

# آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله چهاردهم

پایه یازدهم

۰۴/اردیبهشت/۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	یازدهم
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه	فصل ۴ (درس ۴) و فصل ۵ (درس ۱ تا ۳) صفحه ۱۱۰ تا ۱۴۰
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه	فصل ۳ (درس ۲ و ۳) صفحه ۶۴ تا ۷۰
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه	فصل ۳ (درس ۱) و فصل ۴ (درس ۱) صفحه ۸۷ تا ۱۱۱
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه	فصل ۳ (از ابتدای ویژگی‌های مغناطیسی مواد) و فصل ۴ (تا ابتدای قانون لنز) صفحه ۱۰۱ تا ۱۱۷
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه	فصل ۳ (تا ابتدای پلی‌استرها) صفحه ۹۹ تا ۱۰۹
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه	—

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان	طراحان: فرشاد حسن‌زاده - عادل حسینی - محمد خان‌گلدی - علی شهرابی محمد گودرزی - سروش موئینی - محسن علی‌نجاری کارشناسان علمی: فرشاد حسن‌زاده - محمد گودرزی	محسن علی‌نجاری
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: سید عباس حسینی	امیرحسین ابومحبوب
آمار و احتمال	طراحان: مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب - نیلوفر مهدوی	مسعود شفیعی
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - نوید شاهی کارشناسان علمی: سعید محبی - هادی نجفی	نوید شاهی - یاشار انگوتی
شیمی	طراحان: پویا رستگاری - سروش عبادی کارشناسان علمی: محمدمهدی کریمیان - مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللہی - سروش عبادی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانیپور

این آزمون نمره‌منشی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سوال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینشگر، نوع صفحه آرای، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سوالات کنکور، سراسری طراحی می شود.





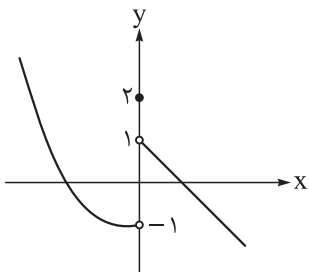
## حسابان یازدهم

۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+x^2}{1-x^3}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) -۲      (۳) صفر      (۴) -۱

۲- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] + f(0)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء

صحیح است.)



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۳- مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin |x|}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|}$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) صفر      (۳) -۱      (۴) ۲

۴- اگر  $f(x) = [x] - [-x]$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر      (۲) -۲      (۳) ۲      (۴) -۱

۵- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a^2x - bx + a & ; x \geq 1 \\ b^2x^2 - x[-x] & ; x < 1 \end{cases}$  مفروض است. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $ab$

کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $-\frac{1}{4}$       (۳) ۱      (۴) -۱

۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow a^-} [x] = 3a + 1$  و  $a \notin \mathbb{Z}$ ، حاصل  $[a]$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) -۱      (۴) -۲

محل انجام محاسبات





۱۳- اگر مجموعه  $\{-2\} - (a^2 - 3a, -2a + 1)$  یک همسایگی محذوف  $-2$  باشد، حدود  $a$  کدام است؟

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (2) \qquad 1 < a < 2 \quad (1)$$

$$1 < a < \frac{3}{2} \quad (4) \qquad 1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

۱۴- یک همسایگی راست کدام نقطه، در دامنه تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{3 - [2x]}$  قرار ندارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$\frac{3}{2} \quad (4) \qquad \sqrt{3} \quad (3) \qquad 2 \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$

۱۵- مقدار عددی  $\sin 22/5^\circ$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (1) \qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} \quad (4)$$

۱۶- اگر  $\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \sqrt{5}$  باشد،  $\sin 2\alpha$  کدام است؟ ( $\alpha$  حاده است.)

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1) \qquad \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (2) \qquad \frac{4}{5} \quad (3) \qquad \frac{2}{5} \quad (4)$$

۱۷- اگر  $\alpha$  حاده و  $\sin(\alpha + 22^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}$  باشد، مقدار  $\cos(23^\circ - \alpha)$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{7}+1}{4} \quad (1) \qquad \frac{\sqrt{7}-1}{4} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{2}+1}{4} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{2}-1}{4} \quad (4)$$

۱۸- اگر  $\sin x + \cos x = 1/2$  باشد، حاصل عبارت  $\sin^3 x + \cos^3 x$  کدام است؟

$$1/176 \quad (1) \qquad 0/936 \quad (2) \qquad 0/648 \quad (3) \qquad 0/144 \quad (4)$$

۱۹- اگر  $\tan(\frac{\alpha}{4}) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha - \sin \alpha}$  کدام است؟

$$-\frac{29}{8} \quad (1) \qquad -\frac{25}{8} \quad (2) \qquad \frac{25}{8} \quad (3) \qquad \frac{29}{8} \quad (4)$$

۲۰- مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{30}} ((\sin x + \cos x)(\sin 4x + \cos 4x) - \cos 3x)$  کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (1) \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

محل انجام محاسبات



## هندسه یازدهم

۲۱- طول قطرهای یک متوازی‌الاضلاع ۶ و ۱۲ و زاویه بین آن‌ها  $60^\circ$  است. نسبت اندازه ضلع بزرگ‌تر به ضلع کوچک‌تر در این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$\sqrt{3}$  (۴)       $\sqrt{\frac{7}{3}}$  (۳)       $\sqrt{2}$  (۲)       $\sqrt{\frac{5}{3}}$  (۱)

۲۲- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 60^\circ$ ،  $AB = 5$  و  $AC = 8$  است. مقدار  $\sin C$  کدام است؟

$\frac{5\sqrt{3}}{14}$  (۴)       $\frac{5\sqrt{3}}{21}$  (۳)       $\frac{3\sqrt{3}}{10}$  (۲)       $\frac{\sqrt{3}}{5}$  (۱)

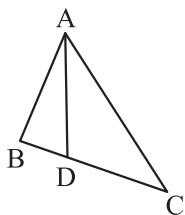
۲۳- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $AB = 9$  و  $AC = 12$  است. اگر نقاط  $D$  و  $M$  روی ضلع  $BC$ ، به ترتیب پای نیمساز و میانه نظیر رأس  $A$  باشند، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث  $AMD$  به مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

$\frac{1}{7}$  (۴)       $\frac{2}{15}$  (۳)       $\frac{1}{14}$  (۲)       $\frac{1}{15}$  (۱)

۲۴- اگر طول ضلع‌های مثلثی ۸، ۱۰ و ۱۲ باشد، نسبت طول کوچک‌ترین میانه این مثلث به بزرگ‌ترین میانه آن کدام است؟

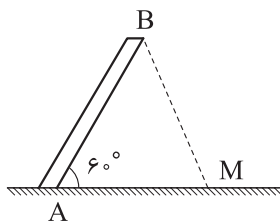
$\sqrt{\frac{23}{53}}$  (۴)       $\frac{23}{53}$  (۳)       $\sqrt{\frac{2}{3}}$  (۲)       $\frac{2}{3}$  (۱)

۲۵- در شکل زیر،  $DC = 2BD$ ،  $AB = 4$ ،  $AC = 7$  و  $BC = 6$  است. طول پاره‌خط  $AD$  کدام است؟



$\sqrt{19}$  (۱)  
 ۴ (۲)  
 $\sqrt{21}$  (۳)  
 ۵ (۴)

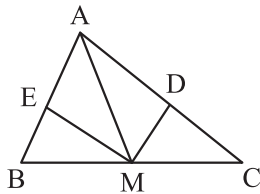
۲۶- تیرک  $AB$  به طول ۴ متر در زمینی افقی چنان قرار دارد که با افق، زاویه  $60^\circ$  می‌سازد. اگر نقطه  $M$  واقع بر سطح زمین به فاصله ۳ متر از پای تیر باشد، نسبت فاصله انتهای بالایی تیرک از نقطه  $M$  به فاصله آن از سطح زمین کدام است؟



$\frac{\sqrt{39}}{6}$  (۲)       $\frac{\sqrt{13}}{2}$  (۱)  
 $\frac{\sqrt{26}}{4}$  (۴)       $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۳)

محل انجام محاسبات

۲۷- در شکل زیر،  $AM$  میانه نظیر ضلع  $BC$  و دو پاره خط  $MD$  و  $ME$  به ترتیب نیمسازهای زوایای  $AMB$  و  $AMC$  هستند. اگر  $AB = 6$ ،  $AC = 8$  و  $BC = 10$  باشد، اندازه  $DE$  کدام است؟



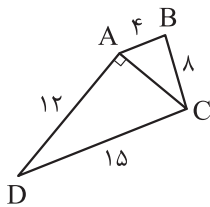
۴ (۱)

۴/۵ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۲۸- در شکل زیر، نیمسازهای زوایای  $B$  و  $D$ ، قطر  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $E$  و  $F$  قطع می‌کنند. اگر  $\hat{CAD} = 90^\circ$  باشد، اندازه  $EF$  کدام است؟



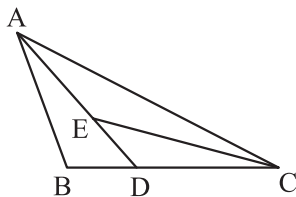
۰/۵ (۱)

۰/۷۵ (۲)

۰/۸ (۳)

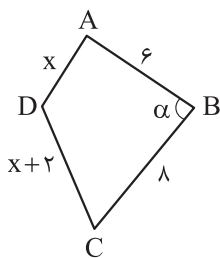
۱ (۴)

۲۹- در شکل زیر،  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است و نیمساز زاویه  $C$ ،  $AD$  را در نقطه  $E$  قطع می‌کند. اگر  $AB = 5$  و  $AC = 9$  و  $BC = 7$  باشد، طول  $CE$  کدام است؟

 $4\sqrt{2}$  (۱) $\sqrt{30}$  (۲) $\sqrt{33}$  (۳)

۶ (۴)

۳۰- در شکل زیر چهارضلعی  $ABCD$ ، یک چهارضلعی محاطی است. اگر  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $x$  برابر کدام است؟



۴ (۱)

 $3\sqrt{2}$  (۲) $2\sqrt{5}$  (۳)

۵ (۴)

محل انجام محاسبات



## آمار و احتمال

۳۱- انحراف معیار داده‌های آماری زیر چه قدر است؟

۱۲, ۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۳

$$\begin{array}{ll} (1) \sqrt{0/8} & (2) 1 \\ (3) \sqrt{1/2} & (4) \sqrt{1/5} \end{array}$$

۳۲- جدول فراوانی متناظر با ۲۰ داده آماری به صورت زیر است. در نمایش این داده‌ها با نمودار جعبه‌ای، دامنه میان چارکی چه قدر است؟

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
فراوانی نسبی	۰/۱۵	x	۰/۱۵	۰/۳

$$(1) 0/5 \quad (2) 1 \quad (3) 1/5 \quad (4) 2$$

۳۳- میانگین دسته اول با ۴ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده a است. واریانس دسته اول چند برابر واریانس دسته دوم است؟

$$(1) \frac{4}{5} \quad (2) \frac{5}{4} \quad (3) \frac{16}{25} \quad (4) \frac{25}{16}$$

۳۴- در داده‌های آماری  $1, 3, 7, 11, \dots, 4n-1$ ، ضریب تغییرات چه قدر است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{2}{2n+1} & (2) \frac{2}{2n+1} \sqrt{n^2-1} \\ (3) \frac{2}{2n+1} \sqrt{\frac{n^2-1}{3}} & (4) \sqrt{\frac{n^2-1}{6}} \end{array}$$

۳۵- انحراف از میانگین ۹ داده به صورت  $a, b, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -4$  و انحراف معیار این داده‌ها برابر  $2\sqrt{5}$  است. بزرگ‌ترین داده چند واحد از کوچک‌ترین داده بزرگ‌تر است؟

$$(1) 11 \quad (2) 13 \quad (3) 15 \quad (4) 17$$

۳۶- در ۸ داده آماری مجموع داده‌ها برابر ۷۲ و مجموع مجذورات تفاضل داده‌ها از ۹ برابر ۲۰۰۰ است. اگر ۴ داده برابر با میانگین را به این داده‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید، چند برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود؟

$$(1) \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (2) \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (3) \frac{\sqrt{6}}{4} \quad (4) \frac{\sqrt{6}}{3}$$

محل انجام محاسبات

۳۷- در ۲۱ داده آماری، میانگین برابر ۱۵ و واریانس برابر ۵۰ است. اگر داده‌های ۱۴، ۱۴، ۱۵، ۱۷ به آن‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات ۲۵ داده حاصل تقریباً کدام است؟

$$\frac{7}{15} \text{ (۱)} \quad \frac{13}{30} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{8}{15} \text{ (۴)}$$

۳۸- در کدام موارد، روش نمونه‌گیری بیان شده مناسب است؟

الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم، اما فهرست مدارس موجود است. ← خوشه‌ای  
 ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است. ← طبقه‌ای  
 پ) شرکت واردکننده‌های خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آن‌ها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند. ← سامانمند

$$\text{الف (۱)} \quad \text{الف - ب (۲)} \quad \text{ب - پ (۳)} \quad \text{الف - ب - پ (۴)}$$

۳۹- در یک مدرسه با ۴۰۰ دانش‌آموز می‌خواهیم به کمک نمونه‌گیری خوشه‌ای یک نمونه انتخاب کنیم تا میانگین قد افراد انتخاب شده را به دست آوریم. اگر تعداد اعضای خوشه‌ها برابر باشد و بخواهیم سه خوشه انتخاب کنیم و احتمال انتخاب هر خوشه ۰/۰۵ باشد، تعداد اعضای نمونه ..... نفر و میانگین به دست آمده ..... است.

$$\text{الف (۱) - ۳۰ - آماره} \quad \text{ب (۲) - ۳۰ - پارامتر} \quad \text{ج (۳) - ۶۰ - آماره} \quad \text{د (۴) - ۶۰ - پارامتر}$$

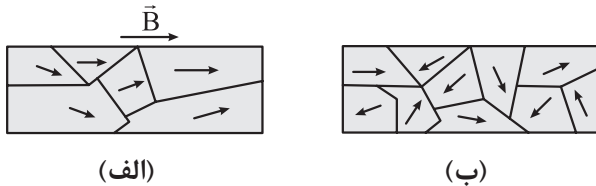
۴۰- تعداد دانش‌آموزهای چهار مدرسه به ترتیب برابر ۳۳، ۴۵، ۵۴ و ۶۰ نفر است. می‌خواهیم با استفاده از نمونه‌گیری طبقه‌ای تعدادی دانش‌آموز از هر مدرسه انتخاب کنیم به طوری که تعداد دانش‌آموزهای انتخاب شده از هر مدرسه متناسب با تعداد کل دانش‌آموزان آن مدرسه باشد. اگر بخواهیم نمونه‌های ما شامل بیش از صد دانش‌آموز باشد، نمونه مورد نظر دست کم چندعضوی است؟

$$\text{الف (۱) - ۱۲۰} \quad \text{ب (۲) - ۱۲۴} \quad \text{ج (۳) - ۱۲۵} \quad \text{د (۴) - ۱۲۸}$$

## فیزیک یازدهم

۴۱- شکل (الف) یک ماده مغناطیسی را درون میدان خارجی  $\vec{B}$  نشان می‌دهد. شکل (ب) همان ماده را پس از حذف

میدان  $\vec{B}$  نشان می‌دهد. نوع این ماده مغناطیسی کدام است؟



(۱) فرومغناطیس نرم (۲) فرومغناطیس سخت (۳) دیامغناطیس (۴) پارامغناطیس

۴۲- اگر یک میله فولادی و یک میله آلومینیمی در میدان مغناطیسی خارجی قوی قرار گیرند، به ترتیب چه نوع

خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کنند؟

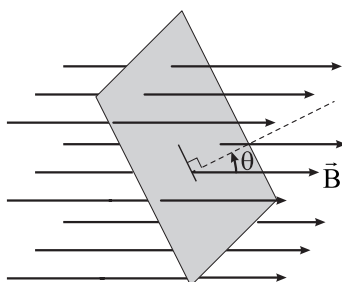
(۱) دائمی قوی، دائمی ضعیف (۲) دائمی قوی، موقت ضعیف

(۳) موقت قوی، موقت ضعیف (۴) موقت قوی، دائمی ضعیف

۴۳- در شکل زیر، میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = 500 \text{ G}$  از درون قاب مستطیل‌شکلی در حال عبور است. اگر شار

مغناطیسی عبوری از قاب برابر با  $2/4 \text{ mWb}$  و  $\theta = 37^\circ$  باشد، مساحت قاب چند سانتی‌متر مربع است؟

$$(\cos 37^\circ = 0.8)$$



(۱) ۶۰

(۲) ۴۰

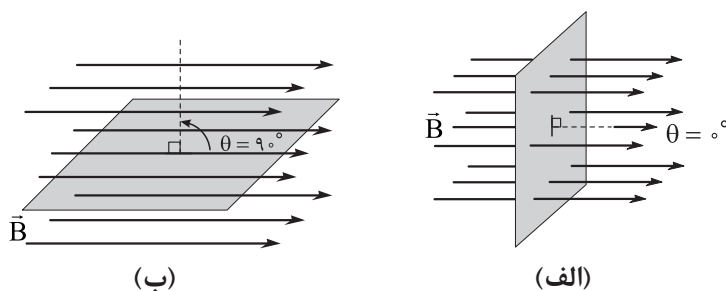
(۳) ۶۰۰

(۴) ۴۰۰

۴۴- مطابق شکل‌های زیر، حلقه رسانای مربع‌شکلی به ضلع  $20 \text{ cm}$  در میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = 300 \text{ G}$  قرار دارد.

اگر در مدت زمان  $\Delta t$  که وضعیت حلقه از حالت (الف) به حالت (ب) می‌رسد، بزرگی آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از

حلقه برابر با  $2 \text{ Wb/s}$  باشد،  $\Delta t$  چند میلی‌ثانیه است؟



(۴) ۶۰

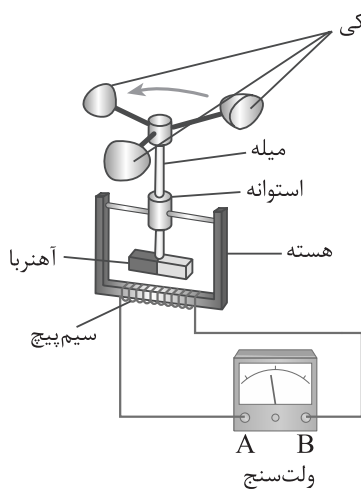
(۳) ۳۰

(۲) ۶

(۱) ۳

محل انجام محاسبات

۴۵- شکل زیر ساختار یک بادسنج را نشان می‌دهد. دربارهٔ این بادسنج چه تعداد از موارد زیر درست است؟



الف) این بادسنج بر اساس قانون القای فاراده کار می‌کند.

ب) با افزایش تندی باد، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

پ) با افزایش تعداد دور سیم پیچ، دقت اندازه‌گیری بادسنج افزایش می‌یابد.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۴۶- شار مغناطیسی گذرنده از پیچهٔ مسطحی در مدت یک دقیقه،  $45 \text{ Wb}$  افزایش می‌یابد. اگر در این مدت بزرگی

نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه برابر با  $3 \text{ V}$  باشد، تعداد دورهای این پیچه کدام است؟

(۴) ۴۰۰

(۳) ۲۰۰

(۲) ۴۰

(۱) ۲۰

۴۷- معادلهٔ شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه که شامل  $50$  حلقه است، بر حسب زمان در SI به صورت  $\Phi = 2t^2 + 1$

است. بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه در بازهٔ زمانی  $t_1 = 1 \text{ s}$  تا  $t_2 = 3 \text{ s}$  چند ولت است؟

(۴) ۵۰۰

(۳) ۴۰۰

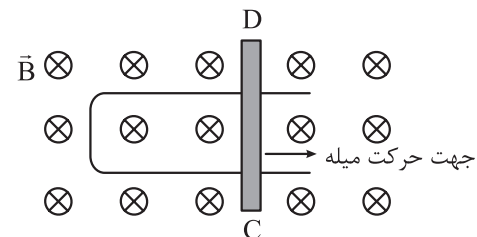
(۲) ۳۰۰

(۱) ۲۰۰

۴۸- شکل زیر رسانای U شکلی با مقاومت الکتریکی ناچیز را در میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = 0.25 \text{ T}$  نشان می‌دهد.

میله با مقاومت الکتریکی  $5 \Omega$  با تندی ثابت در حال حرکت است. اگر جریان القایی در میله برابر با  $2 \text{ mA}$  باشد، آهنگ

افزایش سطح رسانای U شکل چند سانتی‌متر مربع بر ثانیه است؟



(۱) ۴۰۰

(۲) ۴۰

(۳) ۲۰۰

(۴) ۲۰

۴۹- پیچه‌ای شامل ۲۰۰ دور سیم که مساحت هر حلقهٔ آن  $50 \text{ cm}^2$  است، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به

بزرگی  $4 \text{ T}$  قرار دارد. در مدت  $20 \text{ ms}$ ، اندازهٔ میدان مغناطیسی را چند درصد کاهش دهیم تا بزرگی نیروی محرکهٔ

القایی در حلقه برابر با  $16 \text{ V}$  شود؟

(۴) ۸۰

(۳) ۶۰

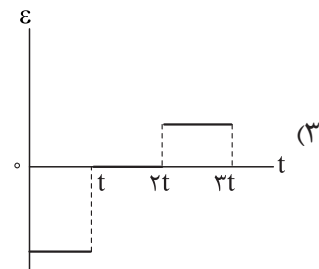
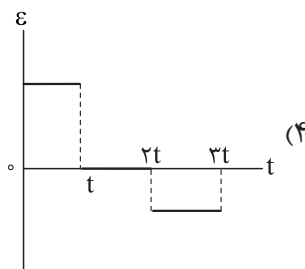
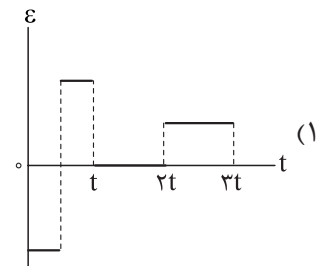
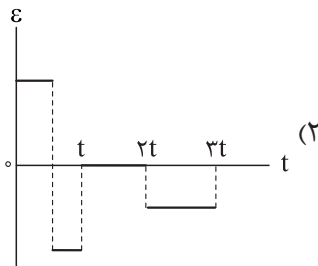
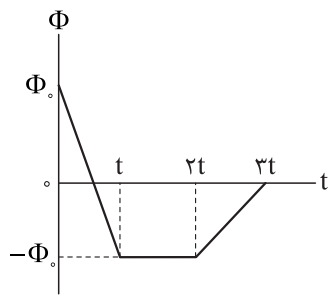
(۲) ۴۰

(۱) ۲۰

محل انجام محاسبات

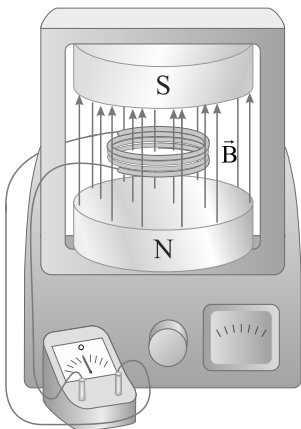
۵۰- نمودار تغییرات شار مغناطیسی در یک مدار بسته بر حسب زمان، به شکل زیر است. نمودار نیروی محرکه القایی

در مدار بر حسب زمان، به کدام شکل است؟



۵۱- پیچهای شامل ۲۰۰ دور که مساحت هر حلقه آن  $50 \text{ cm}^2$  است، مطابق شکل زیر بین قطبهای یک آهنربای الکتریکی قرار گرفته است که میدان مغناطیسی یکنواخت تولید می‌کند. خطهای میدان بر سطح پیچه عمودند. اگر میدان مغناطیسی در بازه زمانی ۴ ms از  $B_1 = 0.18 \text{ T}$  به  $B_2 = 0.22 \text{ T}$  و در خلاف جهت میدان اولیه برسد، بزرگی

نیروی محرکه القایی در پیچه چند ولت است؟



۱۰۰ (۱)

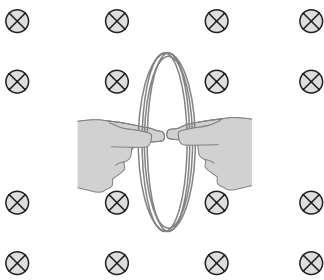
۱۰ (۲)

۲۰۰ (۳)

۲۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۵۲- مطابق شکل زیر، حلقهٔ رسانای منعطفی عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت درون سویی قرار دارد. در بازهٔ زمانی  $\Delta t$ ، مساحت حلقه را ۲۵ درصد افزایش می‌دهیم. در همین مدت، بزرگی میدان مغناطیسی چند درصد و چگونه تغییر



کند تا نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر صفر شود؟

(۱) ۲۵، افزایش یابد.

