینه نقطه B نسبت به خط AD بیرون مثلث ADC قرار نگیرد. یعنی زاویه $\angle BAD$ باید کمتر از ۴۵ درجه باشد چون در غیر این صورت قرینه B بیرون زاویه $\angle BAC$ قرار می‌گیرد. همین‌طور زاویه $\angle BDA$ باید کمتر از ۹۰ درجه باشد چون در غیر این صورت قرینه B بیرون زاویه $\angle ABC$ قرار می‌گیرد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$۲۰ \leq \angle BAD \leq ۴۵.$$

۴. فرض کنید برای عددهای حقیقی مثبت x, y, z تعریف کنیم:

$$f(x,y,z) = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}$$

کدام گزینه درست است؟

۱) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن هر یک از سه متغیر x, y, z افزایش می‌یابد.

۲) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y, z کاهش می‌یابد.

۳) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x, y افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن z کاهش می‌یابد.

۴) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x, z افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y کاهش می‌یابد.

۵) مقدار $f(x,y,z)$ با زیاد شدن x همواره افزایش می‌یابد ولی با زیاد شدن y, z بسته به مقدار آن‌ها ممکن است افزایش یا کاهش پیدا کند.

پاسخ: گزینه ۴

روشن است که با افزایش x مقدار $f(x,y,z)$ افزایش می یابد. همچنین چون y در مخرج کسر $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$ قرار دارد، مقدار کسر با افزایش y کاهش می یابد. همین طور می دانیم با افزایش z مقدار $\frac{1}{z}$ کاهش می یابد. بنابراین مقدار $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$ افزایش می یابد.

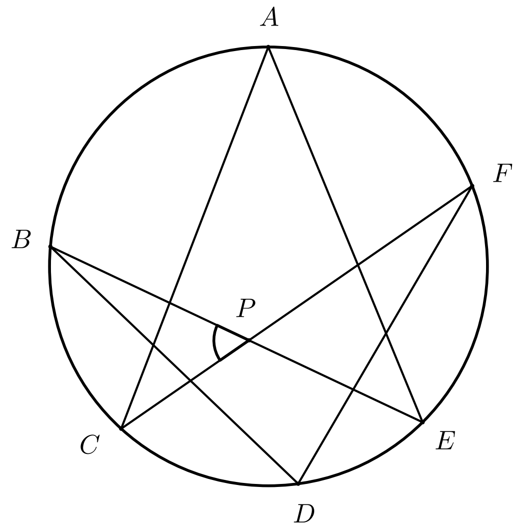
۵. به چند حالت می‌توان زیرمجموعه‌های A، B، C، D و E را از مجموعه تک‌عضوی $\{1\}$ انتخاب کرد به‌گونه‌ای که مجموعه $((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap D) \cup E)$ تهی نباشد؟

حاصل عددی زوج است.

پاسخ: ۲۴

تعداد کل حالت های این مجموعه ها برابر $32 = 2^5$ است. حالت هایی که مجموعه یادشده تهی باشد حالت هایی است که هر دو مجموعه $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap D) \cup E$ تهی باشند. برای اینکه $(A \cup B) \cap C$ تهی باشد باید حداقل یکی از $A \cup B$ و C تهی باشد. بنابراین تعداد حالت‌هایی که C تهی باشد برابر با ۴ است و در صورتی که C تهی نباشد، هر دوی A و B تهی هستند. پس در مجموع برای اینکه $(A \cup B) \cap C$ تهی باشد ۵ حالت وجود دارد. برای اینکه $(A \cap D) \cup E$ تهی باشد باید هر دوی $A \cap D$ و E تهی باشند که به ترتیب به ۱ و ۳ حالت ممکن است. پس در مجموع ۸ حالت نامطلوب از کل ۳۲ حالت داریم.

۶. در شکل زیر شعاع دایره ۱ است و $AC = AE = \sqrt{۳}$ و $DB = DF = \sqrt{۲}$. زاویه $\angle BPC$ چند درجه است؟



پاسخ: ۳۰

طبق قضیه سینوس‌ها می‌دانیم طول وتر متناظر با کمانی با اندازه α در دایره‌ای به شعاع R برابر $۲R\sin\alpha$ است. بنابراین

$$\sin\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \sin\frac{\overset{\frown}{DF}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲},\ \sin\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \sin\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}.$$

به علاوه:

$$\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DF}}{۲}, \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲} < ۱۸۰.$$

در نتیجه:

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DF} = ۹۰^\circ,\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AE} = ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BF} = ۱۸۰^\circ,\ \overset{\frown}{CE} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \angle P = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{EF}}{۲} = ۳۰^\circ$$

۷. چند عدد طبیعی $n \leq ۱۰۰$ وجود دارد که عبارت

$$\log_۲(\frac{\pi}{n} + \sin(\frac{\pi}{n}))$$

مثبت باشد؟

پاسخ: ۶

مثبت بودن عبارت داده شده معادل است با اینکه نابرابری

$$۱ < \frac{\pi}{n} + \sin(\frac{\pi}{n})$$

برقرار باشد. برای $n = ۱$ عبارت فوق برابر π است و از طرفی هردو دنباله $\frac{\pi}{n}$ و $\sin(\frac{\pi}{n})$ برای $n \geq ۲$ اکیداً نزولی هستند. همین طور داریم:

$$\frac{\pi}{۶} > \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}.$$

بنابراین برای $n \leq ۶$ داریم:

$$۱ < \frac{\pi}{n} + \sin(\frac{\pi}{n}).$$

همچنین

$$\frac{\pi}{۷} < \frac{۳/۵}{۷} = \frac{۱}{۲}.$$

بنابراین برای $n \geq ۷$ داریم:

$$۱ > \frac{\pi}{n} + \sin(\frac{\pi}{n}).$$

۸. چند عدد طبیعی ۳ رقمی داریم که اگر با هر کدام از ارقامش جمع شود حاصل مربع کامل شود؟