(۲) ۲۵، کاهش یابد.

(۳) ۲۰، افزایش یابد.

(۴) ۲۰، کاهش یابد.

۵۳- مساحت هر حلقهٔ پیچهای  $30 \text{ cm}^2$  و پیچه متشکل از ۸۰۰ حلقه است. در ابتدا سطح پیچه بر میدان مغناطیسی زمین عمود است. اگر در مدت  $0.2 \text{ s}$  پیچه بچرخد و سطح حلقه‌ها موازی میدان مغناطیسی زمین شود، نیروی محرکه متوسط القایی در آن چند میلی‌ولت است؟ (اندازهٔ میدان زمین را  $5 \text{ G}$  در نظر بگیرید.)

(۲)  $1/2$

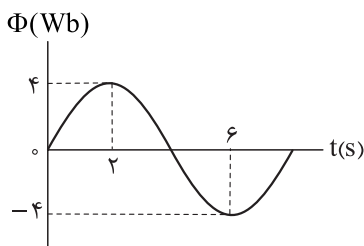
(۱)  $0/6$

(۴) ۱۲

(۳) ۶

۵۴- نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک پیچهٔ مسطح که شامل ۸۰ حلقه است، به شکل زیر است. اگر مقاومت الکتریکی پیچه برابر ۲۰ باشد، تعداد الکترون‌های شارش یافته در پیچه در بازهٔ زمانی  $t_1 = 2 \text{ s}$  تا  $t_2 = 6 \text{ s}$  برابر کدام است؟

( $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ )



(۱)  $10^{19}$

(۲)  $10^{20}$

(۳)  $2 \times 10^{19}$

(۴)  $2 \times 10^{20}$

۵۵- دو پیچهٔ مسطح (۱) و (۲) به شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$  که از سیم‌های مشابهی ساخته شده‌اند، عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارند. اگر این میدان مغناطیسی با آهنگ ثابتی شروع به تغییر کند، بزرگی نیروی محرکه القایی در دو پیچه یکسان خواهد بود. طول سیم سازندهٔ پیچه (۱) چند برابر طول سیم سازندهٔ پیچه (۲) است؟

(۴)  $(\frac{R_2}{R_1})^2$

(۳)  $(\frac{R_1}{R_2})^2$

(۲)  $\frac{R_2}{R_1}$

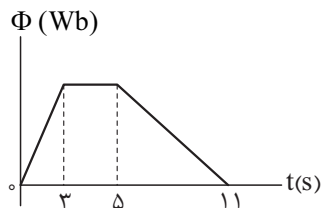
(۱)  $\frac{R_1}{R_2}$

محل انجام محاسبات



۵۶- نمودار تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از حلقه‌ای بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. اندازه جریان القایی در

حلقه در ثانیه دوم، چند برابر اندازه جریان القایی در ثانیه هشتم است؟



(۱) ۲

(۲)  $\frac{1}{2}$ 

(۳) ۴

(۴)  $\frac{1}{4}$ 

۵۷- یکای فرعی آهنگ تغییر شار مغناطیسی، بر حسب یکاهای اصلی در SI کدام است؟

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad (۴)$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3} \quad (۳)$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^3} \quad (۱)$$

۵۸- پیچهای که دارای ۱۰۰ حلقه و قطر هر حلقه آن ۲۰ cm است، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی

۰/۰۱ T قرار دارد. اگر در مدت ۰/۱ s، نیمی از پیچه از میدان خارج شود، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه

چند ولت است؟ ( $\pi = ۳$ )

(۴) ۰/۶

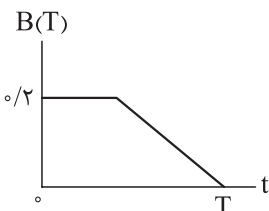
(۳) ۰/۳

(۲) ۱/۵

(۱) ۰/۱۵

۵۹- یک حلقه رسانای مربعی شکل به ضلع ۴ cm و مقاومت الکتریکی  $۰/۲ \Omega$ ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی

قرار دارد. اگر نمودار میدان مغناطیسی بر حسب زمان به شکل زیر باشد، در بازه زمانی صفر تا T، بار الکتریکی



شارش یافته در حلقه، چند میلی کولن است؟

(۱) ۱/۶

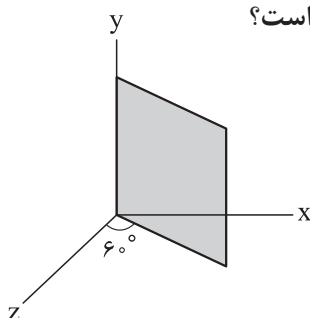
(۲) ۳/۲

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

۶۰- در شکل زیر، قابی با مساحت  $۲۰۰ \text{ cm}^2$  موازی محور y قرار دارد. اگر در این محیط میدان مغناطیسی یکنواخت

$\vec{B} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$  (بر حسب تسلا)، برقرار باشد، شار مغناطیسی گذرنده از این قاب چند وبر است؟



(۱) ۰/۰۳

(۲) ۰/۰۴

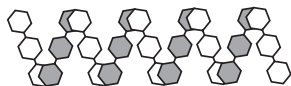
(۳)  $۰/۰۳\sqrt{۳}$ (۴)  $۰/۰۴\sqrt{۳}$ 

محل انجام محاسبات





۶۶- با توجه به ساختار مولکول داده شده که نمایی ساده از رشته‌های یک درشت‌مولکول را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟

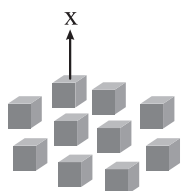


- (۱) نوعی پلیمر طبیعی است که واحدهای تکرارشونده آن، حلقه‌های سیکلوهگزان هستند.
  - (۲) از آن‌جا که مونومرهای سازنده آن با سلولز یکسان است، خواص یکسانی با آن دارد.
  - (۳) نیروی بین مولکولی میان ذره‌های سازنده آن از نفتالن و آب قوی‌تر است.
  - (۴) همانند پلی‌اتن، نوعی هیدروکربن به شمار می‌رود و به دلیل جرم مولی زیاد در دسته درشت‌مولکول‌ها قرار می‌گیرد.
- ۶۷- کدام مطلب زیر در ارتباط با مولکول‌های استیرن، نادرست است؟

- (۱) اگر در ساختار آن به جای گروه  $C_6H_5$  متصل به حلقه بنزن، عامل کربوکسیل قرار دهیم، یک بازدارنده مهم به دست می‌آید.
- (۲) همانند نفتالن، یک ترکیب آروماتیک است.
- (۳) در ساختار آن، هر اتم کربن توسط یک پیوند  $C=C$  به یک اتم کربن دیگر متصل است.

(۴) در یک بازه زمانی معین در واکنش سوختن کامل آن،  $\frac{\bar{R}_{O_2}}{\bar{R}_{H_2O}} = 2/5$  است.

۶۸- با توجه به شکل زیر که واکنش پلیمری شدن را به شکل ساده نمایش می‌دهد، کدام مطلب، نادرست است؟  
( $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$ )



- (۱) اگر فراورده واکنش، پلی‌اتن باشد، شماره‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهنده گرما و فشار و حالت فیزیکی جامد هستند.
  - (۲) اگر مولکول‌های X، گاز عمل‌آورنده در کشاورزی و میانگین جرم مولی فراورده برابر با  $14000 g.mol^{-1}$  باشد، عدد n برابر ۵۰۰ است.
  - (۳) اگر فراورده واکنش پلی‌اتن باشد، مولکول‌های X دارای ۶ پیوند اشتراکی هستند.
  - (۴) هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند  $C=C$  داشته باشد، می‌تواند در واکنش بالا به جای X قرار بگیرد.
- ۶۹- درستی یا نادرستی کدام گزینه، با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) در ساختار پلی‌اتن شفاف برخلاف پلی‌اتن کدر، برخی از اتم‌های کربن به بیش از دو اتم کربن دیگر متصل هستند.
- (۲) سطح تماس مولکول‌های پلی‌اتن سنگین با یکدیگر، بیشتر از سطح تماس مولکول‌های پلی‌اتن سبک است.
- (۳) در جرم‌های برابر، پلی‌اتن شاخه‌دار نسبت به پلی‌اتن بدون شاخه، حجم کم‌تری اشغال می‌کند و چگالی هر دو کم‌تر از چگالی آب است.
- (۴) استحکام پلی‌اتن سنگین از پلی‌اتن سبک بیشتر است، اما نوع نیروهای بین مولکولی آن‌ها یکسان است.

محل انجام محاسبات

۷۰- با توجه به ساختار و ویژگی‌های تفلون، کدام موارد زیر درست است؟ ( $C = 12, F = 19 : g.mol^{-1}$ )

(الف) با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد و در حلال‌های آلی حل می‌شود.

(ب) نقطه ذوب بالایی دارد و از آن برای تولید نخ‌دندان نیز استفاده می‌شود.

(پ) اگر جرم مولی آن  $10^6$  گرم بر مول باشد، شمار واحد تکرارشونده آن  $10^4$  خواهد بود.

(ت) پلیمر تفلون را می‌توان از گاز تترافلوئورو اتان که نوعی سردکننده است، به دست آورد.

(۱) الف و پ (۲) الف و ت

(۳) ب و ت (۴) ب و پ

۷۱- اگر تعداد پیوندهای سه‌گانه در ساختار یک نمونه پلی‌سیانو اتن،  $\frac{2}{3}$  برابر تعداد پیوندهای دوگانه در ساختار یک

نمونه پلی‌استیرن باشد، مجموع جرم اتم‌های کربن در پلی‌سیانو اتن، چند برابر مجموع جرم این اتم‌ها در پلی‌استیرن

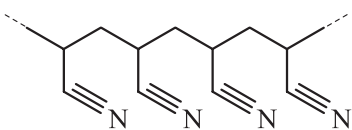
است؟ ( $H = 1, C = 12, N = 14 : g.mol^{-1}$ )

(۱) ۷۵ / ۰ (۲) ۵ / ۰

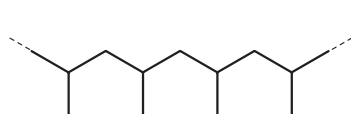
(۳) ۲ (۴)  $\frac{4}{3}$

۷۲- با توجه به ساختارهای زیر که هر کدام مربوط به یک پلیمر هستند، کدام مورد، نادرست است؟

( $H = 1, C = 12, N = 14 : g.mol^{-1}$ )



پلیمر (۱)



پلیمر (۲)

(۱) شمار پیوندهای C-H در ساختار

مونومر پلیمر (۲)، دو برابر شمار این

پیوندها در ساختار مونومر پلیمر (۱) است.

(۲) به دلیل سنگین‌تر بودن مونومر سازنده پلیمر (۲) نسبت به اتن، جرم مولی این پلیمر به یقین از پلی‌اتن بیشتر است.

(۳) پلیمر (۱) در تهیه پتو کاربرد داشته و در ساختار مونومر سازنده آن، پیوندهای یگانه، دوگانه و سه‌گانه وجود دارد.

(۴) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار مونومر سازنده این دو پلیمر، با هم برابر است.

۷۳- اگر در اثر بسپارش ۱۵ مول از ترکیبی با ساختار  $R_2C=CH_2$  با بازده ۸۰ درصد،  $1008$  گرم پلیمر به دست آمده

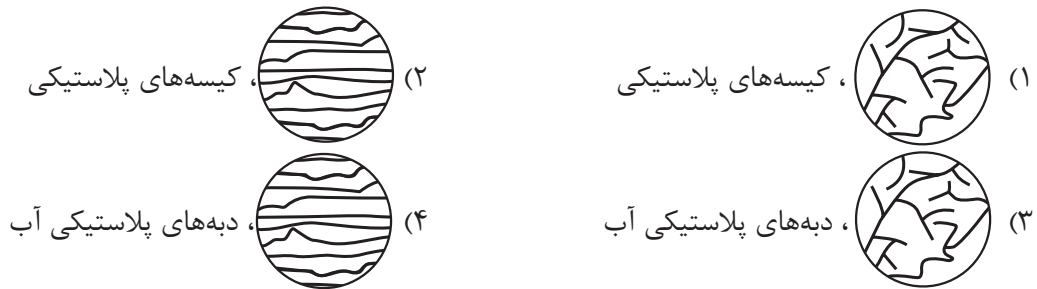
باشد، R کدام است؟

(۱)  $CH_3$  (۲)  $C_3H_7$

(۳)  $C_4H_9$  (۴)  $C_6H_5$

محل انجام محاسبات

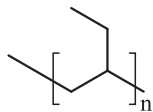
۷۴- الگوی زنجیرهای پلی اتن سنگین به کدام صورت بوده و این پلیمر در کدام مورد کاربرد دارد؟



۷۵- مولکول‌هایی از پلی‌وینیل کلرید و تفلون با جرم مولی برابر در اختیار داریم. تعداد واحد تکرارشونده در مولکول پلی‌وینیل کلرید چند برابر این تعداد در مولکول تفلون بوده و درصد جرمی کربن در پلی‌وینیل کلرید، چند برابر درصد جرمی کربن در گاز اتان است؟ ( $H = 1, C = 12, F = 19, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$ )

- (۱)  $1/2 - 1/72$       (۲)  $1/2 - 1/48$
- (۳)  $1/6 - 1/72$       (۴)  $1/6 - 1/48$

۷۶- کدام موارد زیر در ارتباط با پلیمر مقابل، درست است؟ ( $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$ )



الف) مونومر آن، دارای یک شاخه فرعی بوده و نام آن، متیل پروپن است.

ب) در ساختار مونومر آن، دو گروه  $CH_3$  وجود دارد.

پ) برای سوختن کامل ۱۴ گرم از مونومر سازنده این پلیمر، ۶۰ گرم گاز اکسیژن لازم است.

ت) فراورده حاصل از واکنش مونومر سازنده این پلیمر با مقدار کافی گاز هیدروژن، به عنوان سوخت فندک استفاده می‌شود.

- (۱) الف و پ      (۲) ب و پ
- (۳) ب و ت      (۴) الف و ت

۷۷- در یک واکنش فرضی، مقدار معینی استیرن با ۵ گرم گاز هیدروژن در شرایط مناسب به طور کامل واکنش داده و یک ترکیب سیر شده حاصل می‌شود. اگر همین مقدار استیرن را در شرایط مناسب برای واکنش پلیمری شدن قرار دهیم، تعداد اتم‌های موجود در پلیمر حاصل، با تعداد اتم‌های هیدروژن موجود در چند گرم پلی‌پروپن برابر خواهد بود؟

( $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$ )

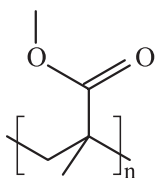
- (۱) ۳۰      (۲) ۳۵
- (۳) ۶۰      (۴) ۷۰

۷۸- ترکیب ..... برخلاف ترکیب ..... می‌تواند نقش مونومر را در واکنش پلیمری شدن داشته باشد. (همه ترکیب‌ها را زنجیری در نظر بگیرید.)



محل انجام محاسبات

۷۹- اگر متیل متاکریلات در واکنش بسپارش مانند پلیمری شدن اتن شرکت کند و ساختار پلیمر حاصل به صورت زیر باشد، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در مولکول متیل متاکریلات کدام است؟



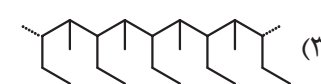
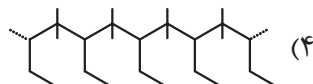
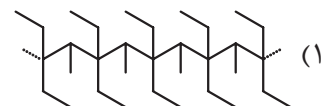
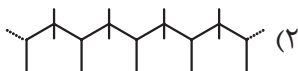
$$\frac{8}{5} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{7}{5} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

۸۰- اگر بر اثر سوختن کامل ۱/۵ مول از پلیمر X در شرایط استاندارد، ۴/۴۷۰ متر مکعب گاز کربن دی‌اکسید تولید شود و شمار واحدهای تکرارشونده در هر مولکول از این پلیمر برابر ۲۰۰۰ باشد، پلیمر X کدام ساختار را می‌تواند داشته باشد؟



پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه  
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛  
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید  
از طریق آیدی @Kheilisabz\_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.



# آزمون‌های تشریحی خیلی سبز

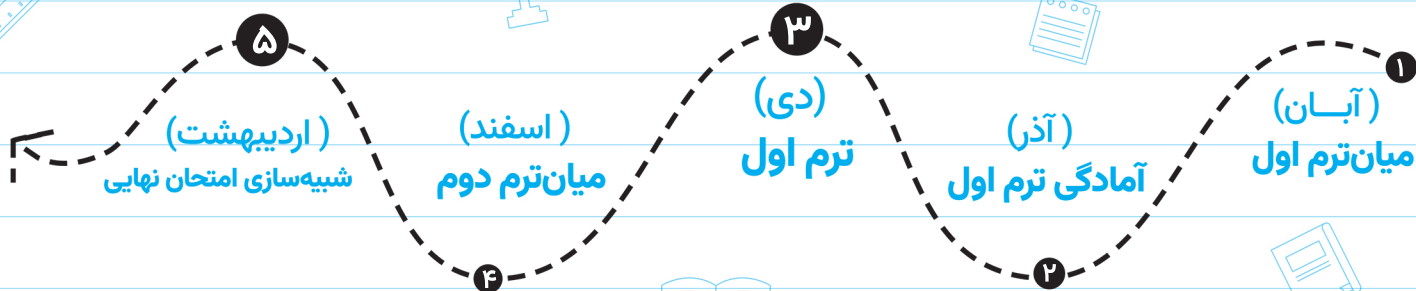
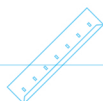
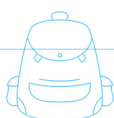


## آزمون

### ۵ مرحله در طول سال

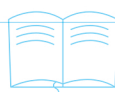
## شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخ‌برگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



## پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال



## تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض



## کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی



# باسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله چهاردهم

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۱۴۰۵/اردیبهشت/۰۴

رشته ریاضی

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - محمد خان گلدی - علی شهبازی - محمد گودرزی - سروش موئینی - محسن علی نجاری
هندسه	امیرحسین ابومحجوب - حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	پویا رستگاری - سروش عبادی

نام درس	مستعمل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محسن علی نجاری	محسن علی نجاری	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده محمد گودرزی	سهیل تقی زاده منصور زرکش حسین صنمی
هندسه	امیرحسین ابومحجوب	امیرحسین ابومحجوب	امیرحسین ابومحجوب	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	علیرضا کاظمی بقا	امیرحسین ابومحجوب نیلوفر مهدوی	ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	مریم گلی حسنلو	سعید محبی هادی نجفی	آیدین طهماسقلی زاده پوریا علاقه مند امیر محمودی انزابی سعید محبی، محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللهی	سروش عبادی	سروش عبادی صدرا عبادی	محمد مهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	محمدرضا بیاتلو محمد قهرمانی نژاد آرمین عظیمی مهدیس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانیور



# آزمون آزمائشی خلی سبز

بیتا ابراہیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی

تیم اجرایی و تألیف آزمون

الناز علی یاری زاده

سرپرست تولید

نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - ہدیہ خسروی  
زہرا صفری - الہہ صفری - فاطمہ علی اکبری  
محیا غنی فرد - زہرا فرہادی مہر - نادرہ ناز آوری  
ساعده نمازی

ویراستاران فنی

ندا فخاری  
سارا گنجی آزادپور

رسام

صدف امام - مریم حسین زاده  
سپیدہ سخائی - الہام سہرابی - طاہرہ صادق نژاد  
مائدہ صبری - نیلوفر فرخجستہ - فاطمہ قیاسوند  
مہدیہ گل پور - دریا لطفی

صفحہ آرائی



۱ حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+x^2}{1-x^3}$  کدام است؟

-۱ (۴)

صفر (۳)

-۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

Hint  $x = -1$  رو جای گذاری کن.

درس Box

توابعی هستند که برای محاسبه حد آن‌ها در یک نقطه خاص، کافی است مقدار آن‌ها را حساب کنیم؛ این توابع از انواع زیر هستند: چندجمله‌ای - قدرمطلق - گویا - گنگ - نمایی - لگاریتمی - مثلثاتی  
یعنی اگر نوع تابع  $f$  از یکی از توابع بالا باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

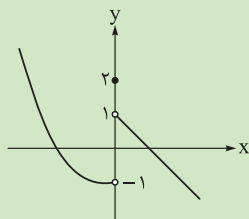
تابع  $f$ ، با ضابطه  $f(x) = \frac{x+x^2}{1-x^3}$  گویا است، طبق درس باکس کافی است جای گذاری کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+x^2}{1-x^3} = \frac{-1+(1)}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی

۲ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] + f(0) - 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  کدام است؟ [ ] نماد

جزء صحیح است.



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

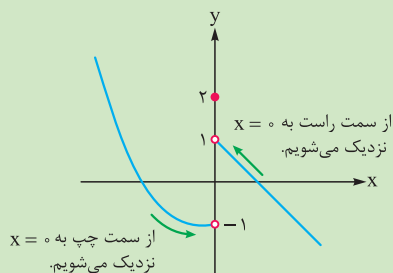
گام اول: مطابق نمودار داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$



گام دوم: اما می‌بینیم که وقتی  $x \rightarrow 0^+$ ، مقادیر تابع  $f$  از ۱ کم‌تر است و عملاً در یک همسایگی راست  $x = 0$ ، تابع  $f$  با تابع ثابت  $y = 0$  مساوی است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = 0$$

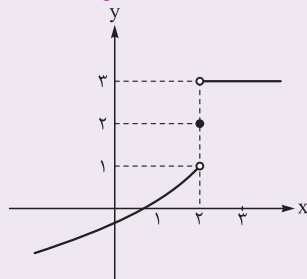
خواسته سؤال برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] + f(0) - 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 2 - 2(-1) = 4$$

با توجه به نمودار تابع  $f(x)$  مقدار عبارت،  $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] + f(2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  را به دست آورید. [ ] نماد

(سؤال ۱۶- امتحان نوبتی فرورد ۱۴۰۳)

جزء صحیح است.



امتحان  
نهایی

مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin |x|}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|}$  کدام است؟ ۳

۲ (۴)

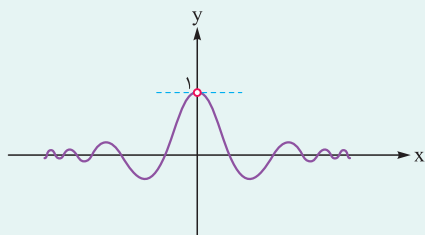
-۱ (۳)

صفر (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  نمودار این تابع به صورت زیر است:دامنه این تابع  $\mathbb{R} - \{0\}$  است.این تابع در  $x = 0$  حد دارد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

در یک همسایگی چپ  $x = 0$ ،  $x$  منفی است و  $|x|$  با  $-x$  برابر است:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin |x|}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴ اگر  $f(x) = [x] - [-x]$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

Hint از تساوی  $[x] + [-x] = -1$  توی اعداد غیر صحیح استفاده کن و به جای  $[-x]$  عبارت  $-1 - [x]$  رو بذار.

ویژگی مهم جزء صحیح:

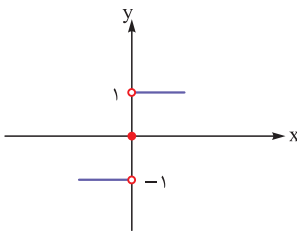
$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: سعی می‌کنیم، ضابطه تابع  $f$  را ساده‌تر بنویسیم:

$$\xrightarrow{\text{نکته}} [-x] = \begin{cases} -[x] & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x] & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2[x] & ; x \in \mathbb{Z} \\ 2[x] + 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع  $f$  را در اطراف  $x = 0$  رسم می‌کنیم:



دقت کنید که اگر  $0 < x < 1$  باشد،  $[x] = 0$  و اگر  $-1 < x < 0$  باشد،  $[x] = -1$  است.

گام سوم: خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 - 1 = -2$$

یه جور دیگه

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] - [-x]) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] - \lim_{t \rightarrow 0^+} [t] = -1 - 0 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] - [-x]) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] - \lim_{t \rightarrow 0^-} [t] = 0 - (-1) = 1 \end{cases}$$

صفر راست      صفر چپ

تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a^2x - bx + a & ; x \geq 1 \\ b^2x^2 - x[-x] & ; x < 1 \end{cases}$  تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a^2x - bx + a & ; x \geq 1 \\ b^2x^2 - x[-x] & ; x < 1 \end{cases}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل

۵

$ab$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $-\frac{1}{4}$       ۳) ۱      ۴)  $-1$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

برای حد چپ از ضابطه پایین و برای حد راست از ضابطه بالا استفاده کن.

گام اول: ابتدا حدهای چپ و راست تابع  $f$  را در  $x = 1$  به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (b^2x^2 - x[-x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (b^2x^2 + x) = b^2 + 1$$

برابر ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a^2x - bx + a) = a^2 - b + a$$

گام دوم: حالا رابطه مفروض صورت سؤال را بین  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  می‌سازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 + 1 + a^2 - b + a = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 + a + b^2 - b = -\frac{1}{4}$$

گام سوم: به طرفین تساوی  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  را اضافه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 + a + \frac{1}{4}}_{\text{مربع کامل}} + \underbrace{b^2 - b + \frac{1}{4}}_{\text{مربع کامل}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

مجموع دو عبارت همواره نامنفی، صفر شده است، پس هر دو عبارت برابر صفراند:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ b - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} ab = -\frac{1}{4}$$

۶ اگر  $\lim_{x \rightarrow a^-} [x] = 3a + 1$  و  $a \notin \mathbb{Z}$ ، حاصل  $[a]$  کدام است؟ ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است).

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته

• اگر  $x_0 \notin \mathbb{Z}$ ، حد (هم حد چپ و هم حد راست) تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = [x]$  در  $x = x_0$  برابر  $f(x_0) = [x_0]$  است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = x_0 - 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = x_0 \end{cases}$$

• اگر  $x_0 \in \mathbb{Z}$ ، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق نکته داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} [x] = [a]$$

و طبق فرض، تساوی  $[a] = 3a + 1$  را داریم.گام دوم: می‌دانیم که اگر  $a \notin \mathbb{Z}$ ، نامساوی  $a - 1 < [a] < a$  برقرار است. حالا به جای  $[a]$ ،  $3a + 1$  می‌گذاریم:

$$\Rightarrow a - 1 < 3a + 1 < a \Rightarrow \begin{cases} a - 1 < 3a + 1 \Rightarrow a > -1 \\ 3a + 1 < a \Rightarrow a < -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < a < -\frac{1}{2}$$

در نتیجه  $[a] = -1$  است.تیزبازی  $[a]$  صحیح است؛ بنابراین  $3a + 1$  هم باید صحیح باشد:

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 3a + 1 = k \Rightarrow a = \frac{k-1}{3}$$

با امتحان کردن مقادیر دلخواه  $k$ ، مقدار  $a$  را به دست می‌آوریم و فرض سؤال را تست می‌کنیم:

$$k = 1 \Rightarrow a = 0 \in \mathbb{Z} \quad \times$$

$$k = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = 0 \neq 3a + 1 \quad \times$$

$$k = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = -1 \neq 3a + 1 \quad \times$$

$$k = -1 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = -1 = 3a + 1 \quad \checkmark$$

پس  $a = -\frac{2}{3}$  و در نتیجه  $[a] = -1$  است.

تابع  $f$  با ضابطه  $\gamma$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & ; x < 2 \\ \frac{x^2 - [-x]}{|x|} & ; x > 2 \end{cases}$$

در  $x = 2$  حد دارد. مقدار  $a$  کدام است؟  $[\ ]$  نماد جزء

صحیح است.

۵ (۴)

۳ (۳)

 $\frac{11}{2}$  (۲) $\frac{5}{2}$  (۱)

## پاسخ: گزینه ۱

## درس Box

تابع  $f$  در  $x = a$  حد دارد، اگر و فقط اگر حدهای چپ و راست تابع  $f$  در این نقطه موجود و برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \end{cases} \xrightarrow{L_1 = L_2 = L \in \mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تابع  $f$  در  $x = a$  حد ندارد، اگر:

(۱) ابتدا یا انتهای دامنه باشد.

(۲) تابع در  $x = a$  پرش یا گسستگی داشته باشد.(۳) ریشه عبارت مخرج در یک تابع کسری  $f$  (ساده‌ترین حالت ضابطه‌اش) باشد.برای بررسی وجود حد تابع  $f$  در  $x = a$ ، تعریف و یا مقدار  $f(a)$  اهمیتی ندارد.

## نکته

## پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا حدهای چپ و راست تابع  $f$  را در  $x = 2$  به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - a) = 6 - a$$

برابر ۳ - است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - [-x]}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - (-3)}{x} = \frac{7}{2}$$

$x$  مثبت است.

گام دوم: حالا باید حدهای چپ و راست را برابر قرار دهیم تا تابع  $f$  در  $x = 2$  حد داشته باشد:

$$6 - a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

مقدار  $b$  را طوری تعیین کنید که تابع زیر در  $x = -1$  حد داشته باشد. (مسئله ۱ - تمرین ۷ صفحه ۱۴۰ کتاب درسی)

## کتاب درسی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2[3x] + a[2x]$  در  $x = 1$  حد دارد. مقدار  $a$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

-۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۱

مشخصه که باید چی کار کنی! حدهای چپ و راست رو به دست بیار و برابر قرار بده.

Hint

برای محاسبه حد تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = [f(x)]$  در  $x = x_0$ ، ابتدا حد تابع  $f$  را در  $x = x_0$  به دست می‌آوریم؛ فرض می‌کنیم این حد برابر  $L$  باشد.

حالا اگر  $L$  عددی غیرصحیح باشد، حد تابع  $g$  برابر  $[L]$  است، اما اگر عددی صحیح باشد، حاصل حد  $L$  یا  $L-1$  می‌شود؛ بدین صورت که اگر تابع  $f$  از مقادیر بیشتر از  $L$  (اصطلاحاً  $L^+$ ) به آن نزدیک شود. حد تابع  $g$  برابر  $L$  و اگر تابع  $f$  از مقادیر کمتر از  $L$  (اصطلاحاً  $L^-$ ) به آن نزدیک شود، حد تابع  $g$ ،  $L-1$  می‌شود.

گام اول: بدیهی است که ابتدا باید حدهای چپ و راست تابع  $f$  را در  $x = 1$  حساب کنیم:

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2[3x] + a[2x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2[3^-] + a[2^-]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + a) = 2 + a$$

**توجه!** نوشتار  $[3^-]$  و  $[2^-]$  نادرست است، اما در حوزه دبیرستان و کنکور پذیرفته شده و مصطلح شده است. معنای این دو عبارت آن است که عبارت‌های داخل براکت از مقادیر کمتر از ۳ و ۲ به آن‌ها نزدیک می‌شوند:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [3x] = \lim_{t \rightarrow 3^-} [t] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [t] = 1$$

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2[3x] + a[2x]) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2[3^+] + a[2^+]) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 2a) = 3 + 2a$$

گام دوم: حالا حدهای چپ و راست را برابر قرار می‌دهیم:

$$2 + a = 3 + 2a \Rightarrow a = -1$$

کرتس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۹ حاصل  $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} [3 \tan x - 1]$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱  
(۲) -۵  
(۳) -۴  
(۴) وجود ندارد.

### پاسخ: گزینه ۲

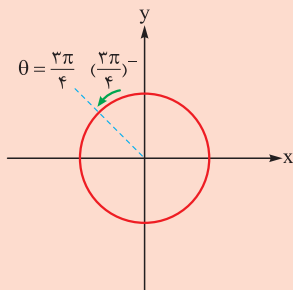
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا هر عبارت داخل براکت را وقتی  $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-$  حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} (3 \tan x - 1) = 3 \tan \frac{3\pi}{4} - 1 = 3(-1) - 1 = -4$$

دقت کنید که:

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

گام دوم: اما برای این که بفهمیم عبارت مورد نظر از مقادیر کم‌تر از -۴ به آن نزدیک می‌شود یا مقادیر بیشتر، از دایره مثلثاتی کمک می‌گیریم:



وقتی  $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-$ ،  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < 1$  و  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 0$  است؛ بنابراین:

$$\frac{\sin x > |\cos x|}{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < -1}$$

گام سوم: یعنی وقتی  $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-$ ،  $\tan x$  از مقادیر کم‌تر از -۱ به آن میل می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم نامساوی  $\tan x < -1$  را معادل بگیریم:

$$\tan x < -1 \Rightarrow 3 \tan x - 1 < -4$$

و در نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} [3 \tan x - 1] = [(-4)^-] = -5$$

(سؤال ۱۳۹ کنکور تهری ۱۴۰۰)

مقدار  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} [2 \sin x - 1]$  ، کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱  
(۲) صفر  
(۳) ۱  
(۴) وجود ندارد.

۱۰ فرض کنید حد تابع  $f$  در  $x = a$ ، عددی مثبت و برابر  $L$  است. اگر  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \sqrt[3]{f(x)}) = 10$  باشد، حاصل

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{\Delta f(x) + 7}$$

کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

### پاسخ: گزینه ۲

**Hint** به جای هر  $f(x)$ ،  $L$  بذار و به معادله گنگ حل کن.

**کرتس Box**

جبر توابع و محاسبه حد:

اگر دو تابع  $f$  و  $g$  در  $x = x_0$  به ترتیب حدهایی برابر  $L_1$  و  $L_2$  داشته باشند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \times L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} ; L_2 \neq 0$$

یعنی هر رابطه جبری که بین توابع برقرار باشد، همین رابطه بین حدهای آنها نیز برقرار است. این قضایا در حدهای یک طرفه نیز برقرار است.

گام اول: ابتدا طبق درس باکس عمل می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \sqrt[3]{f(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = 10$$

$$\xrightarrow{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L} L + \sqrt[3]{L} = 10 \Rightarrow L + \sqrt[3]{L} - 10 = 0$$

گام دوم: جواب بدیهی معادله بالا  $L = 4$  است:

$$4 + \sqrt[3]{4} = 4 + 6 = 10 \checkmark$$

اما می‌توانیم این جواب را به صورت زیر نیز به دست آوریم:

$$(\sqrt[3]{L})^3 + \sqrt[3]{L} - 10 = 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{L} + 5)(\sqrt[3]{L} - 2) = 0 \xrightarrow{\sqrt[3]{L} > 0} \sqrt[3]{L} - 2 = 0 \Rightarrow L = 4$$

گام سوم: حال خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{\Delta f(x) + 7} = \sqrt[3]{\Delta(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) + 7} = \sqrt[3]{\Delta L + 7} = \sqrt[3]{27} = 3$$

۱۱ اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+8} & ; x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} & ; x < 0 \end{cases}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(-3x^2 + 2x + 1)$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۱  
(۳) صفر  
(۴) وجود ندارد.

## پاسخ: گزینه ۱

## درس Box

حد تابع fog: برای محاسبه حد این تابع در  $x = x_0$ ، در ابتدا باید حد تابع g را در  $x = x_0$  به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fog)(x) = \lim_{x \rightarrow L} f(x)$$

و سپس حد تابع f را در  $x = L$  حساب کنیم:

حالا حالت خاص زیر را در نظر بگیرید:

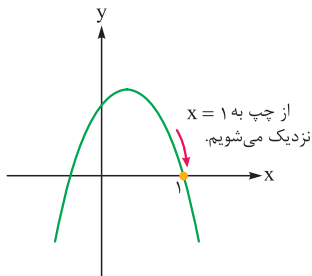
$$f(x) = \begin{cases} u(x) & ; x < L \\ v(x) & ; x > L \end{cases}$$

در این صورت برای محاسبه حد تابع fog در  $x = x_0$ ، لازم است حتماً بررسی کنیم که تابع g از مقادیر کم‌تر از L به آن میل می‌کند یا از مقادیر بیشتر.

گام اول: ابتدا حد عبارت داخل پرانتز را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{g(x) = -3x^2 + 2x + 1} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -3 + 2 + 1 = 0$$

گام دوم: اما چون ضابطه تابع f برای  $x < 0$  و  $x \geq 0$  متفاوت است، ما باید بررسی کنیم که تابع g از مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند یا از مقادیر منفی؛ برای این کار نمودار تابع درجه دوم g را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است در یک همسایگی چپ  $x = 1$ ، تابع g مثبت است.

گام سوم: بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x+8} = 2$$

## پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۲ اگر بازه  $(2x-1, x+2)$  یک همسایگی  $1/5$  باشد، حدود  $x$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{4} < x < 3 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} < x < 3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

اگر بازه  $(a, b)$  یک همسایگی  $x = x_0$  باشد، نامساوی  $a < x_0 < b$  برقرار است.

درس Box

باید نامساوی  $2x-1 < 1/5 < x+2$  را حل کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1 < \frac{1}{5} \Rightarrow x < \frac{3}{10} \\ x+2 > \frac{1}{5} \Rightarrow x > -\frac{9}{10} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$$

اگر بازه  $(x-1, 2x+3)$  یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر  $x$  را به دست آورید.

درس کتاب

(مسئله ۱) - تمرین ۷ صفحه ۱۲۲ کتاب درسی

۱۳ اگر مجموعه  $\{-2\} - (a^2 - 3a, -2a + 1)$  یک همسایگی محذوف  $-2$  باشد، حدود  $a$  کدام است؟

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (2) \qquad 1 < a < 2 \quad (1)$$

$$1 < a < \frac{3}{2} \quad (4) \qquad 1 < a < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint   $-2$  باید عضو اون بازه باشه.

پاسخ خیلی تشریحی  گام اول: همسایگی محذوف  $-2$  داده شده است، این یعنی  $-2$  عضو بازه  $(a^2 - 3a, -2a + 1)$  بوده است که آن را حذف کرده ایم:

$$\Rightarrow a^2 - 3a < -2 < -2a + 1$$

گام دوم: نامساوی را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 3a < -2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) < 0 \Rightarrow 1 < a < 2 \\ -2 < -2a + 1 \Rightarrow 2a < 3 \Rightarrow a < \frac{3}{2} \end{cases}$$

از اشتراک محدوده‌های به دست آمده، حدود  $a$  به دست می‌آید:

$$1 < a < \frac{3}{2}$$

یک همسایگی راست کدام نقطه، در دامنه تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{3 - [2x]}$  قرار ندارد؟ ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است).

انتهای دامنه تابع $f$	۲ (۲)	۱ (۱)
	$\frac{3}{2}$ (۴)	$\sqrt{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

دامنه تابع رو حساب کن.

Hint

نامساوی‌های جزء صحیح:

نکته

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 < [x] \leq x \\ 0 \leq x - [x] < 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} [x] \geq k \Rightarrow x \geq k \\ [x] \leq k \Rightarrow x < k + 1 \end{cases}$$

گام اول: ابتدا دامنه تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$3 - [2x] \geq 0 \Rightarrow [2x] \leq 3 \xrightarrow{\text{نکته}} 2x < 4 \Rightarrow x < 2$$

گام دوم: مشخص است که همسایگی راست  $x = 2$  عضو دامنه تابع نیست.

مقدار عددی  $\sin 22/5^\circ$  کدام است؟ **۱۵**

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

**Hint** از  $\cos 45^\circ$  و فرمول‌های طلایی استفاده کن.

اتحادهای مثلثاتی مجموع و تفاضل کمان:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta) \\ 2 \cos^2 \theta - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

 از اتحاد  $\cos 2\theta$  دو رابطه بسیار مهم و کاربردی استخراج می‌شود که به فرمول‌های طلایی معروف‌اند.

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

	$15^\circ$	$22/5^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$67/5^\circ$	$75^\circ$
<b>sin</b>	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
<b>cos</b>	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$
<b>tan</b>	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$2+\sqrt{3}$
<b>cot</b>	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$

نکته

 پاسخ خیلی تشریحی ✓ از اتحاد  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$  استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\sin 22/5^\circ > 0} \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

(سؤال ۱۴ - قسمت ب) - امتحان نوبتی فردا ۱۴۰۳

 $\cos(15^\circ)$ 

مقدار عددی هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

 امتحان  
 نهایی

۱۶ اگر  $\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \sqrt{5}$  باشد،  $\sin 2\alpha$  کدام است؟ ( $\alpha$  حاده است).

برابر  $\cos \alpha$  است.

$$\frac{2}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

گام دوم: حالا طبق اتحاد  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  داریم:

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

گام سوم: در نتیجه داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$$

## ریاضیات

۱۷ اگر  $\alpha$  حاده و  $\sin(\alpha + 22^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}$  باشد، مقدار  $\cos(23^\circ - \alpha)$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint مجموع  $22^\circ + \alpha$  و  $23^\circ - \alpha$  برابر  $45^\circ$  می‌شود.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) = \frac{\cos \theta \mp \sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) = \frac{\cos \theta \pm \sin \theta}{\sqrt{2}}$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: با توجه به این که  $22^\circ + \alpha$  و  $23^\circ - \alpha$  مجموع  $45^\circ$  می‌سازند، داریم:

$$\cos(23^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ - (\alpha + 22^\circ)) \xrightarrow{\text{نکته}} \cos(23^\circ - \alpha) = \frac{\cos(\alpha + 22^\circ) + \sin(\alpha + 22^\circ)}{\sqrt{2}}$$

گام دوم: باید  $\cos(\alpha + 22^\circ)$  را حساب کنیم:

$$\frac{\sin^2(\alpha + 22^\circ) + \cos^2(\alpha + 22^\circ) = 1}{\rightarrow} \frac{2}{16} + \cos^2(\alpha + 22^\circ) = 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha + 22^\circ) = \frac{14}{16}$$

$$\xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \cos(\alpha + 22^\circ) = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

تیزبازی چه طوری فهمیدیم که  $\cos(\alpha + 22^\circ)$  نیز مثبت است؟! ابتدا  $\cos(2\alpha + 44^\circ)$  را حساب می‌کنیم:

$$\cos(2\alpha + 44^\circ) = 1 - 2\sin^2(\alpha + 22^\circ) = \frac{2}{4} > 0$$

پس  $2\alpha + 44^\circ$  و در نتیجه  $\alpha + 22^\circ$  نیز حاده است.

گام سوم: طبق رابطه گام اول داریم:

$$\cos(23^\circ - \alpha) = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7} + 1)}{\sqrt{2} \times 4} = \frac{\sqrt{7} + 1}{4}$$

کنکور اگر  $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$  باشد، مقدار  $\cot(18^\circ - \alpha)$  کدام است؟ (سؤال ۱۳ کنکور ۱۴۰۴ ریاضی - نوبت دوم)

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (۲)$$

$$5\sqrt{3} \quad (۱)$$

دقت کنید که این دو سؤال صرفاً در ظاهر شباهت دارند نه در محتوا؛ زیرا در سؤال کنکور  $\cot(3^\circ - (\alpha + 12^\circ))$  را داریم که برای حل آن به اتحاد تانژانت سال دوازدهم نیاز داریم.

اگر  $\sin x + \cos x = 1/2$  باشد، حاصل عبارت  $\sin^3 x + \cos^3 x$  کدام است؟

۰/۱۴۴ (۴)

۰/۶۴۸ (۳)

۰/۹۳۶ (۲)

۱/۱۷۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا عبارت مورد نظر را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم تا ببینیم به چه چیزهایی نیاز داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$$

برابر ۱ است.

فرض مسئله  $\rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = 1/2(1 - \sin x \cos x)$

گام دوم: پس فقط باید  $\sin x \cos x$  را حساب کنیم. برای این کار طرفین تساوی فرض سؤال را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1/4 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = 1/4 \Rightarrow \sin x \cos x = 0/22$$

گام سوم: در نهایت داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1/2 \times 0/22 = 0/936$$

۱۹ اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha - \sin \alpha}$  کدام است؟

$$\frac{29}{8} \quad (4)$$

$$\frac{25}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{25}{8} \quad (2)$$

$$-\frac{29}{8} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint از اتحادهای درس باکس  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  رو به دست بیار.

اتحادهای مهم:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق اتحادهای درس باکس داریم:

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

بنابراین  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  است.

گام دوم: حالا با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده، حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\tan \alpha - \sin \alpha} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{4}{3} - \frac{4}{5}} = \frac{29}{8}$$

(سؤال ۱۰۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

۲۱ اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟

$$\frac{91}{105} \quad (4)$$

$$\frac{16}{105} \quad (3)$$

$$-\frac{16}{105} \quad (2)$$

$$-\frac{91}{105} \quad (1)$$

۲۰ مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} ((\sin x + \cos x)(\sin 4x + \cos 4x) - \cos 3x)$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

ضرب کن و از اتحادهای مجموع و تفاضل کمان استفاده کن.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع  $f$  را با ضابطه  $f(x) = (\sin x + \cos x)(\sin 4x + \cos 4x) - \cos 3x$  فرض می‌کنیم. خواسته سؤال

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x)$  است. برای محاسبه آن کافی است  $f(\frac{\pi}{3})$  را حساب کنیم.

گام دوم: لازم است که ضابطه تابع را ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = \underbrace{\sin x \sin 4x + \sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x + \cos x \cos 4x}_{\text{کنار هم}} - \cos 3x$$

$$= \underbrace{(\sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x)}_{\sin(x+4x)} + \underbrace{(\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x)}_{\cos(4x-x)} - \cos 3x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin 5x + \cos x - \cos 3x \Rightarrow f(x) = \sin 5x$$

گام سوم: بنابراین خواسته سؤال برابر  $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = f(\frac{\pi}{3})$  است.

طول قطرهای یک متوازی‌الاضلاع ۶ و ۱۲ و زاویه بین آن‌ها  $60^\circ$  است. نسبت اندازه ضلع بزرگ‌تر به ضلع کوچک‌تر در این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$\sqrt{3}$  (۴)

$\sqrt{\frac{7}{3}}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{\frac{5}{3}}$  (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

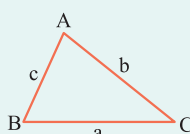
قطرهای متوازی‌الاضلاع را رسم کرده و در دو مثلث غیرهم‌نهشت از میان چهار مثلث ایجادشده، قضیه کسینوس‌ها را بنویسید.

Hint

درس‌Box

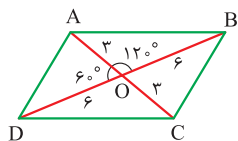
قضیه کسینوس‌ها:

در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع، برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه‌های آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها. به عنوان مثال در مثلث ABC، طبق قضیه کسینوس‌ها می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

گام اول: مطابق شکل، قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم می‌کنیم. فرض کنید  $AC = 6$  و  $BD = 12$  باشد.



می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، پس  $OA = OC = 3$  و  $OB = OD = 6$ ، همچنین اگر  $\widehat{AOD} = 60^\circ$ ، آن‌گاه  $\widehat{AOB} = 120^\circ$  است.

گام دوم: طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌های AOB و AOD داریم:

$$\triangle AOB: AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos 120^\circ = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 63 \Rightarrow AB = 3\sqrt{7}$$

$$\triangle AOD: AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2OA \times OD \times \cos 60^\circ = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \frac{1}{2} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}$$

گام سوم: نسبت ضلع بزرگ‌تر به ضلع کوچک‌تر این متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{3\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۲ در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 60^\circ$ ،  $AB = 5$  و  $AC = 8$  است. مقدار  $\sin C$  کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{3}}{14} \quad (4)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{21} \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{10} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

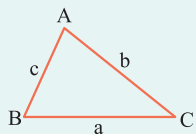
ابتدا با استفاده از قضیه کسینوسها، طول  $BC$  را به دست آورید.

Hint

قضیه سینوسها:

درس Box

در مثلث  $ABC$  با اضلاع  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $AB = c$ ،  $AC = b$ ، داریم:

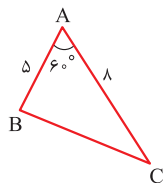


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

در رابطه فوق،  $R$  شعاع دایره محیطی مثلث  $ABC$  است.

گام اول: طبق قضیه کسینوسها در مثلث  $ABC$  داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49$$

$$\Rightarrow BC = 7$$

گام دوم: طبق قضیه سینوسها در مثلث  $ABC$  می توان نوشت:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{5}{\sin C} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $AB = 9$  و  $AC = 12$  است. اگر نقاط  $D$  و  $M$  روی ضلع  $BC$ ، به ترتیب پای نیمساز و میانه نظیر رأس  $A$  باشند، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث  $AMD$  به مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

$$\frac{1}{7} \quad (4)$$

$$\frac{2}{15} \quad (3)$$

$$\frac{1}{14} \quad (2)$$

$$\frac{1}{15} \quad (1)$$

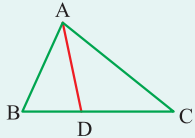
### پاسخ: گزینه ۲

ارتفاع رسم‌شده از رأس  $A$  در دو مثلث  $AMD$  و  $ABC$  یکسان است.