پاسخ: ۱

توجه کنید که $(n+۱)^۲ = n^۲ + ۲n + ۱$ همین‌طور اگر $k = n^۲$ عددی ۳ رقمی باشد $n \geq ۱۰$ است. پس اختلاف دو عدد مربع کامل ۳ رقمی حداقل ۲۱ است. در نتیجه اگر عددی ۳ رقمی ارقام یکسانی نداشته باشد نمی‌تواند شرایط مسأله را داشته‌باشد. بنابراین اگر m عددی مطلوب باشد داریم:

$$m = ۱۱۱a,\ ۱ \leq a \leq ۹.$$

ازطرفی $m + a = ۱۱۲a = ۱۶ \times ۷a$ باید مربع کامل باشد. در نتیجه $a = ۷$ تنها حالت ممکن است.

۹. در منطقه‌ای ۶ شهر داریم که می‌خواهیم بین هر دو شهر جاده‌ای احداث کنیم. جاده‌ها لزوماً به شکل خط راست نیستند و هیچ سه جاده‌ای در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. هر دو جاده‌ای که یکدیگر را قطع کنند یک چهارراه به وجود می‌آورند. برای احداث این جاده‌ها حداقل به چند چهارراه نیاز پیدا می کنیم؟

پاسخ: ۳

پس از احداث جاده‌ها مناطق بین شهرها به نواحی با مرز چندضلعی که ضلع‌هایشان لزوماً خط راست نیستند و با رئوسی که یا شهر هستند و یا چهارراه تقسیم می‌شوند. ناحیه‌ای که همه ناحیه‌ها را احاطه کرده نیز در نظر می گیریم. فرض کنید جاده‌ها به روشی احداث شده‌اند که کم‌ترین چهارراه به وجود آمده‌است. می‌خواهیم نشان دهیم در این حالت ۳ چهارراه به وجود آمده‌است. چهار شهر را به دلخواه در نظر بگیرید. اگر جاده‌هایی که بین این شهرها احداث شده‌اند تقاطع داشته‌باشند به جای یکی از شهرهایی که جاده‌های متقاطع از آن‌ها رد می‌شود شهر پنجم را در نظر بگیرید اگر باز هم جاده‌های ۴ شهر جدید تقاطع داشت همین کار تعویض یک شهر با شهر ششم را تکرار کنید. اگر باز هم تقاطع داشتند حداقل ۳ تقاطع یافته‌ایم و کار تمام می‌شود. پس حالت‌هایی باقی می‌ماند که بتوانیم ۴ شهر انتخاب کنیم که جاده‌های بینشان تقاطعی ندارند. نواحی ایجاد شده توسط این جاده‌ها مرزهایی ۳ ضلعی خواهندداشت. اگر دو شهر دیگر را در نظر بگیرید دوحالت به وجود می‌آید حالت اول حالتی است که هر دو در یکی از نواحی یادشده باشند. این ناحیه را S بنامید. شهری از آن ۴ شهر اولیه را که در مرز این ناحیه نیست A بنامید. در این حالت وقتی جاده‌های بین یکی از شهرهای جدید و رئوس ناحیه S را اضافه کنیم شهر دوم در یکی از ۳ ناحیه تازه قرار می گیرد و یکی از رئوس ناحیه S در مرز این ناحیه تازه نیست که آن را B می‌نامیم. در نتیجه برای کامل کردن جاده‌ها دو چهارراه برای احداث جاده‌های بین دو شهر جدید و A و یک چهارراه برای احداث جاده بین شهر دوم و B نیاز خواهد بود. در حالتی که دو شهر جدید در دو ناحیه مختلف قرار بگیرند هم با استدلالی مشابه ثابت می‌شود حداقل ۳ جاده لازم است.

۱۰. تعداد توابع یک به یک و پوشای $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ که در دو ویژگی زیر صدق کند، چند تا است؟

$$f(f(x))+x=۲f(x)$$

$$f(۱۴۰۴)=۲۰۲۶$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۴۰۴ ۴) ۲۰۲۵ ۵) بی نهایت