**Hint**

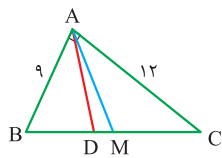
**درس‌Box**

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند. یعنی اگر  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  در مثلث  $ABC$  باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

گام اول:  $AM$  میانه وارد بر وتر  $BC$  است، پس نقطه  $M$  وسط  $BC$  است، یعنی داریم:



$$BM = \frac{BC}{2}$$

گام دوم: طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{12} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BC} = \frac{9}{21} \Rightarrow BD = \frac{3}{7} BC$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم، طول پاره‌خط  $DM$  برابر است با:

$$DM = BM - BD = \frac{1}{2} BC - \frac{3}{7} BC = \frac{1}{14} BC$$

گام چهارم: دو مثلث  $AMD$  و  $ABC$  در رأس  $A$  مشترک‌اند و قاعده مقابل به این رأس در این دو مثلث بر روی یک خط راست قرار دارد، پس داریم:

$$\frac{S_{AMD}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{BC} = \frac{1}{14}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۴ اگر طول ضلع‌های مثلثی ۸، ۱۰ و ۱۲ باشد، نسبت طول کوچک‌ترین میانه‌ی این مثلث به بزرگ‌ترین میانه‌ی آن کدام است؟

$$\sqrt{\frac{23}{53}} \quad (۴)$$

$$\frac{23}{53} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

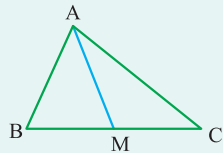
پاسخ: گزینه ۴

در هر مثلث، کوچک‌ترین میانه، نظیر بزرگ‌ترین ضلع و بزرگ‌ترین میانه، نظیر کوچک‌ترین ضلع است.

Hint

قضیه میانه‌ها: اگر AM میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن‌گاه به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، می‌توان رابطه‌ی زیر را که به قضیه میانه‌ها معروف است، به سادگی اثبات نمود:

درس‌Box

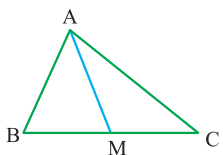


$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

گام اول: فرض کنید  $AB = 8$ ،  $AC = 10$  و  $BC = 12$  باشد. کوچک‌ترین میانه، میانه‌ی وارد بر ضلع BC و بزرگ‌ترین میانه، میانه‌ی وارد بر ضلع AB است.

پاسخ خیلی تشریحی

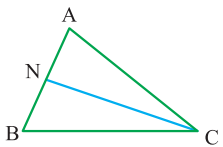
گام دوم: طبق قضیه میانه‌ها، برای میانه AM داریم:



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 8^2 + 10^2 = 2AM^2 + \frac{12^2}{2} \Rightarrow 2AM^2 = 92 \Rightarrow AM^2 = 46$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{46}$$

گام سوم: طبق قضیه میانه‌ها، برای میانه CN داریم:



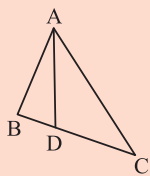
$$AC^2 + BC^2 = 2CN^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow 10^2 + 12^2 = 2CN^2 + \frac{8^2}{2} \Rightarrow 2CN^2 = 212$$

$$\Rightarrow CN^2 = 106 \Rightarrow CN = \sqrt{106}$$

گام چهارم: نسبت طول کوچک‌ترین میانه به بزرگ‌ترین میانه برابر است با:

$$\frac{AM}{CN} = \frac{\sqrt{46}}{\sqrt{106}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{23}}{\sqrt{2} \times \sqrt{53}} = \sqrt{\frac{23}{53}}$$

۲۵ در شکل زیر،  $DC = 2BD$ ،  $AB = 4$ ،  $AC = 7$  و  $BC = 6$  است. طول پاره خط  $AD$  کدام است؟



$$\sqrt{19} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\sqrt{21} \quad (3)$$

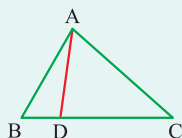
$$5 \quad (4)$$

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۲۷ کنکور ریاضی خارج از کشور ۹۹ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

قضیه استوارت: اگر  $D$  نقطه دلخواهی روی ضلع  $BC$  از مثلث  $ABC$  باشد، آن گاه داریم:



$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

گام اول: طبق فرض  $BC = 6$  و  $DC = 2BD$ ، پس  $BD = 2$  و  $DC = 4$  است.

گام دوم: طبق قضیه استوارت در مثلث  $ABC$  داریم:

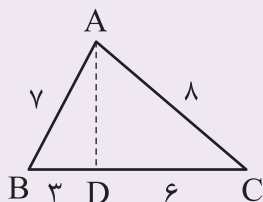
$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC \Rightarrow 4^2 \times 4 + 7^2 \times 2 = AD^2 \times 6 + 2 \times 4 \times 6$$

$$\Rightarrow 64 + 98 = 6AD^2 + 48 \Rightarrow 6AD^2 = 114 \Rightarrow AD^2 = 19 \Rightarrow AD = \sqrt{19}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(سؤال ۱۲۷ کنکور ریاضی ۹۹ (خارج از کشور))

در شکل زیر اندازه پاره خط  $AD$ ، کدام است؟



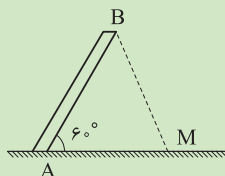
$$\sqrt{37} \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$2\sqrt{7} \quad (3)$$

$$2\sqrt{10} \quad (4)$$

تیرک AB به طول ۴ متر در زمینی افقی چنان قرار دارد که با افق، زاویه  $60^\circ$  می‌سازد. اگر نقطه M واقع بر سطح زمین به فاصله ۳ متر از پای تیر باشد، نسبت فاصله انتهای بالایی تیرک از نقطه M به فاصله آن از سطح زمین کدام است؟



$$\frac{\sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{39}}{6} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{26}}{4} \quad (4)$$

**مشاوره** این سؤال مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۶ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده است.

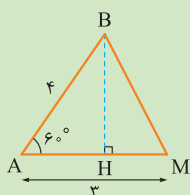
### پاسخ: گزینه ۲

از نقطه B، خطی عمود بر سطح زمین رسم کنید.



گام اول: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABM داریم:

**پاسخ خیلی تشریحی**



$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \times AM \times \cos 60^\circ = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow BM = \sqrt{13}$$

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

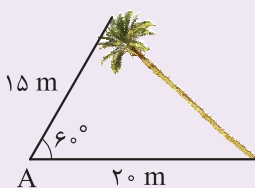
$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = 2\sqrt{3}$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم داریم:

$$\frac{BM}{BH} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{6}$$

یک درخت کج از نقطه A روی زمین که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است، به زاویه  $60^\circ$  دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

(هندسه (۲) - تمرین ۱ صفحه ۶۶ کتاب درسی)

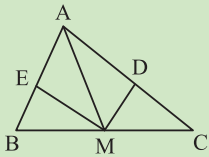


الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصله نوک درخت از زمین

۲۷ در شکل زیر، AM میانه نظیر ضلع BC و دو پاره خط MD و ME به ترتیب نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. اگر  $AB = 6$ ،  $AC = 8$  و  $BC = 10$  باشد، اندازه DE کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۶

**مشاوره** این سؤال مشابه تمرین ۱ صفحه ۷۰ کتاب درسی طراحی شده است. سؤالاتی مشابه آن چندین بار در کنکورهای دهه ۹۰ در هر دو نظام قدیم و جدید دیده می شود.

## پاسخ: گزینه ۲

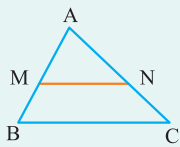
ابتدا نوع مثلث ABC را تعیین کنید.

Hint

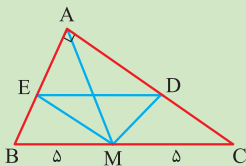
درس Box

(۱) در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف اندازه وتر است.

(۲) **عکس قضیه تالس**: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$



**گام اول**: اندازه اضلاع مثلث ABC در رابطه فیثاغورس صدق می کند، یعنی  $10^2 = 6^2 + 8^2$ ، پس این مثلث قائم الزاویه است ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) و در نتیجه اندازه میانه AM، نصف اندازه وتر BC یعنی برابر ۵ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

**گام دوم**: طبق قضیه نیمساز زاویه‌های داخلی در مثلث ABC داریم:

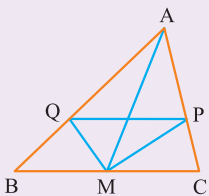
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB: ME \text{ نیمساز است} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AM}{MB} = \frac{5}{5} = 1 \\ \triangle AMC: MD \text{ نیمساز است} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AM}{MC} = \frac{5}{5} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

**گام سوم**: با توجه به این که  $DE \parallel BC$ ، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = 5$$

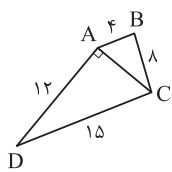
در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:  $PQ \parallel BC$ 

(هندسه (۲) - تمرین ۱ صفحه ۷۰ کتاب درسی)



کتاب درسی

در شکل زیر، نیمسازهای زوایای B و D، قطر AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کنند. اگر  $\hat{C}AD = 90^\circ$  باشد،



اندازه EF کدام است؟

۱) ۵/۰

۲) ۷۵/۰

۳) ۸/۰

۴) ۱

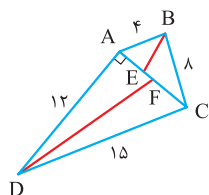
پاسخ: گزینه ۴

با رسم هر نیمساز، یک بار از قضیه نیمسازهای زوایای داخلی استفاده کنید و اندازه قطعات ایجاد شده روی قطر CD را به دست آورید.

Hint

گام اول: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ACD داریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$AC^2 = CD^2 - AD^2 = 15^2 - 12^2 = 9^2 \Rightarrow AC = 9$$

گام دوم: نیمساز زاویه B را در مثلث ABC رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطه E قطع کند. طبق قضیه نیمسازهای زوایای

داخلی داریم:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AE}{9} = \frac{1}{4} \Rightarrow AE = \frac{9}{4} = 2.25$$

گام سوم: مشابه گام قبل، این بار نیمساز زاویه D را در مثلث ACD رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطه F قطع کند. در این

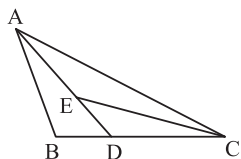
مثلث می‌توان نوشت:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{AF}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow AF = 5$$

گام چهارم: با توجه به نتایج به دست آمده داریم:

$$EF = AF - AE = 5 - 2.25 = 2.75$$

در شکل زیر،  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است و نیمساز زاویه  $C$ ،  $AD$  را در نقطه  $E$  قطع می‌کند. اگر  $AB = 5$  و  $AC = 9$  و  $BC = 7$  باشد، طول  $CE$  کدام است؟



(۱)  $4\sqrt{2}$

(۲)  $\sqrt{30}$

(۳)  $\sqrt{33}$

(۴) ۶

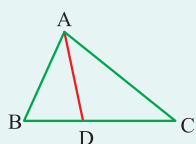
## پاسخ: گزینه ۳

ابتدا طول نیمساز  $AD$  را محاسبه کنید.

**Hint**

**درسی Box**

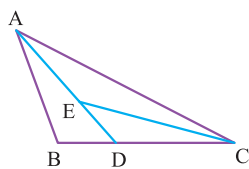
رابطه طول نیمساز زاویه داخلی: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه‌ای که نیمساز، روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، یعنی داریم:



$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

گام اول: طبق قضیه نیمساز زاویه‌های داخلی در مورد نیمساز  $AD$  در مثلث  $ABC$  داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BC} = \frac{5}{14} \xrightarrow{BC=7} \frac{BD}{7} = \frac{5}{14} \Rightarrow BD = \frac{5}{2} \Rightarrow CD = \frac{9}{2}$$

گام دوم: طول نیمساز داخلی  $AD$  برابر است با:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 5 \times 9 - \frac{5}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{135}{4} \Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

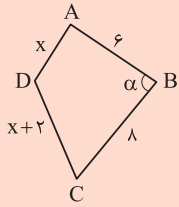
گام سوم: طبق قضیه نیمساز زاویه‌های داخلی در مورد نیمساز  $CE$  در مثلث  $ADC$  داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CD} = \frac{9}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{2}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AE}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AE = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

گام چهارم: طول نیمساز داخلی  $CE$  برابر است با:

$$CE^2 = AC \times CD - AE \times ED = 9 \times \frac{9}{2} - \sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{81}{2} - \frac{15}{2} = \frac{66}{2} = 33 \Rightarrow CE = \sqrt{33}$$

۳۰ در شکل زیر چهارضلعی ABCD، یک چهارضلعی محاطی است. اگر  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار x برابر کدام است؟



- (۱) ۴  
(۲)  $3\sqrt{2}$   
(۳)  $2\sqrt{5}$   
(۴) ۵

**مشاوره** این سؤال مشابه سؤال ۱۳۲ کنکور ریاضی داخل ۹۹ طراحی شده است و ترکیبی از مفاهیم فصل‌های دایره و روابط طولی در مثلث است.

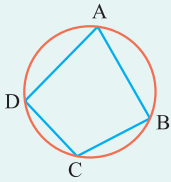
### پاسخ: گزینه ۱

قطر AC را رسم کرده و دو بار از قضیه کسینوس‌ها استفاده کنید.

**Hint**

**چهارضلعی محاطی:** هرگاه تمام رأس‌های یک چهارضلعی بر روی یک دایره قرار داشته باشند، آن چهارضلعی را محاطی می‌نامیم. یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر هر دو زاویه مقابل آن، مکمل یکدیگر باشند.

**درس‌Box**

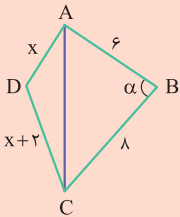


$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{cases}$$

چهارضلعی ABCD محاطی است.

گام اول: طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

**پاسخ خیلی تشریحی** ✓



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \alpha = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{3} = 68$$

گام دوم: چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زوایای B و D مکمل یکدیگرند، یعنی داریم:

$$\cos D = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

گام سوم: طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

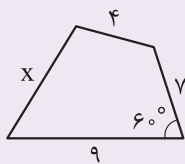
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \times CD \times \cos D \Rightarrow 68 = x^2 + (x+2)^2 - 2x(x+2)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 204 = 3x^2 + 3x^2 + 12x + 12 + 2x^2 + 4x \Rightarrow 8x^2 + 16x - 192 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 8} x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \text{ غ ق} \\ x = 4 \end{cases}$$

(سؤال ۱۳۲ کنکور ریاضی ۹۹)

چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است. (x+2) کدام است؟



- (۱)  $\sqrt{51}$   
(۲)  $\sqrt{55}$   
(۳)  $\sqrt{57}$   
(۴)  $\sqrt{59}$

کنکور

۳۱ انحراف معیار داده‌های آماری زیر چه قدر است؟

 $13, 13, 12, 10, 12$ 

$$\sqrt{1/5} \quad (4)$$

$$\sqrt{1/2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\sqrt{0/8} \quad (1)$$

## پاسخ: گزینه ۳

## درس Box

میانگین:

 اگر  $n$  داده داشته باشیم، میانگین آن‌ها از تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد آن‌ها به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

انحراف معیار:

 برای به دست آوردن انحراف معیار  $n$  داده، ابتدا باید مربع اختلاف هر داده از میانگین را به دست آوریم و سپس طبق فرمول زیر

عمل کنیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{13 + 13 + 12 + 10 + 12}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

گام دوم: حال انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(13-12)^2 + (13-12)^2 + (12-12)^2 + (10-12)^2 + (12-12)^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+1+0+4+0}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{1/2}$$

انحراف معیار داده‌های زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه انحراف معیار را به شکل کامل بنویسید.)

(سوال ۱۶ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳)

 $16, 8, 10, 12, 14$

جدول فراوانی متناظر با ۲۰ داده آماری به صورت زیر است. در نمایش این داده‌ها با نمودار جعبه‌ای، دامنه میان چارکی

چه قدر است؟

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
فراوانی نسبی	۰/۱۵	x	۰/۱۵	۰/۳

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)

### پاسخ: گزینه ۴

فراوانی نسبی:

درس‌Box

اگر فراوانی یک داده را بر فراوانی کل تقسیم کنیم، فراوانی نسبی داده مورد نظر به دست می‌آید:

$$\text{فراوانی نسبی داده } a = \frac{\text{فراوانی داده } a}{\text{فراوانی کل}}$$

میانه:

اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، برای به دست آوردن میانه خواهیم داشت:

(۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد ← داده وسط، میانه است.

(۲) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد ← میانگین دو داده وسط، میانه است.

چارک‌ها:

$Q_1$ : میانه داده‌های قبل از میانه را با  $Q_1$  نشان می‌دهیم و به آن چارک اول می‌گوییم.

$Q_2$ : همان میانه است.

$Q_3$ : میانه داده‌های بعد از میانه را با  $Q_3$  نشان می‌دهیم و به آن چارک سوم می‌گوییم.

دامنه میان چارکی:

دامنه میان چارکی را با نماد IQR نشان می‌دهیم و آن را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

گام اول: ۲۰ داده داریم، با توجه به فراوانی نسبی، فراوانی هر داده را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{\text{فراوانی داده } ۱۱}{۲۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \text{فراوانی داده } ۱۱ = \frac{۲۰ \times ۱۵}{۱۰۰} = ۳$$

$$\frac{\text{فراوانی داده } ۱۳}{۲۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \text{فراوانی داده } ۱۳ = \frac{۲۰ \times ۱۵}{۱۰۰} = ۳$$

$$\frac{\text{فراوانی داده } ۱۴}{۲۰} = \frac{۳}{۱۰} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \text{فراوانی داده } ۱۴ = \frac{۲۰ \times ۳}{۱۰} = ۶$$

تعداد کل داده‌ها ۲۰ تا است، اگر فراوانی داده ۱۲ را  $n$  فرض کنیم؛ پس  $۳ + n + ۳ + ۶ = ۲۰$  در نتیجه  $n = ۸$ .

گام دوم: حال که فراوانی همه داده‌ها را داریم، آن‌ها را به صورت مرتب‌شده می‌نویسیم و  $Q_1$  و  $Q_3$  را به دست می‌آوریم:

$$11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14$$

$$Q_1 = \frac{12+12}{2} = 12 \quad Q_2 = \frac{12+12}{2} = 12 \quad Q_3 = \frac{14+14}{2} = 14$$

$$IQR = 14 - 12 = 2$$

گام سوم: دامنه میان چارکی برابر می‌شود با:

۳۳ میانگین دسته اول با ۴ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده  $a$  است. واریانس دسته اول چند برابر واریانس دسته دوم است؟

$$\frac{25}{16} (4) \qquad \frac{16}{25} (3) \qquad \frac{5}{4} (2) \qquad \frac{4}{5} (1)$$

## پاسخ: گزینه ۲

داده متفاوت بین دو دسته، مساوی با میانگین.



## درسی Box

انحراف معیار:

برای به دست آوردن انحراف معیار  $n$  داده، ابتدا باید مربع اختلاف هر داده از میانگین را به دست آوریم و سپس طبق فرمول زیر عمل کنیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

واریانس:

توان دوم انحراف معیار را «واریانس» گویند:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام اول: داده‌های  $x_1, x_2, x_3, x_4$  و  $x_5$  در هر دو دسته مشترکند و تنها داده  $a$  متفاوت است. میانگین هر دو دسته برابر  $\bar{x}$  است، پس:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + a}{5} \Rightarrow \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{4\bar{x}} + a = 5\bar{x} \Rightarrow a = \bar{x}$$

گام دوم: حال واریانس هر دو دسته را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2}{5}$$

$$\frac{a = \bar{x}}{(a - \bar{x})^2 = 0} \rightarrow \sigma_2^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{5}$$

گام سوم: بنابراین خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4}}{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{5}}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{5}{4} \text{ صورت کسرها برابرند.}$$

اگر به تعدادی عدد با میانگین  $a$ ، عددی را اضافه کنیم و میانگین تغییری نکنند، عدد اضافه شده همان  $a$  است.



طبق نکته،  $a$  مساوی با میانگین دو دسته است، ادامه حل مانند روش قبلی است.



میانگین دسته اول با ۵ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۶ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده  $a$  است. اگر واریانس دسته اول  $\frac{2}{3}$  از واریانس دسته دوم بیشتر باشد، واریانس دسته اول کدام است؟

(سوال ۲۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۶ / ۲۵ (۴)

۴ (۳)

۲ / ۲۵ (۲)

۱ (۱)

۳۴ در داده‌های آماری  $۱-۴n, \dots, ۱۱, ۷, ۳$ ، ضریب تغییرات چه قدر است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\frac{۲}{۲n+۱} \sqrt{n^۲-۱} \quad (۲) \qquad \frac{۲}{۲n+۱} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۶}} \quad (۴) \qquad \frac{۲}{۲n+۱} \sqrt{\frac{n^۲-۱}{۳}} \quad (۳)$$

### پاسخ: گزینه ۲

**Hint** از نکات گفته شده استفاده کنید.

ضریب تغییرات:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

از تقسیم انحراف معیار بر میانگین، ضریب تغییرات به دست می‌آید که آن را با نماد CV نمایش می‌دهیم.

• اگر داده‌ها تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، آن‌گاه واریانس آن‌ها برابر می‌شود با:

$$\sigma^۲ = \left(\frac{n^۲-۱}{۱۲}\right)d^۲$$

• اگر داده‌ها تشکیل دنباله حسابی بدهند، میانگین آن‌ها برابر می‌شود با:

$$\bar{x} = \frac{\text{داده اول} + \text{داده آخر}}{۲}$$

گام اول: n داده داریم که دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ تشکیل می‌دهند؛ پس:

$$\sigma^۲ = \frac{n^۲-۱}{۱۲} d^۲ = \frac{n^۲-۱}{۱۲} \times ۴^۲ = \frac{۴}{۳} (n^۲-۱)$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۴}{۳} (n^۲-۱)}$$

گام دوم: میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\text{آخری} + \text{اولی}}{۲} = \frac{۴n+۲}{۲} = ۲n+۱$$

گام سوم: حال ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{۴}{۳} (n^۲-۱)}}{۲n+۱} = \frac{۲\sqrt{n^۲-۱}}{\sqrt{۳}(۲n+۱)} = \frac{۲}{۲n+۱} \sqrt{\frac{n^۲-۱}{۳}}$$

درس‌Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۵

انحراف از میانگین ۹ داده به صورت  $a, b, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$  و انحراف معیار این داده‌ها برابر  $2\sqrt{5}$  است. بزرگ‌ترین داده چند واحد از کوچک‌ترین داده بزرگ‌تر است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

جمع انحراف از میانگین‌ها رو برابر صفر قرار بدین.

Hint

گام اول: می‌دانیم که مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است:

$$-4 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = 1$$

گام دوم: انحراف معیار برابر  $2\sqrt{5}$  است، حال با توجه به فرمول انحراف معیار داریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + a^2 + b^2}{9}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{35 + a^2 + b^2}{9}} = 2\sqrt{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{35 + a^2 + b^2}{9} = 20$$

$$\Rightarrow 35 + a^2 + b^2 = 180 \Rightarrow a^2 + b^2 = 145$$

گام سوم: از روابط به‌دست‌آمده از گام اول و دوم و هم‌چنین به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow 1 = 145 + 2ab \Rightarrow 2ab = -144 \Rightarrow ab = -72 \\ a^2 + b^2 &= 145 \end{aligned}$$

با توجه به این‌که  $a + b = 1$  پس  $a = 9$  و  $b = -8$ .

گام چهارم:  $a = 9$  یعنی بزرگ‌ترین داده ۹ تا از میانگین بیشتر و  $b = -8$  یعنی کوچک‌ترین داده ۸ واحد از میانگین کم‌تر است، در نتیجه خواسته سؤال برابر است با:

$$\begin{aligned} a = 9 &\Rightarrow \text{میانگین} - \text{بزرگ‌ترین داده} = 9 \\ b = -8 &\Rightarrow \text{میانگین} - \text{کوچک‌ترین داده} = -8 \end{aligned} \Rightarrow 9 - (-8) = 17$$

توجه! اگر  $a$  را برابر  $-8$  و  $b$  را برابر  $9$  در نظر می‌گرفتیم، باز هم به همین جواب می‌رسیدیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۶

در ۸ داده آماری مجموع داده‌ها برابر ۷۲ و مجموع مجذورات تفاضل داده‌ها از ۹ برابر ۲۰۰۰ است. اگر ۴ داده برابر با میانگین را به این داده‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید، چند برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود؟

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

در حالت اول:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{۷۲}{۸} = ۹$$

$$\text{واریانس اولیه} = \frac{\text{مجموع مجذورات تفاضلات}}{\text{تعداد}} = \frac{۲۰۰۰}{۸} = ۲۵۰$$

$$\sigma_1 = \sqrt{۲۵۰} = ۵\sqrt{۱۰}$$

گام دوم: حالا با افزودن ۴ داده مساوی با میانگین،  $\bar{x}$  تغییر نمی‌کند؛ صورت  $\sigma^2$  هم عوض نمی‌شود و داریم:

$$\text{واریانس دسته جدید} = \frac{۲۰۰۰}{۸+۴} = \frac{۲۰۰۰}{۱۲} = \frac{۵۰۰}{۳}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{۵۰۰}{۳}}$$

گام سوم: با توجه به این که میانگین هر دو دسته  $\bar{x}$  است، نسبت CVها می‌شود:

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{\frac{۵۰۰}{۳}}}{\sqrt{۲۵۰}} = \frac{\sqrt{۲۵۰} \times \sqrt{\frac{۲}{۳}}}{\sqrt{۲۵۰}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{\text{گویا کردن}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

در ۳۷ داده آماری، میانگین برابر ۱۵ و واریانس برابر ۵۰ است. اگر داده‌های ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۷ به آن‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات ۲۵ داده حاصل تقریباً کدام است؟

$$\frac{8}{15} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{13}{30} \quad (2)$$

$$\frac{7}{15} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: میانگین ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۷ هم ۱۵ است، پس با افزودن آن‌ها به داده‌ها  $\bar{X} = 15$  باقی می‌ماند.

گام دوم:  $\sigma^2$  در حالت اولیه  $= 50 = \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - 15)^2}{21}$  است. پس  $\sum_{i=1}^{21} (x_i - 15)^2$  باید  $1050$  باشد و در حالت ثانویه داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - 15)^2}{25} = \frac{1050 + (17-15)^2 + 2(14-15)^2 + (15-15)^2}{21+4}$$

$$= \frac{1056}{25} = 42/24$$

گام سوم: جذر  $42/24$  با تقریب جزئی  $6/5$  است و داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{6/5}{15} = \frac{65}{150} = \frac{13}{30}$$

در کدام موارد، روش نمونه‌گیری بیان شده مناسب است؟

- (الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم، اما فهرست مدارس موجود است. ← خوشه‌ای
- (ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است. ← طبقه‌ای
- (پ) شرکت واردکننده‌های خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آن‌ها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند. ← سامانمند
- (۱) الف - ب  
(۲) الف - ب  
(۳) ب - پ  
(۴) الف - ب - پ

### پاسخ: گزینه ۲

#### درس‌Box

انواع نمونه‌گیری تصادفی

نمونه‌گیری تصادفی ساده:

نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

نمونه‌گیری خوشه‌ای:

نمونه‌گیری که در آن، واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند. سپس همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.

نمونه‌گیری طبقه‌ای:

روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.

نمونه‌گیری سامانمند (یا سیستماتیک):

نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

طبق درس باکس، در مورد «الف» نمونه‌گیری انجام شده به روش خوشه‌ای، در مورد «ب» نمونه‌گیری انجام شده به روش طبقه‌ای و در مورد «پ» نمونه‌گیری انجام شده به روش تصادفی ساده است؛ بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

#### پاسخ خیلی تشریحی ✓

(سؤال ۱۸ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳)

در هر مورد مناسب‌ترین روش نمونه‌گیری را بنویسید.

- (الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم، اما فهرست مدارس موجود است.
- (ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است.



در یک مدرسه با ۴۰۰ دانش آموز می‌خواهیم به کمک نمونه‌گیری خوشه‌ای یک نمونه انتخاب کنیم تا میانگین قد افراد انتخاب‌شده را به دست آوریم. اگر تعداد اعضای خوشه‌ها برابر باشد و بخواهیم سه خوشه انتخاب کنیم و احتمال انتخاب هر خوشه ۰/۰۵ باشد، تعداد اعضای نمونه ..... نفر و میانگین به دست آمده ..... است.

(۱) - آماره

(۲) - پارامتر

(۳) - آماره

(۴) - پارامتر

## پاسخ: گزینه ۳

پارامتر یا پارامتر جامعه:

گزینه‌های Box

یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند، قابل محاسبه است.

آماره یا آماره نمونه:

مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

گام اول: تعداد خوشه‌ها را  $n$  فرض می‌کنیم، احتمال انتخاب هر خوشه ۰/۰۵ است، پس:

$$\frac{5}{100} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{100}{5} = 20$$

گام دوم: ۲۰ خوشه داریم و ۴۰۰ دانش آموز، پس در هر خوشه  $\frac{400}{20} = 20$  دانش آموز قرار دارند.

گام سوم: می‌خواهیم سه خوشه انتخاب کنیم، پس تعداد اعضای نمونه برابر  $3 \times 20 = 60$  است.

گام چهارم: میانگین از نمونه به دست آمده، پس آماره است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۰

تعداد دانش‌آموزهای چهار مدرسه به ترتیب برابر ۳۳، ۴۵، ۵۴ و ۶۰ نفر است. می‌خواهیم با استفاده از نمونه‌گیری طبقه‌ای تعدادی دانش‌آموز از هر مدرسه انتخاب کنیم به طوری که تعداد دانش‌آموزهای انتخاب‌شده از هر مدرسه متناسب با تعداد کل دانش‌آموزان آن مدرسه باشد. اگر بخواهیم نمونه‌های ما شامل بیش از صد دانش‌آموز باشد، نمونه مورد نظر دست‌کم چندعضوی است؟

۱۲۸ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۲۴ (۲)

۱۲۰ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

اعداد داده‌شده همگی بر ۳ بخش پذیرند.

Hint

گام اول: تعداد نفرات هر مدرسه بر ۳ بخش پذیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$۳۳ = ۱۱ \times ۳$$

$$۴۵ = ۱۵ \times ۳$$

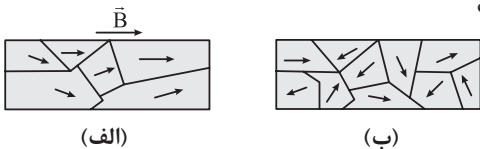
$$۵۴ = ۱۸ \times ۳$$

$$۶۰ = ۲۰ \times ۳$$

گام دوم: تعداد دانش‌آموزان انتخاب‌شده از هر مدرسه متناسب با تعداد آن‌ها است، پس می‌توانیم  $۱۱ + ۱۸ + ۱۵ + ۲۰ = ۶۴$  دانش‌آموز انتخاب کنیم. توجه کنید که می‌خواهیم نمونه ما شامل بیش از صد دانش‌آموز و کم‌ترین تعداد ممکن باشد، عدد به‌دست‌آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۶۴ \times ۲ = ۱۲۸$$

شکل (الف) یک ماده مغناطیسی را درون میدان خارجی  $\vec{B}$  نشان می‌دهد. شکل (ب) همان ماده را پس از حذف میدان  $\vec{B}$  نشان می‌دهد. نوع این ماده مغناطیسی کدام است؟



(الف)

(ب)

(۲) فرومغناطیس سخت

(۴) پارامغناطیس

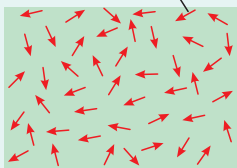
(۱) فرومغناطیس نرم

(۳) دیامغناطیس

## پاسخ: گزینه ۱

## درس Box

هر ذره سازنده مواد پارامغناطیسی یک آهنربای میکروسکوپی است.



ماده از نظر مغناطیسی به صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

## الف) پارامغناطیس:

این مواد ذاتاً خاصیت مغناطیسی دارند.

اگر در میدان مغناطیسی قوی قرار گیرند، خاصیت مغناطیسی موقت و ضعیفی پیدا می‌کند.  
مثال: اورانیوم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن

## ب) دیامغناطیس:

به طور ذاتی خاصیت مغناطیسی ندارند.

اگر در میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرند، برخلاف مواد پارامغناطیسی و فرومغناطیسی، دو قطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان مغناطیسی القا می‌شوند.

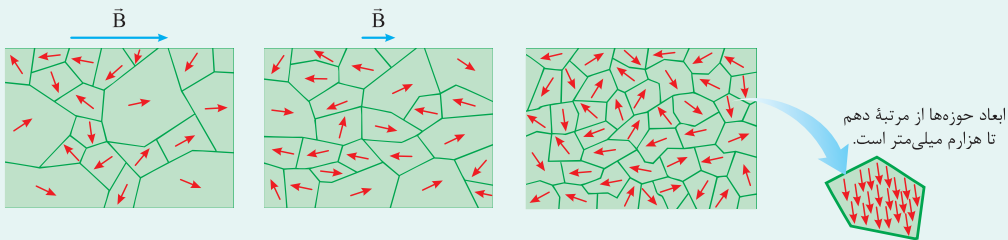
مثال: مس، نقره، سرب، بیسموت

## پ) فرومغناطیس:

ذرات تشکیل دهنده این مواد ذاتاً خاصیت مغناطیسی دارند.

دارای حوزه مغناطیسی است.

حوزه‌های مغناطیسی همسو با میدان خارجی رشد می‌کنند.



ابعاد حوزه‌ها از مرتبه دهم تا هزارم میلی‌متر است.

مواد فرومغناطیسی نرم: حوزه‌های مغناطیسی این مواد در حضور میدان مغناطیسی خارجی به سهولت تغییر می‌کند و ماده به سادگی آهنربا می‌شود و با حذف میدان خارجی نیز خاصیت آهنربایی خود را به راحتی از دست می‌دهد.

مواد فرومغناطیسی سخت: به سختی آهنربا می‌شوند، یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌ها در آن‌ها به سختی تغییر می‌کند و پس از حذف میدان خارجی، تا مدت‌زمان زیادی، تقریباً خاصیت آهنربایی خود را حفظ می‌کند.

فرومغناطیس سخت	و	مثال فرومغناطیسی نرم
↓		↓
فولاد و آلیاژهای آهن، نیکل و کبالت		آهن، کبالت، نیکل خالص

طبق درس‌باکس، این ماده، فرومغناطیس نرم است چون حوزه مغناطیسی دارد و با حذف میدان مغناطیسی خارجی، جهت حوزه‌ها تغییر کرده است.

## پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۲ اگر یک میله فولادی و یک میله آلومینیومی در میدان مغناطیسی خارجی قوی قرار گیرند، به ترتیب چه نوع خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کنند؟

- (۲) دائمی قوی، موقت ضعیف  
(۴) موقت قوی، دائمی ضعیف

- (۱) دائمی قوی، دائمی ضعیف  
(۳) موقت قوی، موقت ضعیف

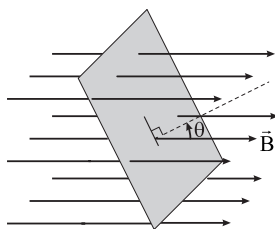
### پاسخ: گزینه ۲

فولاد جزء مواد فرومغناطیسی سخت است که در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی به آهنربای قوی تبدیل می‌شود و تا مدت‌زمان زیادی خاصیت آهنربایی خود را حفظ می‌کند. آلومینیم جزء مواد پارامغناطیسی است که اگر در میدان مغناطیسی قوی قرار گیرند، خاصیت مغناطیسی موقت و ضعیفی پیدا می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۳ در شکل زیر، میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = 500 \text{ G}$  از درون قاب مستطیل‌شکلی در حال عبور است. اگر شار مغناطیسی عبوری از قاب برابر با  $2/4 \text{ mWb}$  و  $\theta = 37^\circ$  باشد، مساحت قاب چند سانتی‌متر مربع است؟

$$(\cos 37^\circ = 0.8)$$



(۱) ۶۰

(۲) ۴۰

(۳) ۶۰۰

(۴) ۴۰۰

## پاسخ: گزینه ۳

داده‌های سؤال را برحسب یکاهای SI در رابطه  $\Phi = BA \cos \theta$  جای‌گذاری کنید.

Hint

شار مغناطیسی کمیتی نرده‌ای است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

درس‌Box

میدان مغناطیسی (T)

$$\Phi = BA \cos \theta \rightarrow \text{زاویه بین نیم‌خط عمود بر صفحه با بردار میدان مغناطیسی}$$

شار مغناطیسی

مساحت (m<sup>۲</sup>)

(Wb)

داده‌های مسئله را برحسب یکاهای SI در رابطه شار مغناطیسی جای‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\Phi = BA \cos \theta \quad \frac{B=500 \text{ G}=5 \times 10^{-2} \text{ T}}{\Phi=2/4 \text{ mWb}=2/4 \times 10^{-3} \text{ Wb}} \rightarrow 2/4 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-2} \times A \times \cos 37^\circ$$

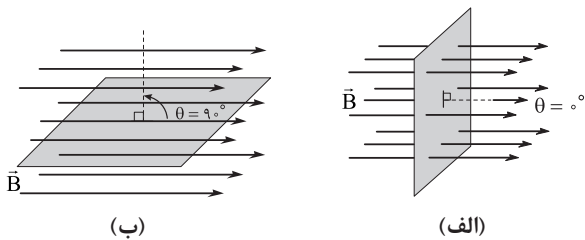
$$\Rightarrow A = \frac{2/4 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-2} \times 0.8} = 6 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \times 10^4 = 600 \text{ cm}^2$$

تبدیل m<sup>۲</sup> به cm<sup>۲</sup>

اگر به یکاهای داده‌شده و یکای خواسته‌شده توجه نکنی، توی دام گزینه (۱) می‌افتی.

گول نخوری

مطابق شکل‌های زیر، حلقهٔ رسانای مربع‌شکلی به ضلع  $20\text{ cm}$  در میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = 300\text{ G}$  قرار دارد. اگر در مدت زمان  $\Delta t$  که وضعیت حلقه از حالت (الف) به حالت (ب) می‌رسد، بزرگی آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه برابر با  $0.2\text{ Wb/s}$  باشد،  $\Delta t$  چند میلی‌ثانیه است؟



(ب) ۶۰ (۴)

۳۰ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

## پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا به کمک رابطهٔ  $\Delta\Phi = BA(\cos\theta_f - \cos\theta_i)$ ، تغییرات شار مغناطیسی را محاسبه کنید، سپس با توجه به این که بزرگی آهنگ تغییر شار مغناطیسی یعنی  $\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$  را داریم،  $\Delta t$  را به دست آورید.



Hint

گام اول: تغییرات شار مغناطیسی را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = BA \cos\theta_f - BA \cos\theta_i = BA(\cos\theta_f - \cos\theta_i)$$

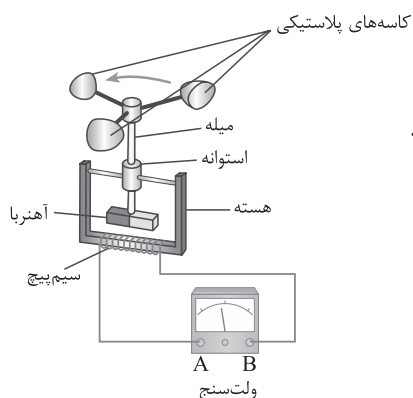
$$\frac{B=300\text{ G}=300 \times 10^{-4}\text{ T}, \theta_i=0^\circ}{A=(20)^2\text{ cm}^2=400 \times 10^{-4}\text{ m}^2, \theta_f=90^\circ} \rightarrow \Delta\Phi = 3 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^{-2} (\cos 90^\circ - \cos 0^\circ)$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi = -12 \times 10^{-4}\text{ Wb} \Rightarrow |\Delta\Phi| = 12 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$

گام دوم: بزرگی آهنگ تغییر شار مغناطیسی یعنی  $\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$ ، پس:

$$\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = 0.2 \Rightarrow \frac{12 \times 10^{-4}}{\Delta t} = 0.2 \Rightarrow \Delta t = 6 \times 10^{-3}\text{ s} = 6\text{ ms}$$

شکل زیر ساختار یک بادسنج را نشان می‌دهد. دربارهٔ این بادسنج چه تعداد از موارد زیر درست است؟



الف) این بادسنج براساس قانون القای فاراده کار می‌کند.

ب) با افزایش تندی باد، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

پ) با افزایش تعداد دور سیم پیچ، دقت اندازه‌گیری بادسنج افزایش می‌یابد.

۱) صفر

۲) ۱

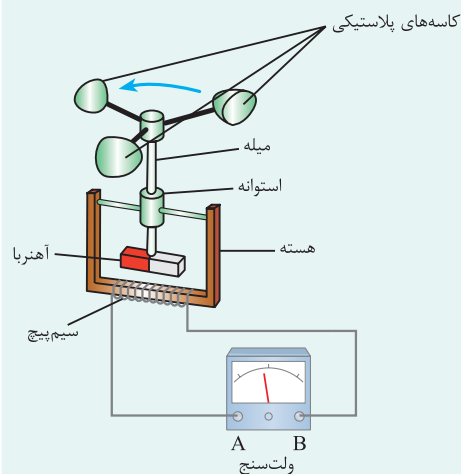
۳) ۲

۴) ۳

### پاسخ: گزینهٔ ۴

### درس‌Box

اساس کار بادسنج براساس قانون القای الکترومغناطیسی است. به این صورت که وزش باد، باعث چرخش کاسه‌های پلاستیکی می‌شود و با چرخش کاسه‌ها و میله، آهنربا نیز می‌چرخد؛ چرخش آهنربا باعث تغییر شار مغناطیسی و ایجاد نیروی محرکهٔ القایی می‌شود.



با هر نیم‌دور چرخش آهنربا، شار مغناطیسی عبوری از

سیم پیچ به یک مقدار معین می‌رسد و ولت‌سنج، اندازهٔ

نیروی محرکهٔ القایی را نشان می‌دهد. با افزایش تندی باد،

آهنربا در زمان کوتاه‌تری نیم‌دور می‌چرخد و طبق رابطهٔ

$|\varepsilon_{av}| = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، آهنگ تغییرات شار مغناطیسی

و در نتیجه اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی افزایش می‌یابد.

هم‌چنین طبق رابطهٔ  $\varepsilon = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، افزایش تعداد

دور سیم پیچ (افزایش  $N$ ) باعث افزایش دقت اندازه‌گیری

بادسنج می‌شود.

طبق درس باکس، هر سه عبارت در رابطه با بادسنج، درست بیان شده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۶ شار مغناطیسی گذرنده از پیچه مسطحی در مدت یک دقیقه،  $45 \text{ Wb}$  / افزایش می‌یابد. اگر در این مدت بزرگی

نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه برابر با  $3 \text{ V}$  باشد، تعداد دورهای این پیچه کدام است؟

۲) ۴۰

۱) ۲۰

۴) ۴۰۰

۳) ۲۰۰

### پاسخ: گزینه ۴

اطلاعات مسئله را در رابطه  $|\varepsilon_{av}| = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  جای‌گذاری کنید تا تعداد دور پیچه ( $N$ ) را به دست آورید.

**Hint**

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود، اندازه نیروی محرکه القایی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

**درس‌Box**

نیروی محرکه القایی ( $V$ )

$$|\varepsilon_{av}| = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{av}| = -NAB \left( \frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\Delta t} \right) & \text{A و B ثابت و } \theta \text{ تغییر کند:} \\ |\varepsilon_{av}| = -NA \cos\theta \left( \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) & \text{A و } \theta \text{ ثابت و B تغییر کند:} \\ |\varepsilon_{av}| = -NB \cos\theta \left( \frac{\Delta A}{\Delta t} \right) & \text{A و B تغییر کند و } \theta \text{ ثابت:} \end{cases}$$

↑  $|\varepsilon_{av}|$   
↑ تعداد حلقه  
↓ آهنگ تغییر  
شار مغناطیسی ( $\text{Wb/s}$ )

کافی است داده‌ها را در رابطه نیروی محرکه القایی متوسط پیچه جای‌گذاری کنید:

**پاسخ خیلی تشریحی**

$$|\varepsilon_{av}| = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\varepsilon_{av}=3 \text{ V}, \Delta\Phi=45 \text{ Wb}, \Delta t=1 \text{ min}=60 \text{ s}} 3 = N \times \frac{45}{60} \Rightarrow N = 400$$

معادله شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه که شامل ۵۰ حلقه است، برحسب زمان در SI به صورت  $\Phi = 2t^2 + 1$  **۴۷**

است. بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی  $t_1 = 1\text{ s}$  تا  $t_2 = 3\text{ s}$  چند ولت است؟

۳۰۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

۵۰۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا شار مغناطیسی عبوری از پیچه را در  $t_1 = 1\text{ s}$  و  $t_2 = 3\text{ s}$  به دست آورید و سپس طبق رابطه  $\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط را محاسبه کنید.

**Hint**

گام اول: شار مغناطیسی عبوری از پیچه را در لحظات  $t_1 = 1\text{ s}$  و  $t_2 = 3\text{ s}$  به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

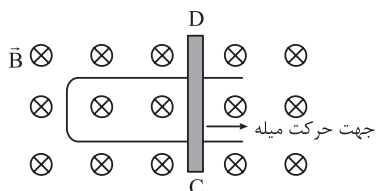
$$\Phi = 2t^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1\text{ s} \Rightarrow \Phi_1 = 2(1)^2 + 1 = 3\text{ Wb} \\ t_2 = 3\text{ s} \Rightarrow \Phi_2 = 2(3)^2 + 1 = 19\text{ Wb} \end{cases}$$

گام دوم: به کمک رابطه نیروی محرکه القایی متوسط داریم:

$$\varepsilon_{av} = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| -50 \times \frac{19 - 3}{3 - 1} \right| = 400\text{ V}$$



شکل زیر رسانای U شکلی با مقاومت الکتریکی ناچیز را در میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = 0.25 \text{ T}$  نشان می‌دهد. میله با مقاومت الکتریکی  $5 \Omega$  با تندی ثابت در حال حرکت است. اگر جریان القایی در میله برابر با  $2 \text{ mA}$  باشد، آهنگ افزایش سطح رسانای U شکل چند سانتی‌متر مربع بر ثانیه است؟



۴۰۰ (۱)

۴۰ (۲)

۲۰۰ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با کمک روابط  $\varepsilon_{av} = -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t}$  و  $I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$  داریم:

$$I_{av} = \left| -\frac{NB \cos \theta}{R} \times \frac{\Delta A}{\Delta t} \right| \xrightarrow{N=1, B=0.25 \text{ T}, \theta=0^\circ} \xrightarrow{R=5 \Omega, I=2 \text{ mA}=2 \times 10^{-3} \text{ A}} 2 \times 10^{-3} = \frac{1 \times 0.25 \times \cos 0^\circ}{5} \times \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^2 / \text{s} \times 10^4 = 400 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

تبدیل  $\text{m}^2$  به  $\text{cm}^2$

۴۹

پیچهای شامل ۲۰۰ دور سیم که مساحت هر حلقه آن  $50 \text{ cm}^2$  است، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی  $0.4 \text{ T}$  قرار دارد. در مدت  $20 \text{ ms}$ ، اندازه میدان مغناطیسی را چند درصد کاهش دهیم تا بزرگی نیروی محرکه القایی در حلقه برابر با  $16 \text{ V}$  شود؟

۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا به کمک رابطه  $\epsilon_{av} = \left| -NA \cos \theta \left( \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) \right|$ ، بزرگی تغییرات میدان مغناطیسی را به دست آورید و سپس طبق رابطه  $\frac{\Delta B}{B_1} \times 100$ ، درصد تغییرات میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

Hint

گام اول: تغییر میدان مغناطیسی عامل تغییر شار مغناطیسی و ایجاد نیروی محرکه القایی است، پس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\epsilon_{av} = \left| -NA \cos \theta \left( \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) \right| \Rightarrow 16 = \left| -200 \times 50 \times 10^{-4} \times \cos 0 \times \left( \frac{\Delta B}{20 \times 10^{-3}} \right) \right|$$

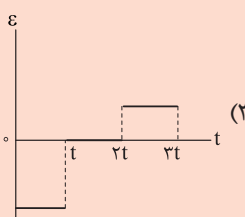
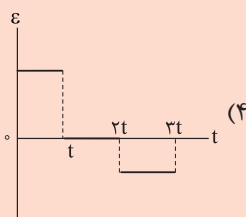
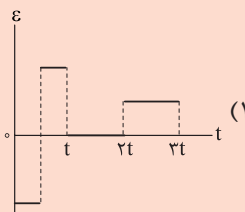
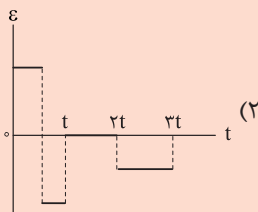
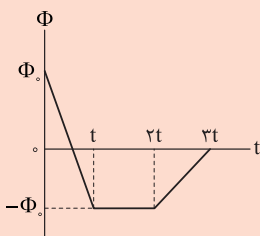
$$\Rightarrow |\Delta B| = \frac{16 \times 2 \times 10^{-2}}{10^4 \times 10^{-4} \times 1} = 0.32 \text{ T}$$

گام دوم: درصد تغییرات میدان مغناطیسی برابر است با:

$$\frac{|\Delta B|}{B_1} \times 100 = \frac{0.32}{0.4} \times 100 = 80\%$$

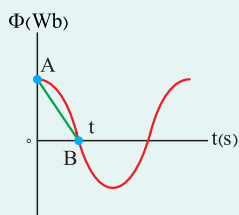


۵۰ نمودار تغییرات شار مغناطیسی در یک مدار بسته بر حسب زمان، به شکل زیر است. نمودار نیروی محرکه القایی در مدار بر حسب زمان، به کدام شکل است؟



پاسخ: گزینه ۴

در نمودار  $\Phi - t$ ، شیب خط واصل بین دو نقطه، آهنگ تغییرات شار مغناطیسی را بیان می‌کند. مثلاً در نمودار زیر داریم:



$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\text{در بازه زمانی صفر تا } t} \varepsilon_{av} = -N \times (\text{شیب خط } AB)$$

علامت منفی در رابطه بالا نشان می‌دهد که اگر آهنگ تغییرات شار مغناطیسی مثبت باشد (شار مغناطیسی در حال افزایش باشد)، نیروی محرکه القایی منفی می‌شود و برعکس.