پاسخ: گزینه ۵

مجموعه زیر را درنظر بگیرید:

$$A=\{۱۴۰۴+۶۲۲k : k\in\mathbb{Z}\}$$

برای عدد صحیح فرد دلخواه j و عدد صحیح زوج دلخواه ℓ مجموعه

$$B=\{j+\ell k : k\in\mathbb{Z}\}$$

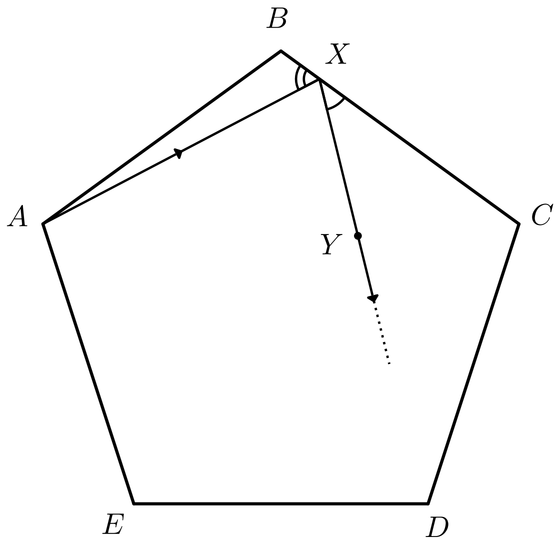
را تعریف کنید. اگر مقادیر تابع f را به ازای هر عدد صحیح دلخواه m خارج از $A\cup B$ برابر m تعریف کنیم و همین‌طور برای $n=۱۴۰۴+۶۲۲k$ به صورت

$$f(n)=۱۴۰۴+۶۲۲(k+۱)$$

تعریف کنیم و هم‌چنین برای $n=j+\ell k$ به صورت $f(n)=j+\ell(k+۱)$ تعریف کنیم، تابع f شرایط مطلوب را خواهد داشت. در نتیجه چون بی‌نهایت انتخاب برای j و ℓ داریم، جواب بی‌نهایت است.

۱۱. یک پنج ضلعی منتظم با دیواره‌های آینه‌ای مطابق شکل زیر داریم. آینه‌ها طوری هستند که هر پرتوی نوری که به آن‌ها برخورد کند با زاویه نصف‌شده بازتاب می‌شود. به عنوان مثال در شکل زیر زاویه $\angle BXA$ دوبرابر زاویه $\angle YXC$ می‌باشد. اگر از رأس A پرتویی به نقطه‌ای دلخواه درون پاره‌خط BC بتابانیم که مطابق شکل برای اولین‌بار در نقطه X با آینه‌ها برخورد کند، برای ۱۴۰۴ امین بار با آینه کدام ضلع برخورد خواهد کرد؟

۱) BC　　۲) CD　　۳) DE　　۴) AE　　۵) بستگی به X دارد.



پاسخ: گزینه ۴

ثابت می‌کنیم پرتوی نور پس از هربار بازتاب شدن از ضلعی با ضلع مجاورش در جهت ساعتگرد برخورد خواهد کرد. استدلال را برای برخورد اول بیان می‌کنیم و در برخوردهای بعدی استدلال کاملاً مشابه است. می‌دانیم

$$\angle AXB < ۱۸۰ - \angle ABX = ۷۲ \Rightarrow \angle CXY < ۳۶.$$

از طرفی داریم:

$$\angle CXD > \angle CBD = ۳۶.$$

بنابراین $\angle CXD > \angle CXY$ در نتیجه پرتو XY درون مثلث قرار دارد و با ضلع CD برخورد خواهد داشت. بنابراین محل برخورد اضلاع به صورت متوالی و با تناوب ۵ خواهد بود و در برخورد ۱۴۰۴ام با ضلع AE برخورد می‌کند.

۱۲. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول مثبت وجود دارد به طوری که چندجمله‌ای $x^۲ + px + q$ ریشه صحیح داشته باشد؟

پاسخ: ۱

می‌دانیم اگر عدد صحیح a ریشه این چندجمله‌ای باشد خواهیم داشت:

$$x^۲ + px + q = (x - a)(x - b)$$

که عدد b نیز عددی صحیح است. همچنین $a + b = -p$ و $ab = q$. و در نتیجه اعداد a و b منفی خواهند بود و یکی از آن‌ها برابر -۱ است. پس $p = q + ۱$ است و تنها زوج مرتب قابل قبول $(۳, ۲)$ خواهد بود.

۱۳. تعداد توابع $f : \{۱, ۲, \cdots, ۶\} \to \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ را بیابید که برای هر x داشته باشیم:

$$f(f(f(x))) = x.$$

حاصل عددی فرد است.

پاسخ: ۸۱

اگر برای یک $۱ \leq i \leq ۶$ داشته باشیم $f(i) = j \neq i$، در این صورت $f(f(i)) \neq i$ چون در غیر این صورت $f(f(f(i))) = j$ می‌شود. همین‌طور $f(f(i)) \neq j$ چون در غیر این صورت $f(f(f(i))) = j$ خواهد بود. بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq ۶$ یا $f(i) = i$ و یا i، $f(i)$ و $f(f(i))$ سه عدد متمایز خواهند بود. توجه کنید که در این صورت داریم:

$$\{f(i), f(j), f(k)\} = \{i, j, k\}$$

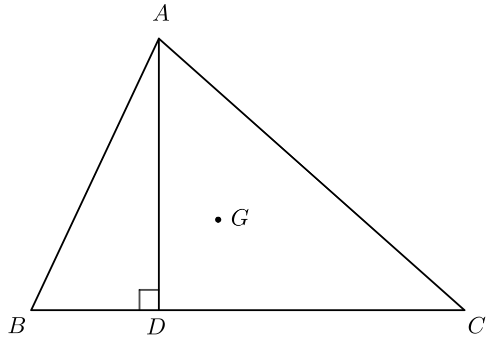
و به علاوه اگر برای ۳ عدد بدانیم

$$\{f(i), f(j), f(k)\} = \{i, j, k\}$$

این اتفاق به ۳ طریق ممکن است رخ دهد چون با دانستن اینکه $f(i)$ کدام یک از i، j و k است مقدار f روی i، j و k مشخص می‌شود. در نتیجه برای شمارش کل حالت‌ها ابتدا به $\binom{۶}{۳}/۲ = ۱۰$ طریق اعداد را به ۲ گروه ۳ تایی تقسیم می‌کنیم. سپس برای هر گروه به ۳ طریق نحوه نگاشته شدن به همدیگر را مشخص می کنیم. پس در نهایت $۱۰ \times ۳ \times ۳ = ۹۰$ حالت خواهیم داشت. اما با این روش شمارش، در هر تقسیم به دو گروه تابع همانی را یک بار شمرده‌ایم بنابراین جواب مسأله ۸۱ حالت است.