درس Box

در هر بازه زمانی به کمک رابطه  $\varepsilon = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، نیروی محرکه القایی را به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon_1 = -\frac{-\Phi_0 - \Phi_0}{t} = \frac{2\Phi_0}{t}$$

بازه زمانی  $(0, t)$ :

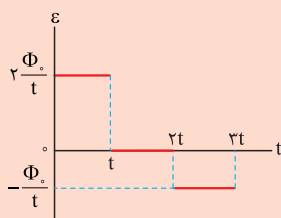
$$\varepsilon_2 = -\frac{-\Phi_0 - (-\Phi_0)}{2t - t} = 0$$

بازه زمانی  $(t, 2t)$ :

$$\varepsilon_3 = -\frac{0 - (-\Phi_0)}{3t - 2t} = -\frac{\Phi_0}{t}$$

بازه زمانی  $(2t, 3t)$ :

حالا طبق داده‌ها، نمودار را رسم می‌کنیم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

کول نخوری

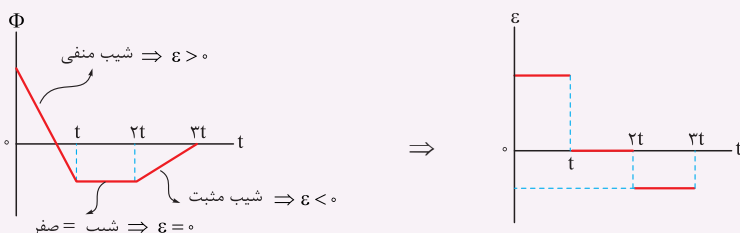
اگر حواست به منفی رابطه  $\varepsilon = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  نباشه، توی دام گزینه (۳) می افتی.

طبق رابطه  $\varepsilon = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، نیروی محرکه با قرینه شیب نمودار  $\Phi - t$  رابطه دارد؛

تیزبازی

شیب نمودار  $\Phi - t$

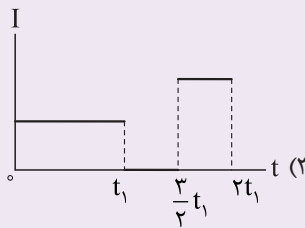
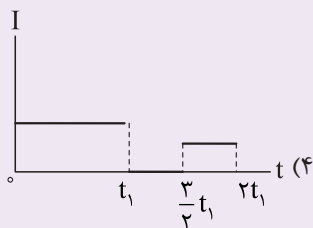
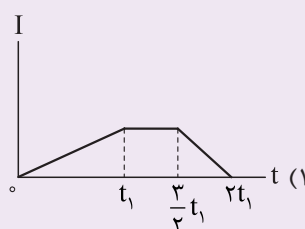
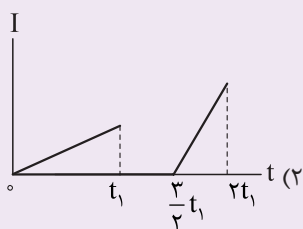
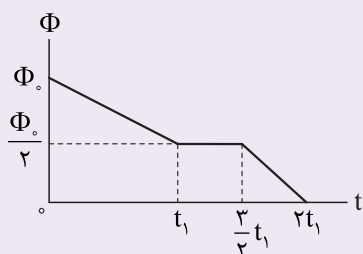
بنابراین:



نمودار تغییرات شار مغناطیسی در یک مدار بسته مطابق شکل است. نمودار جریان القایی مدار به کدام شکل است؟

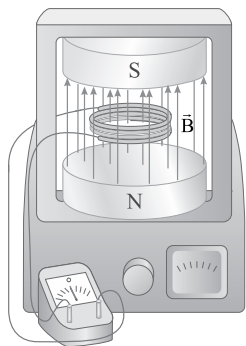
کنکور

(سؤال ۷۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ (قارچ از کشور))



۵۱

پیچه‌ای شامل ۲۰۰ دور که مساحت هر حلقه آن  $50 \text{ cm}^2$  است، مطابق شکل زیر بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی قرار گرفته است که میدان مغناطیسی یکنواخت تولید می‌کند. خط‌های میدان بر سطح پیچه عمودند. اگر میدان مغناطیسی در بازه زمانی  $4 \text{ ms}$  از  $B_1 = 0.18 \text{ T}$  به  $B_2 = 0.22 \text{ T}$  و در خلاف جهت میدان اولیه برسد، بزرگی نیروی محرکه القایی در پیچه چند ولت است؟



۱۰۰ (۱)

۱۰ (۲)

۲۰۰ (۳)

۲۰ (۴)

## پاسخ: گزینه ۱

چون تغییر میدان مغناطیسی باعث ایجاد نیروی محرکه القایی شده، از رابطه  $\varepsilon = \left| -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$ ، بزرگی نیروی محرکه القایی را به دست آورید.

Hint

در این جا تغییر میدان مغناطیسی باعث تغییر شار و ایجاد نیروی محرکه القایی شده است، پس:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\varepsilon = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$$

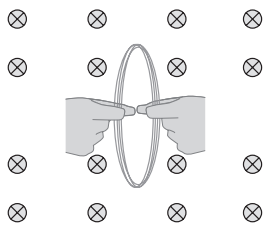
$$\frac{N=200, A=50 \text{ cm}^2=50 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \theta=0}{B_1=0.18 \text{ T}, B_2=0.22 \text{ T}, \Delta t=4 \text{ ms}=4 \times 10^{-3} \text{ s}} \rightarrow \varepsilon = \left| -200 \times 50 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{(0.22 - 0.18)}{4 \times 10^{-3}} \right| = 100 \text{ V}$$

جهت میدان مغناطیسی  $B_2$  در خلاف جهت میدان مغناطیسی  $B_1$  است. اگر به این اطلاعات توجه نکنی و فقط اندازه  $B_1$  و  $B_2$  رو از هم کم کنی ( $\Delta B = 0.22 - 0.18$ ) توی دام گزینه (۲) می‌افتی.

گول نخوری ✗

۵۲

مطابق شکل زیر، حلقهٔ رسانای منعطفی عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت درون سویی قرار دارد. در بازهٔ زمانی  $\Delta t$ ، مساحت حلقه را ۲۵ درصد افزایش می‌دهیم. در همین مدت، بزرگی میدان مغناطیسی چند درصد و چگونه تغییر کند تا نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر صفر شود؟



(۱) ۲۵، افزایش یابد.

(۲) ۲۵، کاهش یابد.

(۳) ۲۰، افزایش یابد.

(۴) ۲۰، کاهش یابد.

## پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

با توجه به این که نیروی محرکه القایی متوسط صفر است، شار مغناطیسی تغییر نکرده، یعنی  $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = 1$  است، پس رابطهٔ شار را به صورت نسبتی بنویسید تا تغییرات میدان مغناطیسی را به دست آورید و سپس درصد تغییرات آن را محاسبه کنید.

گام اول: برای این که نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر با صفر باشد طبق رابطهٔ  $\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، تغییرات شار مغناطیسی باید برابر با صفر شود، یعنی:

$$\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1 \Rightarrow \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = 1$$

گام دوم: رابطهٔ شار مغناطیسی را به صورت نسبتی می‌نویسیم تا تغییرات میدان مغناطیسی را به دست آوریم:

$$\Phi = BA \cos\theta \Rightarrow \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{B_2}{B_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{\cos\theta}{\cos\theta} \xrightarrow{A_2 = A_1 + 25A_1 = 125A_1} 1 = \frac{B_2}{B_1} \times \frac{125A_1}{A_1} \Rightarrow \frac{B_2}{B_1} = \frac{4}{5} \Rightarrow B_2 = \frac{4}{5}B_1$$

گام سوم: درصد تغییرات میدان مغناطیسی را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات میدان مغناطیسی} = \frac{B_2 - B_1}{B_1} \times 100 = \frac{\frac{4}{5}B_1 - B_1}{B_1} \times 100 = -20\%$$

علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش میدان مغناطیسی است.

## پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۲

مساحت هر حلقه پیچه‌ای  $30 \text{ cm}^2$  و پیچه متشکل از ۸۰۰ حلقه است. در ابتدا سطح پیچه بر میدان مغناطیسی زمین عمود است. اگر در مدت  $0.2 \text{ s}$  پیچه بچرخد و سطح حلقه‌ها موازی میدان مغناطیسی زمین شود، نیروی محرکه متوسط القایی در آن چند میلی‌ولت است؟ (اندازه میدان زمین را  $5 \text{ G}$  در نظر بگیرید.)

- (۱)  $0.6$  (۲)  $1/2$  (۳)  $6$  (۴)  $12$

## پاسخ: گزینه ۳

ابتدا عامل تغییر شار مغناطیسی را پیدا کنید و سپس به سراغ فرمول نیروی محرکه القایی متوسط بروید.

Hint

کارتی Box

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود، اندازه نیروی محرکه القایی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$| \varepsilon_{av} | = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow \begin{cases} | \varepsilon_{av} | = \left| -NAB \left( \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{\Delta t} \right) \right| : \text{A و B ثابت و } \theta \text{ تغییر کند} \\ | \varepsilon_{av} | = \left| -NA \cos \theta \left( \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) \right| : \text{A و } \theta \text{ ثابت و B تغییر کند} \\ | \varepsilon_{av} | = \left| -NB \cos \theta \left( \frac{\Delta A}{\Delta t} \right) \right| : \text{A و B ثابت و } \theta \text{ تغییر کند} \end{cases}$$

نیروی محرکه القایی (V)  
تعداد حلقه  
آهنگ تغییر شار مغناطیسی (Wb/s)

با چرخش حلقه و قرار گرفتن آن به صورت موازی با میدان مغناطیسی، شار عبوری از حلقه به صفر می‌رسد. پس داریم:

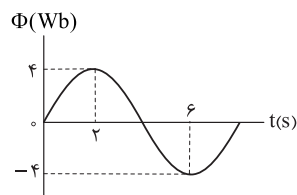
$$\Phi_1 = AB \cos \theta = (30 \times 10^{-4}) \times (0.5 \times 10^{-4}) \times 1 = 15 \times 10^{-8} \text{ Wb}$$

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -800 \times \frac{0 - 15 \times 10^{-8}}{2 \times 10^{-2}} = 6 \times 10^{-3} \text{ V} = 6 \text{ mV}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه مسطح که شامل  $۸۰$  حلقه است، به شکل زیر است. اگر مقاومت الکتریکی پیچه برابر  $۲۰$  باشد، تعداد الکترون‌های شارش یافته در پیچه در بازه زمانی  $t_1 = ۲$  s تا  $t_2 = ۶$  s برابر کدام است؟

$$(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C})$$



$$10^{19} \quad (1)$$

$$10^{20} \quad (2)$$

$$2 \times 10^{19} \quad (3)$$

$$2 \times 10^{20} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

بار الکتریکی شارش یافته در پیچه‌ای به مقاومت  $R$  که شامل  $N$  حلقه است از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{|\Delta q|}{\Delta t} \\ I &= \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \left| \frac{-N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|\Delta q|}{\Delta t} = \left| \frac{-N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right| \Rightarrow |\Delta q| = \frac{N}{R} |\Delta \Phi|$$

ابتدا بار شارش یافته در مدار را در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  به دست می‌آورید:

$$|\Delta q| = \frac{N}{R} |\Delta \Phi| = \frac{80}{20} \times |(-4) - 4| = 32 \text{ C}$$

حالا برای محاسبه تعداد الکترون شارش یافته داریم:

$$|\Delta q| = ne \Rightarrow n = \frac{|\Delta q|}{e} = \frac{32}{1/6 \times 10^{-19}} = 2 \times 10^{20}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۵

دو پیچه مسطح (۱) و (۲) به شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$  که از سیم‌های مشابهی ساخته شده‌اند، عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارند. اگر این میدان مغناطیسی با آهنگ ثابتی شروع به تغییر کند، بزرگی نیروی محرکه القایی در دو پیچه یکسان خواهد بود. طول سیم سازنده پیچه (۱) چند برابر طول سیم سازنده پیچه (۲) است؟

$$\frac{R_2}{R_1} \quad (۲) \qquad \frac{R_1}{R_2} \quad (۱)$$

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \quad (۴) \qquad \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \quad (۳)$$

## پاسخ: گزینه ۲

رابطه نیروی محرکه القایی را برای هر پیچه نوشته و برابر هم قرار دهید، در جای‌گذاری پارامترها به این نکات توجه کنید که مساحت پیچه برابر با  $\pi R^2$  و تعداد حلقه‌ها برابر با  $\frac{L}{2\pi R}$  است.

گام اول: طبق صورت سؤال، با تغییر میدان مغناطیسی، بزرگی نیروی محرکه القایی در دو پیچه یکسان است، یعنی:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{av} &= \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| -NA \cos\theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| \Rightarrow N_1 A_1 \cos\theta_1 \frac{\Delta B_1}{\Delta t_1} = N_2 A_2 \cos\theta_2 \frac{\Delta B_2}{\Delta t_2} \\ \varepsilon_{av,1} &= \varepsilon_{av,2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1}{\frac{\Delta B_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta B_2}{\Delta t_2}} \rightarrow N_1 A_1 = N_2 A_2$$

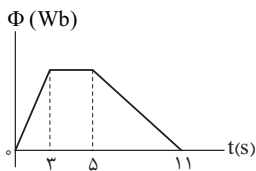
گام دوم: تعداد حلقه‌های پیچه برابر با طول سیم تقسیم بر محیط هر پیچه است، در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{L_1}{2\pi R_1} \times \pi R_1^2 = \frac{L_2}{2\pi R_2} \times \pi R_2^2 \Rightarrow L_1 R_1 = L_2 R_2 \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از حلقه‌ای بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. اندازه جریان القایی در حلقه در ثانیه دوم، چند برابر اندازه جریان القایی در ثانیه هشتم است؟



۲ (۱)

$\frac{1}{2}$  (۲)

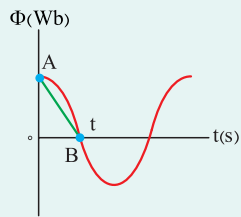
۴ (۳)

$\frac{1}{4}$  (۴)

## پاسخ: گزینه ۱

## درس Box

در نمودار  $\Phi - t$ ، شیب خط واصل بین دو نقطه، آهنگ تغییرات شار مغناطیسی را بیان می‌کند. مثلاً در نمودار زیر داریم:



$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\text{در بازه زمانی صفر تا } t} \varepsilon_{av} = -N(\text{شیب خط } AB)$$

طبق رابطه  $\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  و  $I = \frac{\varepsilon}{R}$  داریم:

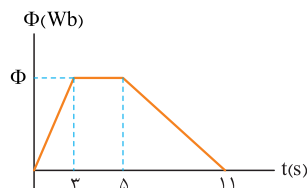
$$I = \frac{-N \Delta\Phi}{R \Delta t}$$

گام اول: با توجه به روابط  $\varepsilon = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$  و  $I = \frac{\varepsilon}{R}$  داریم:

$$I = \left| \frac{-N}{R} \times \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \quad (1)$$

می‌دانیم  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  شیب نمودار شار مغناطیسی - زمان است. سؤال جریان القایی را در ثانیه دوم یعنی بازه زمانی  $t_1 = 1s$  تا  $t_2 = 2s$  می‌خواهد، از آن جایی که شیب نمودار در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t' = 3s$  با شیب نمودار در بازه خواسته شده یکسان

است، پس:



$$\left( \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right)_{(1s, 2s)} = \left( \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right)_{(0, 3s)} = \frac{\Phi - 0}{3 - 0} = \frac{\Phi}{3} \xrightarrow{(1)} I = \frac{\Phi}{3R}$$

گام دوم: ثانیه هشتم یعنی بازه زمانی  $t_3 = 7s$  تا  $t_4 = 8s$ ، که شیب این بازه زمانی هم با شیب نمودار در بازه زمانی  $t'' = 5s$  تا  $t''' = 11s$  برابر است، پس:

$$\left( \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right)_{(7s, 8s)} = \left( \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right)_{(5s, 11s)} = \frac{0 - \Phi}{11 - 5} = \frac{-\Phi}{6} \xrightarrow{(1)} I' = \frac{\Phi}{6R}$$

گام سوم: حالا خواسته سؤال که نسبت  $\frac{I}{I'}$  است را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{I}{I'} = \frac{\frac{\Phi}{3R}}{\frac{\Phi}{6R}} = 2$$

۵۷ یکای فرعی آهنگ تغییر شار مغناطیسی، بر حسب یکاهای اصلی در SI کدام است؟

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^3} \quad (۱)$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad (۴)$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

برای پیدا کردن یکای آهنگ تغییر شار مغناطیسی به کمک روابط  $\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  و  $\varepsilon = \frac{W}{q}$  داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{W}{q} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ یکای}\right) = \frac{(W \text{ یکای})}{(q \text{ یکای})} = \frac{J}{C} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{A} \cdot \text{s}} \Rightarrow \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ یکای}\right) = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$$

۵۸

پیچهای که دارای ۱۰۰ حلقه و قطر هر حلقه آن ۲۰ cm است، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی  $0.1 \text{ T}$  قرار دارد. اگر در مدت  $0.1 \text{ s}$ ، نیمی از پیچه از میدان خارج شود، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه چند

ولت است؟ ( $\pi = 3$ )

(۲)  $1/5$

(۱)  $0.15$

(۴)  $0.6$

(۳)  $0.3$

### پاسخ: گزینه ۱

مساحت پیچه را محاسبه کنید و با توجه به این که در مدت  $0.1 \text{ s}$ ، نیمی از پیچه از میدان خارج شده طبق رابطه

Hint

$$\varepsilon_{av} = \left| -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} \right|$$

بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط را محاسبه کنید.

تغییرات مساحت باعث تغییر شار مغناطیسی عبوری و ایجاد نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه می شود، پس:

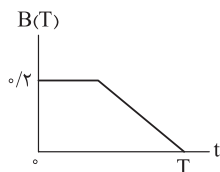
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{av} &= \left| -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} \right| \\ A &= \pi r^2 = 3 \times (10 \times 10^{-2})^2 = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\ \Delta A &= \frac{A}{2} = \frac{3 \times 10^{-2}}{2} = \frac{3}{2} \times 10^{-2} \text{ m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_{av} = \left| -100 \times 0.1 \times \cos 0 \times \frac{\frac{3}{2} \times 10^{-2}}{0.1} \right| \Rightarrow \varepsilon_{av} = 0.15 \text{ V}$$

اگر به جای شعاع که ۱۰ cm است، قطر ۲۰ cm را در رابطه مساحت جای گذاری کنی، توی دام گزینه (۴) می افتی و اگر حواست به تبدیل واحدها نباشه، توی دام گزینه (۲) می افتی.

گول نخوری ✗

یک حلقهٔ رسانای مربعی شکل به ضلع  $4\text{ cm}$  و مقاومت الکتریکی  $2\ \Omega$ ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. اگر نمودار میدان مغناطیسی بر حسب زمان به شکل زیر باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا  $T$ ، بار الکتریکی شارش یافته در حلقه، چند میلی کولن است؟



۱/۶ (۱)

۳/۲ (۲)

۱۶ (۳)

۳۲ (۴)

## پاسخ: گزینهٔ ۱

با جای گذاری داده‌ها در رابطه  $\Delta q = \frac{-N}{R} A \cos \theta \Delta B$ ، بار الکتریکی شارش یافته در حلقه را محاسبه کنید.

Hint

از برابری روابط  $\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$  و  $\varepsilon = IR$  داریم:

$$I = -\frac{N}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \xrightarrow{I = \frac{\Delta q}{\Delta t}} \Delta q = \frac{-N}{R} \Delta \Phi$$

درس‌Box

با توجه به این که تغییرات میدان مغناطیسی باعث تغییر شار مغناطیسی شده و به کمک رابطهٔ درس باکس داریم:

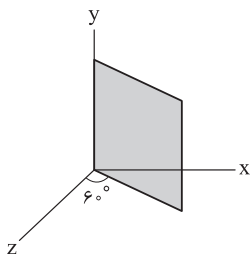
$$\Delta q = \frac{-N}{R} \Delta \Phi = \frac{-N}{R} A \cos \theta \Delta B \Rightarrow \Delta q = \frac{-1}{0.2} (4 \times 4 \times 10^{-4}) (\cos 0) (0 - 0.2) = 16 \times 10^{-4} \text{ C} \times 10^3 = 1.6 \text{ mC}$$

تبدیل C به mC

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۰ در شکل زیر، قابی با مساحت  $200 \text{ cm}^2$  موازی محور  $y$  قرار دارد. اگر در این محیط میدان مغناطیسی یکنواخت

$\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  (بر حسب تسلا)، برقرار باشد، شار مغناطیسی گذرنده از این قاب چند وبر است؟



(۱)  $0.3$

(۲)  $0.4$

(۳)  $0.3\sqrt{3}$

(۴)  $0.4\sqrt{3}$

### پاسخ: گزینه ۱

طبق رابطه  $\Phi = BA \cos \theta$ ، باید زاویه بین میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر صفحه غیر از  $90^\circ$  باشد، پس  $B_y$  شار مغناطیسی ایجاد نمی‌کند.

میدان مغناطیسی  $B_y$  موازی با سطح قاب است، در نتیجه شار مغناطیسی گذرنده از صفحه فقط به دلیل میدان مغناطیسی  $B_x$  است، یعنی:

$$\Phi = B_x A \cos \theta = 3 \times 200 \times 10^{-4} \times \underbrace{\cos 60^\circ}_{=1/2} = 3 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

### Hint

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

با در نظر گرفتن موارد زیر، نسبت شمار درشت مولکول‌ها به شمار پلیمرهای طبیعی کدام است؟  
«اتانول - سلولز - روغن زیتون - نایلون - تفلون - نشاسته - پلی اتن»

۳ (۱)

۲ / ۵ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

**مشاوره** متماً لازمه که بتوانید درشت مولکول‌ها و هم‌چنین پلیمرهای معرفی شده در کتاب درسی را شناسایی کنید. **ایها! یادتون که نرفته؟! همه درشت مولکول‌ها، الزاماً پلیمر نیستند، ولی همه پلیمرها، درشت مولکول محسوب می‌شن!** هم‌چنین باید قادر باشید که طبیعی یا ساختگی بودن این مواد را نیز تشخیص دهید. **فلاسه این که** تمرینات کتاب را با دقت بررسی کنید و همه نکات مربوط به این تمرین‌ها را یاد بگیرید.

## پاسخ: گزینه ۱

## درس: Box



همه موارد داده شده به جز اتانول ( $C_2H_5OH$ )، جزء درشت مولکول‌ها هستند. از طرفی فقط سلولز و نشاسته، پلیمر طبیعی به حساب می‌آیند؛ بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{6}{2} = 3$$

## پاسخ خیلی تشریحی ✓

(شیمی ۲) - با هم بیندیشیم صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ کتاب درسی)

الف) جدول را کامل کنید.

کتاب درسی

نام ماده	اندازه مولکول		جرم مولی		شمار اتم‌ها	
	کوچک یا متوسط	بسیار بزرگ	کم یا متوسط	بسیار زیاد	کم یا متوسط	بسیار زیاد
آب						
پلی اتن						
پروپان						
نشاسته گندم						
انسولین		*		*		*
سلولز						
روغن زیتون						

ب) به دسته‌ای از ترکیب‌های جدول، درشت‌مولکول می‌گویند. این مفهوم را در یک سطر تعریف کنید.  
پ) درشت‌مولکول‌های جدول صفحه پیش را با هم مقایسه کنید. چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی دارند؟  
ت) در کدام مولکول‌ها بخش‌هایی هست که در سرتاسر مولکول تکرار شده است؟  
ث) سلولز و نشاسته، پلیمر (بسیار) اند، با توجه به ساختار آن‌ها پلیمر را تعریف کنید.  
ج) پیش‌بینی کنید نیروی بین مولکولی در کدام دسته از مواد قوی‌تر است؟ چرا؟

۶۲ کدام مورد درست است؟

- (۱) همهٔ هیدروکربن‌های طبیعی و ساختگی، جزء مولکول‌های کوچک دسته‌بندی شده و شمار اتم‌های سازندهٔ مولکول آن‌ها کم است.
- (۲) تعیین ساختار مونومر شرکت‌کننده در واکنش بسپارش، ممکن نبوده و فرمول مولکولی دقیق پلیمرها را نمی‌توان نوشت. **گلوکز**
- (۳) فراوردهٔ واکنش مالتوز با آب، ماده‌ای است که از به هم پیوستن مولکول‌های آن، سلولز تولید می‌شود.
- (۴) نیروی بین مولکولی در درشت‌مولکول‌ها به اندازه‌ای قوی است که تمامی این مواد در شرایط معمولی به حالت جامدند.

### پاسخ: گزینهٔ ۲

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

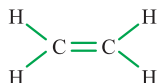
طبق واکنش  $C_{12}H_{22}O_{11}(aq) + H_2O(l) \rightarrow 2C_6H_{12}O_6(aq)$ ، فراوردهٔ واکنش مالتوز با آب، گلوکز است. از اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر، سلولز ساخته می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): برخی درشت‌مولکول‌ها مانند پلی‌اتن، پلی‌پروپن و ... هیدروکربن هستند؛ پس نمی‌شود گفت همهٔ هیدروکربن‌ها، جزء مولکول‌های کوچک می‌باشند.

گزینهٔ (۲): تعیین تعداد دقیق مونومرهای شرکت‌کننده در واکنش پلیمری شدن امکان ندارد، زیرا تا حالا هیچ قاعده‌ای برای اتصال شمار مونومرها به یکدیگر ارائه نشده است. به همین خاطر برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت و برای نمایش آن‌ها، واحد تکرارشونده را درون یک پرانتز یا کروشه نوشته و زیروند  $n$  را جلوی آن می‌نویسند. دقت کنید که ساختار مونومرهای شرکت‌کننده در واکنش تولید یک پلیمر، مشخص است.

**مثال** مونومر سازندهٔ پلی‌اتن  $(-C_2H_4-)_n$ ، گاز اتن  $(C_2H_4)$  با ساختار زیر است:



گزینهٔ (۴): بدانید و آله باشید! که با توجه به جرم و حجم زیاد درشت‌مولکول‌ها، در کل نیروی بین مولکولی در این دسته از مولکول‌ها نسبت به مولکول‌های کوچک، بیشتر است؛ به همین خاطر در دمای اتاق معمولاً به حالت جامدند، اما برخی از آن‌ها مانند روغن زیتون، در شرایط معمولی به حالت مایع هستند.

با توجه به مراحل تولید پوشاک از الیاف پنبه، می توان گفت در مرحله .....، ..... به ..... تبدیل می شود.

(۱) بافندگی - نخ - پارچه آماده استفاده  
(۲) ریسندگی - الیاف - نخ  
(۳) فراوری - پارچه آماده استفاده - پوشاک  
(۴) دوزندگی - پارچه خام - پارچه آماده استفاده

## پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ مراحل اصلی تبدیل الیاف پنبه به پوشاک، به صورت زیر است:



با توجه به الگوی بالا، می توان گفت که در مرحله ریسندگی، الیاف به نخ تبدیل می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

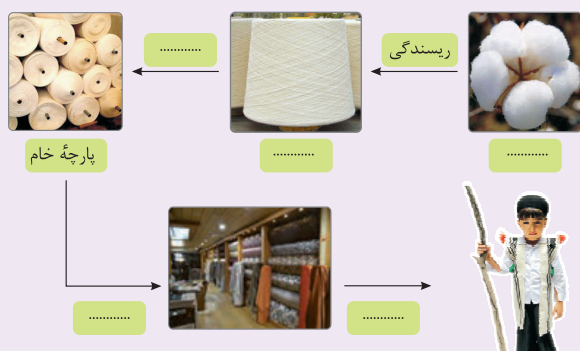
گزینه (۱): در مرحله بافندگی، نخ به پارچه خام (نه پارچه آماده استفاده) تبدیل می شود.

گزینه (۳): در مرحله دوزندگی (نه فراوری)، پارچه آماده استفاده به پوشاک تبدیل می شود.

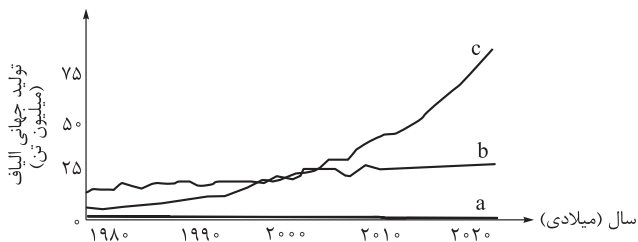
گزینه (۴): در مرحله دوزندگی، پارچه آماده استفاده (نه پارچه خام) به پوشاک (نه پارچه آماده استفاده) تبدیل می شود.

در هر یک از جاهای خالی یکی از واژه های «نخ، الیاف، دوزندگی، فراوری و بافندگی» را قرار دهید.

(شیمی (۲) - خود را بیازمایید صفحه ۱۰۱ کتاب درسی)



با توجه به نمودار زیر که روند تولید جهانی الیاف پلی استر، پشم و پنبه را نشان می دهد، کدام موارد زیر درست است؟ **۶۴**



الف) (b) نمونه‌ای از الیاف طبیعی است که افزون بر تولید پوشاک، در تهیه گاز استریل نیز کاربرد دارد.

ب) حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از (c) تهیه می‌شود.

پ) الیاف (c) برخلاف الیاف (a) و (b)، جزء الیاف ساختگی است.

ت) مونومر سازنده (b) سلولز است که توسط اتم‌های اکسیژن (—O—) به یکدیگر متصل می‌شوند.

۱) الف و ب      ۲) الف و پ      ۳) ب و پ      ۴) پ و ت

### پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

الیاف (a)، (b) و (c) به ترتیب نشان‌دهنده پشم، پنبه و پلی استر هستند.

بررسی عبارت‌ها:

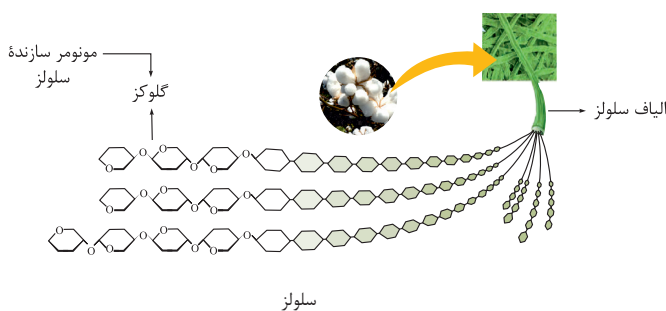
الف) پنبه، یکی از الیاف طبیعی است که سهم زیادی در تولید پوشاک دارد. از پنبه علاوه بر تولید پوشاک، در تولید رویه مبلی، تور ماهی‌گیری، گاز استریل و ... نیز استفاده می‌شود.

ب) دقت کنید که حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود؛ نه الیاف پلی استری!

پ) پلی استر جزء الیاف ساختگی است، در حالی که پنبه و پشم جزء الیاف طبیعی محسوب می‌شوند.

ت) پنبه از الیاف (مولکول‌های) سلولز تشکیل شده که خود سلولز، زنجیری بسیار بلند است که از اتصال شمار بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر (توسط اتم‌های اکسیژن (پیوندهای —O—)) ساخته می‌شود.

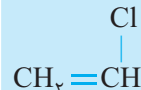
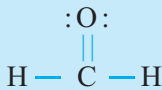
هواستون باشه که سلولز، خود پلیمری (پلی ساکاریدی) است که مونومرهای سازنده‌اش، مولکول‌های گلوکز هستند و در واقع سلولز مونومر سازنده پنبه محسوب نمی‌شود.



### پاسخ خیلی تشریحی ✓

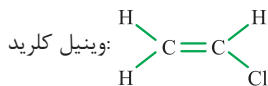
کدام مطلب دربارهٔ مونومر سازندهٔ پلی‌وینیل کلرید، نادرست است؟

- (۱) شعاع اتمی هالوژن موجود در آن از شعاع اتمی هالوژن موجود در تفلون، بیشتر است. **F**
- (۲) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در ساختار آن، با این نسبت در ساده‌ترین آلدئید برابر است.
- (۳) مجموع شمار اتم‌ها در هر مولکول از آن، با شمار اتم‌های هیدروژن در سرگروه ترکیب‌های آروماتیک برابر است.
- (۴) با جایگزین کردن اتم‌های هیدروژن در مولکول اتن با اتم‌های کلر، تهیه می‌شود. **C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>**



### پاسخ: گزینهٔ ۴

مونومر سازندهٔ پلی‌وینیل کلرید، وینیل کلرید (C<sub>2</sub>H<sub>3</sub>Cl) با ساختار زیر است:

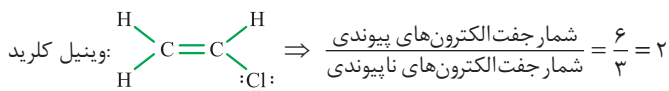


با توجه به ساختار وینیل کلرید مشخصه که این ترکیب، حاصل جایگزین شدن تنها یک اتم (نه اتم‌های!) هیدروژن موجود در ساختار اتن با اتم کلر می‌باشد.

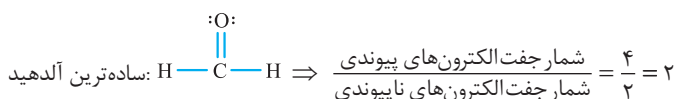
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هالوژن موجود در وینیل کلرید، کلر (Cl) و هالوژن موجود در مونومر تفلون، فلئور (F) است. می‌دانیم که در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد؛ بنابراین شعاع اتمی Cl از F بیشتر می‌باشد.

گزینهٔ (۲):



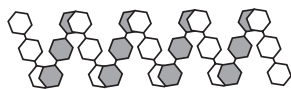
فرمول عمومی آلدئیدها به صورت R—C(=O)—H است که در آن R می‌تواند هیدروژن یا گروه کربنی باشد. اگر به جای R، اتم هیدروژن قرار دهیم، ساده‌ترین آلدئید به دست می‌آید:



گزینهٔ (۳): در مولکول وینیل کلرید (C<sub>2</sub>H<sub>3</sub>Cl)، در مجموع ۶ اتم وجود دارد. همچنین مولکول بنزن (C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>) نیز به عنوان سرگروه ترکیب‌های آروماتیک، دارای ۶ اتم هیدروژن می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۶ با توجه به ساختار مولکول داده شده که نمایی ساده از رشته های یک درشت مولکول را نشان می دهد، کدام مورد درست است؟



(۱) نوعی پلیمر طبیعی است که واحدهای تکرارشونده آن، حلقه های سیکلوهگزان هستند.

(۲) از آن جا که مونومرهای سازنده آن با سلولز یکسان است، خواص یکسانی با آن دارد.

(۳) نیروی بین مولکولی میان ذره های سازنده آن از نفتالن و آب قوی تر است.

(۴) همانند پلی اتن، نوعی هیدروکربن به شمار می رود و به دلیل جرم مولی زیاد در دسته درشت مولکول ها قرار می گیرد.

### پاسخ: گزینه ۳

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

نشاسته مولکولی بزرگ و سنگین است که در ساختار خود تعداد زیادی اتم دارد. به همین دلیل، نیروی بین مولکولی آن نسبت به مولکول های کوچک مانند آب یا نفتالن قوی تر است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): نشاسته پلیمری طبیعی است و از اتصال مولکول های گلوکز ساخته می شود. هر واحد گلوکز حلقه ای شش ضلعی دارد که از پنج اتم کربن و یک اتم اکسیژن تشکیل شده و با حلقه سیکلوهگزان فرق دارد.

گزینه (۲): مونومر سازنده سلولز و نشاسته، گلوکز است، اما به دلیل تفاوت ساختار آن ها، خواص این دو ترکیب با هم متفاوت است.

گزینه (۴): هیدروکربن ها فقط از دو عنصر کربن و هیدروژن ساخته شده اند؛ پس نشاسته هیدروکربن نیست، بلکه یک پلی ساکارید طبیعی است که از گلوکز ساخته شده و شامل کربن، هیدروژن و اکسیژن است.

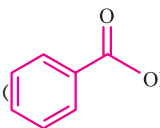
کدام مطلب زیر در ارتباط با مولکول‌های استیرن، نادرست است؟

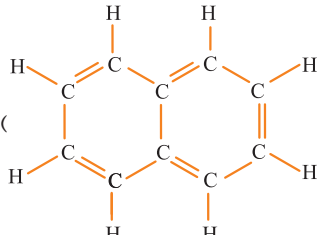
- (۱) اگر در ساختار آن به جای گروه  $C_4H_3$  متصل به حلقه بنزن، عامل کربوکسیل قرار دهیم، یک بازدارنده مهم به دست می‌آید.
- (۲) همانند نفتالن، یک ترکیب آروماتیک است.
- (۳) در ساختار آن، هر اتم کربن توسط یک پیوند  $C=C$  به یک اتم کربن دیگر متصل است.
- (۴) در یک بازه زمانی معین در واکنش سوختن کامل آن،  $\frac{\bar{R}_{O_2}}{\bar{R}_{H_2O}} = 2/5$  است.

### پاسخ: گزینه ۱

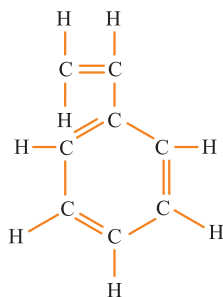
اگر در ساختار استیرن (  ) به جای گروه  $C_4H_3$  متصل به حلقه بنزن، عامل کربوکسیل ( $-COOH$ ) قرار دهیم، یک

پاسخ خیلی تشریحی ✓

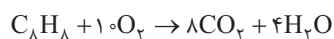
نگهدارنده (نه بازدارنده) به نام بنزوئیک اسید (  ) به دست می‌آید. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): استیرن همانند نفتالن (  )، دارای حلقه بنزی بوده و یک ترکیب آروماتیک محسوب می‌شود.

گزینه (۳): درسته! در ساختار استیرن همه اتم‌های کربن توسط یک پیوند  $C=C$  به یک اتم کربن دیگر متصل هستند. ببینید:

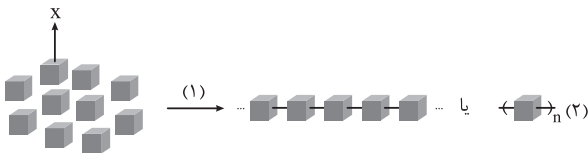
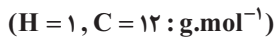


گزینه (۴): واکنش موازنه شده سوختن کامل استیرن به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \frac{\bar{R}_{O_2}}{\bar{R}_{H_2O}} = \frac{O_2 \text{ ضریب}}{H_2O \text{ ضریب}} = \frac{10}{4} = 2/5$$

با توجه به شکل زیر که واکنش پلیمری شدن را به شکل ساده نمایش می‌دهد، کدام مطلب، نادرست است؟



(۱) اگر فراورده واکنش، پلی اتن باشد، شماره‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهنده گرما و فشار و حالت فیزیکی جامد هستند.

(۲) اگر مولکول‌های X، گاز عمل آورنده در کشاورزی و میانگین جرم مولی فراورده برابر با  $14000 \text{ g.mol}^{-1}$  باشد، عدد n برابر ۵۰۰ است.

(۳) اگر فراورده واکنش پلی اتن باشد، مولکول‌های X دارای ۶ پیوند اشتراکی هستند.

(۴) هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند  $C=C$  داشته باشد، می‌تواند در واکنش بالا به جای X قرار بگیرد.

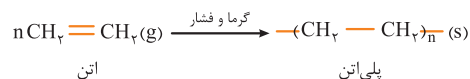
### پاسخ: گزینه ۴

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

مونومرهای سازنده این پلیمرها، باید در زنجیره کربنی خود پیوند دوگانه کربن - کربن ( $C=C$ ) داشته باشند تا در طی واکنش، این پیوند دوگانه کربن - کربن شکسته شده و باعث پیوستن مولکول‌های مونومر، به یکدیگر شود. در ساختار بنزن هم پیوند  $C=C$  وجود دارد ولی نمی‌تواند در واکنش بسپارش شرکت کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

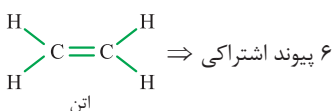
گزینه (۱): شماره (۱) شرایط واکنش می‌باشد که در دما و فشار بالا انجام می‌شود و شماره (۲) هم حالت فیزیکی پلیمر (پلی اتن  $(C_2H_4)_n$ ) است که در دمای اتاق، حالت فیزیکی جامد دارد. واکنش پلیمری شدن اتن به صورت زیر است:



گزینه (۲): گاز عمل آورنده در کشاورزی، اتن است:

$$\text{جرم مولی پلی اتن} = n \times \text{جرم مولی اتن} \Rightarrow 14000 = n \times 28 \Rightarrow n = \frac{14000}{28} = 500$$

گزینه (۳): اگر فراورده واکنش پلی اتن باشد، مونومر سازنده آن اتن خواهد بود که دارای ۶ پیوند اشتراکی در ساختار خود است.



درستی یا نادرستی کدام گزینه، با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) در ساختار پلی اتن شفاف برخلاف پلی اتن کدر، برخی از اتم‌های کربن به بیش از دو اتم کربن دیگر متصل هستند.
- (۲) سطح تماس مولکول‌های پلی اتن سنگین با یکدیگر، بیشتر از سطح تماس مولکول‌های پلی اتن سبک است.
- (۳) در جرم‌های برابر، پلی اتن شاخه‌دار نسبت به پلی اتن بدون شاخه، حجم کم‌تری اشغال می‌کند و چگالی هر دو کم‌تر از چگالی آب است.
- (۴) استحکام پلی اتن سنگین از پلی اتن سبک بیشتر است، اما نوع نیروهای بین مولکولی آن‌ها یکسان است.

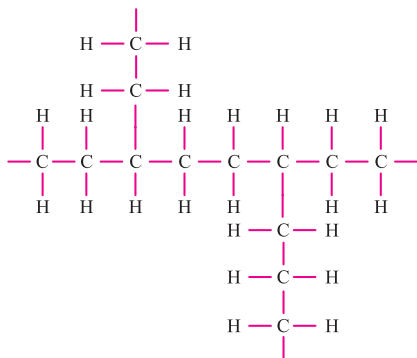
### پاسخ: گزینه ۳

مقایسه پلی اتن سبک و سنگین:

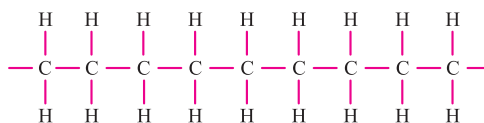
نوع پلی اتن	سبک	سنگین
ساختار	شاخه‌دار	بدون شاخه
فرمول مولکولی	$(C_2H_4)_n$	$(C_2H_4)_n$
نوع نیروی بین مولکولی	وان دروآلسی	وان دروآلسی
شفاف یا کدر بودن	شفاف	کدر
کاربرد	ساخت کیسه‌های پلاستیکی شفاف	ساخت لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب، بطری کدر شیر و اسباب‌بازی
چگالی	$0.92 \text{ g.cm}^{-3}$	$0.97 \text{ g.cm}^{-3}$
سختی و استحکام، چگالی، نقطه ذوب و قدرت نیروهای بین مولکولی	کم‌تر	بیشتر

بیاید به ترتیب گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینه (۱): پلی اتن سبک، شفاف و پلی اتن سنگین، کدر است. پلی اتن سبک دارای زنجیری شاخه‌دار است؛ یعنی زنجیر اصلی، تعداد زیادی شاخه جانبی اتنی دارد و برخی از اتم‌های کربن به بیش از دو اتم کربن دیگر متصل هستند. پلی اتن سنگین دارای زنجیری بلند و بدون شاخه است. در این نوع پلیمر، هر اتم کربن، حداکثر می‌تواند به دو اتم کربن دیگر متصل باشد. ✓



پلی اتن سبک



پلی اتن سنگین

گزینه (۲): پلی اتن سنگین، بدون شاخه و پلی اتن سبک، شاخه‌دار است؛ در نتیجه وقتی مولکول‌های پلی اتن سنگین در کنار هم قرار بگیرند، سطح تماس بیشتری نسبت به پلی اتن سبک خواهند داشت.

گزینه (۳): چگالی پلی اتن سنگین (حدود  $0.97 \text{ g.cm}^{-3}$ ) از پلی اتن سبک (حدود  $0.92 \text{ g.cm}^{-3}$ ) بیشتر است؛ اما دقت کنید چگالی هر دو پلی اتن از چگالی آب (حدود  $1 \text{ g.cm}^{-3}$ ) کم‌تر است و روی آب شناور می‌مانند. *هواستون باشک* که با توجه به چگالی کم‌تر پلی اتن شاخه‌دار (سبک) نسبت به پلی اتن بدون شاخه (سنگین)، در جرم‌های یکسان، پلی اتن شاخه‌دار حجم بیشتری خواهد داشت.

گزینه (۴): پلی اتن سنگین نسبت به پلی اتن سبک، سختی و استحکام بیشتری دارد. جاذبه هر دو از نوع وان دروآلسی است، اما در پلی اتن سنگین، قوی‌تر از پلی اتن سبک است. ✓

کرتس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به ساختار و ویژگی‌های تفلون، کدام موارد زیر درست است؟ ( $C = 12, F = 19 : g.mol^{-1}$ )

- الف) با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد و در حلال‌های آلی حل می‌شود.  
 ب) نقطه ذوب بالایی دارد و از آن برای تولید نخ‌دندان نیز استفاده می‌شود.  
 پ) اگر جرم مولی آن  $10^4$  گرم بر مول باشد، شمار واحد تکرارشونده آن  $10^4$  خواهد بود.  
 ت) پلیمر تفلون را می‌توان از گاز تترافلوئورو اتان که نوعی سردکننده است، به دست آورد.
- (۱) الف و پ      (۲) الف و ت      (۳) ب و ت      (۴) ب و پ

### پاسخ: گزینه ۴

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) پلیمر تفلون از نظر شیمیایی بی‌اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد، در حلال‌های آلی حل نمی‌شود و نجسب است، به همین دلیل از آن در ظروف نجسب مثل ماهی‌تابه استفاده می‌شود.

ب) تفلون، نقطه ذوب بالایی دارد و در برابر گرما مقاوم است. از تفلون در تهیه نخ‌دندان، کف اتو و نوارهای آب‌بندی لوله‌ها (نوار تفلون) هم استفاده می‌شود.

پ) می‌دانیم که فرمول شیمیایی تفلون، به صورت  $(C_2F_4)_n$  است:

$$(C_2F_4)_n \text{ جرم مولی} = [(2 \times 12) + (4 \times 19)] \times n = 100n = 10^6 \Rightarrow n = 10^4$$

بنابراین شمار واحد تکرارشونده آن  $10^4$  می‌باشد.

ت) تترافلوئورو اتن (نه تترافلوئورو اتان!)، گازی است که در سردکننده‌ها کاربرد دارد و در شرایط مناسب به پلی‌تترافلوئورو اتن تبدیل می‌شود. تفلون، نام تجاری پلی‌تترافلوئورو اتن است که پلانکت در دهه ۱۹۳۰ به طور اتفاقی آن را کشف کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر تعداد پیوندهای سه گانه در ساختار یک نمونه پلی سیانو اتن،  $\frac{2}{3}$  برابر تعداد پیوندهای دو گانه در ساختار یک نمونه پلی استیرین باشد، مجموع جرم اتم‌های کربن در پلی سیانو اتن، چند برابر مجموع جرم این اتم‌ها در پلی استیرین است؟ ( $H = 1, C = 12, N = 14 : g.mol^{-1}$ )

(۱) ۷۵ / ۰

(۲) ۵ / ۰

(۳) ۲

(۴)  $\frac{4}{3}$ 

**مشاوره** ویژگی‌های ساختاری و کاربردهای پلیمرهای افزایشی (مانند پلی اتن، پلی پروپن، پلی استیرن و ...) معرفی شده در کتاب درسی و هم چنین مونومرهای سازنده آن‌ها، از موارد بسیار مهمی است که هم در قالب سوالات چندگزینه‌ای و هم در قالب سوالات محاسباتی در کنکور سراسری مورد پرسش واقع می‌شود و تسلط بر اون‌ها از اوپ‌ها واپاته!