۱۴. مثلث ABC داده شده است. اگر نقطه D پای ارتفاع رأس A و نقطه G مرکز ثقل این مثلث باشند و طول BD و DC و AC به ترتیب ۲ و ۴و ۵ باشند. طول DG کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱۱\sqrt{۵}}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$ ۵) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$



پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید M نقطه وسط پاره‌خط BC باشد و P نقطه تقاطع خط گذرنده از A و موازی با BC با خط DG باشد. در این صورت دو مثلث DGM و PGA با نسبت ۱ به ۲ متشابه هستند. در نتیجه چون طول DM برابر ۱ است، طول AP برابر ۲ خواهد بود. به علاوه چون طول AD برابر $۳ = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲}$ است، طول DP برابر $\sqrt{۳^۲ + ۲^۲}$ است و طول DG برابر $\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$ خواهد بود.

۱۵. تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را **فاصله‌اَفزا** می‌گوییم اگر برای هر دو عدد صحیح متمایز a, b، داشته باشیم:

$$|f(a)-f(b)|>|a-b|.$$

چندتا از عبارت‌های زیر در مورد این توابع همواره درست هستند؟

- تابع پوشای **فاصله‌اَفزا** وجود ندارد.
- تابع یک‌به‌یک **فاصله‌اَفزا** وجود ندارد.
- مجموع هر دو تابع **فاصله‌اَفزا** تابعی از همین نوع است.
- ترکیب هر دو تابع **فاصله‌اَفزا** تابعی از همین نوع است.
- ضرب هر دو تابع **فاصله‌اَفزا** تابعی از همین نوع است.

پاسخ: ۲

گزاره اول درست است. اگر f چنین تابعی باشد و $f(a)=۰$ و $f(b)=۱$، دراین صورت $|a-b|$ باید ۰ باشد که ممکن نیست.

گزاره دوم نادرست است. $f(x)=۲x$ تابعی با این شرایط است.

گزاره سوم نادرست است. $f(x)=۲x$ و $g(x)=-۲x$ دو تابع فاصله‌افزا هستند ولی جمع آن‌ها تابع ثابت ۰ است که فاصله‌افزا نیست.

گزاره چهارم درست است. چون اگر f و g توابعی فاصله‌افزا باشند، برای هر دو عدد صحیح x و y داریم:

$$|f(g(x))-f(g(y))|>|g(x)-g(y)|>|x-y|.$$

گزاره پنجم نادرست است. $f(x)=۲x$ و $g(x)=-۲x+۲$ فاصله‌افزا هستند ولی ضرب آن‌ها برای $x=۰$ و $x=۱$ برابر ۰ است.

۱۶. مسعود اعداد ۱ تا ۲۰۰ را نوشته است و سعی دارد روش غربالی را روی آن‌ها اجرا کند. در این روش بعضی عددها حذف می‌شوند و دور بعضی دایره کشیده می‌شود. او ابتدا عدد ۱ را حذف می‌کند و سپس در هر مرحله دور کوچک‌ترین عددی که نه حذف شده و نه دورش دایره کشیده شده، به همراه کوچک‌ترین مضرب حذف نشده‌اش را دایره می کشد و بقیه مضارب آن را حذف می‌کند. پس از پایان این کار دور چند عدد دایره کشیده شده است؟

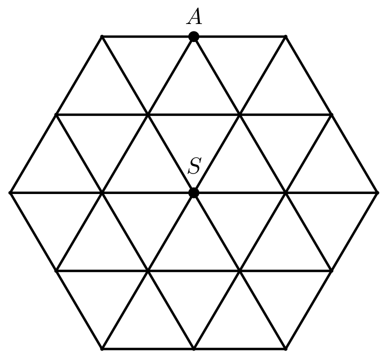
🔔 حاصل عددی زوج است.

پاسخ: ۵۲

در آغاز هر مرحله، اگر دور عدد p و kp دایره کشیده شود، چون تمام مضارب اعداد کوچکتر از p به جز ۱ در مراحل قبل یا حذف شده‌اند و یا دورشان دایره کشیده شده است، p نمی‌تواند مضرب اعداد کوچکتر از خود به جز ۱ باشد و در نتیجه عددی اول است. به علاوه k نیز نمی‌تواند کمتر از p باشد وگرنه در مراحل قبل حذف می‌شد. هم‌چنین p^2 در مراحل قبلی حذف نشده است. بنابراین $k = p$ است. در نتیجه دقیقاً دور اعداد اول و مجذور اعداد اول دایره کشیده شده است.

۱۷. در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم داریم که طول اضلاع آن ۲ است. شبکه‌ای درون آن رسم شده است که همه مثلث‌ها در آن متساوی الاضلاع هستند. علی در نقطه A و سینا در نقطه S ایستاده‌اند. سینا موقعیت علی را نمی‌داند و به صورت تصادفی دو بار و هر بار ۱ واحد روی شبکه حرکت می‌کند. بعد از هر حرکت سینا روی رأس یکی از مثلث‌های شبکه قرار دارد. پس از این دو حرکت، احتمال اینکه فاصله مستقیم سینا از علی بیش‌تر نشود چند است؟ (منظور از فاصله مستقیم دو نقطه طول پاره‌خط واصل بین آن‌ها است. به عنوان مثال فاصله مستقیم علی و سینا در ابتدا برابر $\sqrt{۳}$ است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ۵) $\frac{۱}{۴}$

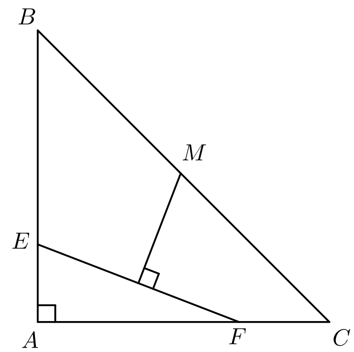


پاسخ: گزینه ۱

اگر خطوط افقی شکل را از پایین به بالا شماره‌گذاری کنیم، نقطه‌های S و A به ترتیب در خطوط شماره ۳ و ۵ قرار دارند. حالت‌های مطلوب حالت‌هایی است که سینا در نهایت، در نقطه S و یا در خطوط ۴ یا ۵ قرار بگیرد. به دلیل تقارن موجود در شکل، تعداد حالت‌هایی که در نهایت سینا در خطوط ۱ یا ۲ قرار بگیرد برابر با تعداد حالت‌هایی است که در نهایت، در خطوط ۴ یا ۵ قرار بگیرد. هم‌چنین تعداد حالت‌های مطلوب و نامطلوب بین حالت‌هایی که سینا در نهایت روی خط ۳ باشد برابر است چون برای اینکه در نهایت در نقطه S قرار بگیرد، می‌تواند در ۶ جهت برود و بازگردد و تعداد حالت‌های رسیدن به دو نقطه مجاور S در خط ۳ برابر ۴ و تعداد راه‌های رسیدن به دو نقطه انتهایی خط ۳ برابر ۲ است. در نتیجه در مجموع دقیقاً نصف حالت‌ها مطلوب است.

۱۸. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC با رأس قائمه A و طول ساق ۱ داده شده است. نقاط E و F به ترتیب روی AB و AC طوری انتخاب شده‌اند که $AE = FC = \frac{۱}{۳}$ و عمودمنصف EF در M وتر را قطع کرده است. ME برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$ ۵) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۷}$



پاسخ: گزینه ۱

اگر N نقطه وسط پاره‌خط BC باشد، AN میانه وارد بر وتر است و $AN = NC$ خواهد بود. هم‌چنین داریم:

$$\angle EAN = \angle FCN = ۴۵^\circ$$

. بنابراین چون $EA = FC$ ، دو مثلث EAN و FCN هم‌نهشت خواهند بود و در نتیجه N روی عمودمنصف EF است و در نتیجه $N = M$. از طرفی $\angle EMA = \angle FMC$ پس $\angle EMF = \angle AMC = ۹۰^\circ$ در نتیجه مثلث EMF قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است و

$$ME = \frac{\sqrt{۲}}{۲}EF = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \cdot \frac{\sqrt{۵}}{۳} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۶}.$$

۱۹. مجموع تمام اعداد حقیقی α که به ازای آن‌ها، چندجمله‌ای‌های غیر ثابت $P(x)$ و $Q(x)$ با ضرایب حقیقی وجود داشته باشند که تساوی زیر برای هر عدد حقیقی x برقرار باشد، کدام گزینه است؟

$$P(x)^3 + Q(x)^3 = P(x)^2 + \alpha P(x)Q(x) + Q(x)^2$$

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2 ۵) 0

پاسخ: گزینه ۱

چون داریم:

$$P(x)^3 + Q(x)^3 = (P(x) + Q(x))(P(x)^2 - P(x)Q(x) + Q(x)^2)$$

روشن است که با قرار دادن $Q(x) + P(x) = 1$ و $\alpha = -1$ و یا $Q(x) + P(x) = 0$ و $\alpha = 2$ به نتیجه مطلوب می‌رسیم. از طرفی با مقایسه درجه دو طرف تساوی به نتیجه می رسیم چند جمله‌ای $P(x) + Q(x)$ باید ثابت باشد. اگر $P(x) + Q(x) = c$ داریم:

$$\begin{aligned} c^3 &= (P(x) + Q(x))^3 \\ &= P(x)^3 + Q(x)^3 + 3cP(x)Q(x) \\ &= P(x)^2 + (\alpha + 3c)P(x)Q(x) + Q(x)^2 \\ &= c^2 + (\alpha + 3c - 2)P(x)Q(x) \\ &= c^2 + (\alpha + 3c - 2)P(x)(c - P(x)) \end{aligned}$$

معادلاً:

$$c^3 - c^2 = (\alpha + 3c - 2)(cP(x) - P(x)^2)$$

مجدداً با مقایسه درجه طرفین تساوی نتیجه می‌شود $\alpha + 3c - 2 = c^3 - c^2 = 0$ و $c = 0$ یا $c = 1$. در نتیجه $\alpha = -1$ یا $\alpha = 2$.

۲۰. سالنی به تعدادی لامپ که می‌دانیم حداکثر ۴۰ تا هستند مجهز شده است. برای تنظیم روشنایی این سالن یک دستگاه خودکار و دارای حس‌گر نور قرار داده شده است. این دستگاه صبح‌ها که به تدریج نور بیش‌تر می‌شود شروع به خاموش کردن برخی از لامپ‌های روشن می‌کند. روش آن بدین صورت است که در هر مرحله اگر n لامپ روشن باشد و d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه n باشد که $d < n$ دستگاه d لامپ را خاموش می‌کند. در این صورت حداکثر چند مرحله تا رسیدن به یک لامپ روشن طول می‌کشد؟

پاسخ: ۷

توجه کنید که اگر با n چراغ روشن شروع کنیم و p کوچک‌ترین عدد اولی باشد که n را می‌شمارد و $n = pk$ در این صورت در مرحله بعد $(p-۱)k$ چراغ روشن خواهیم داشت. اگر در مرحله‌ای تعداد زوجی چراغ روشن داشته باشیم، در مرحله بعدی تعدادشان نصف می شود. همچنین اگر $n = ۲k + ۱$ باشد پس از دو مرحله حداکثر k چراغ روشن خواهد بود. بنابراین با شروع از تعداد زوجی چراغ روشن، پس از ۵ مرحله حداکثر $\frac{۱}{۸}$ چراغ ها روشن خواهد بود و در نتیجه کمتر از ۵ چراغ روشن خواهیم داشت. (اگر با ۴۰ چراغ روشن شروع کنیم بعد از ۴ مرحله کمتر از ۵ چراغ داریم.) و این تعداد نیز حداکثر پس از دو مرحله به ۱ می‌رسد. در نتیجه ثابت کردیم اگر تعداد اولیه زوج باشد با حداکثر ۷ مرحله کار تمام می‌شود.

اگر تعداد چراغ های روشن فرد و $۳k$ باشد در مرحله بعد $۲k$ و در مرحله بعد k می شود. بنابراین پس از ۲ مرحله حداکثر ۱۳ عدد می‌شود که پس از دو مرحله دیگر حداکثر ۶ خواهدبود که همه این اعداد بعد از ۳ مرحله به ۱ عدد می رسند. پس مشابه اعداد زوج، برای اعداد مضرب ۳ هم ثابت کردیم حداکثر هفت مرحله خواهیم داشت. همچنین اگر $۵k$ چراغ روشن باشد و این تعداد بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشد، در مراحل بعد به ترتیب به $۴k$ ، $۲k$ و k تبدیل می شود. پس بعد از ۵ مرحله، حداکثر ۴ تا خواهد بود که با دو مرحله دیگر به پایان می‌رسد. در نتیجه اگر با تعداد فرد و مرکبی چراغ روشن، شروع کنیم چون کوچک‌ترین عامل اول آن ۳ یا ۵ است، پس از حداکثر ۷ مرحله کار تمام می شود. در مورد اعداد اول نیز برای آن‌هایی که کمتر از ۲۴ هستند چون پس از ۶ مرحله کمتر از ۳ تا خواهند بود مجدداً ثابت می‌شود ۷ مرحله کافی است. تنها اعدادی که بررسی نشده‌اند ۲۹، ۳۱ و ۳۷ هستند که می‌توانیم ببینیم به بیش از ۷ مرحله نیاز ندارند. در نتیجه چون ۳۹ به ۷ مرحله نیاز دارد جواب ۷ خواهد بود.

۲۱. کوچک‌ترین عدد حقیقی K که به ازای هر سه عدد حقیقی a, b, c که $a, b, c \in [۱, ۲]$ داشته باشیم:

$$a^۳ + b^۲ + c \leq Kabc$$

کدام گزینه است؟

۱) ۶ ‏ ‏ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ‏ ‏ ۳) ۵ ‏ ‏ ۴) $۲\sqrt{۶}$ ‏ ‏ ۵) ۴

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم برای $a = ۲$ ، $b = ۱$ و $c = ۱$ رابطه $a^۳ + b^۲ + c = ۵abc$ برقرار است بنابراین جواب مسأله حداقل ۵ است. پس در ادامه استدلال فرض می‌کنیم $K \geq ۵$. اگر a و b ثابت باشند عبارت $a^۳ + b^۲ + c - Kabc$ برحسب c معادله یک خط است که بیشترین مقدارش را در بازه $[۱, ۲]$ بسته به اینکه شیب آن مثبت یا منفی باشد در ۱ یا ۲ خواهد داشت. همین‌طور اگر a و c ثابت باشند عبارت $a^۳ + b^۲ + c - Kabc$ معادله یک سهمی است که رو به بالاست و رأس آن در $\frac{Kac}{۲}$ قرار دارد که چون $Kac \geq ۵$ این سهمی در بازه $[۱, ۲]$ نزولی است و بیشترین مقدارش را در ۱ می‌گیرد. در نتیجه اگر K طوری باشد که برای هر $a \in [۱, ۲]$ داشته باشیم: $a^۳ + ۲ \leq Ka$ و $a^۳ + ۳ \leq ۲Ka$ برای هر $a, b, c \in [۱, ۲]$ خواهیم داشت:

$$a^۳ + b^۲ + c \leq Kabc.$$

نشان می‌دهیم برای هر $a \in [۱, ۲]$ روابط $a^۳ + ۲ - ۵a \leq ۰$ و $a^۳ + ۳ - ۱۰a \leq ۰$ برقرار است. در نتیجه ثابت می‌شود که جواب ۵ است. چندجمله‌ای $a^۳ + ۲ - ۵a = (a - ۲)(a^۲ + ۲a - ۱)$ را تعیین علامت می‌کنیم. $a - ۲$ در بازه $[۱, ۲)$ منفی است و $a^۲ + ۲a - ۱$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است که ریشه‌هایش $-۱ \pm \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ هستند و در نتیجه در بازه $[۱, ۲]$ مثبت است. بنابراین $a^۳ + ۲ - ۵a \leq ۰$ در بازه $[۱, ۲]$ برقرار است. همین‌طور چندجمله‌ای $a^۳ + ۳ - ۱۰a = (a - ۳)(a^۲ + ۳a - ۱)$ را تعیین علامت می‌کنیم. $a - ۳$ در بازه $[۱, ۲]$ منفی است و $a^۲ + ۳a - ۱$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است که ریشه‌هایش $-\frac{۳}{۲} \pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$ هستند و در نتیجه در بازه $[۱, ۲]$ مثبت است. بنابراین $a^۳ + ۳ - ۱۰a \leq ۰$ در بازه $[۱, ۲]$ برقرار است.

۲۲. ۸ نفر دور یک میز نشسته‌اند. جلوی هرکس یک لیوان چای و یک حبه قند قرار دارد. هر کس می‌تواند حبه قند خود را در لیوان خودش یا یکی از دو فرد مجاورش بیاندازد. بعد از انداختن همه حبه قندها، همه چای‌ها شیرین شده‌اند. این اتفاق به چند حالت مختلف می‌تواند رخ دهد؟

پاسخ: ۴۹

فرض کنید پاسخ مسأله برای n نفر که در یک صف قرار گرفته‌اند برابر با f_n باشد. اگر نفر اول صف قند را در چای خودش بریزد، بقیه افراد به $f_{n-۱}$ طریق می تواند چای هایشان را شیرین کنند و اگر نفر اول قند را در چای نفر دوم بریزد نفر دوم باید قند را در چای نفر اول بریزد و بقیه افراد به $f_{n-۲}$ طریق می توانند چای‌هایشان را شیرین کنند. بنابراین برای هر n داریم $f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}$. چند جمله اول دنباله f_n به این صورت است:

$$۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴$$

اگر n نفر دور یک میز باشند و افراد دور میز را شماره‌گذاری کنیم. اگر نفر ۱ قند را در چای خودش بریزد چون همه چای‌ها شیرین شده‌اند پس کس دیگری قند در چای شماره ۱ نمی‌ریزد و در نتیجه تعداد حالات مطلوب برابر با $f_{n-۱}$ خواهد بود. اگر شماره یک قند را در چای شماره ۲ بریزد و شماره ۲ هم در چای شماره ۱ بریزد $f_{n-۲}$ حالت خواهیم داشت. و اگر شماره ۲ در چای شماره ۳ بریزد همه مجبور هستند در چای نفر بعدی بریزند و یک حالت داریم. مشابه این اتفاق زمانی که شماره ۱ قند را در چای شماره n بریزد نیز رخ می دهد و در نهایت تعداد حالت‌ها برای n نفر دور یک میز برابر $f_{n-۱} + ۲f_{n-۲} + ۲$ خواهد بود که برای $n = ۸$ برابر ۴۹ می‌شود.

۲۳. روی دایره محیطی مثلث ABC و متمایز از رئوس مثلث، به گونه‌ای قرار دارند که

$$AX = AB, BY = BC, CZ = CA$$

می دانیم مثلثی با طول اضلاع برابر با طول پاره‌خط‌های CX, AY, BZ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° است. اختلاف کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC با ۱۵ درجه چند است؟

پاسخ: ۵

بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید: $\angle B > \angle A > \angle C$. با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت:

$$\frac{\overset{\frown}{CX}}{۲} = \angle B - \angle C,\ \frac{\overset{\frown}{AY}}{۲} = \angle A - \angle C,\ \frac{\overset{\frown}{BZ}}{۲} = \angle B - \angle A$$

نقطه T را روی کمان $\overset{\frown}{CX}$ طوری درنظر بگیرید که $\overset{\frown}{CT}=\overset{\frown}{BZ}$ باشد. با توجه به مقدار کمان‌ها $\overset{\frown}{XT}=\overset{\frown}{AY}$ خواهد بود. بنابراین $CT = BZ$ و $XT = AY$. پس CTX مثلثی با طول اضلاع با طول پاره‌خط‌های CX, AY, BZ خواهد بود. بنابراین $\overset{\frown}{CX}= ۱۸۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CT}= ۶۰^\circ$ یا $\overset{\frown}{CT}= ۱۲۰^\circ$. در نتیجه زوایای مثلث یا $۱۰۰^\circ, ۷۰^\circ, ۱۰^\circ$ و یا $۱۱۰^\circ, ۵۰^\circ, ۲۰^\circ$ خواهند بود.

۲۴. تعداد اعداد طبیعی n را بیابید که اگر $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_k$ تمام شمارنده‌های مثبت n باشند، آن‌گاه i وجود داشته‌باشد که $d_i + ۲۵ = d_{k-۱}$ برقرار باشد.

۱) ۱ ‏ ‏ ۲) ۴ ‏ ‏ ۳) ۶ ‏ ‏ ۴) ۱۲ ‏ ‏ ۵) بی نهایت

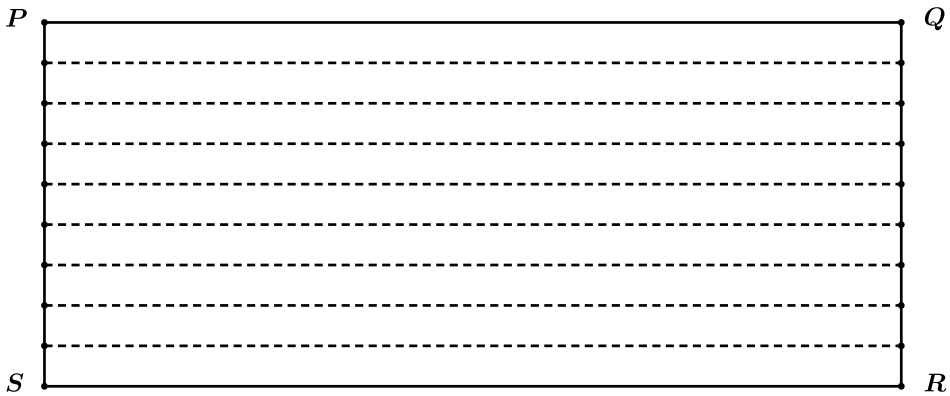
پاسخ: گزینه ۳

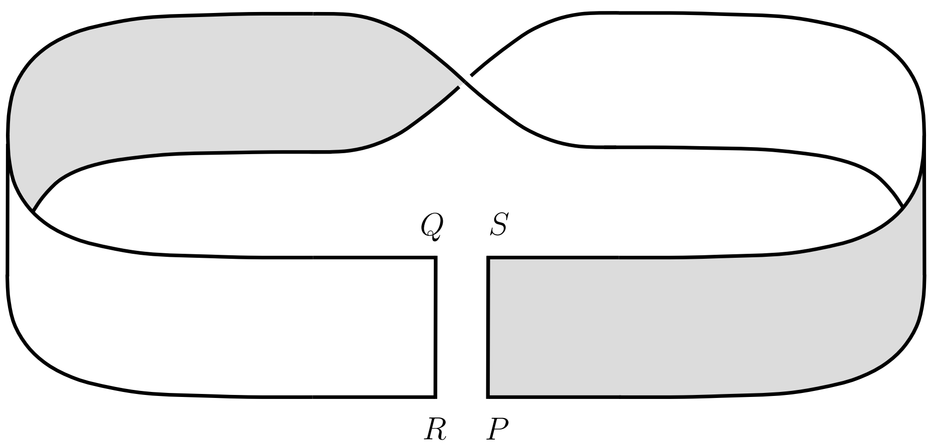
اگر p کوچک‌ترین مقسوم علیه اول n باشد $d_{k-۱} = \frac{n}{p}$ است. همچنین داریم:

$$\frac{n}{p} - ۲۵ | n, \frac{n}{p} - ۲۵ | n - ۲۵p \Rightarrow \frac{n}{p} - ۲۵ | ۲۵p$$

از طرفی اگر p فرد باشد، n نیز فرد است و $\frac{n}{p} - ۲۵$ زوج خواهدبود پس نمی‌تواند مقسوم علیه n باشد. بنابراین $p = ۲$ است. در نتیجه $\frac{n}{۲} - ۲۵ | ۵۰$ باید برقرار باشد. در نتیجه جواب‌های ممکن ۵۲، ۵۴، ۶۰، ۷۰، ۱۰۰ و ۱۵۰ هستند.

۲۵. ایمان یک نوار مستطیلی به شکل زیر دارد. این مستطیل با ۸ خط موازی با خط PQ به ۹ مستطیل هم‌نهشت تقسیم شده‌است. این خطوط با خط‌چین در شکل بالاتر مشخص شده‌اند. او می‌خواهد اضلاع PS و QR را طوری به هم بچسباند که نقطه P به R و نقطه Q به S بچسبد. او این کار را مطابق شکل پایین‌تر، با پشت و رو کردن یک نیمه از نوار و سپس چسباندن اضلاع یاد شده انجام می‌دهد. ایمان پس از چسباندن اضلاع، شکل حاصل را از ۸ خط‌چین مشخص شده برش می‌زند. با این‌کار در نهایت شکل حاصل چند تکه خواهد بود؟





پاسخ: ۵

مستطیل به ۹ نوار افقی باریک تقسیم شده که با این نحوه چسباندن دو طرف نوار بالایی به دو طرف نوار پایینی می چسبد و پس از برش زدن خط‌چین‌ها نوار بالایی و پایینی یک تکه را تشکیل می‌دهند. مشابه این وضعیت برای نوارهای دوم از بالا و دوم از پایین و برای نوارهای سوم از بالا و سوم از پایین و همچنین برای نوارهای چهارم از بالا و چهارم از پایین نیز رخ می‌دهد. نوار وسط هم به تنهایی یک تکه خواهد بود. پس در نهایت ۵ تکه خواهیم داشت.