## پاسخ: گزینه ۱

از آن‌جا که کتاب درسی، شما را با پلی اتن، پلی سیانو اتن، پلی استیرن، تفلون و پلی وینیل کلرید آشنا کرده، بر شما واجب است که ویژگی‌ها و کاربردهای این پلیمرها را به طور کامل بلد باشید:

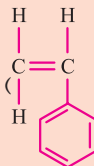
## درس‌Box

نام و ساختار مونومر	نام و ساختار پلیمر	کاربرد
<p>اتن</p>	<p>پلی اتن</p>	کیسه‌های پلاستیکی، لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب یا بطری پلاستیکی
<p>سیانو اتن</p>	<p>پلی سیانو اتن</p>	فرش، پارچه، پتو
<p>پروپن</p>	<p>پلی پروپن</p>	به عنوان پلاستیک در تجهیزات آزمایشگاهی و پزشکی مانند سرنگ
<p>استیرن</p>	<p>پلی استیرن</p>	به عنوان پلاستیک در صنعت بسته‌بندی مواد غذایی مانند ظروف یکبارمصرف
<p>تترافلورو اتن</p>	<p>پلی تترافلورو اتن یا تفلون</p>	ظروف نجسب، نخ‌دندان، کف اتو، نوارهای آب‌بندی لوله‌ها
<p>وینیل کلرید (کلرو اتن)</p>	<p>پلی وینیل کلرید</p>	لوله‌های انتقال آب، فاضلاب و گاز، کیسه خون

گام اول: با توجه به این که سیانو اتن ( ) دارای یک پیوند سه گانه در ساختار خود است، تعداد پیوندهای سه گانه در ساختار نمونه پلی سیانو اتن را محاسبه می‌کنیم.

$$(C_2H_3N)_n \Rightarrow n \text{ پیوند سه‌گانه}$$

## پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: استیرن (دارای چهار پیوند دوگانه در ساختار خود است که در واکنش پلیمری شدن، یکی از آن‌ها شکسته

می‌شود؛ پس تعداد پیوندهای دوگانه در ساختار نمونه پلی‌استیرن برابر است با:  $3m$  پیوند دوگانه  $\Rightarrow (C_8H_8)_m$

گام سوم: با توجه به نسبت تعداد پیوندهای سه‌گانه موجود در ساختار نمونه پلی‌سیانو اتن به تعداد پیوندهای دوگانه موجود در ساختار نمونه پلی‌استیرن، نسبت زیروندها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه در ساختار یک نمونه پلی‌سیانو اتن}}{\text{تعداد پیوندهای دوگانه در ساختار یک نمونه پلی‌استیرن}} = \frac{n}{3m} = \frac{2}{3} \Rightarrow n = 2m$$

گام چهارم: با توجه به نسبت زیروندها، نسبت مجموع جرم اتم‌های کربن موجود در نمونه پلی‌سیانو اتن به جرم این اتم‌ها در نمونه پلی‌استیرن را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{مجموع جرم اتم‌های کربن در نمونه پلی‌سیانو اتن}}{\text{مجموع جرم اتم‌های کربن در نمونه پلی‌استیرن}} = \frac{3 \times 12 \times n}{8 \times 12 \times m} \xrightarrow{n=2m} \frac{3 \times 12 \times m}{4 \times 12 \times m} = 0.75$$

در هر زنجیر از یک نمونه پلی‌استیرن، میانگین شمار پیوندهای دوگانه،  $7/5$  برابر میانگین شمار پیوندهای سه‌گانه در هر زنجیر از یک نمونه پلی‌سیانو اتن است. اگر میانگین شمار مونومرهای پلی‌استیرن در هر زنجیر، برابر  $3000$  باشد، میانگین جرم مولی پلی‌سیانو اتن، برابر چند گرم است؟ ( $H = 1, C = 12, N = 14 : g.mol^{-1}$ )

(سوال ۹۸ کنکور تهری ۱۴۰۴ (فارج از کشور))

$$2 / 12 \times 10^4 \quad (2)$$

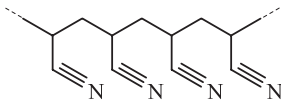
$$1 / 59 \times 10^4 \quad (1)$$

$$3 / 18 \times 10^4 \quad (4)$$

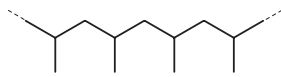
$$6 / 36 \times 10^4 \quad (3)$$

با توجه به ساختارهای زیر که هر کدام مربوط به یک پلیمر هستند، کدام مورد، نادرست است؟

$$(H = 1, C = 12, N = 14 : g.mol^{-1})$$



پلیمر (۱)



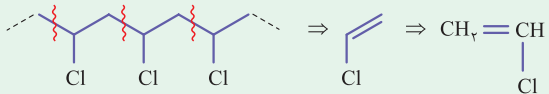
پلیمر (۲)

- (۱) شمار پیوندهای C—H در ساختار مونومر پلیمر (۲)، دو برابر شمار این پیوندها در ساختار مونومر لیم (۱) است.  
 (۲) به دلیل سنگین‌تر بودن مونومر سازنده پلیمر (۲) نسبت به اتن، جرم مولی این پلیمر به یقین از پلی اتن بیشتر است.  
 (۳) پلیمر (۱) در تهیه پتو کاربرد داشته و در ساختار مونومر سازنده آن، پیوندهای یگانه، دوگانه و سه‌گانه وجود دارد.  
 (۴) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار مونومر سازنده این دو پلیمر، با هم برابر است.

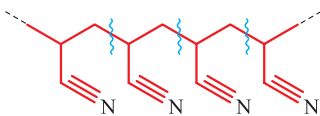
### پاسخ: گزینه ۲



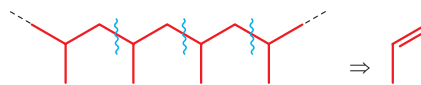
اگر ساختار گسترده یک پلیمر داده شود و مونومر سازنده آن را از شما بخواهند، کافی است ابتدا در زنجیر اصلی، پیوندها را به صورت یک در میان بشکنید و سپس پیوند بین دو کربن متوالی را که سالم باقی مانده است، به پیوند دوگانه تبدیل کنید.



نام مونومر سازنده پلیمر (۱)، سیانو اتن و نام مونومر سازنده پلیمر (۲)، پروپین است. ببینید:



سیانو اتن

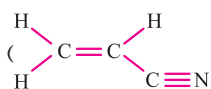


پروپین

دقت کنید که جرم مولی پلی اتن و پلی پروپین (پلیمر (۲)) به شمار واحدهای تکرار شونده آن‌ها (n) نیز بستگی دارد و فقط با جرم مولی مونومرهای سازنده، نمی‌توان جرم مولی پلیمرها را مقایسه کرد.

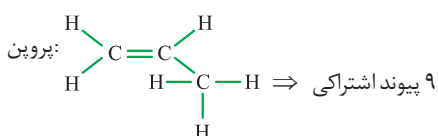
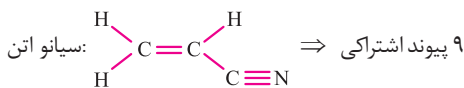
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با توجه به این که در ساختار پلی پروپین  $((C_3H_6)_n)$  و پلی سیانو اتن  $((C_3H_3N)_n)$ ، همه اتم‌های هیدروژن به اتم‌های کربن متصل هستند، شمار پیوندهای C—H در ساختار مونومر هر یک از آن‌ها، برابر با شمار اتم‌های H بوده و نسبت خواسته شده، برابر با  $\frac{6}{3} = 2$  می‌باشد.



گزینه (۳): پلی سیانو اتن (پلیمر (۱)) در تهیه پتو به کار می‌رود و در ساختار مونومر سازنده آن  $((C_3H_3N)_n)$  همه اتم‌های هیدروژن به اتم‌های کربن متصل هستند، شمار پیوندهای C—H در ساختار مونومر هر یک از آن‌ها، برابر با شمار اتم‌های H بوده و نسبت خواسته شده، برابر با  $\frac{6}{3} = 2$  می‌باشد.

گزینه (۴): ببینید:



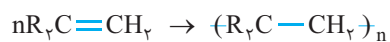
۷۳ اگر در اثر بسپارش ۱۵ مول از ترکیبی با ساختار  $R_pC=CH_p$  با بازده ۸۰ درصد، ۱۰۰۸ گرم پلیمر به دست آمده باشد،  $R$  کدام است؟



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا با توجه به شمار مول‌های مونومر  $R_pC=CH_p$  و بازده واکنش، شمار مول‌های مصرفی مونومر در عمل را، که برابر با تعداد واحدهای تکرارشونده در هر مول پلیمر تولیدشده است، به دست می‌آوریم:



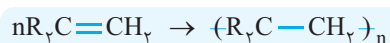
$$15 \text{ mol } R_pC=CH_p \times \frac{80 \text{ mol } n}{100 \text{ mol } R_pC=CH_p} = 12 \text{ mol}$$

شمار واحد تکرارشونده در هر مول پلیمر تولیدشده ۱۲ mol

در ادامه با توجه به شمار واحد تکرارشونده در هر مول پلیمر تولیدشده و جرم پلیمر مورد نظر، با استفاده از فرمول زیر، جرم مولی مونومر  $R_pC=CH_p$  را محاسبه می‌کنیم:

جرم مولی مونومر  $\times$  شمار واحدهای تکرارشونده در هر مول پلیمر (n) = جرم پلیمر

$$\Rightarrow 1008 = 12 \times R_pC=CH_p \Rightarrow \text{جرم مولی مونومر } R_pC=CH_p = \frac{1008}{12} = 84 \text{ g.mol}^{-1}$$



په جور دیگه

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{مول}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{15 \times \frac{80}{100}}{n} = \frac{1008}{1 \times n}$$

ضریب مونومر / جرم مولی  $\times$  ضریب پلیمر

$$\Rightarrow \text{جرم مولی مونومر} = \frac{1008}{12} = 84 \text{ g.mol}^{-1}$$

در نهایت با توجه به جرم مولی مونومر  $R_pC=CH_p$ ، جرم مولی گروه R را به دست می‌آوریم:

$$R_pC=CH_p \text{ جرم مولی مونومر } 2R + (2 \times 12) + (2 \times 1) = 84 \Rightarrow 2R + 26 = 84 \Rightarrow 2R = 58$$

$$\Rightarrow R = 29 \text{ g.mol}^{-1}$$

با توجه به گزینه‌ها، از آن‌جا که R، گروه آلکیل با فرمول عمومی  $C_nH_{2n+1}$  است، خواهیم داشت:

$$R : C_nH_{2n+1} \Rightarrow R \text{ جرم مولی} = 12n + 2n + 1 \Rightarrow 29 = 14n + 1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow R = C_2H_5$$

۷۴ الگوی زنجیرهای پلی اتن سنگین به کدام صورت بوده و این پلیمر در کدام مورد کاربرد دارد؟

بدون شاخه

(۱) کیسه‌های پلاستیکی

(۲) کیسه‌های پلاستیکی

(۳) دبه‌های پلاستیکی آب

(۴) دبه‌های پلاستیکی آب

### پاسخ: گزینه ۴

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

پلی اتن سنگین نوعی پلیمر با چگالی بالا است که از طریق پلیمری شدن اتن به دست می‌آید. این پلیمر به دلیل ویژگی‌هایی مانند استحکام، سختی، مقاومت در برابر ضربه و مواد شیمیایی، در تولید انواع محصولات پلاستیکی کاربرد دارد.

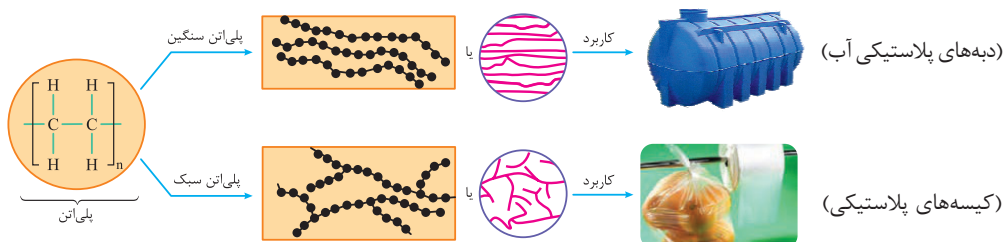
از جمله کاربردهای پلی اتن سنگین می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

● **لوله‌های پلاستیکی:** به دلیل استحکام و مقاومت در برابر فشار

● **دبه‌های آب و مواد شوینده:** به دلیل مقاومت در برابر مواد شیمیایی و نفوذناپذیری در برابر آب

● **بطری‌های کدر شیر:** به دلیل مقاومت در برابر ضربه و نفوذناپذیری در برابر نور

اما پلی اتن سنگین به دلیل انعطاف‌پذیری کم، برای تولید کیسه‌های پلاستیکی مناسب نیست، کیسه‌های پلاستیکی معمولاً از پلی اتن سبک ساخته می‌شوند که انعطاف‌پذیری بیشتری دارد.



مولکول‌هایی از پلی‌وینیل کلرید و تفلون با جرم مولی برابر در اختیار داریم. تعداد واحد تکرارشونده در مولکول پلی‌وینیل کلرید چند برابر این تعداد در مولکول تفلون بوده و درصد جرمی کربن در پلی‌وینیل کلرید، چند برابر

درصد جرمی کربن در گاز اتان است؟ ( $H = 1, C = 12, F = 19, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$ )

$$\circ / 48 - 1/2 (2)$$

$$\circ / 72 - 1/2 (1)$$

$$\circ / 48 - 1/6 (4)$$

$$\circ / 72 - 1/6 (3)$$

### پاسخ: گزینه ۴

جرم مولی پلی‌وینیل کلرید و تفلون را می‌توان از ضرب کردن جرم مولی مونومرهای سازنده این دو پلیمر در تعداد واحدهای تکرارشونده آن‌ها به دست آورد:

$$\left. \begin{aligned} (C_2H_3Cl)_n \text{ جرم مولی} &= n \times [2(12) + 3(1) + 35.5] = 62/5 n \text{ g.mol}^{-1} \\ (C_2F_4)_m \text{ جرم مولی} &= m \times [2(12) + 4(19)] = 100 m \text{ g.mol}^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{25 \times 2/5}{62/5 n} = \frac{25 \times 4}{100 m} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{4}{2/5} = 1/6$$

برای قسمت دوم سؤال، درصد جرمی کربن را در پلی‌وینیل کلرید و اتان محاسبه کرده و نسبت مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$(C_2H_3Cl)_n \text{ جرم کربن موجود در پلی‌وینیل کلرید} = \frac{\text{جرم کربن موجود در پلی‌وینیل کلرید}}{\text{جرم مولی پلی‌وینیل کلرید}} \times 100 = \frac{(2 \times 12)n}{62/5 n} \times 100$$

$$(C_2H_6)_m \text{ جرم کربن موجود در اتان} = \frac{\text{جرم کربن موجود در اتان}}{\text{جرم مولی اتان}} \times 100 = \frac{2 \times 12}{30} \times 100$$

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن در پلی‌وینیل کلرید}}{\text{درصد جرمی کربن در اتان}} = \frac{24}{30} \xrightarrow{62/5 = \frac{500}{8}} \frac{3}{50} = \frac{24}{50} = \circ / 48$$

### پاسخ خیلی تشریحی ✓



در یک واکنش فرضی، مقدار معینی استیرن با ۵ گرم گاز هیدروژن در شرایط مناسب به طور کامل واکنش داده و یک ترکیب سیرشده حاصل می‌شود. اگر همین مقدار استیرن را در شرایط مناسب برای واکنش پلیمری شدن قرار دهیم، تعداد اتم‌های موجود در پلیمر حاصل، با تعداد اتم‌های هیدروژن موجود در چند گرم پلی پروپن برابر خواهد بود؟  
( $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$ )

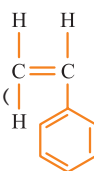
۷۰ (۴)

۶۰ (۳)

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴



گام اول: استیرن ( ) سیرنشده است و چهار پیوند دوگانه کربن - کربن ( $C=C$ ) در ساختار خود دارد؛ پس هر مول

استیرن با چهار مول گاز هیدروژن در شرایط مناسب به طور کامل واکنش می‌دهد.



مقدار مول استیرن شرکت‌کننده در واکنش را به دست می‌آوریم:

$$5 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_8H_8}{4 \text{ mol } H_2} = \frac{5}{8} \text{ mol } C_8H_8$$

گام دوم: از آن‌جا که تعداد اتم‌ها در پلیمرهای افزایشی با مجموع تعداد اتم‌ها در مونومرهای آن‌ها برابر است، پس داریم:

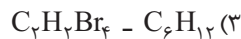
$$\frac{5}{8} \text{ mol } C_8H_8 \times \frac{16 \text{ mol اتم}}{1 \text{ mol } C_8H_8} \times \frac{N_A \text{ اتم}}{1 \text{ mol اتم}} = 10 N_A$$

گام سوم: جرم پلی پروپن ( $(C_3H_6)_n$ ) که دارای  $10 N_A$  اتم هیدروژن (H) در ساختار خود است، را به دست می‌آوریم:

$$10 N_A \text{ اتم } H \times \frac{1 \text{ mol } H}{N_A \text{ اتم } H} \times \frac{1 \text{ mol } (C_3H_6)_n}{6n \text{ mol } H} \times \frac{42n \text{ g } (C_3H_6)_n}{1 \text{ mol } (C_3H_6)_n} = 70 \text{ g}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ترکیب ..... برخلاف ترکیب ..... می تواند نقش مونومر را در واکنش پلیمری شدن داشته باشد. (همه ترکیبها را زنجیری در نظر بگیرید.)

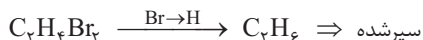


### پاسخ: گزینه ۲

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

ترکیبهای سیرشده، نمی توانند مانند اتن در واکنش پلیمری شدن شرکت کنند، هم چنین ترکیبهایی که در زنجیر کربنی خود پیوند  $C=C$  دارند، می توانند نقش مونومر را ایفا کنند. با این توضیح، بریم گزینه ها رو یکی یکی بررسی کنیم:

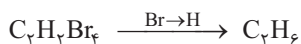
گزینه (۱): با توجه به این که در ترکیبهای آلی، هالوژن ها مانند اتم هیدروژن یک پیوند تشکیل می دهند، در این گونه موارد می توان به جای اتم های هالوژن، هیدروژن قرار داد و سپس سیرشده یا سیرنشده بودن ترکیب را بررسی کرد:



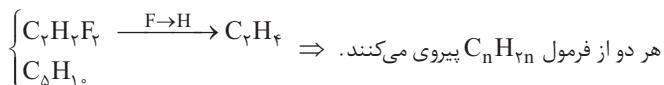
ترکیبهایی که از فرمول عمومی آلکانها ( $C_nH_{2n+2}$ ) پیروی می کنند، سیرشده اند و نمی توانند نقش مونومر را ایفا کنند. ترکیب دوم در این گزینه،  $C_7H_8$  است که فرمول مولکولی آن نیز از فرمول آلکانها پیروی می کند و نمی تواند نقش مونومر را ایفا کند.

گزینه (۲): هر دو ترکیب سیرشده هستند و نمی توانند نقش مونومر را ایفا کنند.

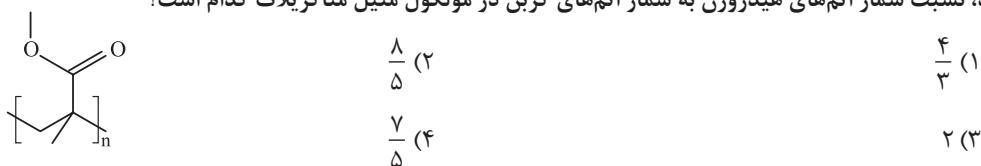
گزینه (۳): فرمول مولکولی  $C_6H_{12}$ ، از فرمول آلکانها ( $C_nH_{2n}$ ) پیروی می کند و می تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کند، در حالی که  $C_7H_7Br_4$  سیرشده است و نمی تواند نقش مونومر را داشته باشد:



گزینه (۴): هر دو ترکیب این گزینه، می توانند در واکنش پلیمری شدن شرکت کنند:



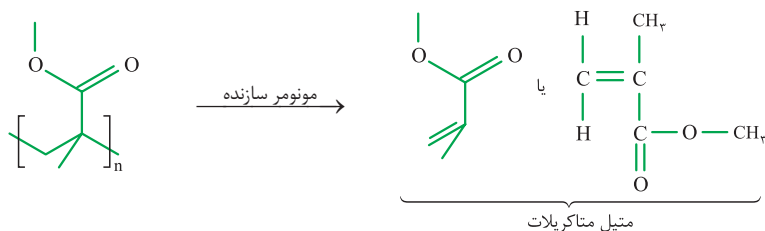
اگر متیل متاکریلات در واکنش بسپارش مانند پلیمری شدن اتن شرکت کند و ساختار پلیمر حاصل به صورت زیر باشد، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در مولکول متیل متاکریلات کدام است؟



### پاسخ: گزینه ۲

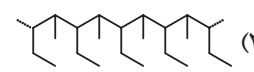
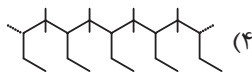
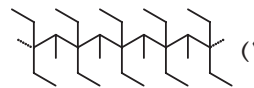
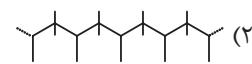
### پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای تعیین ساختار متیل متاکریلات (مونومر سازنده پلیمر داده شده)، کافی است پیوند یگانه کربن - کربن در زنجیر اصلی واحد تکرارشونده را به پیوند دوگانه تبدیل کنیم:



بنابراین فرمول مولکولی متیل متاکریلات به صورت  $C_5H_8O_2$  بوده و نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در ساختار آن، برابر با  $\frac{8}{5}$  است.

اگر بر اثر سوختن کامل ۱/۵ مول از پلیمر X در شرایط استاندارد، ۴۷۰/۴ متر مکعب گاز کربن دی‌اکسید تولید شود و شمار واحدهای تکرارشونده در هر مولکول از این پلیمر برابر ۲۰۰۰ باشد، پلیمر X کدام ساختار را می‌تواند داشته باشد؟



### پاسخ: گزینه ۱

Hint

ابتدا حجم گاز  $\text{CO}_2$  تولیدشده در شرایط استاندارد (STP) را به تعداد مول این گاز تبدیل کنید، سپس تعداد مول گاز  $\text{CO}_2$  تولیدشده در اثر سوختن کامل یک مول پلیمر X را به دست آورید. در مرحله بعد، با توجه به شمار واحدهای تکرارشونده پلیمر X، تعداد اتم کربن موجود در ساختار هر واحد تکرارشونده را محاسبه کنید. در نهایت با بررسی ساختارهای داده‌شده در گزینه‌ها و رسم واحدهای تکرارشونده آن‌ها، پلیمر مورد نظر را بیابید.

**گام اول:** شمار مول‌های گاز کربن دی‌اکسید ( $\text{CO}_2$ ) حاصل را با توجه به حجم تولیدی از این گاز در شرایط استاندارد (STP) به دست می‌آوریم:

$$470/4 \text{ m}^3 \text{CO}_2 \times \frac{1000 \text{ L}}{1 \text{ m}^3} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{22/4 \text{ L CO}_2} = 21000 \text{ mol CO}_2$$

**گام دوم:** شمار مول‌های گاز  $\text{CO}_2$  حاصل از سوختن کامل یک مول از پلیمر مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$1 \text{ mol پلیمر X} \times \frac{21000 \text{ mol CO}_2}{1/5 \text{ پلیمر X}} = 14000 \text{ mol CO}_2$$

**گام سوم:** با توجه به شمار واحدهای تکرارشونده پلیمر X، تعداد اتم‌های موجود در هر واحد تکرارشونده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد اتم‌های کربن در هر واحد تکرارشونده} = \frac{14000}{2000} = 7$$

**گام چهارم:** با بررسی گزینه‌ها، به دنبال پلیمری می‌گردیم که در ساختار هر واحد تکرارشونده آن، ۷ اتم کربن وجود دارد:

