www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله چهاردهم

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۲۲/اسفند/۱۴۰۴

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۵ صفحهٔ ۱۱۱ تا ۱۴۴	فصل ۳ صفحهٔ ۷۱ تا ۹۰	—
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۳ (درس ۲) صفحهٔ ۷۷ تا ۸۶	فصل ۳ (درس ۳ و ۴) صفحهٔ ۶۸ تا ۷۵	—
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۳ صفحهٔ ۵۵ تا ۸۴	فصل ۲ صفحهٔ ۳۵ تا ۶۸	فصل ۷ (درس ۱) صفحهٔ ۱۴۱ تا ۱۵۱
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه	—		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلالی ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ علی شهرابی محمد گودرزی ـ میلاد منصوری ـ سروش موئینی ـ محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن‌زاده ـ محمد گودرزی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی حمید گلزاری ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: مریم نظری	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ عطا صادقی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب ـ مریم نظری	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

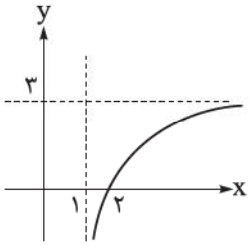
Azmoon.kheilisabz.com

www.konkur.in

۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$، روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-1,+\infty)$ ۴) $(-3,3)$

۲- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{2x+d}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a-b+c-d$ کدام است؟



۱) -20 ۲) -16

۳) -14 ۴) -18

۳- اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+24}{x+a-2}$ روی بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای a کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۴- جهت تقعر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$ روی بازهٔ (a,b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵- ضابطهٔ تابع f، یک چندجمله‌ای درجه‌سوم است. اگر به ازای هر x، $f(x)+f(-x)=8$ باشد، طول نقطهٔ عطف تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۶- اگر $x=1$ طول نقطهٔ عطف و $x=-2$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+24x$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+11 & ; \quad x\geq 2\\ -x^2+2x+3 & ; \quad x<2\end{cases}$ در نقطهٔ عطف آن کدام است؟

۱) $y=-2x+7$ ۲) $y=2x-7$

۳) $y=-2x-7$ ۴) چنین خطی وجود ندارد.

۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{a}}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-a)^2}$ در بازهٔ $(2,4)$ نقطهٔ بحرانی دارد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۹- اختلاف بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=4x^3-12x|x-1|-3x$ روی بازهٔ $[0,\frac{3}{2}]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۱۰- مقدار ماکزیمم نسبی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,|\sqrt[3]{x}-3|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۴

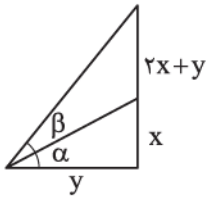
۱۱- اگر اختلاف مقادیر اکسترمم نسبی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x+1}$ برابر ۶ باشد، طول نقطهٔ مینیمم نسبی آن کدام است؟ $(a>-1)$

۱) ۰/۵ ۲) $-0/5$ ۳) ۲/۵ ۴) $-2/5$

۱۲- مستطیلی با بیشترین مساحت ممکن، درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است. محیط این مستطیل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

۱۳- در شکل زیر، به ازای کدام مقدار $\tan\alpha$، بیشترین مقدار برای $\tan\beta$ به دست می‌آید؟



۱) ۱ ۲) ۳

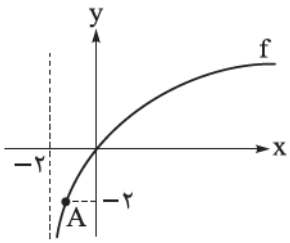
۳) $\frac{4+2\sqrt{5}}{11}$ ۴) $\frac{\sqrt{15}-3}{6}$

۱۴- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\cos((x-[x])\pi)$ در کدام نقاط زیر دارای نقطهٔ عطف است؟ $(n\in\mathbb{Z}$ و $[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $x=n$ ۲) $x=n+\frac{1}{2}$

۳) $x=n+\frac{1}{4}$ ۴) نقطهٔ عطف ندارد.

۱۵- مطابق شکل، طول نقطهٔ A واقع بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\log_2(ax+b)$ کدام است؟



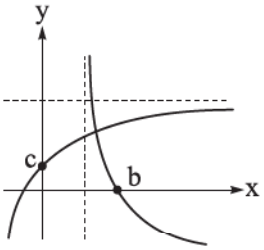
۱) $-1/75$

۲) $-1/5$

۳) $-1/25$

۴) -1

۱۶- نمودارهای توابع $f(x)=3a-2(2a-1)^x$ و $g(x)=\log_a(ax-1)$ در شکل زیر رسم شده‌اند. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای $[\frac{a+b}{2}]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۱۷- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $(a\log ۲)x^۲ + ax + b\log ۲ = ۰$، برابر $\frac{b}{a}$ باشد، حاصل $(۰/۱۲۵)^{\frac{b}{۲a}}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۵ ۳) $۲۰\sqrt{۵}$ ۴) $۴۰\sqrt{۵}$

۱۸- تنها یکی از دو جواب معادلهٔ $\log_{۸x} ۴x + a\log_x ۸ = ۱۰$ در بازهٔ $(۲,۸)$ قرار دارد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای $۱۲a$ کدام است؟

۱) $(۱۳,۳۱)$ ۲) $(۱۳,۷۱)$ ۳) $(۳۷,۱۱۰)$ ۴) $(۳۷,۷۰)$

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۱۹- حجم متوازی‌السطوح ایجادشده توسط بردارهای $\vec{a}=-\vec{j}+\vec{k}$، $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{c}=-\vec{j}-\vec{k}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- اگر $\vec{a}=(m-1,m^2,m^3+1)$ و $\vec{b}=(2m,3m-1,4m-2)$، به‌طوری که $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=m^4$، آن‌گاه طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۲۱- اگر $\vec{a}=(1,0,2\sqrt{6})$، $\vec{b}=(-4,\sqrt{3},0)$ و $\vec{b}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{a}.\vec{b}'$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۴ ۴) -4

۲۲- در مثلث ABC، اگر $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$، $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=0$

۲) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

۳) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}$

۴) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$

۲۳- مثلث ABC را در نظر بگیرید. اگر $M(4,m,3)$، $N(-k,m,2)$ و $P(k,m,4)$، به ترتیب نقاطی واقع بر اضلاع BC، AB و AC باشند، به طوری که $\frac{AN}{BN}=\frac{BM}{CM}=\frac{CP}{AP}=2$ آن‌گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۲۴- اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{a}'$ تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ باشد، آن‌گاه $\vec{b}=\vec{c}$ است.

۲) اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ باشد، آن‌گاه $\vec{b}=\vec{c}$ است.

۳) اندازهٔ بردار $\vec{a}'$ کوچک‌تر یا مساوی اندازهٔ بردار $\vec{a}$ است.

۴) اندازهٔ بردار $\vec{a}'$ کوچک‌تر یا مساوی اندازهٔ بردار $\vec{b}$ است.

۲۵- اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکهٔ محورهای مختصات باشند، حاصل عبارت $2\vec{i}.(3\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}.(2\vec{i}\times3\vec{k})+4\vec{k}.(3\vec{i}\times2\vec{j})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

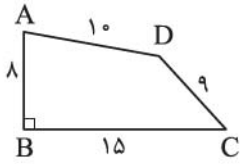
۲۶- در مثلثی به طول اضلاع ۶، ۷ و ۹، اختلاف طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویهٔ متوسط، بر روی ضلع روبه‌روی خود ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۲۷- در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی **ABCD** کدام است؟



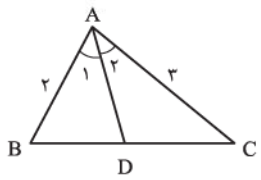
۱) $۴۸\sqrt{۳}$

۲) ۷۲

۳) $۳۶\sqrt{۳}$

۴) ۹۶

۲۸- مطابق شکل، اگر $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ$، آن‌گاه طول **AD** کدام است؟



۱) $۱/۲\sqrt{۳}$

۲) $۱/۴\sqrt{۳}$

۳) ۱/۲

۴) ۱/۸

۲۹- در مثلث **ABC**، نقطهٔ **M** وسط ضلع **BC** است و نیمساز زوایای $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ اضلاع **AB** و **AC** را به ترتیب در نقاط **P** و **Q** قطع می‌کنند. اگر $BC = ۱۲$، $AB = AM = ۹$، آن‌گاه طول پاره‌خط **MQ** کدام است؟

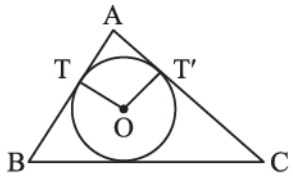
۱) $۲/۴\sqrt{۶}$

۲) $۲/۴\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۶}$

۴) $۳\sqrt{۳}$

۳۰- مطابق شکل، مثلث **ABC** به اضلاع $AB = ۴$، $AC = ۵$ و $BC = ۷$ و دایرهٔ محاطی آن رسم شده‌اند. اگر **O** مرکز دایره و **T** و T' نقاط تماس باشند، مساحت چهارضلعی $ATOT'$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۱/۵}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲/۵}$

۴) $\sqrt{۳}$

www.konkur.in

۳۱- در چند جایگشت از ارقام ۴ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۱ ,۱ دو رقم ۳ و ۲ کنار هم هستند؟

۱) $\binom{۶}{۳}$ ۲) $(۶)_۳$

۳) $\binom{۶}{۲}$ ۴) $(۶)_۲$

۳۲- ۲ عدد به صورت تصادفی از مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع این دو عدد نیز یک‌رقمی است، با کدام احتمال دقیقاً یکی از اعداد انتخاب‌شده اول است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۳- باران و ستایش هر کدام با احتمال ۰/۳ و ۰/۵ می‌خواهند در آزمون‌های خیلی‌سبز ثبت‌نام کنند. اگر ستایش ثبت‌نام کند، باران با احتمال ۰/۴ ثبت‌نام می‌کند. اگر ستایش در آزمون ثبت‌نام نکند، با کدام احتمال باران هم در آزمون ثبت‌نام نمی‌کند؟

۱) ۰/۶۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

۳۴- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ لامپ وجود دارد که در جعبهٔ اول ۴ و در جعبهٔ دوم ۵ لامپ معیوب هستند. از اولی به تصادف ۶ لامپ برداشته و در جعبهٔ دوم قرار می‌دهیم. سپس از جعبهٔ دوم لامپی انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال معیوب است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۳۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)+P(B)=\frac{۱}{۳}$ باشد، بیشترین مقدار $P(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۳۶- سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت مشکی، قهوه‌ای و سرمه‌ای و سه پیراهن با همین سه رنگ دارند. آن‌ها می‌خواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد، هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد. اگر بخواهیم برادر بزرگ‌تر در روز اول کت مشکی را با پیراهن مشکی بپوشد، برنامه‌ریزی به چند صورت ممکن است انجام بگیرد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۷- چند تابع یک‌به‌یک $f:\{۱,۲,۳\}\to\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ وجود دارد که $f(۱)+f(۲)+f(۳)$ عددی فرد باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۵ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۳۸- معادلهٔ $x_1 + \frac{۹}{x_۲ + x_۳} + x_۴ + x_۵ = ۱۰$، چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۷۰۰ ۲) ۶۹۴ ۳) ۴۳۶ ۴) ۲۶۰

۳۹- چند جایگشت از خانه‌های جدول زیر وجود دارد به طوری که هیچ‌کدام از ارقام ۱، ۲ و ۳ در مکان فعلی خود نباشند؟ (مثل

۴	۱	۳
۲	۵	۶

یا

۲	۱	۳
۶	۵	۴

)

۳	۲	۱
۶	۵	۴

۱) ۲۴۲ ۲) ۴۲۸ ۳) ۴۲۶ ۴) ۴۳۶

۴۰- در هر زیرمجموعهٔ m عضوی از مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی مطمئن هستیم که حداقل ۳ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها از ۱۰ کم‌تر است. کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله چهاردهم

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۲۲/اسفند/۱۴۰۴

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۵ و فصل ۶ صفحهٔ ۱۱۵ تا ۱۵۶	فصل ۳ (از ابتدای میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی) و فصل ۴ صفحهٔ ۹۴ تا ۱۳۰	—
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۴ صفحهٔ ۹۱ تا ۱۲۳	فصل ۳ صفحهٔ ۹۹ تا ۱۲۳	—
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه	—		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ هادی حمزه‌پور ـ رضا سبزمیدانی نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ سعید محبی	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	طراحان: فرشید ابراهیمی ـ مهدی براتی ـ سلیم بهرامی ـ پیمان خواجوی مجد امیر قاسمی‌پور ـ سروش عبادی ـ یاسر عبداللهی کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده ـ یاشار ذریه	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

www.konkur.in

۴۱- شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین $300\ W/m^2$ است. اگر طول موج متوسط فوتون‌های تابیده‌شده $528\ nm$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟ $(c = 3\times10^8\ m/s \text{ و } h = 6/6\times10^{-34}\ J.s)$

۱) $2/4\times10^{21}$ ۲) $4/8\times10^{21}$ ۳) $2/4\times10^{22}$ ۴) $4/8\times10^{22}$

۴۲- در اتم هیدروژن، محدودهٔ تقریبی بسامدهای رشتهٔ بالمر $(n' = 2)$ برحسب تراهرتز کدام است؟
$(c = 3\times10^8\ m/s \text{ و } R = 0/01\ nm^{-1})$

۱) ۴۱۶/۶ تا ۷۵۰ ۲) ۵۰۰ تا ۷۵۰
۳) ۴۱۶/۶ تا ۱۵۰۰ ۴) ۵۰۰ تا ۱۵۰۰

۴۳- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = 5$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اختلاف انرژی پرانرژی‌ترین و کم‌انرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، چند ریدبرگ است؟

۱) $\frac{21}{100}$ ۲) $\frac{12}{25}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۴۴- طول موج چهارمین خط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن $(n' = 3)$ چند نانومتر است؟ $(R = 0/01\ (nm)^{-1})$

۱) ۵۰۲/۵ ۲) ۵۲۵ ۳) ۱۱۰۲/۵ ۴) ۱۱۲۵

۴۵- در اتم هیدروژن، الکترون در طی یک گذار، فوتونی با انرژی $2/04\times10^{-18}\ J$ گسیل می‌کند. در این گذار، شعاع مدار الکترون چند پیکومتر تغییر می‌کند؟ $(E_R = 13/6\ eV,\ e = 1/6\times10^{-19}\ C \text{ و } a_0 = 5/29\times10^{-11}\ m)$

۱) ۷۹/۳۵ ۲) ۷۹۳/۵ ۳) ۱۵۸/۷ ۴) ۱۵۸۷

۴۶- مدل اتمی بور در چه تعداد از موارد زیر، ناموفق است؟

الف) توجیه طیف گسیلی و جذبی اتم‌های هیدروژن‌گونه

ب) محاسبهٔ انرژی یونش اتم‌های هیدروژن‌گونه

پ) توجیه تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن

ت) تبیین پایداری اتم‌های دارای دو الکترون یا بیشتر

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- نوری با طول موج $155\ nm$ به سطح فلزی که تابع کار آن $6/2\ eV$ است، می‌تابد. بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از فلز، چند متر بر ثانیه است؟ $(hc = 1/24\ eV.\mu m,\ m_e = 9\times10^{-31}\ kg \text{ و } e = 1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) $4\sqrt{2}\times10^6$ ۲) 8×10^6
۳) $4\sqrt{2}\times10^5$ ۴) 8×10^5

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۴۸- کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) نیروی هسته‌ای، کوتاه‌بُرد است و تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند.

۲) نیروی ربایشی هسته‌ای یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون، یا یک پروتون و یک نوترون وجود دارد.

۳) یک پروتون یا یک نوترون، فقط نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاور خود را با نیروی هسته‌ای جذب می‌کند.

۴) در هسته‌های پایدار، نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی بین پروتون‌ها با نیروی جاذبهٔ گرانش بین نوکلئون‌ها، موازنه می‌شود.

۴۹- کدام موارد زیر درست است؟

الف) جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی بیشتر است.

ب) انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند انرژی الکترون‌های وابسته به اتم، کوانتیده‌اند.

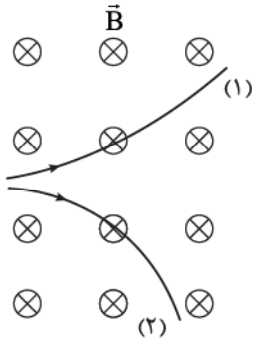
پ) در همهٔ ایزوتوپ‌های پایدار سبک، تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است.

ت) هر چه کاستی جرم هستهٔ ایزوتوپی بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته‌ای آن نیز بیشتر است.

۱) «الف» و «پ»　　۲) «الف» و «ت»

۳) «ب» و «پ»　　۴) «ب» و «ت»

۵۰- مسیر حرکت دو ذرهٔ حاصل از پرتوزایی طبیعی، در میدان مغناطیسی یکنواختی به شکل زیر است. مسیرهای (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ، مربوط به کدام ذره‌ها می‌توانند باشند؟



۱) آلفا، الکترون

۲) پوزیترون، الکترون

۳) الکترون، آلفا

۴) آلفا، پوزیترون

۵۱- عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ»، به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ کدام نوع واپاشی است؟

الف) در این واپاشی یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

ب) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.

پ) یکی از کاربردهای گستردهٔ این واپاشی، در آشکارسازهای دود است.

۱) بتای منفی، آلفا، گاما　　۲) بتای منفی، بتا، آلفا

۳) بتای مثبت، آلفا، گاما　　۴) بتای مثبت، بتا، آلفا

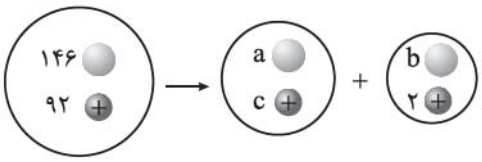
۵۲ به ترتیب در کدام واپاشی، عدد اتمی هستهٔ مادر تغییر نمی‌کند و در کدام واپاشی عدد اتمی هستهٔ مادر افزایش می‌یابد؟

۱) گاما ـ بتای مثبت　　۲) گاما ـ بتای منفی　　۳) بتای مثبت ـ آلفا　　۴) بتای منفی ـ آلفا

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۵۳- شکل زیر، واپاشی آلفا برای اورانیم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در این شکل **a** و **b** به ترتیب از راست به چپ، کدام‌اند؟



۱) ۲ ،۱۴۲
۲) ۲ ،۱۴۴
۳) ۴ ،۱۴۲
۴) ۴ ،۱۴۴

۵۴- سرب $^{A}_{82}Pb$، هستهٔ دختر پایداری است که می‌تواند حاصل از واپاشیِ α هستهٔ **X** یا واپاشیِ β^- هستهٔ **Y** باشد. اختلاف تعداد نوترون‌های دو هستهٔ **X** و **Y** کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

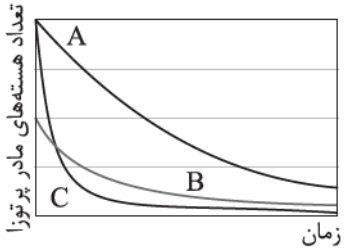
۵۵- در یک واپاشی α، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ پایدار حاصل برابر ۵۴ است. اگر بار الکتریکی هستهٔ مادر $14/72\times10^{-18}\ C$ باشد، عدد جرمی هستهٔ مادر کدام است؟ $(e=1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) ۱۹۸ ۲) ۲۰۲ ۳) ۲۳۴ ۴) ۲۳۸

۵۶- پس از گذشت ۲۴ روز، ۸۷/۵ درصد از هسته‌های مادر اولیهٔ یک ایزوتوپ پرتوزا، واپاشیده می‌شود. نیمه‌عمر این ایزوتوپ چند روز است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۵۷- شکل زیر، نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه را برحسب زمان نشان می‌دهد. در کدام گزینه، این سه نمونه از راست به چپ به ترتیب افزایش نیمه‌عمر مرتب شده‌اند؟



۱) A ،B ،C
۲) A ،C ،B
۳) B ،C ،A
۴) C ،B ،A

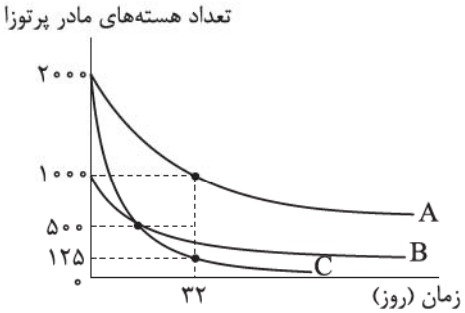
۵۸- تعداد هسته‌های اولیهٔ نمونهٔ پرتوزای **A**، ۴ برابر تعداد هسته‌های اولیهٔ نمونهٔ پرتوزای **B** است. بعد از گذشت مدتی معین، تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونهٔ **B**، ۸ برابر تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونهٔ **A** می‌شود. اگر در این مدت، تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده برای دو نمونهٔ **A** و **B** به ترتیب n_A و n_B باشد، $n_A - n_B$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۵ ۴) ۵−

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۵۹- نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونهٔ A، B و C برحسب زمان، به شکل زیر است. پس از چند روز، ۱۲۶ g از یک نمونهٔ اولیهٔ ۱۲۸گرمی از مادهٔ B، واپاشیده می‌شود؟



۱) ۱۶

۲) ۴۸

۳) ۶۴

۴) ۹۶

۶۰- کدام‌یک از عبارت‌های زیر، درست است؟

الف) در فرایند شکافت اورانیم ۲۳۵، ترکیب‌های متفاوتی از هسته‌های کوچک‌تر، همراه با تعدادی نوترون تُند به وجود می‌آید.

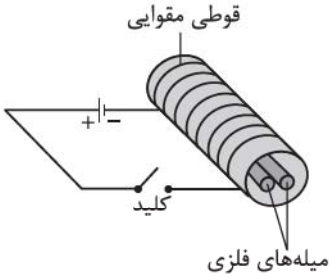
ب) در واکنش گداخت هسته‌ای، برخلاف واکنش شکافت هسته‌ای، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است.

پ) غنی‌سازی، فرایند تبدیل اورانیم ۲۳۸ به اورانیم ۲۳۵ در یک نمونه از سنگ معدن اورانیم است.

ت) آب معمولی، آب سنگین و گرافیت از جمله موادی هستند که به عنوان کُندساز نوترون‌ها در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

۱) «الف» و «پ»　　۲) «الف» و «ت»　　۳) «ب» و «پ»　　۴) «ب» و «ت»

۶۱- دو میلهٔ فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیملوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیملوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه بازمی‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟



۱) پارامغناطیسی

۲) دیامغناطیسی

۳) فرومغناطیسی نرم

۴) فرومغناطیسی سخت

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۶۲- در شکل زیر، حلقهٔ رسانای حامل جریانی در صفحه قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی حاصل از این حلقه در نقطهٔ M عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه باشد، چه تعداد از موارد زیر الزاماً درست است؟

الف) میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، عمود بر صفحه و به سمت بیرون صفحه است.

ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، از اندازهٔ میدان مغناطیسی در نقطهٔ M کوچک‌تر است.

پ) جریان عبوری از حلقه ساعتگرد است.

۱) ۱

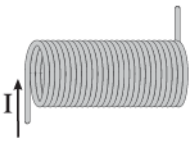
۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۶۳- در شکل زیر، سیملولهٔ آرمانی به طول ۱۵ cm دارای ۳۰ حلقهٔ سیم نزدیک به هم است. اگر جریان $I = ۸۰۰\ mA$ از سیملوله بگذرد، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای درون سیملوله و دور از لبه‌های آن چند گاوس و در چه جهتی است؟

$(\mu_{\circ} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷}\ T.m/A)$



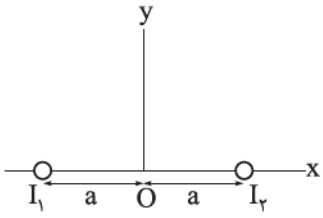
۱) ۲، ←

۲) ۲، →

۳) ۲۰، ←

۴) ۲۰، →

۶۴- در شکل زیر، دو سیم حامل جریان الکتریکی هم‌اندازهٔ $I_۱$ و $I_۲$، عمود بر صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی خالص در هر نقطهٔ دلخواه بر روی قسمت مثبت محور y، در جهت محور x باشد، $I_۱$ در چه جهتی است و نوع نیروی مغناطیسی‌ای که دو سیم به یکدیگر وارد می‌کنند، کدام است؟



۱) ⊗، ربایشی

۲) ⊗، رانشی

۳) ⊙، ربایشی

۴) ⊙، رانشی

۶۵- با استفاده از سیم بلندی با طول معین، در حالت اوّل پیچهٔ مسطحی به شعاع R و در حالت دوم پیچهٔ مسطحی به شعاع ۲R درست می‌کنیم. اگر در هر دو حالت جریان الکتریکی یکسانی از دو پیچه عبور کند، اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه در حالت اول، چند برابر اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه در حالت دوم است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

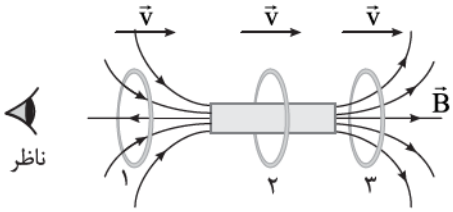
محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۶۶- زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی با سطح یک حلقه برابر 53° است. این زاویه چند درجه و چگونه تغییر کند تا شار مغناطیسی عبوری از حلقه ۲۵ درصد کاهش یابد؟ $(\cos 53^\circ = 0/6)$

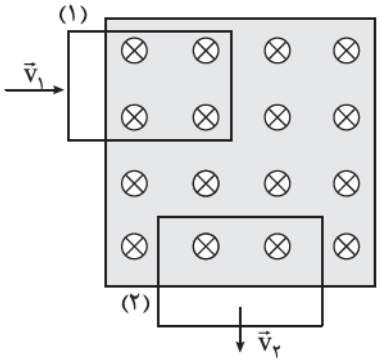
۱) ۱۶، کاهش یابد.
۲) ۳۷، کاهش یابد.
۳) ۱۶، افزایش یابد.
۴) ۳۷، افزایش یابد.

۶۷- حلقهٔ رسانایی به طرف یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر، حلقه را در سه وضعیت نسبت به آهنربا نشان می‌دهد. اگر جریان القاشده در حلقه در وضعیت‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب I_1، I_2 و I_3 باشد، از دید ناظر مشخص‌شده در شکل، کدام درست است؟



۱) I_1، I_2 و I_3 هر سه ساعتگردند.
۲) I_1، I_2 و I_3 هر سه پادساعتگردند.
۳) I_1 ساعتگرد، I_3 پادساعتگرد و I_2 برابر صفر است.
۴) I_3 ساعتگرد، I_1 پادساعتگرد و I_2 برابر صفر است.

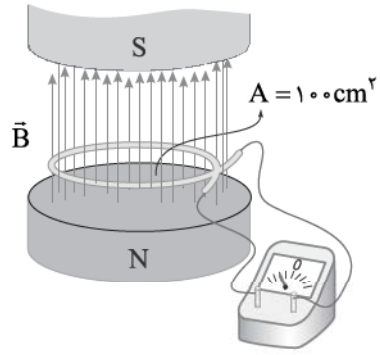
۶۸- در شکل زیر، قاب مستطیل‌شکل رسانایی در حالت (۱)، در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواختِ عمود بر صفحه و در حالت (۲)، در حال خروج از آن است. اگر تندی قاب در دو حالت یکسان باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) جریان القاشده در قاب در حالت (۱) ساعتگرد است.
ب) جریان القاشده در قاب در حالت (۲) ساعتگرد است.
پ) اندازهٔ جریان القاشده در قاب در حالت (۲) بیشتر از حالت (۱) است.
ت) اندازهٔ جریان القاشده در قاب در دو حالت، یکسان است.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

۶۹- در شکل زیر، میدان مغناطیسی بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدتی معین از $0/3\ T$ رو به بالا به $0/2\ T$ رو به پایین می‌رسد. اگر مقاومت الکتریکی حلقه $20\ \Omega$ باشد، در این مدت بار شارش‌یافته در حلقه چند میلی‌کولن است؟

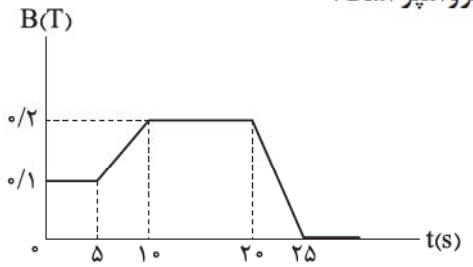


۱) ۰/۰۵
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۵
۴) ۲/۵

محل انجام محاسبات

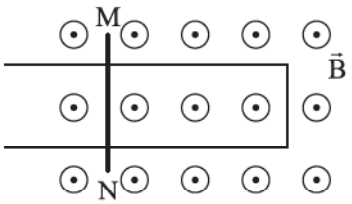
www.konkur.in

۷۰- یک حلقهٔ رسانای مربع‌شکل به ضلع $3\ cm$ و مقاومت الکتریکی $0/1\ \Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد به طوری که خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t = 9\ s$ تا $t = 24\ s$ چند میکروآمپر است؟



۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۷۲۰
۴) ۸۴۰

۷۱- شکل زیر، رسانای U‌شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ $0/18\ T$ نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میلهٔ فلزی MN بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می‌دهد. میله با تندی ثابت روی دو بازوی رسانا حرکت می‌کند. اگر نیروی محرکهٔ القاشده در مدار برابر $9\ mV$ و جهت جریان القاشده در میله از M به N باشد، به ترتیب آهنگ تغییر مساحت مدار در SI و جهت حرکت میله کدام است؟



۱) ۰/۰۵، راست
۲) ۰/۰۵، چپ
۳) ۰/۵، راست
۴) ۰/۵، چپ

۷۲- طول سیملولهٔ حامل جریانی برابر $50\ cm$ و سطح مقطع آن برابر $10\ cm^2$ است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله در نقطه‌ای روی محور آن برابر $30\ G$ باشد، انرژی ذخیره‌شده در آن چند میلی‌ژول است؟

$(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7}\ T.m/A)$

۱) ۳۶
۲) ۳/۶
۳) ۱۸
۴) ۱/۸

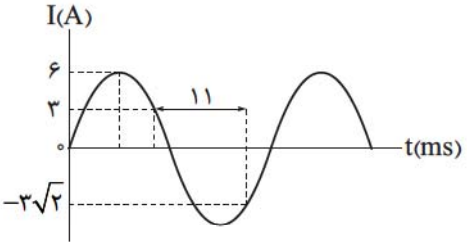
۷۳- معادلهٔ جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر با ضریب القاوری $40\ mH$ برحسب زمان در SI به صورت $I = 5\sin(100\pi t)$ است. انرژی ذخیره‌شده در القاگر در لحظهٔ $t = 7/5\ ms$ چند ژول است؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۲۵
۳) ۱
۴) ۲/۵

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۷۴- نمودار جریان متناوب سینوسی حاصل از یک مولد جریان متناوب برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ جریان الکتریکی عبوری از این مولد در لحظهٔ $t = ۱۶\ ms$ چند آمپر است؟



۱) ۳
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

۷۵- تعداد دورهای اولیه و ثانویهٔ یک مبدل به ترتیب برابر ۷۵۰ و ۱۵ است. اگر دو سر پیچهٔ اولیهٔ آن به ولتاژ $۱۵۰\ V$ وصل شود، از یک لامپ ۱۵ اهمی که به دو سر پیچهٔ ثانویهٔ مبدل متصل شده است، جریان چند آمپری می‌گذرد؟

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۷۶- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) اوره و آمونیاک، هر دو از کودهای شیمیایی نیتروژن‌دار هستند و در مقیاس صنعتی، آمونیاک زودتر از اوره تولید شده است.

۲) در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش‌های گرماده، انرژی فعال‌سازی واکنش از اختلاف سطح انرژی فراورده‌ها و سدّ انرژی بیشتر است.

۳) در مبدل کاتالیستی، در سطح سرامیک‌ها که به شکل توری هستند، فلزهای Pd، Pt و Ru نشانده شده است.

۴) دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود یکی از اکسیدهای نیتروژن است که عدد اکسایش اتم نیتروژن در آن برابر ۲+ است.

۷۷- اگر انرژی فعال‌سازی واکنش‌های (۱)، (۲) و (۳) در شرایط یکسان به ترتیب برابر a، $a-x$ و $a+x$ کیلوژول باشد، در صورت تأمین ..... کیلوژول انرژی، ..... انجام می‌شود. (x عددی مثبت است.)

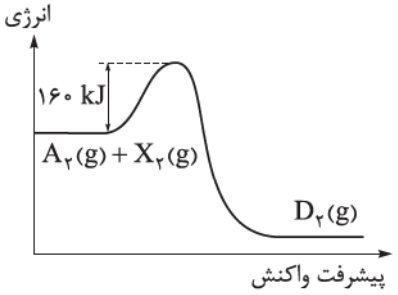
۱) a، واکنش‌های (۱) و (۲) با سرعت برابری

۲) $a+x$، به یقین هر سه واکنش با سرعت بسیار زیاد

۳) $a-x$، فقط واکنش (۲)

۴) $a-2x$، به یقین واکنش (۱)

۷۸- با توجه به نمودار انرژی ـ پیشرفت زیر، اگر مجموع آنتالپی پیوندها در A_2، X_2 و D_2 برحسب $kJ.mol^{-1}$ به ترتیب برابر ۱۷۱۹، ۴۳۶ و ۲۳۳۴ باشد، در صورتی که کاتالیزگر واکنش، انرژی فعال‌سازی را ۴۰ درصد کاهش دهد، فاصلهٔ سدّ انرژی و سطح انرژی فراوردهٔ واکنش در حالتی که از کاتالیزگر استفاده می‌کنیم، چند کیلوژول خواهد بود؟



۱) ۲۳۴

۲) ۲۴۳

۳) ۲۵۷

۴) ۲۷۵

۷۹- کاربرد کاتالیزگر در واکنش شیمیایی، موجب چه تعداد از تغییرهای زیر می‌شود؟

- **تغییر مسیر انجام واکنش**
- **افزایش سرعت واکنش**
- **کاهش سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها**
- **افزایش پایداری فراورده‌ها**
- **کاهش ΔH (آنتالپی) واکنش**
- **افزایش مقدار فراورده‌ها**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۸۰- با توجه به جدول داده‌شده، با طی مسافت ۱۰۰ کیلومتر توسط یک خودرو، به تقریب چند گرم کربن دی‌اکسید از طریق واکنش‌های انجام‌شده در مبدل کاتالیستی خودرو وارد هوا می‌شود؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_8H_{18}	NO
مقدار گرم آلاینده به ازای طی یک کیلومتر مسافت	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

۱) ۴۹۴ ۲) ۷۲۵

۳) ۸۶۹ ۴) ۱۳۳۹

۸۱- کدام مورد، جملهٔ داده‌شده را به درستی تکمیل نمی‌کند؟

«در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی، ..... .»

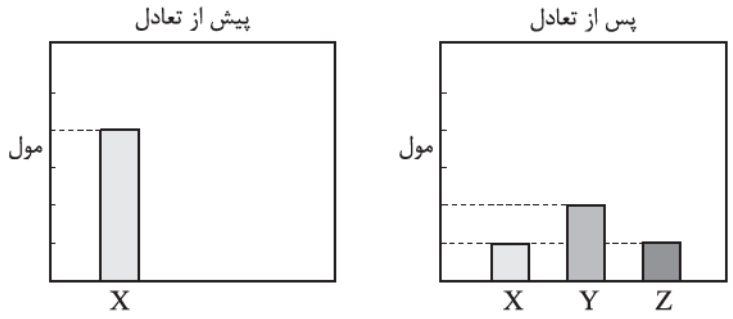
۱) بین دو محفظه، مخزن آمونیاک وجود داشته و در هر دو محفظه، بخار آب تولید می‌شود.

۲) فراوردهٔ کربن‌دار واکنش سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی به عنوان واکنش‌دهنده در محفظهٔ اول مصرف می‌شود.

۳) در محفظهٔ دوم، فراوردهٔ هابر به عنوان واکنش‌دهنده و یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هابر، به عنوان فراورده می‌باشد.

۴) همانند خودروهای بنزینی، ۳ نوع ماده در واکنش‌های شیمیایی مربوط به حذف آلاینده‌ها تولید می‌شود.

۸۲- با توجه به شکل زیر که مربوط به یک واکنش تعادلی است، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟ (همهٔ مواد به حالت گازند و حجم ظرف واکنش، ۰/۵ لیتر و شمار مول‌های اولیهٔ X برابر ۲ است.)



۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۸۳- با توجه به جدول زیر و واکنش تعادلی $2B(g) \rightleftharpoons 2A(g)+Z(g)$، کدام موارد درست است؟

$\theta(^\circ C)$	K
۴۳۵	4×10^{-5}
۲۲۵	4×10^{-11}
۲۵	$2/5\times10^{-25}$

الف) واکنشی گرماگیر بوده و در آن، مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها بزرگ‌تر از مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها است.

ب) اثر افزایش غلظت B، مشابه اثر افزایش دما، تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

پ) طبق معادلهٔ واکنش، غلظت تعادلی B دو برابر غلظت تعادلی Z است.

ت) اگر حجم سامانه را از ۳ لیتر به ۱ لیتر تغییر دهیم، مقدار ثابت تعادل واکنش کاهش می‌یابد.

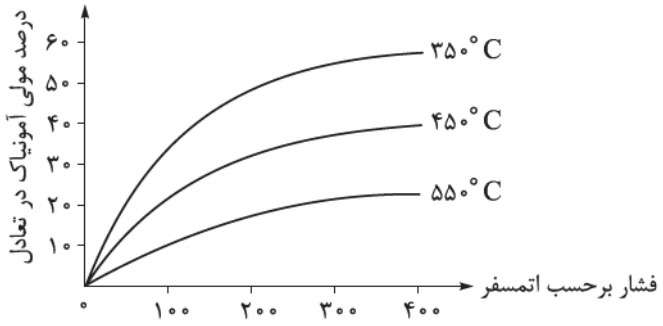
۱) ب ـ ت ۲) الف ـ ب ۳) الف ـ پ ۴) پ ـ ت

۸۴- در ظرفی دربسته به حجم دو لیتر، ۵ مول AB به همراه دو مول از هر یک از گازهای A_2 و B_2 در تعادل هستند. اگر به این ظرف در دمای ثابت، چهار مول AB بیفزاییم، در لحظهٔ برقراری تعادل، اختلاف غلظت مولی گازهای AB و A_2 به تقریب چه‌قدر خواهد بود؟

$$A_2(g)+B_2(g) \rightleftharpoons 2AB(g)$$

۱) ۲/۱۷ ۲) ۳/۱۴ ۳) ۵/۲۳ ۴) ۶/۲۶

۸۵- نمودار زیر، تأثیر تغییر دما و فشار را بر درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی فرایند هابر نشان می‌دهد. با توجه به نمودار، کدام مورد زیر درست است؟



۱) مناسب‌ترین شرایط برای تولید آمونیاک، فشار کم و دمای بالا است.

۲) با افزایش دما، شمار مولکول‌های آمونیاک موجود در مخلوط افزایش می‌یابد.

۳) در دو آزمایش با دما و فشار متفاوت، ممکن نیست درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی یکسان باشد.

۴) در فشار ۳۰۰ atm و دمای $350\ ^\circ C$، از هر ۱۰۰ مولکول موجود در ظرف، ۵۰ مولکول، آمونیاک است.

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۸۶- کدام مورد نادرست است؟

۱) آمونیاک، سولفوریک اسید، متانول و بنزین، جزء فراورده‌های پتروشیمیایی هستند که پس از پالایش نفت خام به دست می‌آیند.

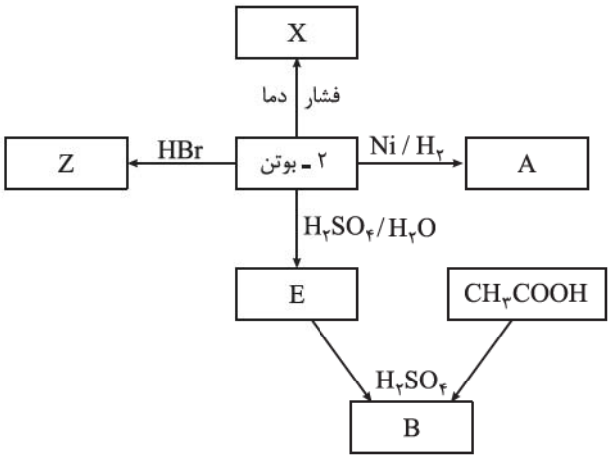
۲) خام‌فروشی، تنها برای منابع شیمیایی مانند نفت خام، گاز و زغال‌سنگ و منابع معدنی مانند سنگ آهن، مس و روی صادق است.

۳) انرژی و فناوری شیمیایی از جمله عوامل لازم برای تهیهٔ مواد اولیهٔ مهم و پرکاربرد در صنایع از مواد خام است.

۴) سنتز مواد جدید از مواد خام، به دانش شناخت ساختار و رفتار گروه‌های عاملی، شرایط انجام واکنش و عوامل مؤثر بر انجام واکنش نیاز دارد.

۸۷- نمودار زیر مربوط به سنتز مواد مختلف از ۲ـ بوتن است. کدام موارد زیر درست‌اند؟

$(H=1, C=12, O=16, Br=80 : g.mol^{-1})$



الف) ترکیب E و دی‌اتیل اتر، ایزومر یکدیگرند.

ب) تفاوت جرم مولی B و Z، کم‌تر از $\frac{1}{2}$ جرم مولی A است.

پ) هر مولکول از B دارای ۲۰ پیوند اشتراکی است.

ت) ترکیب X برخلاف Z، ترکیبی سیرشده است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ب ـ پ

۸۸- با توجه به مطالب کتاب درسی، مولکول حلال چسب و مولکولی که در تهیهٔ افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد، در کدام مورد مشابه هستند؟

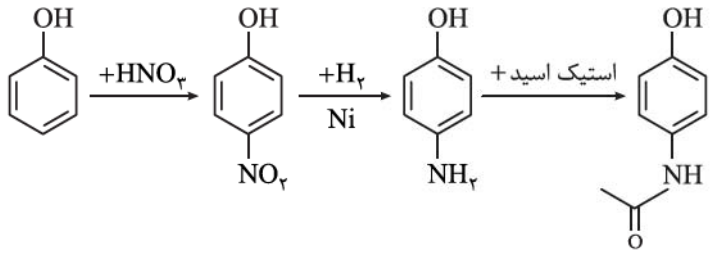
۱) سنتز مستقیم از اتن ۲) مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن

۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی ۴) شمار پیوندهای C—H

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۸۹- با توجه به مراحل سنتز استامینوفن، کدام مطلب نادرست است؟



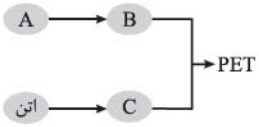
۱) فرمول مولکولی استامینوفن، به صورت $C_8H_9NO_2$ بوده و دارای گروه‌های هیدروکسیل و آمیدی است.

۲) سنتز دارو، شامل سه مرحله است که در هر سه مرحله، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در حلقهٔ آروماتیک تغییر می‌کند.

۳) اگر بازده مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب ۸۰، ۸۰ و ۵۰ درصد باشد، بازدهٔ کلی فرایند، ۳۲ درصد است.

۴) مرحلهٔ دوم این سنتز، دارای انرژی فعال‌سازی بالایی است و برای کاهش آن از کاتالیزگر نیکل استفاده می‌شود.

۹۰- با توجه به شکل زیر که مربوط به فرایند کلی تولید PET می‌باشد، کدام موارد درست است؟



الف) شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی B با شمار اتم‌های هیدروژن در مولکول پروپن برابر است.

ب) اگر در تبدیل A به B، از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات استفاده شود، بازده واکنش بالاتر از زمانی است که از O_2 و کاتالیزگر استفاده می‌شود.

پ) بر اثر واکنش C با استیک اسید، می‌توان دی‌استر تولید کرد.

ت) تفاوت جرم مولی B و معروف‌ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک، برابر جرم مولی CO_2 است.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ پ ـ ت ۴) الف ـ ب ـ ت

۹۱- کدام مورد نادرست است؟

۱) پلاستیک‌ها به دلیل چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان‌بودن و مقاومت در برابر خوردگی، کاربردهای وسیعی در زندگی دارند.

۲) PET برخلاف پلیمرهای طبیعی، ماندگاری زیادی دارد و در طبیعت به کندی تجزیه می‌شود.

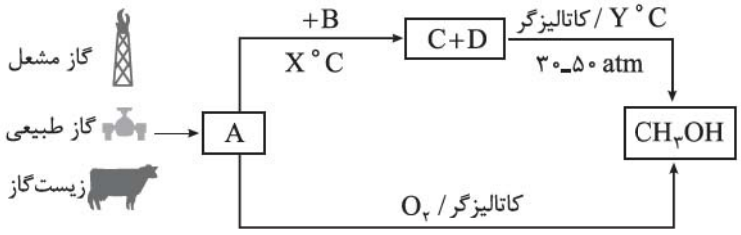
۳) در بازیافت شیمیایی PET با متانول، مونومرهای اولیهٔ این پلیمر بازتولید می‌شوند.

۴) جمع‌آوری، شست‌وشو، ذوب‌کردن و ساخت ابزارهای جدید، مراحل بازیافت پلی‌اتیلن ترفتالات هستند.

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۹۲- با توجه به شکل که به روش‌های تولید متانول مربوط است، اگر نقطهٔ جوش C از D بالاتر باشد، کدام مطلب درست است؟



۱) X، دمای کم‌تری نسبت به Y است.

۲) گاز C را می‌توان از واکنش هیدروکلریک‌اسید با فلز منیزیم نیز تهیه کرد.

۳) شمار پیوندهای کووالانسی A دوبرابر B است و B یکی از محصولات سوختن کامل متانول است.

۴) در دمای اتاق گازهای نیتروژن و D با هم واکنش می‌دهند و نقطهٔ جوش فراورده از نقطهٔ جوش A بالاتر است.

۹۳- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیشتری از واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل شوند.

۲) از ترفتالیک اسید می‌توان به عنوان مونومر در تولید برخی از پلی‌استرها و پلی‌آمیدها استفاده کرد.

۳) از زیست‌گاز می‌توان به عنوان مادهٔ اولیهٔ فرایند بازیافت شیمیایی PET استفاده کرد.

۴) شمار اتم‌های کربن مولکول پارازایلن و مولکول استیرن، برابرند.

۹۴- کدام مورد دربارهٔ سلولز و نشاسته، نادرست است؟

۱) هر دو، جزء درشت‌مولکول‌های طبیعی بوده و شمار اتم‌های سازندهٔ هر مولکول از آن‌ها، زیاد است.

۲) مولکول‌های نشاسته در محیط گرم و مرطوب، به سرعت به مونومرهای سازندهٔ خود، تبدیل می‌شود.

۳) الیاف پنبه از سلولز و سه عنصر کربن، هیدروژن و اکسیژن ساخته شده است.

۴) هر دو پلیمر مانند پلی‌سیانواتن، فقط از یک نوع مونومر ساخته شده‌اند.

۹۵- اگر در مولکول وینیل کلرید به جای کلر، ..... قرار گیرد، به ترکیبی تبدیل می‌شود که ..... .

$(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) گروه متیل ـ برای سوختن کامل هر مول از آن، ۴ مول گاز اکسیژن لازم است.

۲) حلقهٔ بنزن ـ درصد جرمی کربن در آن دوازده برابر درصد جرمی هیدروژن آن است.

۳) گروه CN ـ بر اثر بسپارش به ترکیبی تبدیل می‌شود که در تولید سرنگ کاربرد دارد.

۴) اتم فلوئور ـ بین مولکول‌های آن مانند مولکول آمونیاک، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

۹۶- در یک نمونه از پلی‌پروپن، جرم اتم‌های کربن، ۶ گرم بیشتر از جرم اتم‌های هیدروژن است. جرم این نمونه چند گرم است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۲ ۲) ۴/۲ ۳) ۵/۰ ۴) ۸/۴

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۹۷- در واکنش پلیمری‌شدن اتن، جرم مولی میانگین پلیمر به مقدار کاتالیزگرهای به‌کاررفته بستگی دارد. اگر در واکنش بسپارش اتن به ازای مصرف هر گرم کاتالیزگر دارای آلومینیم به تقریب ۱۵ / ۳ گرم کاتالیزگر دارای تیتانیم مصرف شود، شمار میانگین واحدهای تکرارشونده (n) برای پلیمر ایجادشده کدام است؟ (کاتالیزگرهای به‌کاررفته دارای فرمول‌های $TiCl_4$ (با جرم مولی ۱۹۰ گرم) و $AlCl(C_2H_5)_2$ (با جرم مولی ۱۲۰ / ۵ گرم) می‌باشند.)

شمار مول کاتالیزگر حاوی تیتانیم	شمار مول کاتالیزگر حاوی آلومینیم	جرم مولی پلیمر ($g.mol^{-1}$)
۱	۲	۲۹۴۰۰۰
۱	۱	۲۸۲۸۰۰
۱	۰ / ۵	۲۱۰۰۰
۱	۰ / ۲	۳۰۸۰۰

۱) ۱۰۵۰۰ ۲) ۱۰۱۰۰ ۳) ۷۵۰ ۴) ۱۱۰۰

۹۸- کدام موارد زیر دربارهٔ الکل‌های یک‌عاملی سیرشده و غیرحلقوی (ROH)، درست است؟

$(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، خاصیت چربی‌دوستی افزایش می‌یابد.

ب) در هر مولکول از آن‌ها با n اتم کربن، $\frac{3n+2}{2}$ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پ) نیروی بین مولکولی غالب در الکلی با جرم مولی $60\ g.mol^{-1}$، پیوند هیدروژنی است.

ت) اولین عضو این خانواده بر اثر گزش مورچهٔ سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش می‌شود.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

۹۹- اگر A، آشناترین عضو خانوادهٔ اسیدهای آلی و B، استر عامل طعم و بوی آناناس باشد، تفاوت جرم مولی A و B با جرم مولی کدام ماده برابر است؟

۱) بوتن ۲) بوتان ۳) پنتن ۴) پنتان

۱۰۰- کدام مورد نادرست است؟

۱) جرم مولی گلوکز، ۳ برابر جرم مولی ساده‌ترین استر است.

۲) ممکن است در ساختار یک پلیمر، هیچ اتم هیدروژنی وجود نداشته باشد.

۳) در کربوکسیلیک اسیدها، اتم کربن گروه کربوکسیل، حداقل به یک اتم کربن دیگر متصل است.

۴) با افزایش شمار اتم‌های کربن در الکان‌های راست‌زنجیر، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب تغییر محسوسی ندارد.

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۱۰۱- اگر جرم مولی الکل و اسید سازندهٔ استری با فرمول مولکولی $C_9H_{18}O_2$ برابر باشد، کدام مورد درست است؟ (استر، یک‌عاملی، سیرشده و غیرحلقوی است.)

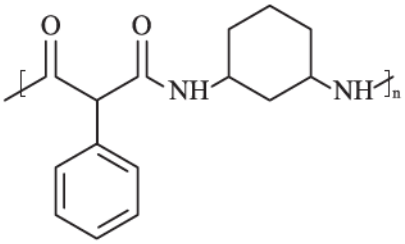
۱) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی الکل و اسید برابر ۲ است.

۲) الکل سازنده به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

۳) نام استر می‌تواند پنتیل بوتانوات باشد.

۴) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اسید سازنده برابر ۱۷ است.

۱۰۲- اختلاف تعداد پیوندهای کووالانسی در مولکول دی‌آمین سازندهٔ پلیمر زیر با تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در دی‌اسید سازندهٔ این پلیمر کدام است؟



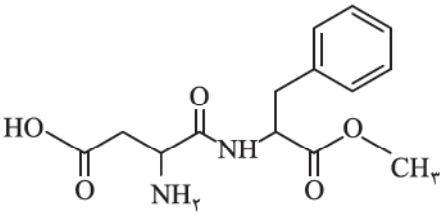
۱) ۱۴

۲) ۲۴

۳) ۱۸

۴) ۲۰

۱۰۳- آسپارتام یک شیرین‌کنندهٔ مصنوعی است که در صنایع نانوایی و محصولات قنادی به کار می‌رود. با توجه به ساختار این ماده، کدام عبارت‌ها درست اند؟ ($H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$)



الف) بر اثر آبکافت آن متانول تولید می‌شود.

ب) جرم مولی آن $292\ g.mol^{-1}$ است و دارای یک حلقهٔ آروماتیک است.

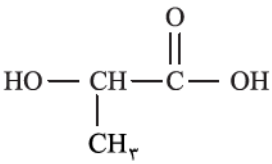
پ) دارای دو گروه آمینی است و بین مولکول‌های آن پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

ت) نسبت شمار الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول آن برابر ۷/۵ است.

ث) سه اتم کربن در آن دارای عدد اکسایش صفر هستند.

۱) الف ـ ب ـ ث ۲) ب ـ پ ـ ت ۳) الف ـ ت ۴) الف ـ ت ـ ث

۱۰۴- با توجه به شکل زیر که فرمول ساختاری لاکتیک اسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



۱) برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک‌اسید، نخست نشاستهٔ موجود در فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر را به این ماده تبدیل می‌کنند.

۲) پلیمر حاصل از آن، پلیمر سبز بوده و در تهیهٔ ظروف پلاستیکی یک‌بارمصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله و کیسهٔ پلاستیکی و ... کاربرد دارد.

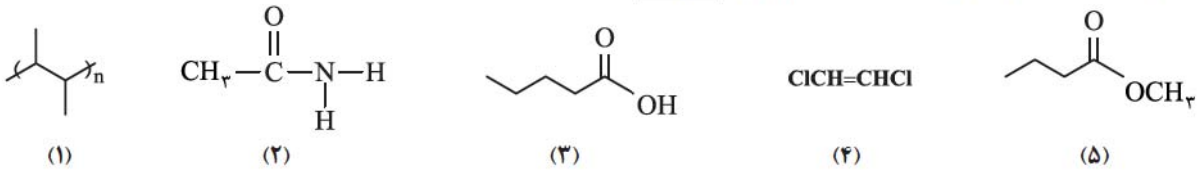
۳) پلیمر حاصل از آن، پلی‌استر بوده و برای تهیهٔ آن نیازی به کربوکسلیک اسید دوعاملی و الکل دوعاملی نیست.

۴) در فرایند پلیمری‌شدن آن، مجموع جرم مونومرها با جرم پلیمر حاصل برابر است.

محل انجام محاسبات

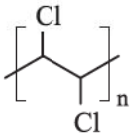
www.konkur.in

۱۰۵- با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام مورد نادرست است؟



(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

۱) نقطهٔ جوش ترکیب (۳) از ترکیب (۵) بالاتر است.

۲) ساختار پلیمر حاصل از ترکیب (۴) به صورت  است.

۳) نام مونومر سازندهٔ پلیمر (۱)، ۲ـ بوتن است.

۴) ترکیب (۲) یک آمید است که از واکنش ساده‌ترین آمین و استیک‌اسید تولید شده است.

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

www.konkur.in

آزمون‌های تشریحی خیلی‌سبز

۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخبرگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی

پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحّح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحّح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحّح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

www.konkur.in

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله چهاردهم
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۲/اسفند/۱۴۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ علی شهرابی ـ محمد گودرزی ـ میلاد منصوری سروش موئینی ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ عطا صادقی
فیزیک	یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ هادی حمزه‌پور ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	فرشید ابراهیمی ـ مهدی براتی ـ سلیم بهرامی ـ پیمان خواجوی مجد ـ امیر قاسمی‌پور سروش عبادی ـ یاسر عبداللهی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	فرشاد حسن‌زاده محمد گودرزی	فهیمه تورانی عادل حسینی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	زهرا جالینوسی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری مریم گلی‌حسنلو	علیرضا جباری سعید محبی	آیدین طهماسقلی‌زاده پوریا علاقه‌مند امیر محمودی انزابی سعید محبی محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	نیلوفر درخشان	مرتضی نصیرزاده یاشار ذریه	هادی عبادی محمدرضا بیاتلو یلدا رزاق‌زاده رامین رزمجو آرمین عظیمی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ علیرضا جعفری ـ عادل حسینی

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ هدیه خسروی زهرا صفری ـ الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر ـ نادره نازآوری ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخائی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق‌نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

www.konkur.in

۱ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲+۳}$، روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-\infty,۱)$

۳) $(-۱,+\infty)$ ۴) $(-۳,۳)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint نامعادلهٔ $f'(x)\geq ۰$ رو حل کن.

درس Box فرض کنید تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر روی این بازه $f'(x)\leq ۰$ باشد، تابع f اکیداً نزولی و اگر $f'(x)\geq ۰$ باشد، تابع f اکیداً صعودی است؛ فقط با این شرط که تابع f در هیچ جای این بازه برابر یک تابع ثابت نشود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{x^۲+۳-۲x(x-۱)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{-x^۲+۲x+۳}{(x^۲+۳)^۲}\Rightarrow f'(x)=-\frac{(x+۱)(x-۳)}{(x^۲+۳)^۲}$$

گام دوم: تابع f روی بازه‌ای اکیداً صعودی است که به ازای آن $f'(x)\geq ۰$ است.

$$\xrightarrow{f'(x)\geq ۰}(x+۱)(x-۳)\leq ۰\Rightarrow x\in[-۱,۳]$$

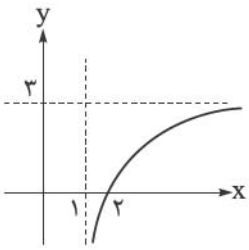
تابع f روی بازهٔ $[-۱,۳]$ و هر زیرمجموعه از آن اکیداً نزولی است.

یه جور دیگه در توابع گویا با ضابطهٔ $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، طول نقاط بحرانی تابع h، جواب‌های معادلهٔ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ هستند، بنابراین در این سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}\frac{x-۱}{x^۲+۳}=\frac{۱}{۲x}\Rightarrow ۲x^۲-۲x=x^۲+۳\Rightarrow x^۲-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)=۰$$

www.konkur.in

۲ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^{۲}+bx+c}{۲x+d}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a-b+c-d$ کدام است؟



۱) -۲۰

۲) -۱۶

۳) -۱۴

۴) -۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه Box

(چک لیست نمودارشناسی):

۱) گام‌های مقدماتی (دامنه و برخوردها):

برای تشخیص رفتار کلی نمودار، ابتدا موارد زیر را چک کنید:

- دامنه و برد: اولین فیلتر برای حذف گزینه‌های نادرست، بررسی دامنهٔ تعریف تابع است.
- برخورد با محور y: قراردادن $x=۰$ (عرض از مبدأ)
- برخورد با محور x (ریشه‌ها): حل معادلهٔ $f(x)=۰$.

رفتار نمودار در ریشه‌ها به توان آن‌ها بستگی دارد:

ریشهٔ ساده (مرتبهٔ ۱): نمودار محور را با شیب غیرصفر قطع می‌کند (مثل خط راست).

ریشهٔ مضاعف (مکرر زوج): نمودار بر محور مماس می‌شود و برمی‌گردد (مثل $x^{۲}$ در $x=۰$).

ریشهٔ مکرر فرد (مرتبهٔ ۳ به بالا): نمودار مماس می‌شود و عبور می‌کند (مثل $x^{۳}$ در $x=۰$).

۲) مجانب‌ها (قائم و افقی):

رفتار تابع در مرزهای دامنه و بی‌نهایت، اسکلت اصلی نمودار را می‌سازد:

الف) مجانب قائم: خط $x=a$ است که معمولاً ریشهٔ مخرج کسر (بعد از ساده‌سازی) است. در اطراف این خط، نمودار به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.

ب) مجانب افقی: خط $y=b$ است. اگر وقتی $x\to\pm\infty$ می‌رود، مقدار تابع به عدد ثابت b نزدیک شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به شکل وقتی $x\to+\infty$، $f(x)\to ۳$؛ پس صورت و مخرج هم‌درجه‌اند؛ در نتیجه $a=۰$ و داریم:

$$\xrightarrow{f(x)=\frac{bx+c}{۲x+d}} \lim_{x\to+\infty} f(x)=۳ \Rightarrow \frac{b}{۲}=۳ \Rightarrow b=۶$$

گام دوم: هم‌چنین $x=۱$ خط مجانب قائم است؛ در نتیجه:

$$۲(۱)+d=۰ \Rightarrow d=-۲$$

گام سوم: نقطهٔ $x=۲$ نیز محل برخورد نمودار تابع با محور x است:

$$\xrightarrow{f(x)=\frac{۶x+c}{۲x-۲}} f(۲)=۶(۲)+c=۰ \Rightarrow ۱۲+c=۰ \Rightarrow c=-۱۲$$

گام چهارم: حاصل $a-b+c-d$ برابر است با:

$$۰-۶-۱۲-(-۲)=-۱۶$$

www.konkur.in

۳ اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۲۴}{x+a-۲}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای a کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تابع هموگرافیک:

۱) شناسنامهٔ تابع:

تابع کسری به فرم کلی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را هموگرافیک می‌نامیم، به شرطی که دو حالت خاص رخ ندهد:

الف) $c\neq ۰$ (اگر صفر باشد، تابع خطی می‌شود).

ب) $ad-bc\neq ۰$ (اگر صفر باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع با یک تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ مساوی می‌شود).

۲) خطوط مجانب و مرکز تقارن:

این تابع همیشه دارای دو مجانب (یکی قائم و یکی افقی) است که در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند:

مجانب قائم (ریشه مخرج): $x=-\frac{d}{c}$

مجانب افقی (حد در بی‌نهایت): $y=\frac{a}{c}$

نکته محل برخورد مجانب‌ها، یعنی نقطهٔ $W(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$، مرکز تقارن نمودار است.

۳) مشتق و یکنوایی:

ضابطهٔ تابع مشتق این تابع برابر است با: $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$

از آن‌جا که مخرج همیشه مثبت است، علامت مشتق فقط به صورت کسر $(ad-bc)$ بستگی دارد:

- اگر $ad-bc>۰$: تابع روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً صعودی است.
- اگر $ad-bc<۰$: تابع روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا باید مقادیر a را که در آن $f'(x)<۰$ است، به دست آوریم:

$$f'(x)=\frac{a(a-۲)-۲۴}{(x+a-۲)^۲}<۰ \Rightarrow a^۲-۲a-۲۴<۰ \Rightarrow -۴<a<۶$$

گام دوم: هم‌چنین باید بررسی کنیم مجانب قائم تابع در فاصلهٔ $(۱,+\infty)$ قرار نگیرد:

$$x+a-۲=۰ \Rightarrow x=۲-a\leq ۱ \Rightarrow a\geq ۱$$

گام سوم: از اشتراک مقادیر به‌دست‌آمده داریم: $۱\leq a<۶$. مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای a برابر است با:

$$۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$$

گول نخوری

تابع هموگرافیک:

- اکسترمم ندارد: چون صورت مشتق عدد ثابت است و هرگز صفر نمی‌شود.
- نقطهٔ عطف ندارد: تقعر نمودار تغییر نمی‌کند (مگر در مجانب قائم که در دامنه نیست).

دامِ بیان یکنوایی: هرگز نگویید این تابع «روی $\mathbb{R}$ صعودی است». باید بگویید «روی هر بازهٔ دامنهٔ خود صعودی است» (زیرا ریشهٔ مخرج در دامنهٔ تابع حضور ندارد و نمی‌تواند عضو یک بازه باشد).

www.konkur.in

۴ جهت تقعر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۳}$ روی بازهٔ (a,b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

آزمون تعیین جهت تقعر:

فرض کنید تابع f روی بازه (a,b) دو بار مشتق‌پذیر باشد، علامت f'' جهت گودی (تقعر) نمودار را مشخص می‌کند:

- تقعر رو به بالا $(\cup)$: اگر در سراسر بازه $f''(x)>۰$ باشد.
- تقعر رو به پایین $(\cap)$: اگر در سراسر بازه $f''(x)<۰$ باشد.

اگر در بازه‌ای $f''(x)\geq ۰$ باشد و نقاطی که $f''(x)=۰$ است، تشکیل یک بازه ندهند (یعنی نقاط تک‌افتاده باشند)، باز هم تقعر آن بازه رو به بالا است.

مثال تابع $y=x^۴$ در $x=۰$ مشتق دومش صفر است، اما چون فقط در یک نقطهٔ صفر شده، کل نمودار تقعر رو به بالا دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مشتق دوم تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=۱-\frac{۴}{x^۲+۳} \Rightarrow f'(x)=\frac{۸x}{(x^۲+۳)^۲} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲۴(۱-x^۲)}{(x^۲+۳)^۳}$$

صفرهای تابع f'' برابر -۱ و ۱ هستند.

گام دوم: $f''(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	-۱	۱
$f''(x)$	$-$ ۰ $+$	۰ $-$

مخرج همیشه مثبت ←

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت، در بازهٔ $[-۱,۱]$، $f''(x)>۰$ است، پس نمودار تابع f تقعر رو به بالا دارد و بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با:

$$۱-(-۱)=۲$$

www.konkur.in

۵ ضابطهٔ تابع f، یک چندجمله‌ای درجه‌سوم است. اگر به ازای هر x، $f(x)+f(-x)=8$ باشد، طول نقطهٔ عطف تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

تعریف نقطهٔ عطف:

نقطهٔ $(c,f(c))$ روی نمودار تابع را نقطهٔ عطف می‌نامیم، اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر هم برقرار باشند:

۱) تابع در این نقطه دارای خط مماس باشد.

۲) جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کند.

نکته در نقطهٔ عطف مقدار $f''(x)=0$ یا $f''(x)$ وجود ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا فرض می‌کنیم $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$؛ در نتیجه:

$$f(x)+f(-x)=(ax^3+bx^2+cx+d)+(-ax^3+bx^2-cx+d)$$

$$\Rightarrow f(x)+f(-x)=2bx^2+2d$$

چون تساوی به‌دست‌آمده همواره برابر با عددی ثابت است، داریم:

$$\begin{cases}2b=0 \Rightarrow b=0\\ 2d=8 \Rightarrow d=4\end{cases}$$

نکته در تابع درجه‌سوم $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$، طول نقطهٔ عطف برابر $x=-\frac{b}{3a}$ است.

گام دوم: طبق نکته، طول نقطهٔ عطف f، صفر به دست می‌آید.

www.konkur.in

۶ اگر $x=۱$ طول نقطهٔ عطف و $x=-۲$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=ax^۳+bx^۲+۲۴x$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

($f'(۱)=۰$) ($f'(-۲)=۰$)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $x=-۲$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f است، پس مقدار تابع f' در این نقطه برابر صفر است:

$$f'(x)=۳ax^۲+۲bx+۲۴$$

$$\xrightarrow{f'(-۲)=۰} ۱۲a-۴b+۲۴=۰ \xrightarrow{\div ۴} ۳a-b=-۶ \quad (۱)$$

گام دوم: $x=۱$ طول نقطهٔ عطف تابع است، پس طبق نکتهٔ پاسخ قبل داریم:

$$-\frac{b}{۳a}=۱ \Rightarrow ۳a+b=۰ \quad (۲)$$

گام سوم: دستگاه معادلات به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳a-b=-۶ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۶a=-۶ \Rightarrow a=-۱ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b=۳$$

در نتیجه $a+b=۲$ است.

یه‌جور دیگه

در تابع درجه‌سوم، طول نقطهٔ عطف میانگین طول‌های نقاط اکسترمم نسبی است؛ یعنی:

$$\frac{x_{min}+x_{max}}{۲}=-\frac{b}{۳a}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{-۲+x_۲}{۲}=۱ \Rightarrow x_۲=۴$$

طول نقطهٔ بحرانی دیگر ۴ است.

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۳ax^۲+۲bx+۲۴=۰ \xrightarrow{P=x_۱x_۲=-۸} \frac{۲۴}{۳a}=-۸ \Rightarrow a=-۱$$

$$\xrightarrow[a=-۱]{S=x_۱+x_۲=۲} -\frac{۲b}{-۳}=۲ \Rightarrow b=۳$$

$$\Rightarrow a+b=-۱+۳=۲$$

www.konkur.in

۷ معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۶x+۱۱ & ; \quad x\geq ۲\\ -x^{۲}+۲x+۳ & ; \quad x<۲\end{cases}$ در نقطهٔ عطف آن کدام است؟

۱) $y=-۲x+۷$

۲) $y=۲x-۷$

۳) $y=-۲x-۷$

۴) چنین خطی وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته

۱) ملزومات نوشتن معادلهٔ خط:

برای نوشتن معادلهٔ هر خطی در صفحهٔ مختصات، به دو چیز نیاز داریم: «یک نقطه» و «شیب خط». در مبحث کاربرد مشتق، این دو جزء به صورت زیر استخراج می‌شوند:

- نقطهٔ تماس: اگر طول نقطهٔ تماس $x=a$ باشد، عرض آن $y=f(a)$ است، پس نقطهٔ ما $A(a,f(a))$ خواهد بود.
- شیب خط (m): شیب خط مماس بر نمودار تابع f در هر نقطه روی آن، همان مقدار مشتق تابع در آن نقطه است؛ یعنی $m=f'(a)$.

۲) فرمول معادلهٔ خط مماس:

با داشتن شیب $m=f'(a)$ و نقطهٔ تماس $(a,f(a))$، معادلهٔ خط از رابطهٔ معروف زیر به دست می‌آید:

$$y-f(a)=f'(a).(x-a)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نقطهٔ عطف تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۶ & ; \quad x\geq ۲\\ -۲x+۲ & ; \quad x<۲\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۲ & ; \quad x>۲\\ -۲ & ; \quad x<۲\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=۲$، تابع f پیوسته و مشتق‌پذیر است. در این نقطه $f''(x)$ تعریف نمی‌شود اما علامت آن تغییر کرده است، پس طول نقطهٔ عطف برابر $x=۲$ است.

گام دوم: عرض نقطهٔ عطف و شیب خط مماس بر تابع f در $x=۲$ را مشخص می‌کنیم و سپس معادلهٔ خط مماس در این نقطه را می‌نویسیم:

$$f(۲)=۳\ ,\ f'(۲)=-۲$$

$$\Rightarrow\ y-۳=-۲(x-۲)\ \Rightarrow\ y=-۲x+۷$$

www.konkur.in

۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{a}}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-a)^2}$ در بازهٔ $(2,4)$ نقطهٔ بحرانی دارد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نقطهٔ بحرانی چیست؟

نقطهٔ $x=c$ عضو دامنهٔ تابع f را نقطهٔ بحرانی می‌نامیم، هرگاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

- مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر باشد: $f'(c)=0$ (مماس افقی).
- تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد: $f'(c)$ وجود ندارد (مانند نقاط گوشه یا بازگشتی).

تذکر: نقطهٔ بحرانی حتماً باید عضو دامنهٔ تابع باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}x-\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$$

و سپس برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{f'(x)=0} \sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{x-a} \Rightarrow a=x-a \Rightarrow x=2a$$

هم‌چنین تابع f در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است، پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع f، $\{a,2a\}$ است.

گام دوم: برای این‌که تابع f در بازهٔ $(2,4)$ نقطهٔ بحرانی داشته باشد، یکی از مقادیر a و $2a$ باید عضو این بازه باشد.

$$\begin{cases}2<a<4\\2<2a<4\Rightarrow 1<a<2\end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} a\in(1,2)\cup(2,4)$$

در این محدوده تابع f نقطهٔ بحرانی دارد و تنها مقدار صحیح برای a، $a=3$ است.

www.konkur.in

۹ اختلاف بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۴x^۳-۱۲x|x-۱|-۳x$ روی بازهٔ $[۰,\frac{۳}{۲}]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق:**

برخلاف اکسترمم‌های نسبی که فقط در یک همسایگی، کوچک«ترین» هستند، اکسترمم‌های مطلق در کل دامنه بررسی می‌شوند:

- ماکزیمم مطلق: نقطه‌ای که عرض (y) آن از تمام نقاط دیگر تابع بیشتر یا مساوی باشد ($f(c)\geq f(x)$ برای هر x در دامنه).
- مینیمم مطلق: نقطه‌ای که عرض (y) آن از تمام نقاط دیگر تابع کم‌تر یا مساوی باشد ($f(c)\leq f(x)$ برای هر x در دامنه).

۲) **الگوریتم پیداکردن اکسترمم مطلق روی بازهٔ $[a,b]$:**

اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، حتماً دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است. برای یافتن آن‌ها مراحل زیر را طی کنید:

الف) یافتن نقاط بحرانی: ابتدا مشتق بگیرید و طول نقاط بحرانی تابع را که درون بازهٔ (a,b) هستند، پیدا کنید.

ب) محاسبهٔ مقادیر: مقدار تابع را در نقاط زیر حساب کنید:

- در نقاط بحرانی به‌دست‌آمده در مرحلهٔ قبل
- در ابتدا و انتهای بازه (یعنی $f(a)$ و $f(b)$)

پ) مقایسه: اعداد به دست آمده را با هم مقایسه کنید:

- بزرگ‌ترین عدد ← ماکزیمم مطلق
- کوچک‌ترین عدد ← مینیمم مطلق

۳) **اکسترمم مطلق در بازه‌های باز یا نامتناهی:**

اگر بازهٔ مورد نظر بسته نباشد (مانند (a,b) یا $(-\infty,+\infty)$)، روش کاندیداها به تنهایی کارساز نیست، چون سر و ته بازه را نداریم. در این حالت:

الف) نقاط بحرانی درون بازه را بیابید و مقدار تابع را در آن‌ها حساب کنید.

ب) به جای $f(a)$ و $f(b)$، حد تابع را در مرزها حساب کنید ($\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$).

پ) تحلیل نتایج:

- اگر یکی از حدها $+\infty$ شد. ← فاقد ماکزیمم مطلق
- اگر یکی از حدها $-\infty$ شد. ← فاقد مینیمم مطلق
- اگر حاصل حدها عددی حقیقی شدند، آن‌ها را با مقادیر نقاط بحرانی مقایسه کنید (دقت کنید که مقادیر حدی هرگز انتخاب نمی‌شوند، فقط برای مقایسه هستند).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۴x^۳-۱۲x(x-۱)-۳x & ; \quad x\geq ۱\\ ۴x^۳+۱۲x(x-۱)-۳x & ; \quad x<۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۴x^۳-۱۲x^۲+۹x & ; \quad x\geq ۱\\ ۴x^۳+۱۲x^۲-۱۵x & ; \quad x<۱\end{cases}$$

گام دوم: حال نقاط بحرانی تابع f را به کمک مشتق آن مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۱۲x^۲-۲۴x+۹ & ; \quad x>۱\\ ۱۲x^۲+۲۴x-۱۵ & ; \quad x<۱\end{cases}$$

www.konkur.in

توجه کنید که $f'_+(1) = -3 \neq f'_-(1) = 21$ است، پس $x = 1$ یکی از نقاط بحرانی است، هم‌چنین:

$$\xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} 12x^2 - 24x + 9 = 0 \Rightarrow 3(2x-3)(2x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \ , \ x = \frac{1}{2} \text{ غ‌ق‌ق} \\ 12x^2 + 24x - 15 = 0 \Rightarrow 3(2x-1)(2x+5) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ , \ x = -\frac{5}{2} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

گام سوم: طول نقاط بحرانی بازهٔ $(0, \frac{3}{2})$، $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ هستند. مقادیر تابع را در این نقاط به همراه ابتدا و انتهای بازه به دست می‌آوریم:

$$f(0) = f(\frac{3}{2}) = 0 \ , \ f(\frac{1}{2}) = -4 \ , \ f(1)$$

پس کم‌ترین مقدار تابع -4 و بیشترین مقدار آن 1 است، اختلاف این دو مقدار 5 است.

www.konkur.in

۱۰ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,|\sqrt[3]{x}-3|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) اکسترمم‌های نسبی:

اگر تابع f در یک همسایگی $x=c$ تعریف شده باشد، در شرایط زیر $x=c$ طول اکسترمم نسبی نمودار تابع f است:

- ماکزیمم نسبی: در این همسایگی $f(c)\geq f(x)$ باشد.
- مینیمم نسبی: در این همسایگی $f(c)\leq f(x)$ باشد.

۲) آزمون مشتق اول (تشخیص نوع اکسترمم):

برای تشخیص نوع نقطهٔ بحرانی c، علامت f' را در اطراف آن بررسی می‌کنیم:

تغییر علامت f'	وضعیت نمودار	نشانه در جدول	نتیجه
از + به −	صعودی ← نزولی	↗ . ↘	ماکزیمم نسبی
از − به +	نزولی ← صعودی	↘ . ↗	مینیمم نسبی
بدون تغییر	یکنوا باقی می‌ماند.	↗ . ↗ یا ↘ . ↘	اکسترمم نیست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق $x=27$ است و براساس آن داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-\sqrt[3]{x^2}) & ; \quad x<27\\ x-\sqrt[3]{x^2} & ; \quad x\geq 27\end{cases}$$

و سپس ضابطهٔ تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1 & ; \quad x<27\\ 1-\frac{2}{\sqrt[3]{x}} & ; \quad x\geq 27\end{cases}$$

گام دوم: تابع f در $x=0$ و $x=27$ مشتق‌ناپذیر است و مقدار مشتق آن در $x=8$ برابر صفر است، زیرا:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=2 \Rightarrow x=8$$

گام سوم: حالا با استفاده از جدول تغییرات رفتار تابع، مقدار ماکزیمم نسبی آن را پیدا می‌کنیم:

x		0		8		27	
f'	−		+	0	−		+
f	↘		↗	max نسبی	↘		↗

پس طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع، ۸ و مقدار آن $f(8)=4$ است.

www.konkur.in

۱۱ اگر اختلاف مقادیر اکسترمم نسبی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+a}{x+۱}$ برابر ۶ باشد، طول نقطهٔ مینیمم نسبی آن کدام است؟ $(a>-۱)$

۱) ۰/۵ ۲) −۰/۵ ۳) ۲/۵ ۴) −۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نقاط بحرانی تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-۱(x^۲+a)}{(x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۲x-a}{(x+۱)^۲};\ x\neq -۱$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^۲+۲x-a=۰ \Rightarrow x=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۴a}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۱+a}$$

گام دوم: حال جدول تغییرات رفتار تابع را به کمک آزمون مشتق اول می‌نویسیم:

x		$-۱-\sqrt{۱-a}$		$-۱+\sqrt{۱+a}$	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+
$f(x)$	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

گام سوم: مقادیر اکسترمم‌های نسبی تابع f را به دست می‌آوریم. توجه کنید که در نقاط بحرانی $x^۲=a-۲x$:

$$f(-۱+\sqrt{۱+a})=\frac{a+۲-۲\sqrt{۱+a}+a}{\sqrt{۱+a}}=۲\sqrt{۱+a}-۲$$

$$f(-۱-\sqrt{۱+a})=\frac{a+۲+۲\sqrt{۱+a}+a}{-\sqrt{۱+a}}=-۲\sqrt{۱+a}-۲$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف مقادیر اکسترمم}=(۲\sqrt{۱+a}-۲)-(-۲\sqrt{۱+a}-۲)=۴\sqrt{۱+a}=۶ \Rightarrow \sqrt{۱+a}=\frac{۳}{۲}$$

گام چهارم: طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر است با:

$$x_{min}=-۱+\sqrt{۱+a}=-۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

www.konkur.in

۱۲ مستطیلی با بیشترین مساحت ممکن، درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است. محیط این مستطیل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

الگوریتم ۵ مرحله‌ای حل مسائل بهینه‌سازی:

برای یافتن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت (حجم، مساحت، سود و ...) مراحل زیر را به ترتیب طی کنید:

۱) مدل‌سازی و رسم شکل: ابتدا متغیرهای مسئله (طول، عرض، شعاع و ...) را نام‌گذاری کنید. کشیدن یک شکل سادهٔ هندسی بسیار کمک‌کننده است.

۲) تشکیل تابع هدف: تابعی که سؤال از شما «ماکزیمم» یا «مینیمم» آن را خواسته بنویسید (مثلاً $V = \pi r^۲ h$).

۳) تک‌متغیره‌کردن (مهم‌ترین گام): تابع هدف معمولاً دو متغیر دارد. با استفاده از اطلاعات جانبی مسئله (مثل محیط ثابت یا روابط هندسی)، یکی از متغیرها را حذف کنید تا تابع فقط برحسب یک متغیر (مثلاً x) شود.

۴) تعیین دامنهٔ متغیر: مشخص کنید متغیر x در چه بازه‌ای معنا دارد (مثلاً طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد: $x > ۰$).

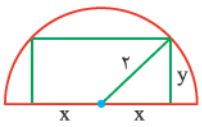
۵) مشتق و اکسترمم: از تابع تک‌متغیره مشتق بگیرید $(f'(x) = ۰)$ تا نقاط بحرانی پیدا شوند. اکسترمم مطلق در این نقاط یا سر و ته بازه اتفاق می‌افتد.

نکات کلیدی و میانبر:

- جواب کجاست؟ در ۹۹٪ مسائل بهینه‌سازی، پاسخ نهایی همان ریشهٔ مشتق (نقطهٔ بحرانی) است. معمولاً نیازی به چک‌کردن نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نیست، مگر این‌که بازه بسته و محدود به اعداد خاصی باشد.
- تشخیص نوع اکسترمم: اگر تنها یک نقطهٔ بحرانی به دست آمد، همان نقطه جواب مسئله (ماکزیمم یا مینیمم خواسته شده) است، اما اگر چندین نقطه داشتید، با تعیین علامت مشتق یا مشتق دوم، نوع آن را مشخص کنید.
- فرمول‌های کمکی: در گام سوم (تک‌متغیره‌کردن)، معمولاً از قضیهٔ فیثاغورس، تشابه مثلث‌ها یا فرمول‌های محیط و مساحت به عنوان رابطهٔ کمکی (قید) استفاده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به شکل مقابل داریم:



$$x^۲ + y^۲ = ۴ \quad (*)$$

گام دوم: حال تابع مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$S = ۲xy \xrightarrow{(*)} S(x) = ۲x\sqrt{۴ - x^۲} \;\; ; \;\; ۰ < x < ۲$$

گام سوم: بیشترین مقدار تابع S را مشخص می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{۸ - ۴x^۲}{\sqrt{۴ - x^۲}} \xrightarrow{S'(x)=۰} ۸ - ۴x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

بنابراین به ازای $x = \sqrt{۲}$ و $y = \sqrt{۲}$ مقدار مساحت مستطیل بیشترین مقدار است.

گام چهارم: محیط مستطیل برابر است با:

$$P = ۴x + ۲y = ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲}$$

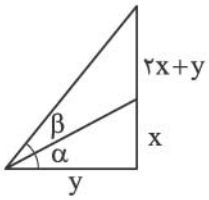
تیزبازی

مساحت مستطیل زمانی بیشترین مقدار خود را دارد که x و y مساوی باشند:

$$\xrightarrow{x^۲+y^۲=۴} x^۲ = y^۲ = ۲ \Rightarrow x = y = \sqrt{۲} \Rightarrow P = ۶\sqrt{۲}$$

www.konkur.in

۱۳ در شکل زیر، به ازای کدام مقدار $\tan\alpha$، بیشترین مقدار برای $\tan\beta$ به دست می‌آید؟



۱) ۱

۲) ۳

۳) $\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۱۱}$

۴) $\frac{\sqrt{۱۵}-۳}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مقدار $\tan\beta$ را برحسب $\tan\alpha$ مشخص می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{x}{y}\ ,\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{۳x+y}{y}=\frac{۳x}{y}+۱=۳\tan\alpha+۱\ ,\ ۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$$

$$\xrightarrow{\tan\beta=\tan((\alpha+\beta)-\alpha)}\ \tan\beta=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}=\frac{۳\tan\alpha+۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha(۳\tan\alpha+۱)}$$

$$\Rightarrow\ \tan\beta=\frac{۲\tan\alpha+۱}{۳\tan^{۲}\alpha+\tan\alpha+۱}$$

گام دوم: حال با تغییر متغیر $x=\tan\alpha$ و $y=\tan\beta$، باید بیشترین مقدار تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)=\frac{۲x+۱}{۳x^{۲}+x+۱}\ ;\ x>۰$ را به دست آوریم:

$$f'(x)=\frac{۲(۳x^{۲}+x+۱)-(۲x+۱)(۶x+۱)}{(۳x^{۲}+x+۱)^{۲}}\ \Rightarrow\ f'(x)=-\frac{۶x^{۲}+۶x-۱}{(۳x^{۲}+x+۱)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}\ ۶x^{۲}+۶x-۱=۰\ \xrightarrow{x>۰}\ x=\frac{\sqrt{۱۵}-۳}{۶}$$

گام سوم: حال با بررسی مقادیر زیر برای بیشترین مقدار تابع f داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^{+}} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰\\ f\left(\frac{\sqrt{۱۵}-۳}{۶}\right)=\frac{۴+۲\sqrt{۱۵}}{۱۱}>۱\end{cases}$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای $\tan\beta$ به ازای $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۱۵}-۳}{۶}$ به دست می‌آید.

www.konkur.in

۱۴ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\cos((x-[x])\pi)$ در کدام نقاط زیر دارای نقطهٔ عطف است؟ ($n\in\mathbb{Z}$ و [ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $x=n$

۲) $x=n+\frac{1}{2}$

۳) $x=n+\frac{1}{4}$

۴) نقطهٔ عطف ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است، رفتار تابع را در بازهٔ $[0,1)$ بررسی می‌کنیم و نتیجه را تعمیم می‌دهیم:

$$f(x)=\cos(\pi x)\ ,\ 0\le x<1$$

$$f'(x)=-\pi\sin(\pi x)$$

$$f''(x)=-\pi^2\cos(\pi x)\xrightarrow{f''(x)=0}-\pi^2\cos(\pi x)=0\Rightarrow\cos(\pi x)=0\xrightarrow{0\le x<1}\pi x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

گام دوم: مشتق دوم را در اطراف $x=\frac{1}{2}$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f''(x)$	−	0	+

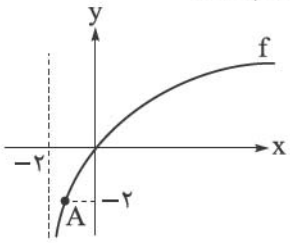
$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ نقطهٔ عطف است.

گام سوم: حال چون دورهٔ تناوب تابع برابر ۱ است، نقاط عطف تابع برابر است با:

$$x=n+\frac{1}{2}\quad;\quad n\in\mathbb{Z}$$

www.konkur.in

۱۵ مطابق شکل، طول نقطهٔ A واقع بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۲}(ax+b)$ کدام است؟



۱) $-۱/۷۵$

۲) $-۱/۵$

۳) $-۱/۲۵$

۴) -۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

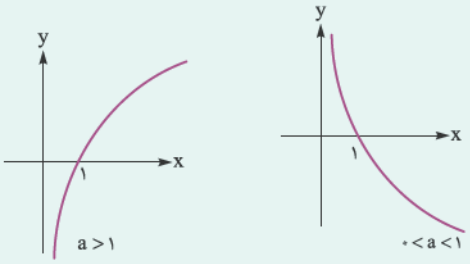
درس Box

تعریف و نمودار تابع لگاریتمی:

تابع لگاریتمی با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ وارون تابع نمایی $g(x)=a^x$ است، به طوری که $a>۰$ و $a\neq ۱$.

- دامنهٔ تابع لگاریتمی بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.
- برد این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است.

نمودار آن قرینهٔ نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y=x$ است و شکل آن به مقدار a بستگی دارد:



دامنهٔ توابع لگاریتمی:

برای تعیین دامنهٔ یک تابع لگاریتمی کلی به صورت $y=\log_{g(x)} f(x)$، باید اشتراک مجموعهٔ جواب‌های سه نامعادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

۱) $f(x)>۰$

۲) $g(x)>۰$

۳) $g(x)\neq ۱$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند:

$$f(۰)=۰ \Rightarrow \log_{۲} b=۰ \Rightarrow b=۱ \Rightarrow f(x)=\log_{۲}(ax+۱)$$

گام دوم: هم‌چنین دامنهٔ تابع f برابر $(-۲,+\infty)$ است؛ پس:

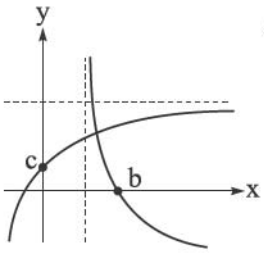
$$D_f=(\frac{-۱}{a},+\infty) \Rightarrow \frac{-۱}{a}=-۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x)=\log_{۲}(\frac{x}{۲}+۱)$$

گام سوم: حال طول نقطهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$$f(x_A)=-۲ \Rightarrow \log_{۲}(\frac{x_A}{۲}+۱)=-۲ \Rightarrow \frac{x_A}{۲}+۱=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x_A=-\frac{۳}{۲}$$

www.konkur.in

۱۶ نمودارهای توابع $f(x)=۳a-۲(۲a-۱)^x$ و $g(x)=\log_a(ax-۱)$ در شکل زیر رسم شده‌اند. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای $[\frac{a+b}{۲}]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

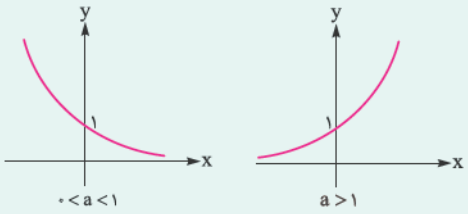
نموداری که مجانب افقی داره نمایی و نموداری که مجانب قائم داره لگاریتمیه.

درس Box

تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را یک تابع نمایی می‌نامیم. در این تابع، a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ است $(a>۰, a\neq ۱)$.

- دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است.
- برد آن بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

شکل نمودار تابع نمایی به مقدار پایهٔ a بستگی دارد:



- اگر $a>۱$ باشد، تابع اکیداً صعودی است.
- اگر $۰<a<۱$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودارها، روشن است که $۰<a<۱$ و $۰<۲a-۱<۱$، زیرا نمودار تابع لگاریتمی g اکیداً نزولی و نمودار تابع نمایی f اکیداً صعودی است. در نتیجه:

$$(\frac{۱}{۲},۱)\cap(۰,۱)=(\frac{۱}{۲},۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}<a<۱$$

گام دوم: هم‌چنین $۰<c<۳a$ و با توجه به این‌که $c=f(۰)=۳a-۲$ است، می‌توان نوشت:

$$۳a-۲>۰ \Rightarrow a>\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳}<a<۱$$

گام سوم: از روی نمودار داریم:

$$g(b)=\log_a(ab-۱)=۰ \Rightarrow ab-۱=a^۰=۱ \Rightarrow ab=۲ \Rightarrow b=\frac{۲}{a}$$

حالا چون محدودهٔ a را در گام قبلی به دست آورده‌ایم، براساس آن محدودهٔ b را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲}{۳}<a<۱ \xrightarrow{\text{معکوس}} ۱<\frac{۱}{a}<\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲<\frac{۲}{a}<۳ \Rightarrow ۲<b<۳$$

گام چهارم: پس $\frac{۸}{۳}<a+b<۴$ است و داریم:

$$\frac{۴}{۳}<\frac{a+b}{۲}<۲ \Rightarrow [\frac{a+b}{۲}]=۱$$

www.konkur.in

۱۷ اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $(a\log ۲)x^۲ + ax + b\log ۲ = ۰$، برابر $\frac{b}{a}$ باشد، حاصل $(۰/۱۲۵)^{\frac{b}{۲a}}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۵ ۳) $۲۰\sqrt{۵}$ ۴) $۴۰\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از حاصل‌ضرب جواب‌ها استفاده کن.

درس Box

ویژگی‌های توان‌های حقیقی:

با فرض این‌که a , b اعداد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x , y اعداد حقیقی باشند، روابط زیر برقرار است:

۱) $a^{۰} = ۱$

۲) $a^{-x} = \frac{۱}{a^x}$

۳) $a^x . a^y = a^{x+y}$

۴) $(a^x)^y = a^{xy}$

۵) $(ab)^x = a^x b^x$

۶) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

۷) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

تعریف و ویژگی‌های لگاریتم:

لگاریتم عدد b در مبنای a (با فرض $a \neq ۱, a, b > ۰$) برابر x است، اگر و تنها اگر $a^x = b$ باشد.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

مهم‌ترین ویژگی‌های لگاریتم (به شرط معنی‌داربودن عبارت‌ها):

۱) $\log_a ۱ = ۰, \log_a a = ۱$

۲) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

۳) $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

۴) $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x$

۵) تغییر مبنا: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

۶) $\log_a x = \frac{۱}{\log_x a}$

۷) $_a\log_a x = x \Rightarrow b^{\log_a x} = x^{\log_a b}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا با توجه به حاصل‌ضرب جواب‌ها می‌توان نوشت:

$$x_۱x_۲ = \frac{b\log ۲}{a\log ۲} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}x_۲ = \frac{b}{a} \xrightarrow{b\neq ۰} x_۲ = ۱$$

دقت‌کنید که اگر $b = ۰$ باشد، خواستهٔ سؤال برابر $(۰/۱۲۵)^{۰} = ۱$ می‌شود که در گزینه‌ها دیده نمی‌شود.

www.konkur.in

گام دوم: بنابراین جواب دیگر معادله، $x = ۱$ است و داریم:

مجموع ضرایب صفر است. $\Rightarrow a\log ۲ + a + b\log ۲ = ۰ \Rightarrow \log ۲ = -\frac{a}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\log ۲} = -\frac{a+b}{a} \Rightarrow ۱ + \frac{۱}{\log ۲} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{۱+\log ۲}{\log ۲} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\log ۲۰}{\log ۲} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\log_{۲} ۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{b}{۲a} = -\frac{۱}{۲}\log_{۲} ۲۰$$

گام سوم: مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$(۰/۱۲۵)^{\frac{b}{۲a}} = (۲^{-۳})^{-\frac{۱}{۲}\log_{۲} ۲۰} = ۲^{\frac{۳}{۲}\log_{۲} ۲۰} = (۲^{\log_{۲} ۲۰})^{\frac{۳}{۲}} = (۲۰^{\log_{۲} ۲})^{\frac{۳}{۲}} = (۲۰)^{\frac{۳}{۲}} = ۲۰ \times \sqrt{۲۰} = ۴۰\sqrt{۵}$$

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $(a\log ۲)x^{۲} + ax + b\log ۲ = ۰$، برابر -۱ باشد، مقدار $(\sqrt{۲})^{\frac{b}{a}}$ کدام است؟

(سؤال ۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۵ ۴) ۱۰

www.konkur.in

۱۸ تنها یکی از دو جواب معادلهٔ $\log_{8x} 4x + a\log_x 8 = 10$ در بازهٔ $(2,8)$ قرار دارد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای $12a$ کدام است؟

۱) $(13,31)$ ۲) $(13,71)$

۳) $(37,110)$ ۴) $(37,70)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\log_2 4x}{\log_2 8x} + \frac{a}{\log_8 x} = 10 \Rightarrow \frac{2+\log_2 x}{3+\log_2 x} + \frac{a}{\frac{1}{3}\log_2 x} = 10$$

گام دوم: با فرض $t = \log_2 x$ که $-1 < t < 3$، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{t+2}{t+3} + \frac{3a}{t} = 10 \Rightarrow t^2 + 2t + 3at + 9a = 10t^2 + 30t \Rightarrow 9t^2 + (28-3a)t - 9a = 0$$

گام سوم: با فرض $g(t) = 9t^2 + (28-3a)t - 9a$، برای این‌که فقط یکی از جواب‌های معادله $g(t) = 0$ در بازهٔ $(1,3)$ قرار داشته باشد، باید نمودار $y = g(t)$ به صورت زیر باشد:

گام چهارم: با توجه به نمودارها، در هر دو حالت $g(1)g(3) < 0$ است:

$$\Rightarrow \underbrace{(37-12a)}_{g(1)}\underbrace{(165-18a)}_{g(3)} < 0 \Rightarrow \frac{37}{12} < a < \frac{165}{18} = \frac{110}{12} \Rightarrow 37 < 12a < 110$$

دقت کنید که اگر $g(1)g(3) < 0$ باشد، Δ ی معادلهٔ $g(t) = 0$ همواره مثبت می‌شود و نیازی به بررسی آن نیست.

www.konkur.in

مشابه امتحان نهایی

۱۹ حجم متوازی‌السطوح ایجادشده توسط بردارهای $\vec{a}=-\vec{j}+\vec{k}$، $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{c}=-\vec{j}-\vec{k}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مشاوره این مدل سؤال‌ها (محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح) از پرتکرارترین مدل‌های سؤال‌های فصل سوم هندسه (۳) در امتحان‌های نهایی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) برای هر سه بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$، $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$، داریم:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

۲) حجم متوازی‌السطوح ایجادشده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، حجم متوازی‌السطوح ایجادشده توسط سه بردار $\vec{a}=(0,-1,1)$، $\vec{b}=(1,0,-1)$ و $\vec{c}=(0,-1,-1)$ برابر است با:

$$|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}\right|=|0+1\times(-1-0)+1(-1-0)|=|-2|=2$$

توجه کنید که دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه کرده‌ایم.

امتحان نهایی

حجم متوازی‌السطوح ایجادشده توسط بردارهای $\vec{a}(0,-1,1)$، $\vec{b}=(1,0,-1)$ و $\vec{c}=(0,-1,-1)$ را بیابید.

(سؤال ۱۶ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۳)

www.konkur.in

مشابه امتحان نهایی

۲۰ اگر $\vec{a}=(m-1,m^2,m^3+1)$ و $\vec{b}=(2m,3m-1,4m-2)$، به طوری که $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=m^4$، آن‌گاه طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

مشاوره این سؤال، با ایده‌گرفتن از یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طرح شده است.

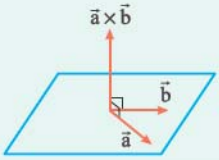
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

درس Box

۱) برای هر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر صفحهٔ شامل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و در نتیجه بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.



۲) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم، صفر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به درس‌باکس از $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=m^4$ نتیجه می‌گیریم $m^4=0$، پس $m=0$.

گام دوم: اگر $m=0$، آن‌گاه $\vec{a}=(-1,0,1)$ و $\vec{b}=(0,-1,-2)$ پس $\vec{a}+\vec{b}=(-1,-1,-1)$.

گام سوم: طول بردار $\vec{a}+\vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

امتحان نهایی

جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید. (سؤال ۱۲ (قسمت پ) ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۳)

برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حاصل $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر ..... می‌باشد.

www.konkur.in

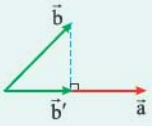
۲۱ اگر $\vec{a}=(۱,۰,۲\sqrt{۶})$، $\vec{b}=(-۴,\sqrt{۳},۰)$ و $\vec{b}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{a}.\vec{b}'$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) مطابق شکل، اگر $\vec{b}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ باشد، آن‌گاه داریم:



$$\vec{b}'=\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{a}|^۲}\vec{a}$$

۲) برای هر دو بردار مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، داریم: $\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$.

۳) برای هر بردار مانند $\vec{a}$ داریم $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به قسمت (۱) درس‌باکس، برای دو بردار $\vec{a}=(۱,۰,۲\sqrt{۶})$ و $\vec{b}=(-۴,\sqrt{۳},۰)$، داریم:

$$\vec{b}'=\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{a}|^۲}\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{b}'=\frac{-۴+۰+۰}{|a|^۲}\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{a}.\vec{b}'=\vec{a}.(\frac{-۴}{|a|^۲}\vec{a})=\frac{-۴}{|\vec{a}|^۲}(\vec{a}.\vec{a})=-۴\frac{|a|^۲}{|a|^۲}=-۴$$

www.konkur.in

۲۲ در مثلث ABC، اگر $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$، $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=0$

۲) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

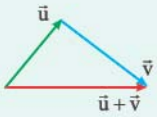
۳) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}$

۴) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اگر شکل مناسب را رسم کنید، می‌بینید که $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$.

درس Box ۱) مطابق شکل، اگر نقطهٔ ابتدای بردار $\vec{v}$ را بر نقطهٔ انتهای بردار $\vec{u}$ قرار دهیم، بنا به قاعدهٔ مثلثی در جمع بردارها، بردار $\vec{u}+\vec{v}$، برداری است که ابتدای $\vec{u}$ را به انتهای $\vec{v}$ وصل می‌کند:



۲) حاصل‌ضرب خارجی هر بردار در خودش، برابر با بردار صفر است، یعنی $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

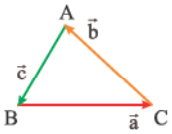
۳) برای سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

۴) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم: $-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شکل مناسب را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، داریم: $\underbrace{\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}}_{(*)}$:



گام دوم: طرفین تساوی $(*)$ را از سمت چپ در $\vec{a}$، ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times(-\vec{c})\Rightarrow\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}\quad(1)$$

گام سوم: طرفین تساوی $(*)$ را از سمت راست در $\vec{b}$ ضرب خارجی می‌کنیم:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=-\vec{c}\times\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}=-\vec{c}\times\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}\quad(2)$$

گام چهارم: از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

www.konkur.in

۲۳ مثلث ABC را در نظر بگیرید. اگر $M(۴,m,۳)$، $N(-k,m,۲)$ و $P(k,m,۴)$، به ترتیب نقاطی واقع بر اضلاع BC، AB و AC باشند، به طوری که $\frac{AN}{BN}=\frac{BM}{CM}=\frac{CP}{AP}=۲$ آن‌گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

مشاوره این سؤال با ایده‌گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۳ ولی با سطح دشوارتر از آن طرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

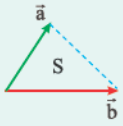
Hint شکل فرضی را رسم کرده و ابتدا نشان دهید $S_{ANP}=S_{BMN}=S_{CMP}=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$.

درس Box

۱) اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آن‌گاه:

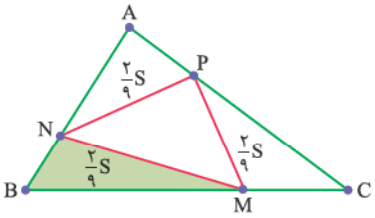
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_۱&a_۲&a_۳\\b_۱&b_۲&b_۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_۲&a_۳\\b_۲&b_۳\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_۱&a_۳\\b_۱&b_۳\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_۱&a_۲\\b_۱&b_۲\end{vmatrix}\vec{k}$$

۲) مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنا می‌شود، برابر است با:



$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل فرضی زیر و بنا به رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:



$$S_{ANP}=\frac{۱}{۲}AN\times AP\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}AB\times\frac{۱}{۳}AC\times\sin A=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$$

با توجه به شکل به همین ترتیب ثابت می‌شود: $S_{MBN}=S_{PCM}=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$

گام دوم: با توجه به شکل داریم:

$$S_{MNP}=S_{ABC}-۳(\frac{۲}{۹}S_{ABC})\Rightarrow S_{MNP}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}\Rightarrow S_{ABC}=۳S_{MNP}\quad(۱)$$

گام سوم: می‌دانیم مساحت یک مثلث، نصف اندازهٔ ضرب خارجی دو برداری است که منطبق بر دو ضلع آن مثلث باشد، پس داریم:

$$S_{MNP}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{NP}|=\frac{۱}{۲}|(k-۴,۰,۱)\times(۲k,۰,۲)|=\frac{۱}{۲}|(۰,۸,۰)|=۴$$

پس با استفاده از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود: $S_{ABC}=۳\times۴=۱۲$

www.konkur.in

۲۴ اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{a}'$ تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ باشد، آن‌گاه $\vec{b}=\vec{c}$ است.

۲) اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ باشد، آن‌گاه $\vec{b}=\vec{c}$ است.

۳) اندازهٔ بردار $\vec{a}'$ کوچک‌تر یا مساوی اندازهٔ بردار $\vec{a}$ است.

۴) اندازهٔ بردار $\vec{a}'$ کوچک‌تر یا مساوی اندازهٔ بردار $\vec{b}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint امکان حذف یک بردار از طرفین یک تساوی در ضرب داخلی یا خارجی بردارها وجود ندارد.

درس Box

۱) اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ یا $\vec{a}\perp\vec{b}$.

۲) اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ یا $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

۳) اگر $\vec{a}'$ تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}'=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را به طور جداگانه بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): فرض کنید $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ باشد. در این صورت $\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})=0$ است و برای برقراری این رابطه، کافی است $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$ و لزومی ندارد $\vec{b}=\vec{c}$ باشد. به عنوان مثال داریم:

$$\vec{a}=(1,2,3)\ ,\ \vec{b}=(2,-1,4)\ ,\ \vec{c}=(3,0,3)\ \Rightarrow\ \vec{b}-\vec{c}=(-1,-1,1)$$

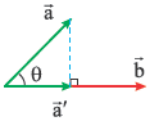
$$\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})=(1,2,3).(-1,-1,1)=-1-2+3=0\ \Rightarrow\ \vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{c}=0\ \Rightarrow\ \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$$

گزینهٔ (۲): فرض کنید $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ باشد. در این صورت $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$ است و برای برقراری این رابطه، کافی است $\vec{a}\parallel(\vec{b}-\vec{c})$ و لزومی ندارد $\vec{b}=\vec{c}$ باشد. به عنوان مثال داریم:

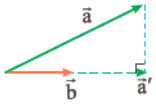
$$\vec{a}=(1,1,2)\ ,\ \vec{b}=(2,1,0)\ ,\ \vec{c}=(0,-1,-4)\ \Rightarrow\ \vec{b}-\vec{c}=(2,2,4)$$

$$\vec{a}\parallel(\vec{b}-\vec{c})\ \Rightarrow\ \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\ \Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$$

گزینهٔ (۳): مطابق شکل، اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ باشد، آن‌گاه $|\vec{a}'|=|\vec{a}||\cos\theta|$ و چون $|\cos\theta|\le 1$، پس همواره $|\vec{a}'|\le|\vec{a}|$:



گزینهٔ (۴): اندازهٔ بردار $\vec{a}'$ می‌تواند بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار $\vec{b}$ باشد:



www.konkur.in

۲۵ اگر $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکهٔ محورهای مختصات باشند، حاصل عبارت $2\vec{i}.(3\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}.(2\vec{i}\times3\vec{k})+4\vec{k}.(3\vec{i}\times2\vec{j})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ضرب خارجی بردارها خاصیت جابه‌جایی ندارد، پس به ترتیب بردارها در هنگام ضرب خارجی دقت کنید.

درس Box

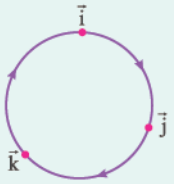
۱) بردارهای یکهٔ محورهای مختصات، دوبه‌دو بر هم عمودند؛ پس ضرب داخلی هر دو بردار از بین آن‌ها همواره برابر صفر است:

$$\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$$

از طرفی ضرب داخلی هر بردار یکه در خودش همواره برابر یک است:

$$\vec{i}.\vec{i}=|\vec{i}|^2=1\ ,\ \vec{j}.\vec{j}=|\vec{j}|^2=1\ ,\ \vec{k}.\vec{k}=|\vec{k}|^2=1$$

۲) مطابق شکل اگر بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را بر روی یک دایره قرار دهیم، حاصل‌ضرب خارجی هر دو بردار در جهت ساعتگرد، برابر بردار بعدی و در جهت پادساعتگرد، برابر قرینهٔ بردار بعدی است:



$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به مورد (۲) درس‌باکس، حاصل عبارت‌های درون پرانتزها را محاسبه می‌کنیم:

$$3\vec{j}\times\vec{k}=3(\vec{j}\times\vec{k})=3\vec{i}$$

$$2\vec{i}\times3\vec{k}=6(\vec{i}\times\vec{k})=6(-\vec{j})=-6\vec{j}$$

$$3\vec{i}\times2\vec{j}=6(\vec{i}\times\vec{j})=6\vec{k}$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده از گام اول در عبارت صورت سؤال داریم:

$$2\vec{i}.(3\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}.(2\vec{i}\times3\vec{k})+4\vec{k}.(3\vec{i}\times2\vec{j})=2\vec{i}.3\vec{i}+3\vec{j}.(-6\vec{j})+4\vec{k}.(6\vec{k})=6|\vec{i}|^2-18|\vec{j}|^2+24|\vec{k}|^2=6-18+24=12$$

www.konkur.in

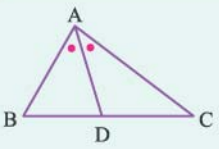
۲۶ در مثلثی به طول اضلاع ۶، ۷ و ۹، اختلاف طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویهٔ متوسط، بر روی ضلع روبه‌روی خود ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) در شکل زیر که AD نیمساز زاویهٔ داخلی A است، داریم:

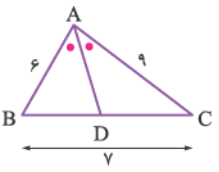


$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$$

۲) اگر $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$، می‌توانیم در نظر بگیریم: $\begin{cases}a=mk\\b=nk\end{cases}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به آن‌که زاویهٔ متوسط مثلث، روبه‌روی ضلع متوسط آن است، شکل مناسب را رسم می‌کنیم. با توجه به قسمت (۱) درس‌باکس، داریم:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{۲}{۳}$$

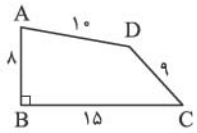
گام دوم: با توجه به قسمت (۲) درس‌باکس، از $\frac{BD}{CD}=\frac{۲}{۳}$، می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\begin{cases}BD=۲k\\CD=۳k\end{cases}$

گام سوم: با توجه به شکل، داریم:

$$BD+CD=BC\Rightarrow ۲k+۳k=۷\Rightarrow ۵k=۷\Rightarrow k=\frac{۷}{۵}=۱/۴\Rightarrow CD-BD=۳k-۲k=k=۱/۴$$

www.konkur.in

۲۷ در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



۱) $۴۸\sqrt{۳}$

۲) ۷۲

۳) $۳۶\sqrt{۳}$

۴) ۹۶

مشاوره این سؤال، مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۷۲ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است.

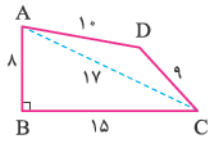
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint قطر AC را رسم کنید.

درس Box **قضیهٔ هرون:** اگر محیط مثلثی به طول اضلاع a، b و c را برابر با ۲P در نظر بگیریم، مساحت آن برابر است با:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** قطر AC را رسم می‌کنیم، داریم $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}$.



گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $AC=۱۷$، ضمن آن‌که:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۵=۶۰$$

گام سوم: محیط مثلث ACD برابر $۳۶=۱۷+۱۰+۹$ است، در نتیجه $P=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$. با استفاده از رابطهٔ هرون در مثلث ACD، داریم:

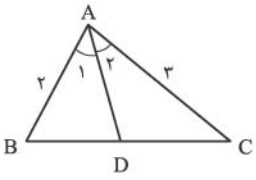
$$S_{ACD}=\sqrt{۱۸(۱۸-۹)(۱۸-۱۰)(۱۸-۱۷)}=\sqrt{۱۸\times ۹\times ۸\times ۱}=۳۶$$

در نتیجه:

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=۶۰+۳۶=۹۶$$

www.konkur.in

۲۸ مطابق شکل، اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$، آن‌گاه طول AD کدام است؟



۱) $1/2\sqrt{3}$

۲) $1/4\sqrt{3}$

۳) $1/2$

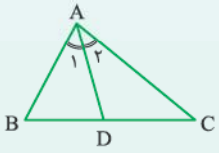
۴) $1/8$

مشاوره این سؤال، بر مبنای تمرین ۵ در صفحه‌های ۷۳ و ۷۴ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است. توجه کنید که باید تمام روابطی را که در فصل سوم کتاب هندسه (۲) آمده است، فرابگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

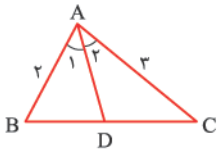
Hint پاره‌خط AD، نیمساز $\hat{A}$ در مثلث ABC است.

درس Box مطابق شکل، در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ داخلی A رسم شده است $(\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2})$، داریم:



$$AD = \frac{2AB \times AC \times \cos\frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC}$$

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس، در شکل مقابل، داریم:



$$AD = \frac{2\times2\times3\times\cos30^\circ}{2+3} = \frac{6\sqrt{3}}{5} = 1/2\sqrt{3}$$

www.konkur.in

۲۹ در مثلث ABC، نقطهٔ M وسط ضلع BC است و نیمساز زوایای $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. اگر $BC = ۱۲$، $AB = AM = ۹$، آن‌گاه طول پاره‌خط MQ کدام است؟

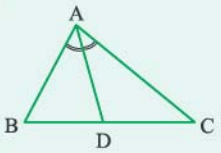
۱) $۲/۴\sqrt{۶}$
۲) $۲/۴\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۳، براساس تمرین ۱ در صفحهٔ ۷۰ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

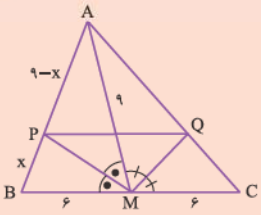
مطابق شکل در مثلث ABC، اگر AD نیمساز زاویهٔ داخلی A باشد، داریم:



$$AD^۲ = AB\times AC - BD\times CD$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به شکل، در مثلث ABM داریم:



الف) $\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{۹-x}{x} = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۹}{x} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۵}$

ب) $PM^۲ = AM\times BM - PA\times PB = ۹\times ۶ - (۹-\frac{۱۸}{۵})\times\frac{۱۸}{۵} = ۵۴(۱-\frac{۹}{۲۵}) = \frac{۵۴\times ۱۶}{۲۵} \Rightarrow PM = \frac{۱۲}{۵}\sqrt{۶}$

گام دوم: در دو مثلث AMB و AMC، داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AMB}: A\hat{M}B \text{ نیمساز زاویهٔ } MP \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AM}{BM} \\ \overset{\Delta}{AMC}: A\hat{M}C \text{ نیمساز زاویهٔ } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{CM} \end{cases} \xrightarrow{BM=CM} \frac{PA}{PB} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} PQ \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{PQ}{BC} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow PQ = ۱۲\times\frac{۹-\frac{۱۸}{۵}}{۹} = \frac{۳۶}{۵}$$

گام سوم: مثلث PMQ قائم‌الزاویه است؛ زیرا:

$$A\hat{M}B + A\hat{M}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲A\hat{M}P + ۲A\hat{M}Q = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}P + A\hat{M}Q = ۹۰^\circ \Rightarrow P\hat{M}Q = ۹۰^\circ$$

گام چهارم: قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث PMQ می‌نویسیم:

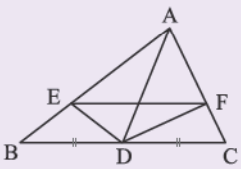
$$MQ^۲ + PM^۲ = PQ^۲ \Rightarrow MQ^۲ = (\frac{۳۶}{۵})^۲ - (\frac{۱۲}{۵})^۲\times ۶ = \frac{۴^۲\times ۹^۲ - ۴^۲\times ۹\times ۶}{۲۵} = \frac{۴^۲\times ۹(۹-۶)}{۲۵} = \frac{۱۲^۲\times ۳}{۲۵}$$

$$\Rightarrow MQ = \frac{۱۲}{۵}\sqrt{۳} = ۲/۴\sqrt{۳}$$

کنکور

در مثلث ABC، DE نیمساز زاویهٔ $A\hat{D}B$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $AC = ۸$، $BC = ۱۴$ و $AD = ۳$ باشد، اندازهٔ DF کدام است؟

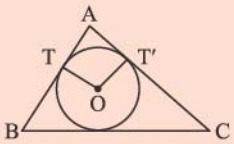
(سؤال ۳۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ـ نوبت دوم)



۱) $\sqrt{۷}$
۲) $۰/۹\sqrt{۷}$
۳) $۰/۵\sqrt{۲۱}$
۴) $۰/۶\sqrt{۲۱}$

www.konkur.in

۳۰ مطابق شکل، مثلث ABC به اضلاع $AB = ۴$، $AC = ۵$ و $BC = ۷$ و دایرهٔ محاطی آن رسم شده‌اند. اگر O مرکز دایره و T و T' نقاط تماس باشند، مساحت چهارضلعی $ATOT'$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۱/۵}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲/۵}$

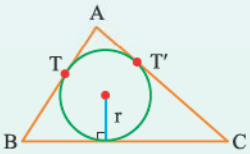
۴) $\sqrt{۳}$

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در شکل زیر که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC، با محیط $۲P$ و مساحت S رسم شده است، داریم:

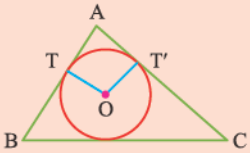


الف) $r = \frac{S}{P}$ (شعاع دایره)

ب) $AT = AT' = P - BC$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: محیط مثلث ABC برابر است با $۲P = ۴ + ۵ + ۷ = ۱۶$، پس $P = ۸$.



گام دوم: با توجه به درس‌باکس، داریم:

$$AT = AT' = P - BC = ۸ - ۷ = ۱$$

گام سوم: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \sqrt{۸(۸-۷)(۸-۵)(۸-۴)} = \sqrt{۸\times۱\times۳\times۴} = ۴\sqrt{۶}$$

پس:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۸} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

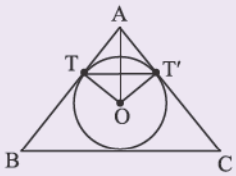
گام چهارم:

به دلیل هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ATO و $AT'O$ داریم:

$$S_{ATOT'} = ۲S_{ATO} = ۲(\frac{۱}{۲}OT\times AT) = OT\times AT = r\times AT = \frac{\sqrt{۶}}{۲}\times۱ = \frac{\sqrt{۶}}{۲} = \sqrt{\frac{۶}{۴}} = \sqrt{۱/۵}$$

کنکور

در مثلث محیطی شکل زیر، اضلاع $AB = ۴$ و $AC = ۵$ به ترتیب در نقاط T و T' بر محیط دایرهٔ محاطی، مماس هستند. اگر $BC = ۷$ باشد، اندازهٔ وتر TT' کدام است؟ *(سؤال ۳۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*



۱) ۰/۲$\sqrt{۱۵}$

۲) ۰/۴$\sqrt{۱۵}$

۳) ۰/۲$\sqrt{۵}$

۴) ۰/۴$\sqrt{۵}$

www.konkur.in

۳۱ در چند جایگشت از ارقام ۴، ۴، ۳، ۲، ۱، ۱، ۱ دو رقم ۳ و ۲ کنار هم هستند؟

۱) $\binom{۶}{۳}$ ۲) $(۶)_۳$

۳) $\binom{۶}{۲}$ ۴) $(۶)_۲$

مشاوره از فصل سوم گسسته، معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید. در سال‌های اخیر بیشتر از اصل لانه‌کبوتری، تعداد تابع‌ها و معادلهٔ سیالهٔ خطی سؤال آمده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ۲ و ۳ را در یک بسته قرار دهید. حواستان باشد: $(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

درس Box

قضیهٔ جایگشت با تکرار:

فرض کنید n شیء داریم، به طوری که $n_۱$ تای آن‌ها از نوع اول (مثل هم)، $n_۲$ تای آن‌ها از نوع دوم (مثل هم)، ... و n_k تای آن‌ها از نوع kام (مثل هم) باشند، تعداد کل جایگشت‌های اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱! \times n_۲! \times \dots \times n_k!}$$

جمع‌بندی جایگشت‌ها:

انواع جایگشت	تعداد	توضیح فارسی
n شیء متمایز	$n!$	جایگاه اول n حالت، جایگاه بعدی $n-۱$ حالت و ...
تعدادی شیء خاص کنار هم باشند.	–	آن اشیا را در یک دسته قرار داده و یک شیء فرض می‌کنیم. جایگشت دسته به همراه بقیهٔ اشیا را در جایگشت اعضای دسته بین خودشان ضرب می‌کنیم.
یک‌درمیان	n شیء متمایز دستهٔ A و $n+۱$ شیء متمایز دستهٔ B $= n! \times (n+۱)!$	با اشیای B باید شروع کنیم $\underline{B} \times \underline{A} \times \underline{B} \times \dots \times \underline{B}$ جایگشت اشیای گروه B بین خودشان و $(n+۱)!$ جایگشت گروه A بین خودشان $n!$
	دو گروه nتایی از اشیای متمایز $= ۲! \times n! \times n!$	می‌توانیم با گروه A یا گروه B شروع کنیم.
rتایی از n شیء	$(n)_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	n شیء داریم، ولی جایگشت rتایی از آن‌ها را می‌خواهیم. (ترتیب هم مهم است.)
با تکرار	$\frac{n!}{k!}$	n شیء داریم، ولی kتا مثل هم هستند.
فاصله‌دار (n شیء و k شیء متمایز داریم که هیچ‌کدام از k شیء کنار هم نیستند.)	–	ابتدا n شیء را می‌چینیم و بعد k شیء را بین یا کناره‌های n شیء قرار می‌دهیم. (مثال توپ‌ها)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو رقم ۳ و ۲ را در یک بسته قرار می‌دهیم، پس ۶ شیء به صورت ۴، ۴، (۲، ۳)، ۱، ۱، ۱ داریم.

گام دوم: ۶ شیء بالا $۶!$ جایگشت دارند، ولی ۳تا از آن‌ها مثل هم و ۲تای دیگر نیز مثل هم هستند، پس تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{۶!}{۳!۲!}$ می‌شود.

گام سوم: دقت کنید که خود ارقام ۳ و ۲ نیز بین خودشان $۲!$ جابه‌جا می‌شوند، پس تعداد جایگشت‌ها در کل برابر است با:

$$\frac{۶!}{۳! \times ۲!} \times ۲! = \frac{۶!}{۳!} = (۶)_۳$$

www.konkur.in

با ارقام ۳، ۱، ۲، ۳، ۱، ۲، ۴، ۳، ۲، ۲ چند عدد ۱۰رقمی می‌توان نوشت؟ (محاسبهٔ جواب آخر الزامی نیست.)

(سؤال ۱۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

www.konkur.in

۳۲ **۲ عدد به صورت تصادفی از مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع این دو عدد نیز یک‌رقمی است، با کدام احتمال دقیقاً یکی از اعداد انتخاب‌شده اول است؟**

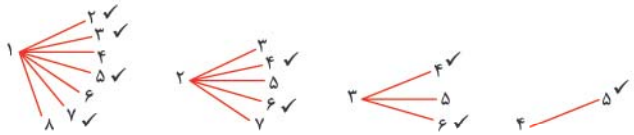
۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint حالت‌هایی که مجموع دو عدد کم‌تر از ۱۰ هستند را بنویس و ببین در چند حالت فقط یکی عدد اول است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با احتمال شرطی مواجه هستیم. فضای نمونهٔ کاهش‌یافته (جدید) حالت‌هایی که مجموع دو عدد یک‌رقمی باشد.

چون داریم ۲ عدد را انتخاب می‌کنیم، پس ترتیب مهم نیست. حالت‌های زیر را داریم:



پس در کل ۱۶ حالت داریم.

گام دوم: حالت‌هایی که کنار آن‌ها تیک زده‌ایم مطلوب هستند (یعنی دقیقاً یکی از اعداد اول است).

گام سوم: از ۱۶ حالت ۹ حالت مطلوب داریم؛ پس احتمال برابر $\frac{۹}{۱۶}$ می‌شود.

www.konkur.in

۳۳ باران و ستایش هر کدام با احتمال ۰/۳ و ۰/۵ می‌خواهند در آزمون‌های خیلی‌سبز ثبت‌نام کنند. اگر ستایش ثبت‌نام کند، باران با احتمال ۰/۴ ثبت‌نام می‌کند. اگر ستایش در آزمون ثبت‌نام نکند، با کدام احتمال باران هم در آزمون ثبت‌نام نمی‌کند؟

۱) ۰/۶۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

مشاوره از احتمال، معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید. معمولاً یک سؤال از احتمال دهم و سؤال دیگر از درس سوم (احتمال شرطی و احتمال کل و بیز) است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint $P(A\mid B)$ را داده و $P(A'\mid B')$ را می‌خواهد.

درس Box

قوانین احتمال:

۱	احتمال رخ‌دادن A یا B	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
۲	احتمال رخداد A و عدم رخداد B	$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
۳	احتمال آن‌که A رخ ندهد	$P(A')=1-P(A)$
۴	احتمال آن‌که فقط یکی از A و B رخ بدهد	$P(A-B)\cup P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$
۵	احتمال آن‌که نه A رخ بدهد و نه B	$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$
۶	احتمال آن‌که حداکثر یکی از A و B رخ بدهد	$P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)$
۷	احتمال رخ‌دادن B به شرط آن‌که بدانیم A رخ داده	$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: پیشامد ثبت‌نام باران و ستایش را به ترتیب B و S می‌گیریم، پس داریم:

$$\begin{cases}P(B)=0/3\\P(S)=0/5\end{cases}$$

گام دوم: اگر ستایش ثبت‌نام کند، باران با احتمال ۰/۴ ثبت‌نام می‌کند، پس $P(B\mid S)=0/4$. از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B\mid S)=0/4 \Rightarrow \frac{P(B\cap S)}{\underbrace{P(S)}_{0/5}}=0/4 \Rightarrow P(B\cap S)=0/2$$

گام سوم: حالا خواستهٔ مسئله می‌شود:

$$P(B'\mid S')=\frac{P(B'\cap S')}{P(S')}=\frac{1-P(B\cup S)}{1-P(S)}=\frac{1-(P(B)+P(S)-P(B\cap S))}{1-P(S)}$$

(B′: باران ثبت‌نام نمی‌کند؛ S′: ستایش ثبت‌نام نکند؛ به شرط آن‌که)

$$=\frac{1-(0/3+0/5-0/2)}{1-0/5}=\frac{0/4}{0/5}=\frac{4}{5}=0/8$$

www.konkur.in

۳۴ **در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ لامپ وجود دارد که در جعبهٔ اول ۴ و در جعبهٔ دوم ۵ لامپ معیوب هستند. از اولی به تصادف ۶ لامپ برداشته و در جعبهٔ دوم قرار می‌دهیم. سپس از جعبهٔ دوم لامپی انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال معیوب است؟**

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی و دشوارشدهٔ آن است. احتمال آن‌که این سؤال را در کنکور ببینید زیاد است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

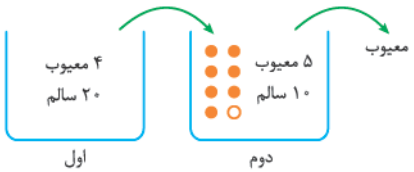
ببینید لامپی که از جعبهٔ دوم بیرون می‌آید، با چه احتمالی متعلق به جعبهٔ اول بوده و با چه احتمالی متعلق به جعبهٔ دوم.

درس Box

- **قانون احتمال کل:** برخی از مواقع برای به دست آوردن یک احتمال، مجبوریم چند حالت در نظر بگیریم (نمودار شاخه‌ای). در هر حالت یا شاخه احتمال‌ها را ضرب کرده و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.
- **قانون بیز:** اگر در یک مسئلهٔ شاخه‌ای، احتمال شرطی را بخواهیم (یعنی احتمال کل رخ داده و یکی از شاخه‌ها را بخواهیم)، از قانون بیز استفاده می‌کنیم. در این قانون سهم احتمال یک شاخه را بر مجموع شاخه‌ها (احتمال کل) تقسیم می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حالت‌بندی ۶ لامپ انتقالی طولانی است، پس باید جور دیگری به مسئله نگاه کنیم:



گام دوم: درون جعبهٔ دوم $۲۱ = ۶ + ۱۵$ لامپ وجود دارد. لامپی که از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم با احتمال $\frac{۶}{۲۱}$ از جعبهٔ اول آمده و با احتمال $\frac{۱۵}{۲۱}$ در خود جعبهٔ دوم بوده است.

گام سوم: لامپ در جعبهٔ اول با احتمال $\frac{۴}{۲۴}$ معیوب و لامپ در جعبهٔ دوم با احتمال $\frac{۵}{۱۵}$ معیوب است. طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب}) = \frac{۶}{۲۱} \times \frac{۴}{۲۴} + \frac{۱۵}{۲۱} \times \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۲۱} + \frac{۵}{۲۱} = \frac{۶}{۲۱} = \frac{۲}{۷}$$

www.konkur.in

۳۵ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)+P(B)=\frac{۱}{۳}$ باشد، بیشترین مقدار $P(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$ و بعد فرمول احتمال اجتماع را بنویسید.

درس Box

● **پیشامدهای مستقل و وابسته:**

A و B را دو پیشامد مستقل می‌گوییم، هرگاه رخداد یا عدم رخداد یکی تأثیری در محاسبهٔ احتمال دیگری نداشته باشد.

● **تعریف ریاضی مستقل‌بودن دو پیشامد:** $P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Leftrightarrow$ A و B مستقل‌اند.

نکته

۱) اگر A و B مستقل نباشند (تساوی بالا برقرار نباشد)، دو پیشامد را وابسته گوییم.

۲) اگر A و B مستقل باشند، رخداد یا عدم رخداد A تأثیری در محاسبهٔ احتمال B ندارد؛ یعنی:

$$P(B\mid A)=P(B\mid A')=P(B)\quad (P(A)\neq ۰)$$

۳) اگر A و B مستقل باشند: الف) $\underbrace{A \text{ و } B' \text{ مستقل}}_{P(A\cap B')=P(A)\times P(B')}$ ، ب) $\underbrace{A' \text{ و } B \text{ مستقل}}_{P(B\cap A')=P(B)\times P(A')}$ و پ) $\underbrace{A' \text{ و } B' \text{ هم مستقل هستند؛}}_{P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')}$

یعنی احتمال اشتراک هر دوتایی از آن‌ها برابر ضرب احتمال آن‌ها می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$، در نتیجه زمانی $P(A'\cap B')$ بیشترین مقدار خود را دارد که $P(A\cup B)$ کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد.

گام دوم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}-P(A\cap B)$؛ بنابراین $P(A\cap B)$ باید max باشد تا $P(A\cup B)$ به کم‌ترین مقدار خود برسد.

گام سوم: چون A و B مستقل هستند، پس $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. از طرفی جمع دو مقدار $P(A)$ و $P(B)$ ثابت است، پس ضرب آن‌ها وقتی max می‌شود که مساوی باشند، یعنی $P(A)=P(B)=\frac{۱}{۶}$ می‌گیریم.

گام چهارم:

$$\min(P(A\cup B))=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

گام پنجم:

$$\max(P(A'\cap B'))=۱-\frac{۱۱}{۳۶}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

www.konkur.in

۳۶ سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت مشکی، قهوه‌ای و سرمه‌ای و سه پیراهن با همین سه رنگ دارند. آن‌ها می‌خواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد، هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد. اگر بخواهیم برادر بزرگ‌تر در روز اول کت مشکی را با پیراهن مشکی بپوشد، برنامه‌ریزی به چند صورت ممکن است انجام بگیرد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

مشاوره از مربع لاتین متعامد تا حالا سؤالی در کنکور نیامده است، بعید نیست امسال نوبت آن باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

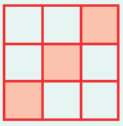
Hint ببینید چند مربع لاتین متعامد ۳×۳ داریم که درایهٔ سطر اول و ستون اول هر دو مربع برابر ۱ است.

درس Box

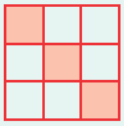
● **تعریف دو مربع لاتین متعامد:** A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه هستند. از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانهٔ آن شامل یک عدد دورقمی است که رقم سمت چپ مربوط به A و رقم سمت راست مربوط به B است (یا برعکس). اگر هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع تکرار نشده باشند، می‌گوییم A و B متعامد هستند.

● **ساختار مربع‌های لاتین ۳×۳:**

به راحتی می‌توانیم ثابت کنیم تعداد ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد. این‌ها را می‌توانیم به دو گروه ۶تایی (گروه A و گروه B) تقسیم کنیم:



گروه A = روی قطر فرعی یکسان (۶تا)



گروه B = روی قطر اصلی یکسان (۶تا)

مثال

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

هر کدام از مربع‌های گروه A یا B با خودشان متعامد نیستند، ولی با مربع‌های گروه دیگر متعامد هستند.

نکته برای هر مربع لاتین ۳×۳ تعداد ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد.

نکته در مربع‌های لاتین ۳×۳ اگر دو سطر (یا دو ستون) را جابه‌جا کنیم، مربع به‌دست‌آمده با مربع اول متعامد است. *(در واقع اگه مربع تو گروه A باشه با این کار مربع جدید می‌ره تو گروه B.)*

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** کافی است دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ به صورت زیر معرفی کنیم و بررسی کنیم چندتا از این جفت مربع‌ها وجود دارد:

	برادر سوم	برادر دوم	برادر اول
روز اول			۱
روز دوم			
روز سوم			

A

پیراهن‌ها: ۳ , ۲ , ۱

سرمه‌ای — مشکی — قهوه‌ای

	برادر سوم	برادر دوم	برادر اول
روز اول			۱
روز دوم			
روز سوم			

B

کت‌ها: ۳ , ۲ , ۱

سرمه‌ای — مشکی — قهوه‌ای

www.konkur.in

گام دوم: طبق درس‌باکس در یکی از مربع‌ها اعداد قطر اصلی یکسان هستند و در دیگری اعداد قطر فرعی. فرض کنیم در مربع سمت چپی اعداد روی قطر اصلی یکسان باشند، پس همگی باید برابر ۱ باشد.

خود همین مربع را به ۲ صورت می‌توانیم تکمیل کنیم.

۱		
	۱	
		۱

درست است که این مربع با ۶ مربع لاتین دیگر متعامد است، اما چون قرار است در ادامهٔ سطر اول و ستون اول مربع سمت راستی برابر ۱ باشد، فقط ۲ مربع در گروه دیگر وجود دارد که مربع A با آن‌ها متعامد باشد. پس تا این‌جا $۲ \times ۲ = ۴$ جفت مربع لاتین داریم.

۱		۳
	۳	
۳		

۱		۲
	۲	
۲		

گام سوم: دقیقاً شبیه همین اگر اعداد روی قطر اصلی مربع B نیز همگی برابر ۱ باشد، ۴ مربع لاتین متعامد با آن به دست می‌آید، پس در کل ۸ جفت مربع لاتین متعامد داریم، یعنی برنامه‌ریزی به ۸ صورت ممکن است انجام شود.

کتاب درسی

اگر سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت یا هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

(ریاضیات گسسته ـ کاردرکلاس صفحهٔ ۶۹ کتاب درسی)

www.konkur.in

۳۷ چند تابع یک‌به‌یک $f:\{۱,۲,۳\} \to \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ وجود دارد که $f(۱)+f(۲)+f(۳)$ عددی فرد باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۵ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

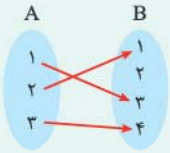
ببینید مجموع ۳ عدد در چه صورتی فرد می‌شود.

درس Box

تابع‌های یک‌به‌یک:

تابعی یک‌به‌یک است که هر عضو A دقیقاً به یک عضو منحصربه‌فرد از B نظیر شود؛ یعنی دوتا عضو از A به یک عضو B نظیر نشوند. به زبان دیگر به هیچ عضو B دوتا فلش وارد نشده باشد.

مثال تابع مقابل یک‌به‌یک است.



نکته

۱) در حالت کلی تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ mعضوی A به مجموعهٔ kعضوی B که $m \le k$ برابر است با:

$$P(k,m)=(k)_m=\frac{k!}{(k-m)!}=(k)(k-۱)\dots(k-(m-۱))$$

۲) تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ mعضوی به مجموعهٔ mعضوی برابر $m!$ می‌شود.

۳) اگر تعداد عضوهای A بیشتر از B باشد، تابع یک‌به‌یک از A به B وجود ندارد. *(وقتی سمت چپ بیشتره حتماً به بعضی عضوهای B بیشتر از یک دونه فلش وارد می‌شه.)*

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون تابع یک‌به‌یک است، پس $f(۱)$، $f(۲)$ و $f(۳)$ باید به ۳ عدد مختلف نظیر شوند.

گام دوم: مجموع $f(۱)+f(۲)+f(۳)$ وقتی فرد است که هر سه‌تای $f(۱)$ و $f(۲)$، $f(۳)$ فرد باشند یا این‌که دقیقاً یکی فرد و دوتا زوج باشند.

گام سوم: تنها اعداد فرد مجموعهٔ دوم (هم‌دامنه) ۵ و ۳ و ۱ هستند، پس ۱ و ۲ و ۳ به $۳!=۶$ روش می‌توانند به این ۳ عدد نظیر شود.

گام چهارم: اگر قرار باشد یکی از $f(۱)$، $f(۲)$ و $f(۳)$ فرد و دوتای دیگر زوج باشد، تعداد حالت‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یکی از } f(۱) \text{ و } f(۲) \text{ و } f(۳)} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{نظیرکردن یکی از } f(۱) \text{ و } f(۲) \text{ و } f(۳) \text{ که در مرحلهٔ قبلی انتخاب شده به یکی از ۱ یا ۳ یا ۵}} \times \underbrace{۲!}_{\text{دوتای باقی‌مانده از } f(۱) \text{ و } f(۲) \text{ و } f(۳) \text{ که حاصل زوج دارند.}} = ۳\times۳\times۲=۱۸$$

گام پنجم: تعداد تابع‌ها برابر است با:

$$۱۸+۶=۲۴$$

کنکور

چند تابع $f:\{۱,۲,۳,۴\} \to \{۱,۲,۴\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

(سؤال ۳۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۴۱ ۲) ۴۰ ۳) ۲۸ ۴) ۲۷

www.konkur.in

۳۸ معادلهٔ $x_1+\frac{9}{x_2+x_3}+x_4+x_5=10$، x_1، چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۷۰۰ ۲) ۶۹۴

۳) ۴۳۶ ۴) ۲۶۰

مشاوره سؤال بسیار خوب ترکیب معادلات خاص و دستگاه معادله، حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint x_2+x_3 را حالت‌بندی کنید.

درس Box تعداد جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ خطی در حالت‌های مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$\underbrace{x_1+x_2+\ldots+x_k}_{k\text{تا متغیر}}=n$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل
$\begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_k=n\\x_1\geq a\end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.
$\begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_k=n\\x_i\geq 1, i=1,2,\ldots,n\end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب‌های طبیعی معادله
$\begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_k=n\\x_1\leq a\end{cases}$	$\binom{n+k-1}{k-1}-\binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_1\geq a+1$ کم می‌کنیم.
$x_1+x_2+\ldots+x_k\leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}=n$ گردد.
$ax_1+\ldots+x_k=n$ $x_1^n+\ldots+x_k=n$ $\sqrt{x}+\ldots+x_k=n$	-	متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و ... را حالت‌بندی می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $\frac{9}{x_2+x_3}$ باید عددی صحیح باشد، پس x_2+x_3 باید مقسوم‌علیه ۹ باشد، پس حالت‌های زیر به وجود می‌آید:

گام دوم:

$$x_2+x_3=1 \rightarrow x_1+\frac{9}{1}+x_4+x_5=10 \rightarrow x_1+x_4+x_5=1$$

معادله $x_2+x_3=1$ دارای $\binom{2}{1}$ جواب صحیح نامنفی و معادلهٔ $x_1+x_4+x_5=1$ نیز دارای $\binom{3}{2}$ جواب صحیح نامنفی است.

پس در این حالت $6=3\times 2=\binom{3}{2}\times\binom{2}{1}$ جواب به وجود می‌آید.

گام سوم:

$$x_2+x_3=3 \Rightarrow x_1+\frac{9}{3}+x_4+x_5=10 \Rightarrow x_1+x_4+x_5=7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{4}{1}\times\binom{9}{2}=4\times 36=144$$

گام چهارم:

$$x_2+x_3=9 \Rightarrow x_1+\frac{9}{9}+x_4+x_5=10 \Rightarrow x_1+x_4+x_5=9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها}=\binom{10}{1}\times\binom{11}{2}=10\times 55=550$$

گام پنجم:

$$\text{تعداد کل جواب‌ها}=6+144+550=700$$

www.konkur.in

۳۹ چند جایگشت از خانه‌های جدول زیر وجود دارد به طوری که هیچ‌کدام از ارقام ۱، ۲ و ۳ در مکان فعلی خود نباشند؟

(مثل $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳&۱&۴\\\hline ۶&۵&۲\\\hline\end{array}$ یا $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳&۱&۲\\\hline ۴&۵&۶\\\hline\end{array}$ یا $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۴&۵&۶\\\hline\end{array}$)

۱) ۲۴۲ ۲) ۴۲۸ ۳) ۴۲۶ ۴) ۴۳۶

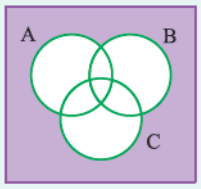
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint A_i که $1 \le i \le 3$ را به این صورت تعریف کنید که i در مکان فعلی خود باشد.

درس Box اگر A، B و C سه مجموعه باشند:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

یعنی برای به دست آوردن تعداد عضوهای $A \cup B \cup C$ کافی است تعداد عضوهای تک‌تک را جمع کرده، منهای اشتراک دوتادوتا کنیم بعد با اشتراک سه مجموعه جمع کنیم. شبیه چیزی که قبلاً گفتیم:



$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$ = تعداد عضوهایی که نه در A و نه در B و نه در C هستند. (یعنی در هیچ‌کدام)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با $!۶$.

گام دوم: $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_۱$ = ۱ در مکان فعلی باشد $\Rightarrow |A_۱| = ۵!$

$A_۲$ = ۲ در مکان فعلی باشد $\Rightarrow |A_۲| = ۵!$

$A_۳$ = ۳ در مکان فعلی باشد $\Rightarrow |A_۳| = ۵!$

گام سوم: تعداد عضوهای $A_۱ \cap A_۲$، $A_۱ \cap A_۳$ و $A_۲ \cap A_۳$ نیز برابر $!۴$ است، چون ۲ و ۱ در مکان فعلی خود قرار می‌گیرند اما سایر ارقام $!۴$ جایگشت دارند. شبیه همین:

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۳!$$

گام چهارم:

$$|\overset{\uparrow}{A'_۱} \cap \overset{\uparrow}{A'_۲} \cap A'_۳| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| =$$

(↙ ۱ در مکان خود نباشد، ↓ ۲ در مکان خود نباشد، ↘ ۳ در مکان خود نباشد)

$$|S| - \left[|A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|\right]$$

$$= ۶! - [۵! + ۵! + ۵! - ۴! - ۴! - ۴! + ۳!] = ۷۲۰ - [۳ \times ۱۲۰ - ۳ \times ۲۴ + ۶] = ۴۲۶$$

www.konkur.in

۴۰ **در هر زیرمجموعهٔ m عضوی از مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی مطمئن هستیم که حداقل ۳ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها از ۱۰ کم‌تر است. کم‌ترین مقدار m کدام است؟**

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۵

مشاوره طراحان کنکور علاقهٔ زیادی به موضوع اصل لانه‌کبوتری دارند. تمرین‌های کتاب و سؤال‌های سال‌های اخیر در این بخش را حتماً بررسی کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint زیرمجموعه را با بیشترین تعداد عضو، جوری بگیرید که شرط داده‌شده، برقرار نشود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بدترین حالت ممکن را در نظر بگیرید؛ یعنی تا حد امکان زیرمجموعه، تعداد عضوهای بیشتری داشته باشد ولی جمع هیچ ۳ عددی کم‌تر از ۱۰ نشود.

گام دوم: زیرمجموعه را به صورت $\{3,4,5,\ldots,9\}$ در نظر بگیرید. کم‌ترین جمع ۳ عدد برابر $3+4+5=12$ است، پس اگر زیرمجموعه ۷ عضو داشته باشد، هنوز مطمئن نیستیم که جمع ۳ عدد کم‌تر از ۱۰ بشود.

گام سوم: اگر یک عدد به مجموعهٔ بالا اضافه کنیم (حالا چه ۱، چه ۲)، سه عدد وجود دارند (۲ و ۳ و ۴ یا ۱ و ۳ و ۴) که جمع آن‌ها کم‌تر از ۱۰ می‌شود، پس اگر زیرمجموعه، حداقل ۸ عضو داشته باشد، مطمئن هستیم که جمع ۳ عضو کم‌تر از ۱۰ می‌شود.

www.konkur.in

۴۱ شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین $300\ W/m^2$ است. اگر طول موج متوسط فوتون‌های تابیده‌شده $528\ nm$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟ $(h = 6/6\times10^{-34}\ J.s \text{ و } c = 3\times10^8\ m/s)$

۱) $2/4\times10^{21}$
۲) $4/8\times10^{21}$
۳) $2/4\times10^{22}$
۴) $4/8\times10^{22}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) تابش کوانتیده است. یعنی تابش نور (مرئی و غیرمرئی) با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بستهٔ انرژی که بعدها فوتون نامیده شد، دارای انرژی‌ای است که از رابطهٔ $E = hf$ به دست می‌آید.

$E =$ انرژی (J)

$h =$ ثابت پلانک $(6/6\times10^{-34}\ J.s)$

$f =$ بسامد (Hz)

بنابراین انرژی کل موج الکترومغناطیس برای شمار n فوتون، از رابطهٔ $E = nhf = nh\frac{c}{\lambda}$ به دست می‌آید.

$c =$ تندی نور در خلأ $= 3\times10^8\ m/s$

$\lambda =$ طول موج (m)

۲) شدت تابشی یک موج الکترومغناطیس به کمک رابطهٔ زیر، محاسبه می‌شود:

$$I = \frac{P}{A} \xrightarrow{P=\frac{E}{\Delta t}} I = \frac{E}{A\Delta t}$$

$I =$ شدت تابشی (W/m^2)

$P =$ توان تابشی (W)

$E =$ انرژی تابشی (J)

$A =$ مساحت سطحی که موج بر آن می‌تابد. (m^2)

$\Delta t =$ بازهٔ زمانی تابش (s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اندازهٔ انرژی تابشی خورشید را که در هر دقیقه بر یک متر مربع از سطح زمین می‌تابد، حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{E}{A\Delta t} \Rightarrow E = IA\Delta t \xrightarrow[\Delta t=1\ min=60\ s]{I=300\ W/m^2,\ A=1\ m^2} E = 300\times1\times60 = 18\times10^3\ J$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ کوانتومی‌بودن انرژی موج الکترومغناطیس، تعداد فوتون‌ها را به دست می‌آوریم.

$$E = nh\frac{c}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{18\times10^3\times528\times10^{-9}}{6/6\times10^{-34}\times3\times10^8} = \frac{528}{1/1}\times10^{20} \Rightarrow n = 480\times10^{20} = 4/8\times10^{22}$$

www.konkur.in

۴۲ در اتم هیدروژن، محدودهٔ تقریبی بسامدهای رشتهٔ بالمر ($n' = ۲$) برحسب تراهرتز کدام است؟ ($c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$ و $R = ۰/۰۱\ nm^{-۱}$)

۱) ۴۱۶/۶ تا ۷۵۰
۲) ۵۰۰ تا ۷۵۰
۳) ۴۱۶/۶ تا ۱۵۰۰
۴) ۵۰۰ تا ۱۵۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

معادلهٔ ریدبرگ:

طول موج تمامی خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. به طوری که اگر الکترون اتم هیدروژن از تراز n به تراز n' برود طول موج λ را تابش می‌کند و اگر از n' به n برود طول موج λ را جذب می‌کند.

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}})$$

λ = طول موج (nm)

n = شمارهٔ مدار بزرگ‌تر

n' = شمارهٔ مدار کوچک‌تر

R = ثابت ریدبرگ = $۰/۰۱۱\ (nm)^{-۱} \simeq ۰/۰۱۰۹۷\ (nm)^{-۱}$

نکته

کم‌ترین طول موج هر رشته، مربوط به بیشترین بسامد و بیشترین انرژی مبادله‌شده است، یعنی گذار بین ترازهای n' و $n = \infty$.

هم‌چنین بیشترین طول موج هر رشته، مربوط به کم‌ترین بسامد و کم‌ترین انرژی مبادله‌شده است، یعنی گذار بین ترازهای n' و $n = n' + ۱$.

بسامد هر موج الکترومغناطیس از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

f = بسامد (Hz)

c = تندی نور در خلأ = $۳\times۱۰^{۸}\ m/s$

λ = طول موج نور (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ ریدبرگ، بیشترین و کم‌ترین طول موج مربوط به رشتهٔ بالمر ($n' = ۲$) را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}) \xrightarrow[n'=۲, n=۲+۱=۳]{\lambda=\lambda_{max}} \frac{۱}{\lambda_{max}} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{۳^{۲}}) = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۵}{۳۶})$$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = ۷۲۰\ nm$$

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}) \xrightarrow[n'=۲, n=\infty]{\lambda=\lambda_{min}} \frac{۱}{\lambda_{min}} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{\infty}) = \frac{۱}{۴۰۰}$$

$$\Rightarrow \lambda_{min} = ۴۰۰\ nm$$

گام دوم: کم‌ترین بسامد مربوط به بیشترین طول موج است. هم‌چنین بیشترین بسامد مربوط به کم‌ترین طول موج است.

$$f_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۷۲۰\times۱۰^{-۹}} = \frac{۳\times۱۰^{۵}}{۷۲۰}\times۱۰^{۱۲}\ Hz \simeq ۴۱۶/۶\ THz$$

$$f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۴۰۰\times۱۰^{-۹}} = \frac{۳۰۰۰}{۴}\times۱۰^{۱۲}\ Hz = ۷۵۰\ THz$$

بنابراین محدودهٔ تقریبی بسامدهای رشتهٔ بالمر، بین ۴۱۶/۶ تا ۷۵۰ تراهرتز است.

www.konkur.in

۴۳ الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = ۵$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اختلاف انرژی پرانرژی‌ترین و کم‌انرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، چند ریدبرگ است؟

۱) $\frac{۲۱}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۱۲}{۲۵}$

۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مشاوره این تست در کنکور رشتهٔ تجربی در اردیبهشت ۱۴۰۳ مطرح شده است. با این تفاوت که این‌جا پاسخ برحسب انرژی ریدبرگ خواسته شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه Box

۱) ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^۲}$$

E_n = انرژی الکترون در مدار nام اتم هیدروژن

E_R = انرژی یک ریدبرگ $(۱۳/۶\ eV)$

الکترون در یک اتم نمی‌تواند هر مقدار انرژی‌ای داشته باشد، بلکه مجاز است انرژی‌ای برابر با یکی از مقدارهایی که از رابطهٔ فوق به دست می‌آید داشته باشد. هر یک از این مقدارهای مجاز را یک تراز انرژی می‌نامند.

بالاترین تراز انرژی، مربوط به $n = \infty$ است که انرژی آن $۰\ eV$ (صفر الکترون‌ولت) است.

پایین‌ترین تراز انرژی، مربوط به $n = ۱$ (حالت پایه) است که انرژی آن $-۱۳/۶\ eV$ است.

نکته

هر چه از هستهٔ اتم دور شویم، یعنی به ترازهای بالاتر برویم، اختلاف انرژی بین دو تراز متوالی، کاهش می‌یابد.

۲) الکترون می‌تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U، به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر E_L، یک فوتون تابش می‌شود. انرژی فوتون تابش‌شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است.

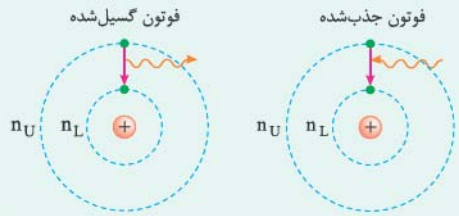
$$E_U - E_L = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

hf = انرژی فوتون تابش‌شده (eV)

$hc = ۱۲۴۰\ eV.nm$

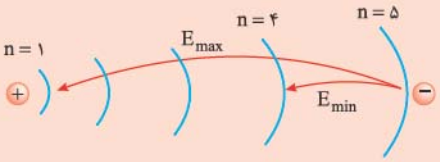
λ = طول موج (nm)

هم‌چنین برعکس، برای آن‌که الکترونی از تراز انرژی E_L به تراز انرژی E_U برود، یعنی از هسته دور شود، باید انرژی $E_U - E_L$ را جذب کند. الکترون این انرژی را با جذب فوتونی که درست همین مقدار انرژی دارد به دست می‌آورد.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بیشترین اختلاف انرژی، بین ترازهای اول و پنجم و کم‌ترین اختلاف انرژی، بین ترازهای چهارم و پنجم است.



گام دوم: با استفاده از رابطهٔ بور برای اتم هیدروژن، پرانرژی‌ترین و کم‌انرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل شود را برحسب انرژی ریدبرگ محاسبه می‌کنیم:

$$E_{max} = E_۵ - E_۱ = -\frac{E_R}{۵^۲} - (-\frac{E_R}{۱^۲}) = \frac{۲۴}{۲۵}E_R$$

$$E_{min} = E_۵ - E_۴ = -\frac{E_R}{۵^۲} - (-\frac{E_R}{۴^۲}) = E_R(\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۵}) = \frac{۹}{۴۰۰}E_R$$

www.konkur.in

گام سوم: اختلاف پرانرژی‌ترین و کم‌انرژی‌ترین فوتونی که در این‌جا می‌تواند گسیل شود را به دست می‌آوریم:

$$E_{max} - E_{min} = (\frac{۲۴}{۲۵}E_R) - (\frac{۹}{۴۰۰}E_R) = \frac{۳۷۵}{۴۰۰}E_R = \frac{۱۵}{۱۶}E_R$$

کنکور

در اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n = ۵$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n = ۱$ مجاز باشد. در این صورت اختلاف انرژی مربوط به فوتون‌هایی که بلندترین و کوتاه‌ترین طول موج گسیلی را دارند، چند ژول است؟

$(E_R = ۱۳/۶\ eV\ ,\ e = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} C)$

(سؤال ۵۹ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

۱) $۱/۵۸\times ۱۰^{-۱۸}$

۲) $۱/۶۳\times ۱۰^{-۱۸}$

۳) $۱/۷۴\times ۱۰^{-۱۸}$

۴) $۲/۰۸\times ۱۰^{-۱۸}$

www.konkur.in

۴۴ طول موج چهارمین خط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$ چند نانومتر است؟ $(R = ۰/۰۱\,(nm)^{-1})$

۱) ۵۰۲/۵ ۲) ۵۲۵ ۳) ۱۱۰۲/۵ ۴) ۱۱۲۵

مشاوره این تست، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی در تیرماه ۱۴۰۱ طرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در رابطهٔ ریدبرگ، به ازای یک عدد صحیح که به n' نسبت می‌دهیم، n عددهای صحیح بعد از آن است و مجموعه‌ای از طول موج‌ها ایجاد می‌شوند که یک رشته نامیده می‌شوند. مقدارهای n، شماره‌های خط‌ها را نشان می‌دهد. مثلاً پنجمین خط در رشتهٔ بالمر، یعنی $n = ۵ + ۲ = ۷$.

پاسخ خیلی تشریحی

چهارمین خط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$ مربوط به تراز هفتم است.

$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}\right) \xrightarrow[n=۳+۴=۷]{n'=۳} \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۳^۲} - \frac{۱}{۷^۲}\right) = \frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۴۹}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\lambda} = \frac{۴۰}{۱۰۰ \times ۹ \times ۴۹} \Rightarrow \lambda = \frac{۹۰ \times ۴۹}{۴} = ۱۱۰۲/۵\,nm$$

تیزبازی

می‌دانیم که خطوط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن، در ناحیهٔ نور مرئی قرار ندارند؛ بنابراین بدون محاسبه می‌توان گزینه‌های (۱) و (۲) را رد کرد.

کنکور

طول موج دومین خط رشتهٔ براکت $(n' = ۴)$ چند برابر طول موج چهارمین خط طیف رشتهٔ با عمر $(n' = ۲)$ است؟

(سؤال ۱۹۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱ ـ نوبت دوم)

۱) $\frac{۷۲}{۵}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۳۲}{۵}$ ۴) ۴

www.konkur.in

۴۵ در اتم هیدروژن، الکترون در طی یک گذار، فوتونی با انرژی $2/04\times10^{-18}\ J$ گسیل می‌کند. در این گذار، شعاع مدار الکترون چند پیکومتر تغییر می‌کند؟ $(E_R = 13/6\ eV\ ،\ e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و $a_0 = 5/29\times10^{-11}\ m)$

۱) ۷۹/۳۵ ۲) ۷۹۳/۵

۳) ۱۵۸/۷ ۴) ۱۵۸۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

الکترون‌ولت (eV):

۱) الکترون‌ولت، یکای انرژی در فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای است. یک الکترون‌ولت بنا به تعریف، برابر مقدار انرژی لازم برای جابه‌جایی یک الکترون، تحت ولتاژ یک ولت است.

$$1\ eV = 1/6\times10^{-19}\ C\times1\ V = 1/6\times10^{-19}\ J$$

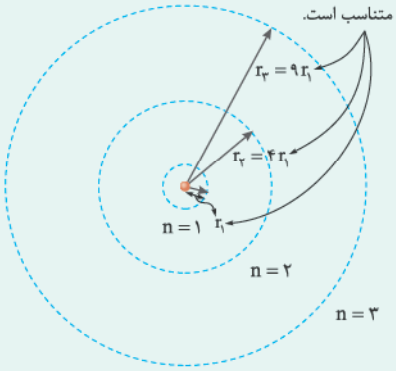
۲) در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن (که یک الکترون دارد) مدارها و انرژی‌های الکترون در اتم، کوانتیده‌اند؛ یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسستهٔ معینی می‌توانند مجاز باشند.

شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن: $r_n = n^2 a_0$

r_n = شعاع مدار nام برای الکترون در اتم هیدروژن

$r_1 = a_0$ (شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن) $= 5/29\times10^{-11}\ m$

این مقدار خاص، شعاع اتم بور برای اتم هیدروژن نامیده می‌شود.



n = عدد کوانتومی $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی فوتون گسیل‌شده را برحسب الکترون‌ولت (eV) به دست می‌آوریم:

$$\Delta E = 2/04\times10^{-18}\ J\times\frac{1\ eV}{1/6\times10^{-19}\ J} = \frac{20/4}{1/6} = 12/75\ eV$$

گام دوم: انرژی الکترون در چند تراز را به کمک رابطهٔ $E_n = -\frac{13/6\ eV}{n^2}$ به دست می‌آوریم تا ببینیم انرژی فوتون گسیل‌شده با اختلاف کدام‌یک از آن‌ها برابر است.

$$E_1 = -\frac{13/6}{1^2} = -13/6\ eV$$

$$E_2 = -\frac{13/6}{2^2} = -3/4\ eV$$

$$E_3 = -\frac{13/6}{3^2} \simeq -1/51\ eV$$

$$E_4 = -\frac{13/6}{4^2} = -0/85\ eV$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، انرژی فوتون گسیل‌شده با اختلاف انرژی الکترون در ترازهای اول و چهارم برابر است.

$$E_4 - E_1 = -0/85 - (-13/6) = 12/75\ eV$$

www.konkur.in

گام سوم: شعاع مدار الکترون در ترازهای اول و چهارم را با استفاده از رابطهٔ $r_n = n^2 a_0$ حساب می‌کنیم و سپس اختلاف آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 1^2 \times a_0 = a_0 \\ r_4 = 4^2 \times a_0 = 16a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow r_4 - r_1 = 15a_0$$

$$\xrightarrow{a_0 = 5/29 \times 10^{-11}\ m} r_4 - r_1 = 15 \times 5/29 \times 10^{-11} = 79/35 \times 10^{-11} = 793/5 \times 10^{-12}\ m = 793/5\ pm$$

www.konkur.in

۴۶ مدل اتمی بور در چه تعداد از موارد زیر، ناموفق است؟

الف) توجیه طیف گسیلی و جذبی اتم‌های هیدروژن‌گونه

ب) محاسبهٔ انرژی یونش اتم‌های هیدروژن‌گونه

پ) توجیه تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن

ت) تبیین پایداری اتم‌های دارای دو الکترون یا بیشتر

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره همیشه تعدادی تست غیرمحاسباتی در کنکور وجود دارند. تعداد این تست‌ها گرچه نسبتاً کم است، اما تسلط روی آن‌ها می‌تواند در زمان‌بندی پاسخگویی به تست‌ها کمک زیادی به ما بکند. یکی از قسمت‌هایی که زمینهٔ طرح چنین تست‌هایی را دارد، فصل آخر کتاب فیزیک ۳ رشتهٔ تجربی یا دو فصل آخر کتاب فیزیک ۳ رشتهٔ ریاضی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

موفقیت‌های مدل بور:

این مدل در تبیین پایداری اتم، طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی و محاسبهٔ انرژی یونش اتم هیدروژن با موفقیت همراه بوده است. افزون بر این، مدل بور را برای اتم‌های هیدروژن‌گونه (تک‌الکترونی) نیز می‌توان به کار برد.

اتم‌های هیدروژن‌گونه به اتم‌هایی گفته می‌شود که تنها یک الکترون دارند. مثلاً اتم لیتیم که در حالت خنثی سه الکترون دارد، اگر دو الکترون خود را از دست بدهد؛ یک اتم هیدروژن‌گونه است.

مدل بور می‌تواند انرژی یونش و هم‌چنین طول موج‌های طیف خطی اتم‌های هیدروژن‌گونه مانند لیتیم دو بار یونیده را پیش‌بینی کند که با تجربه سازگاری خوبی دارد.

نارسایی‌های مدل بور:

۱) این مدل برای وقتی که بیش از یک الکترون به دور هسته می‌گردد به کار نمی‌رود؛ زیرا در مدل بور، نیروی الکتریکی‌ای که یک الکترون بر الکترون‌های دیگر وارد می‌کند به حساب نیامده است.

۲) این مدل نمی‌تواند متفاوت‌بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد. برای مثال چرا شدت خط قرمز با شدت خط آبی در طیف گسیلی گاز هیدروژن اتمی با یکدیگر متفاوت است.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به متن درس‌باکس، مدل اتمی بور در موارد «پ» و «ت» ناموفق بود.

www.konkur.in

۴۷ نوری با طول موج ۱۵۵ nm به سطح فلزی که تابع کار آن ۶/۲ eV است، می‌تابد. بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از فلز، چند متر بر ثانیه است؟ $(hc = 1/24\ eV.\mu m \text{ ، } m_e = 9\times10^{-31}\ kg \text{ و } e = 1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) $4\sqrt{2}\times10^{6}$
۲) 8×10^{6}
۳) $4\sqrt{2}\times10^{5}$
۴) 8×10^{5}

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اثر فوتوالکتریک:

وقتی نوری با بسامد مناسب مانند نور فرابنفش، به سطحی از فلز بتابد، الکترون‌هایی از آن گسیل می‌شوند. این پدیدهٔ فیزیکی را اثر فوتوالکتریک و الکترون‌های جداشده از سطح فلز را فوتوالکترون می‌نامند.

معادلهٔ فوتوالکتریک:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

K_{max} = بیشینهٔ انرژی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده (eV)

hc (حاصل‌ضرب ثابت پلانک در تندی نور در خلأ) $\simeq 1240\ eV.nm$

λ = طول موج نور تابشی (nm)

W_0 = تابع کار فلز (eV)

رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها:

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

K_{max} = بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها (J)

m = جرم هر الکترون $\simeq 9\times10^{-31}\ Kg$

v_{max} = بیشینهٔ تندی هر الکترون (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: حاصل‌ضرب hc را که برحسب $eV.\mu m$ داده شده است، برحسب $eV.nm$ به دست می‌آوریم:

$$hc = 1/24\ eV.\mu m \times \frac{1\ nm}{10^{-3}\ \mu m} = 1240\ eV.nm$$

گام دوم: بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را توسط معادلهٔ فوتوالکتریک، محاسبه می‌کنیم:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{1240}{155} - 6/2 = 8 - 6/2 = 1/8\ eV$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ انرژی جنبشی، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از فلز را به دست می‌آوریم. برای این منظور، باید انرژی برحسب ژول باشد:

$$K_{max} = 1/8\ eV \times \frac{1/6\times10^{-19}\ J}{1\ eV} = 2/88\times10^{-19}\ J$$

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow 2/88\times10^{-19} = \frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times v_{max}^2$$

$$\Rightarrow v_{max}^2 = \frac{5/76}{9}\times10^{12} = 64\times10^{10} \Rightarrow v_{max} = 8\times10^{5}\ m/s$$

کنکور

نوری با طول موج ۳۱۰ nm به سطح فلزی که تابع کار آن ۲/۵ eV است، می‌تابد. بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از فلز، تقریباً چند متر بر ثانیه است؟ $(hc = 1/24\ eV.\mu m \text{ ، } m_e = 9\times10^{-31}\ kg \text{ و } e = 1/6\times10^{-19}\ C)$

(سؤال ۱۷۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ ـ (کنکور مجدد))

۱) $7/3\times10^{6}$
۲) $5/6\times10^{6}$
۳) $7/3\times10^{5}$
۴) $5/6\times10^{5}$

www.konkur.in

۴۸ کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) نیروی هسته‌ای، کوتاه‌بُرد است و تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند.

۲) نیروی رباییشی هسته‌ای یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون، یا یک پروتون و یک نوترون وجود دارد.

۳) یک پروتون یا یک نوترون، فقط نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاور خود را با نیروی هسته‌ای جذب می‌کند.

۴) در هسته‌های پایدار، نیروی دافعهٔ الکتروستاتیکی بین پروتون‌ها با نیروی جاذبهٔ گرانش بین نوکلئون‌ها، موازنه می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نیروی هسته‌ای:

نوعی نیروی جاذبه که بر رانش الکتریکی بین پروتون‌های هسته غلبه کرده و نوکلئون‌ها را کنار هم نگه می‌دارد، نیروی هسته‌ای نام دارد.

نیروی هسته‌ای دو ویژگی مهم دارد:

۱) کوتاه‌بُرد است، یعنی تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته، اثر می‌کند.

۲) مستقل از بار الکتریکی است، یعنی نیروی رباییش بین دو پروتون، دو نوترون، یا یک پروتون و یک نوترون، یکسان است.

پایداری هسته‌ها:

نیروی رانش الکتریکی بلندبُرد است؛ بنابراین یک پروتون به تمام پروتون‌های دیگر موجود در هسته، نیروی رانش الکتریکی وارد می‌کند. در حالی که نیروی رباییش هسته‌ای کوتاه‌بُرد است، یعنی هر نوکلئون فقط نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاور خود را با نیروی هسته‌ای جذب می‌کند.

نیروی دافعهٔ الکتریکی بین دو پروتون در هسته از مرتبهٔ 10^{1} است، در حالی که نیروی رباییش گرانشی بین آن دو از مرتبهٔ 10^{-35} است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به متن درس‌باکس، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند، اما گزینهٔ (۴) نادرست است؛ زیرا نیروی جاذبهٔ گرانشی بین نوکلئون‌ها بسیار ضعیف است و نمی‌تواند با نیروی رانش الکتریکی (دافعهٔ الکتروستاتیکی) موازنه شود.

www.konkur.in

۴۹ کدام موارد زیر درست است؟

الف) جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی بیشتر است.

ب) انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند انرژی الکترون‌های وابسته به اتم، کوانتیده‌اند.

پ) در همهٔ ایزوتوپ‌های پایدار سبک، تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است.

ت) هر چه کاستی جرم هستهٔ ایزوتوپی بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته‌ای آن نیز بیشتر است.

۱) «الف» و «پ»
۲) «الف» و «ت»
۳) «ب» و «پ»
۴) «ب» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

کاستی جرم هسته:

اندازه‌گیری‌های دقیق نشان می‌دهند که جرم هسته، از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کم‌تر است. این اختلاف جرم را کاستی جرم هسته می‌گویند.

- نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند الکترون‌های وابسته به اتم، انرژی کوانتیده دارند، یعنی نوکلئون‌های درون هسته نمی‌توانند هر انرژی دلخواهی را اختیار کنند.
- در هسته‌های سنگین که تعداد پروتون بیشتری نسبت به هسته‌های سبک دارند، نیروی رانش الکتریکی قوی‌تر می‌شود؛ بنابراین برای آن‌که هسته پایدار بماند، باید تعداد نوترون‌ها نسبت به پروتون‌ها افزایش بیشتری داشته باشند تا به افزایش نیروی هسته‌ای کمک کنند، بدون آن‌که اثری روی نیروی دافعهٔ الکتریکی داشته باشند، اما در هسته‌های سبک چنین نیست؛ مثلاً اتم هیدروژن معمولی اصلاً نوترون ندارد و یا اتم پایدار هلیم که دو پروتون و دو نوترون دارد.
- انرژی بستگی هسته‌ای از رابطهٔ اینشتین $E = mc^2$ به دست می‌آید و با کاستی جرم هسته متناسب است.

m = کاستی جرم هسته (kg)

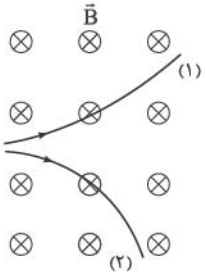
c = تندی نور در خلأ $= ۳\times ۱۰^۸ \ m/s$

E = انرژی بستگی هسته‌ای (J)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به متن درس‌باکس، موارد «ب» و «ت» درست هستند، اما موارد «الف» و «پ» نادرست هستند.

www.konkur.in

۵۰ مسیر حرکت دو ذرهٔ حاصل از پرتوزایی طبیعی، در میدان مغناطیسی یکنواختی به شکل زیر است. مسیرهای (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ، مربوط به کدام ذره‌ها می‌توانند باشند؟



۱) آلفا، الکترون

۲) پوزیترون، الکترون

۳) الکترون، آلفا

۴) آلفا، پوزیترون

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

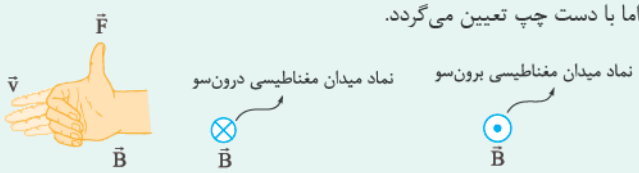
۱) پرتوهای آلفا، ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند. $(\alpha = {}^{4}_{2}He)$

۲) پوزیترون ذره‌ای است که جرم یکسان با الکترون دارد، ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است.

نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی

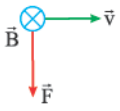
اگر ذرهٔ باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن‌که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد) بر آن نیرویی وارد خواهد شد که بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است. این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند و جهت آن، به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود.

قاعدهٔ دست راست: اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان بازشدهٔ ما در جهت $\vec{v}$ باشد، به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویهٔ کوچک‌تری که $\vec{v}$ با $\vec{B}$ می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار مثبت خواهد بود. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است. به عبارت دیگر طی همین مراحل، اما با دست چپ تعیین می‌گردد.

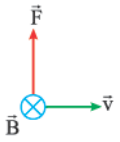


پاسخ خیلی تشریحی

انحراف ذرهٔ (۲) به گونه‌ای است که جهت نیروی وارد بر آن با قاعدهٔ دست چپ منطبق است؛ بنابراین بار ذرهٔ (۲) منفی و از جنس الکترون است. (رد گزینه‌های (۳) و (۴)).



اما انحراف ذرهٔ (۱) به گونه‌ای است که جهت نیروی وارد بر آن با قاعدهٔ دست راست منطبق است. یعنی بار ذرهٔ (۱) مثبت بوده و آلفا یا پوزیترون است، اما چون نسبت به ذرهٔ (۲) انحراف کم‌تری دارد، یعنی نسبت به الکترون و پوزیترون جرم بیشتری دارد و باید ذرهٔ آلفا باشد.



www.konkur.in

۵۱ عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ»، به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ کدام نوع واپاشی است؟

الف) در این واپاشی یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

ب) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.

پ) یکی از کاربردهای گستردهٔ این واپاشی، در آشکارسازهای دود است.

۱) بتای منفی، آلفا، گاما
۲) بتای منفی، بتا، آلفا
۳) بتای مثبت، آلفا، گاما
۴) بتای مثبت، بتا، آلفا

پاسخ: گزینهٔ ۴

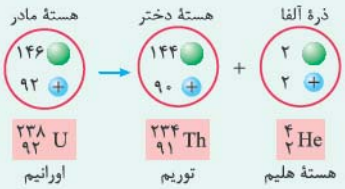
درس Box

واپاشی آلفا:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}A + {}^{4}_{2}\alpha$$

در این رابطه X، هستهٔ مادر و Y، هستهٔ دختر نامیده می‌شوند.

مثال واپاشی آلفا، برای اورانیم ۲۳۸ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



ذره‌های آلفا:

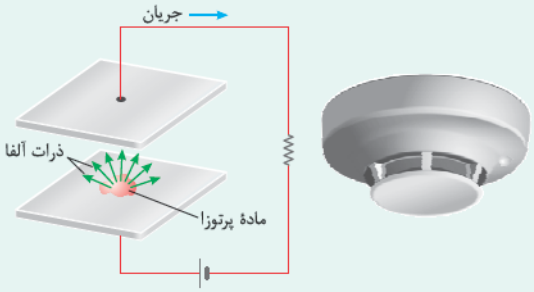
۱) سنگین‌اند.

۲) بار مثبت دارند.

۳) بُرد کوتاه دارند. یعنی پس از طی مسافت کوتاهی در هوا و یا لایه‌ای نازک از مواد، جذب می‌شوند.

۴) اگر وارد بدن شوند، باعث آسیب شدید به بافت‌های بدن می‌شوند.

یکی از کاربردهای واپاشی آلفا، در آشکارسازهای دود است. وجود ذرات دود میان صفحه‌ها، جریان را کاهش می‌دهد؛ زیرا یون‌هایی که به ذرات دود برخورد می‌کنند معمولاً خنثی می‌شوند. افت جریان که ذرات دود باعث آن می‌شود هشداردهنده را به کار می‌اندازد.



(ب) (الف)

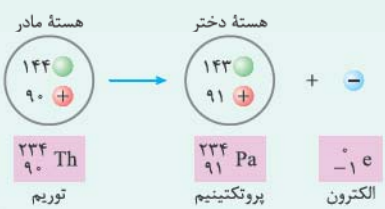
واپاشی بتا (β): این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و ذرات گسیل‌شده در آن را ذرات بتا می‌نامند:

الف) واپاشی بتا، همراه با گسیل الکترون (${}^{0}_{-1}\beta^{-}$ یا ${}^{0}_{-1}e^{-}$):

الکترون گسیل‌شده در این واپاشی، در هستهٔ مادر وجود ندارد و هم‌چنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود. فرایند این واپاشی را با رابطهٔ زیر بیان می‌کنند:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\beta^{-1}$$

مثال واپاشی ${}^{0}_{-1}\beta^{-}$، برای توریم ۲۳۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



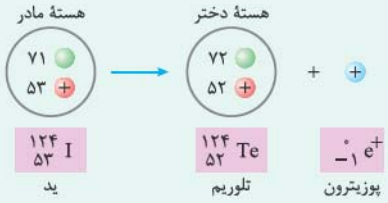
www.konkur.in

ب) واپاشی بتا، همراه با گسیل پوزیترون ($_{1}^{0}\beta^{+}$ یا $_{1}^{0}e^{+}$):

در این نوع واپاشی بتا، ذرهٔ گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد، ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند. در واقع آن‌چه در این واپاشی رخ می‌دهد این است که یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود. فرایند این واپاشی، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{1}^{0}\beta^{+}$$

مثال واپاشی $_{1}^{0}\beta^{+}$، برای یُد ۱۲۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:

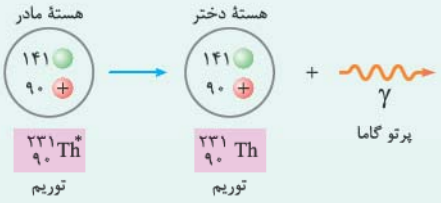


واپاشی گاما (γ):

اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پرانرژی (پرتو گاما) به حالت پایه می‌رسند. در این فرایند A و Z تغییر نمی‌کنند؛ بلکه هستهٔ برانگیخته که با علامت * مشخص شده است، با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسد. واپاشی γ با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$_{Z}^{A}X^{*} \rightarrow {}_{Z}^{A}X + \gamma$$

مثال واپاشی γ، برای توریم ۲۳۱ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



پاسخ خیلی تشریحی با توجه به متن درس‌باکس، گزینهٔ (۴) درست است.

www.konkur.in

۵۲ به ترتیب در کدام واپاشی، عدد اتمی هستهٔ مادر تغییر نمی‌کند و در کدام واپاشی عدد اتمی هستهٔ مادر افزایش می‌یابد؟

۱) گاما ـ بتای مثبت
۲) گاما ـ بتای منفی
۳) بتای مثبت ـ آلفا
۴) بتای منفی ـ آلفا

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در واپاشی گاما عدد اتمی هستهٔ مادر تغییر نمی‌کند، اما در سایر واپاشی‌ها این عدد تغییر می‌کند.

$${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}x + \gamma$$

در واپاشی بتای منفی، وقتی هستهٔ مادر به هستهٔ دختر تبدیل می‌شود، عدد اتمی آن یک واحد افزایش می‌یابد. در سایر واپاشی‌ها، این عدد یا افزایش می‌یابد و یا ثابت می‌ماند.

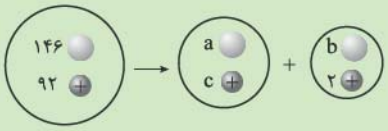
$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\beta^{-}$$

کنکور **در کدام واپاشی، عدد جرمی تغییر می‌کند؟** *(سؤال ۴۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) گاما
۲) آلفا
۳) بتای منفی
۴) بتای مثبت

www.konkur.in

۵۳ شکل زیر، واپاشی آلفا برای اورانیم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در این شکل a و b به ترتیب از راست به چپ، کدام‌اند؟



۱) ۲، ۱۴۲
۲) ۲، ۱۴۴
۳) ۴، ۱۴۲
۴) ۴، ۱۴۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته است؛ یعنی تعداد نوکلئون‌ها پیش از فرایند، با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند، مساوی است. بار الکتریکی نیز در طی فرایند واپاشی هسته‌ای ثابت می‌ماند؛ یعنی عدد اتمی هستهٔ مادر، برابر است با عدد اتمی هستهٔ دختر به علاوهٔ عددهای اتمی ذرات گسیل‌شده.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به رابطهٔ واپاشی آلفا داریم:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\alpha$$

$$A = Z + N \xrightarrow[Z=2]{A=4} b = N = 2$$

بنابراین با توجه به شکل داده‌شده در سؤال، $b = 2$ است.

گام دوم: تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند را با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی قرار می‌دهیم و از آن‌جا a را به دست می‌آوریم:

$$146 = a + b \xrightarrow{b=2} 146 = a + 2 \Rightarrow a = 144$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

امتحان نهایی

شکل زیر، واپاشی آلفا، برای اورانیم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در شکل زیر به جای الف و ب عددی مناسب قرار بدهید.

(سؤال ۲۰ ـ امتحان نهایی شهریور تجربی ۱۴۰۴)

www.konkur.in

۵۴ سرب $^{A}_{82}Pb$، هستهٔ دختر پایداری است که می‌تواند حاصل از واپاشیِ α هستهٔ X یا واپاشیِ β^- هستهٔ Y باشد. اختلاف تعداد نوترون‌های دو هستهٔ X و Y کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

عدد جرمی (A): مجموع تعداد کل پروتون‌ها و نوترون‌ها، که همان تعداد نوکلئون‌ها می‌باشد را عدد جرمی می‌گوییم.

$$\underbrace{A}_{\substack{\text{تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها}\\ \text{(عدد جرمی)}}} = \underbrace{Z}_{\substack{\text{تعداد پروتون‌ها}\\ \text{(عدد اتمی)}}} + \underbrace{N}_{\substack{\text{تعداد نوترون‌ها}\\ \text{(عدد نوترونی)}}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ واپاشی α هستهٔ X را می‌نویسیم و از آن‌جا تعداد پروتون‌های هستهٔ X یعنی Z_x و هم‌چنین تعداد نوترون‌های آن یعنی N_x را پیدا می‌کنیم:

$$^{A_x}_{Z_x}X \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{A}_{82}Pb$$

$$Z_x = 2 + 82 = 84, A_x = A + 4$$

$$A_x = N_x + Z_x \Rightarrow A + 4 = N_x + 84 \Rightarrow N_x = A - 80$$

گام دوم: رابطهٔ واپاشی β^- هستهٔ Y را می‌نویسیم و از آن‌جا تعداد پروتون‌های هستهٔ Y یعنی Z_Y و هم‌چنین تعداد نوترون‌های آن یعنی N_Y را مشخص می‌کنیم:

$$^{A_Y}_{Z_Y}Y \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta^- + {}^{A}_{82}Pb$$

$$Z_Y = -1 + 82 = 81, A_Y = 0 + A \Rightarrow A_Y = A$$

$$A_Y = N_Y + Z_Y \Rightarrow A = N_Y + 81 \Rightarrow N_Y = A - 81$$

گام سوم: اختلاف تعداد نوترون‌های دو هستهٔ X و Y را حساب می‌کنیم:

$$N_x - N_Y = A - 80 - (A - 81) = -80 + 81 = 1$$

کتاب درسی

سرب $^{207}_{82}Pb$ هستهٔ دختر پایداری است که می‌تواند از واپاشی α یا واپاشی β^- حاصل شود. فرایندهای مربوط به هر یک از این واپاشی‌ها را بنویسید. در هر مورد هستهٔ مادر را به صورت $^{A}_{Z}X$ مشخص کنید.

(فیزیک (۳) ـ تمرین ۷ صفحهٔ ۱۵۵ کتاب درسی)

www.konkur.in

۵۵ در یک واپاشی α، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ پایدار حاصل برابر ۵۴ است. اگر بار الکتریکی هستهٔ مادر $14/72\times10^{-18}\ C$ باشد، عدد جرمی هستهٔ مادر کدام است؟ $(e=1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) ۱۹۸ ۲) ۲۰۲ ۳) ۲۳۴ ۴) ۲۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

عدد اتمی (Z): تعداد پروتون‌های یک هسته را عدد اتمی می‌نامند و در عنصرهای مختلف، متفاوت است. بار کل هسته $+Ze$ است.

$q=+Ze$

$q=$ بار الکتریکی (C)

$Z=$ عدد اتمی

e (بار بنیادی) $=1/6\times10^{-19}\ C$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطهٔ واپاشی α را برای هستهٔ X می‌نویسیم و با توجه به معلوم‌بودن بار الکتریکی هستهٔ مادر، تعداد پروتون‌های هستهٔ دختر را پیدا می‌کنیم:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{A_Y}_{Z_Y}Y \Rightarrow \begin{cases} A_Y = A-4 \\ Z_Y = Z-2 \end{cases}$$

$$q=Z\times e \Rightarrow Z=\frac{q}{e}=\frac{14/72\times10^{-18}}{1/6\times10^{-19}}=\frac{147/2}{1/6}=92$$

گام دوم: با توجه به این‌که در واپاشی α، ذره‌های سنگین پدید می‌آیند و در ذره‌های سنگین $N_Y > Z_Y$ است، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ Y را برابر با ۵۴ قرار می‌دهیم و A_Y را به دست می‌آوریم:

$$Z_Y=Z-2 \xrightarrow{Z=92} Z_Y=92-2=90$$

$$N_Y-Z_Y=54 \Rightarrow N_Y-90=54 \Rightarrow N_Y=144$$

$$A_Y=Z_Y+N_Y=90+144=234$$

$$A=A_Y+4=234+4=238$$

www.konkur.in

۵۶ **پس از گذشت ۲۴ روز، ۸۷/۵ درصد از هسته‌های مادر اولیهٔ یک ایزوتوپ پرتوزا، واپاشیده می‌شود. نیمه‌عمر این ایزوتوپ چند روز است؟**

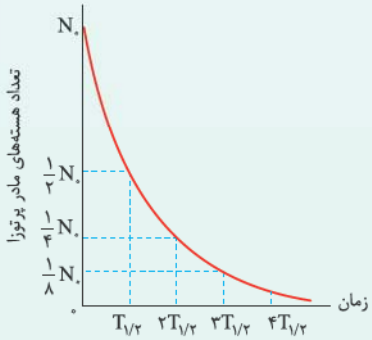
۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نیمه‌عمر:

ایزوتوپ‌های پرتوزا با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند، در نتیجه تعداد هسته‌های مادر (هسته‌های اولیه) آن‌ها کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. بنا به تعریف، **نیمه‌عمر**، مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر (اولیه) موجود در یک نمونه، به نصف برسند و آن را با نماد $T_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم.



$$N = \frac{N_0}{2^n}$$

N_0 = تعداد هسته‌های اولیه در یک نمونهٔ پرتوزا

N = تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده

$N_0 - N$ = تعداد هسته‌های واپاشیده‌شده

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$$

n = تعداد تکرار نیمه‌عمر

t = کل زمان واپاشی

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وقتی ۸۷/۵ درصد از هسته‌های مادر اولیهٔ یک ایزوتوپ پرتوزا، واپاشیده می‌شوند، یعنی ۱۲/۵ درصد یا معادل $\frac{1}{8}$ هسته‌های مادر اولیه، باقی مانده‌اند. بر این اساس، تعداد مراحل واپاشی هسته را به دست می‌آوریم:

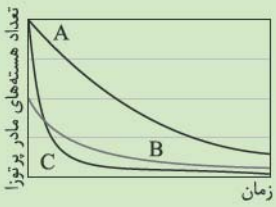
$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{N=\frac{1}{8}N_0} \frac{1}{8}N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

گام دوم: با توجه به معلوم‌بودن کل زمان واپاشی، می‌توانیم نیمه‌عمر این ایزوتوپ را محاسبه کنیم:

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 3 = \frac{24}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 8 \text{ روز}$$

www.konkur.in

۵۷ شکل زیر، نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه را برحسب زمان نشان می‌دهد. در کدام گزینه، این سه نمونه از راست به چپ به ترتیب افزایش نیمه‌عمر مرتب شده‌اند؟



۱) C ،B ،A

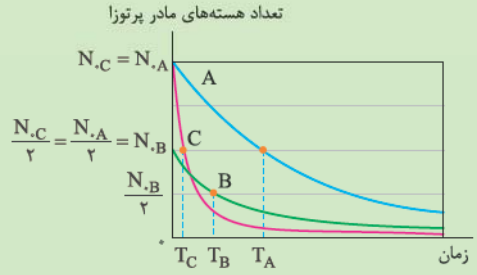
۲) B ،C ،A

۳) A ،C ،B

۴) A ،B ،C

پاسخ: گزینهٔ ۴

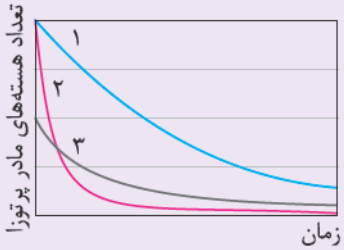
پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای سهولت در نوشتن پاسخ، نیمه‌عمر نمونه‌های A، B و C را به ترتیب با T_A ،T_B و T_C نشان می‌دهیم، با توجه به نمودار داده‌شده، زمان نصف‌شدن تعداد هسته‌های اولیه را برای هر نمونه روی شکل مشخص می‌کنیم.



با توجه به نمودار فوق معلوم می‌شود که $T_C < T_B < T_A$ یعنی نیمه‌عمر نمونه‌ها از C تا A افزایش می‌یابند.

کتاب درسی

شکل زیر نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه را برحسب زمان نشان می‌دهد. نیمه‌عمر این سه نمونه را با هم مقایسه کنید.



(فیزیک (۳) ـ تمرین ۹ صفحهٔ ۱۵۵ کتاب درسی)

www.konkur.in

۵۸ تعداد هسته‌های اولیهٔ نمونهٔ پرتوزای A، ۴ برابر تعداد هسته‌های اولیهٔ نمونهٔ پرتوزای B است. بعد از گذشت مدتی معین، تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونهٔ B، ۸ برابر تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونهٔ A می‌شود. اگر در این مدت، تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده برای دو نمونهٔ A و B به ترتیب n_A و n_B باشد، $n_A - n_B$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۵ ۴) −۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ رابطهٔ تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده را برای هر دو نمونهٔ A و B می‌نویسیم و آن‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$N = \frac{N_\circ}{2^n}$$

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\frac{N_{\circ B}}{2^{n_B}}}{\frac{N_{\circ A}}{2^{n_A}}} \xrightarrow[N_B = 8N_A]{N_{\circ A} = 4N_{\circ B}} 8 = \frac{\frac{N_{\circ B}}{2^{n_B}}}{\frac{4N_{\circ B}}{2^{n_A}}} \Rightarrow 8 = \frac{2^{n_A}}{4 \times 2^{n_B}}$$

$$\Rightarrow 32 = \frac{2^{n_A}}{2^{n_B}} \Rightarrow 2^5 = 2^{(n_A - n_B)} \Rightarrow n_A - n_B = 5$$

www.konkur.in

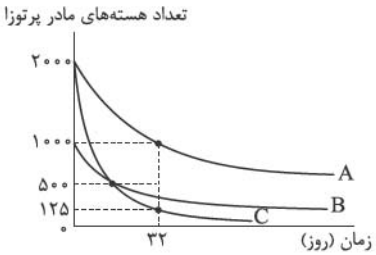
۵۹ نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونهٔ A، B و C برحسب زمان، به شکل زیر است. پس از چند روز، ۱۲۶ g از یک نمونهٔ اولیهٔ ۱۲۸گرمی از مادهٔ B، واپاشیده می‌شود؟

۱) ۱۶

۲) ۴۸

۳) ۶۴

۴) ۹۶



پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

با کاهش تعداد هسته‌های پرتوزا، جرم آن‌ها نیز به همین نسبت کاهش می‌یابد، پس به طور مشابه می‌توان نوشت:

$m = \frac{m_0}{2^n}$

m_0 = جرم مادهٔ پرتوزای اولیه

m = جرم مادهٔ پرتوزای باقی‌مانده

$m_0 - m$ = جرم واپاشیده‌شده

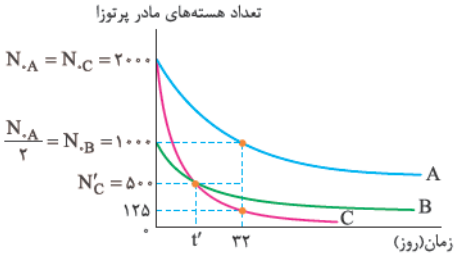
پاسخ خیلی تشریحی

در این‌جا برای سهولت، نیمه‌عمر را با نماد T نشان می‌دهیم.

گام اول: نیمه‌عمر نمونهٔ C را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow N_C = \frac{N_{0C}}{2^{n_C}} \Rightarrow 125 = \frac{2000}{2^{n_C}} \Rightarrow 2^{n_C} = 16 \Rightarrow n_C = 4$$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow n_C = \frac{t}{T_C} \Rightarrow 4 = \frac{32}{T_C} \Rightarrow T_C = 8 \text{ روز}$$



گام دوم: تعداد مراحل واپاشی نمونهٔ C را تا زمان t' محاسبه می‌کنیم:

$$N'_C = \frac{N_{0C}}{2^{n'_C}} \Rightarrow 500 = \frac{2000}{2^{n'_C}} \Rightarrow 2^{n'_C} = 4 \Rightarrow n'_C = 2$$

سپس نیمه‌عمر نمونهٔ B را نیز حساب می‌کنیم:

$$n'_C = \frac{t'}{T_C} \Rightarrow 2 = \frac{t'}{8} \Rightarrow t' = 16 \text{ روز}$$

بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$t' = T_B = 16 \text{ روز}$$

گام سوم: با معلوم‌بودن جرم اولیه و جرم واپاشیده‌شدهٔ نمونهٔ B می‌توان نوشت:

$$m_B = 128 - 126 = 2 \text{ g}$$

$$m_B = \frac{m_{0B}}{2^{n_B}} \Rightarrow 2 = \frac{128}{2^{n_B}} \Rightarrow 2^{n_B} = 64 \Rightarrow n_B = 6$$

در پایان، زمان واپاشی نمونهٔ B را بعد از ۶ مرحله واپاشی به دست می‌آوریم:

$$n_B = \frac{t_B}{T_B} \Rightarrow 6 = \frac{t_B}{16} \Rightarrow t_B = 96 \text{ روز}$$

www.konkur.in

۶۰ کدام‌یک از عبارت‌های زیر، درست است؟

الف) در فرایند شکافت اورانیم ۲۳۵، ترکیب‌های متفاوتی از هسته‌های کوچک‌تر، همراه با تعدادی نوترون تُند به وجود می‌آید.

ب) در واکنش گداخت هسته‌ای، برخلاف واکنش شکافت هسته‌ای، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است.

پ) غنی‌سازی، فرایند تبدیل اورانیم ۲۳۸ به اورانیم ۲۳۵ در یک نمونه از سنگ معدن اورانیم است.

ت) آب معمولی، آب سنگین و گرافیت از جمله موادی هستند که به عنوان کُندساز نوترون‌ها در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

۱) «الف» و «پ»
۲) «الف» و «ت»
۳) «ب» و «پ»
۴) «ب» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

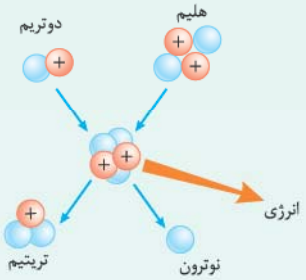
درس Box

شکافت هسته‌ای: فرایند تقسیم‌شدن یک هستهٔ سنگین به دو هسته با جرم کم‌تر، شکافت هسته‌ای نامیده می‌شود. در فرایند شکافت اورانیم، ترکیب‌های متفاوتی از هسته‌های کوچک‌تر همراه با تعدادی نوترون (بین ۲ تا ۵) به وجود می‌آید.

گداخت (هم‌جوشی) هسته‌ای:

در فرایند گداخت هسته‌ای، دو هستهٔ سبک با یکدیگر ترکیب می‌شوند و هستهٔ سنگین‌تری را به وجود می‌آورند. برای مثال، با هم‌جوشی هسته‌های دوتریم و تریتیم، هستهٔ هلیم و یک نوترون پرانرژی تولید می‌شود.

$${}_{1}^{2}D + {}_{1}^{3}T \rightarrow {}_{2}^{4}He + {}_{0}^{1}n$$



در واکنش گداخت هسته‌ای نیز همچون شکافت هسته‌ای، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است. در این‌جا نیز این اختلاف جرم، با توجه به رابطهٔ $E = mc^2$ سبب آزادشدن مقدار زیادی انرژی می‌شود.

مادهٔ کُندساز: نوترون‌های آزادشده در فرایند شکافت، سرعت زیادی دارند. تجربه نشان می‌دهد که این نوترون‌های تند، با احتمال بسیار بیشتری جذب ایزوتوپ ${}_{92}^{238}U$ می‌شوند؛ بدون آن‌که باعث شکافت آن‌ها شوند. اگر بتوان به نحوی این نوترون‌ها را کُند ساخت؛ احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ ${}_{94}^{235}U$ افزایش می‌یابد و با شکافت‌های پی‌درپی، واکنش زنجیری شکل می‌گیرد.

موادی مانند آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن)، به عنوان کُندساز نوترون‌ها در واکنش‌های هسته‌ای به کار می‌روند.

غنی‌سازی اورانیم:

برای آن‌که بتوانیم از اورانیم به عنوان سوخت در نیروگاه‌های هسته‌ای یا انفجارهای هسته‌ای استفاده کنیم و واکنش زنجیری را ممکن سازیم، باید فراوانی ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونهٔ اورانیم را افزایش دهیم. به این فرایند افزایش درصد یا غلظت اورانیم ۲۳۵ در یک نمونه، **غنی‌سازی اورانیم** گفته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به متن درس‌باکس، عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند. اکنون علت نادرستی عبارت‌های «ب» و «پ» را بررسی می‌کنیم.

ب) این‌که در واکنش گداخت، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است، مشابه واکنش شکافت هسته‌ای است نه برخلاف آن.

پ) در فرایند غنی‌سازی، اورانیم ۲۳۸ به اورانیم ۲۳۵ تبدیل نمی‌شود؛ بلکه درصد یا غلظت اورانیم ۲۳۵ در یک نمونه افزایش می‌یابد.

www.konkur.in

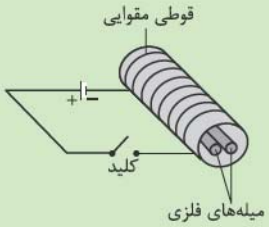
۶۱ **دو میلهٔ فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیملوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیملوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه بازمی‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟**

۱) پارامغناطیسی

۲) دیامغناطیسی

۳) فرومغناطیسی نرم

۴) فرومغناطیسی سخت



پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint کافی است که ویژگی‌های مغناطیسی مواد را دقیق به خاطر سپرده باشید.

درس Box مواد فرومغناطیس، مواد مغناطیسی‌ای هستند که اتم‌ها و مولکول‌های آن‌ها ذاتاً دوقطبی مغناطیسی‌اند و به دو دستهٔ مواد فرومغناطیسی نرم و سخت تقسیم‌بندی می‌شوند.

حوزه‌های مواد فرومغناطیسی نرم در حضور میدان مغناطیسی خارجی به راحتی با جهت میدان هم‌جهت می‌شوند و بعد از حذف آن به حالت قبل برمی‌گردند.

حوزه‌های مواد فرومغناطیسی سخت در حضور میدان خارجی به سختی با آن هم‌جهت می‌شوند و بعد از حذف آن تا مدتی به همان شکل باقی می‌مانند.

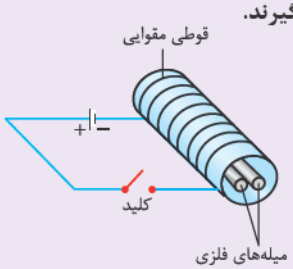
پاسخ خیلی تشریحی ✔ چون میدان سیملوله قوی نیست و میله‌ها به راحتی با بستن کلید و عبور جریان، خاصیت مغناطیسی پیدا کرده‌اند و قطب‌های همنامشان یکدیگر را دفع کرده‌اند و پس از بازکردن کلید، میله‌ها خاصیت مغناطیسی خود را از دست داده و به محل اولیهٔ خود بازگشته‌اند، در نتیجه میله‌ها از جنس مواد فرومغناطیسی نرم هستند.

کتاب درسی

دو میلهٔ فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیملوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیملوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه بازمی‌گردند.

الف) چرا با عبور جریان از پیچه، میله‌ها از یکدیگر دور می‌شوند؟

ب) با دلیل توضیح دهید میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند.



(فیزیک (۲) ـ پرسش ۹۳ صفحهٔ ۱۰۳ کتاب درسی)

www.konkur.in

۶۲ در شکل زیر، حلقهٔ رسانای حامل جریانی در صفحه قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی حاصل از این حلقه در نقطهٔ M عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه باشد، چه تعداد از موارد زیر الزاماً درست است؟

الف) میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، عمود بر صفحه و به سمت بیرون صفحه است.

ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، از اندازهٔ میدان مغناطیسی در نقطهٔ M کوچک‌تر است.

پ) جریان عبوری از حلقه ساعتگرد است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

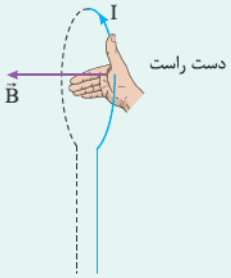
۴) صفر

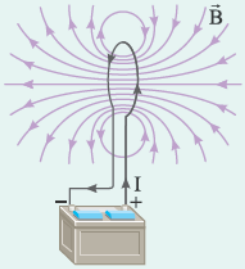
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقهٔ دایره‌ای حامل جریان:

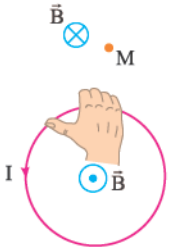
مطابق شکل، در اطراف یک حلقهٔ رسانای دایره‌ای‌شکل حامل جریان، میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. همان‌طور که می‌بینید خط‌های میدان مغناطیسی در ناحیهٔ داخل حلقه به یکدیگر نزدیک‌ترند؛ یعنی میدان در این ناحیه قوی‌تر است. افزون بر این، در نقطه‌های روی محور حلقه، میدان موازی محور است. جهت خط‌های میدان مغناطیسی حلقه را می‌توان با قاعدهٔ دست راست مطابق شکل زیر نشان داد.





پاسخ خیلی تشریحی ✔

جهت جریان در حلقه را به کمک جهت میدان در نقطهٔ M طبق قاعدهٔ دست راست مشخص می‌کنیم:



همان‌طور که در شکل مشخص است جهت جریان در حلقه، پادساعتگرد و جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، برون‌سو است.

در حلقهٔ حامل جریان، خطوط میدان مغناطیسی در ناحیهٔ داخل حلقه به یکدیگر نزدیک‌ترند که یعنی میدان مغناطیسی داخل حلقه، قوی‌تر است.

با توجه به مطالب بیان‌شده، فقط عبارت «الف» درست است.

www.konkur.in

۶۳ در شکل زیر، سیملولهٔ آرمانی به طول ۱۵ cm دارای ۳۰ حلقهٔ سیم نزدیک به هم است. اگر جریان $I = ۸۰۰\ mA$ از سیملوله بگذرد، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای درون سیملوله و دور از لبه‌های آن چند گاوس و در چه جهتی است؟ $(\mu_۰ = ۱۲/۵\times۱۰^{-۷}\ T.m/A)$

۱) ۲، ←

۲) ۲، →

۳) ۲۰، ←

۴) ۲۰، →

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

داده‌ها را در رابطهٔ $B = \frac{\mu_۰ NI}{L}$ جای‌گذاری کنید تا B به دست آید.

درس Box

اندازهٔ میدان مغناطیسی در درون سیملوله و دور از لبه‌ها، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

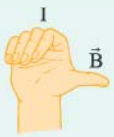
تعداد دورهای سیملوله — ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m/A)

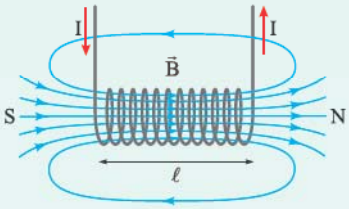
$$B = \frac{\mu_۰ N I}{L}$$

میدان مغناطیسی (T) ← — جریان الکتریکی (A) → — طول سیملوله (m) →

تعیین جهت میدان مغناطیسی در داخل سیملوله:

به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی در فضای داخل سیملوله و دور از لبه‌ها مشخص می‌شود. به این صورت که اگر چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار دهیم، انگشت شست جهت میدان درون سیملوله را نشان می‌دهد.



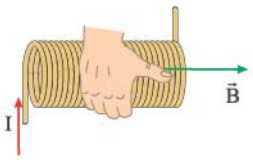


پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: داده‌ها را در رابطهٔ میدان مغناطیسی سیملوله، جای‌گذاری می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_۰ NI}{\ell} \xrightarrow[L=۱۵\times۱۰^{-۲}m]{N=۳۰, I=۸۰۰\times۱۰^{-۳}A} B = \frac{۱۲/۵\times۱۰^{-۷}\times۳۰\times۸۰۰\times۱۰^{-۳}}{۱۵\times۱۰^{-۲}} = ۲\times۱۰^{-۴}T\times\frac{۱۰^{۴}\ G}{۱\ T} = ۲\ G$$

گام دوم: به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی را در درون سیملوله و دور از لبه‌ها مشخص می‌کنیم:

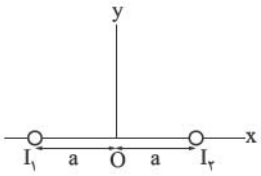


گول‌نخوری ✘

به تبدیل یکاها دقت کن وگرنه در دام گزینه‌های (۳) و (۴) می‌افتی.

www.konkur.in

۶۴ در شکل زیر، دو سیم حامل جریان الکتریکی هم‌اندازهٔ I_1 و I_2، عمود بر صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی خالص در هر نقطهٔ دلخواه بر روی قسمت مثبت محور y، در جهت محور x باشد، I_1 در چه جهتی است و نوع نیروی مغناطیسی‌ای که دو سیم به یکدیگر وارد می‌کنند، کدام است؟



۱) ⊗، ربایشی

۲) ⊗، رانشی

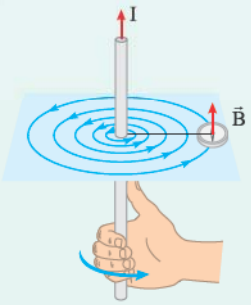
۳) ⊙، ربایشی

۴) ⊙، رانشی

پاسخ: گزینهٔ ۱

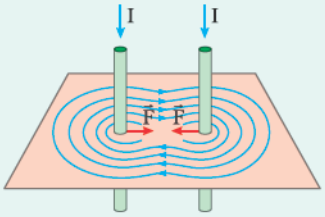
درس Box

۱) یک سیم حامل جریان الکتریکی در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که جهت این میدان به کمک قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود. به این صورت که اگر انگشت شست را در جهت جریان قرار دهیم، جهت خم‌شدن انگشتان دست راست، جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم را نشان می‌دهد.

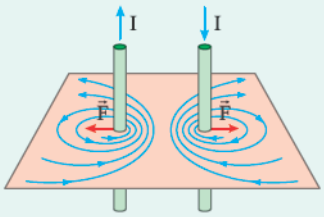


۲) بزرگی میدان مغناطیسی اطراف سیم راست با فاصله از آن سیم، رابطهٔ عکس و با جریان الکتریکی، رابطهٔ مستقیم دارد.

۳) دو یا چند سیم حامل جریان به واسطهٔ میدان مغناطیسی که اطراف خود ایجاد می‌کنند به هم نیرو وارد می‌کنند؛ به طوری که اگر جریان‌ها در یک جهت از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها ربایشی (جاذبه) است و اگر جریان‌ها در دو جهت مخالف از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها رانشی (دافعه) است.



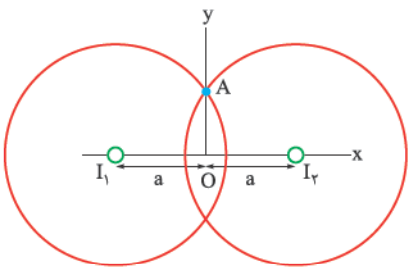
(الف)



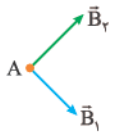
(ب)

پاسخ خیلی تشریحی

از آن‌جایی که فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه روی محور y، از هر دو سیم I_1 و I_2 یکسان است و جریان الکتریکی هم‌اندازه از هر دو سیم عبور می‌کند، پس میدان مغناطیسی سیم‌ها یعنی B_1 و B_2 هم‌اندازه‌اند. مطابق شکل (الف)، برای این‌که در نقطهٔ دلخواه A، میدان مغناطیسی خالص در جهت محور x باشد، باید میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ مطابق شکل (ب) باشند.



(الف)



(ب)

به کمک قاعدهٔ دست راست و با توجه به شکل (ب)، متوجه می‌شویم که جریان‌های I_1 و I_2 درون‌سو (⊗) هستند. از طرفی، با توجه به این‌که جهت جریان‌ها یکسو است، نیروی مغناطیسی بین دو سیم، ربایشی است.

www.konkur.in

۶۵ با استفاده از سیم بلندی با طول معین، در حالت اوّل پیچهٔ مسطحی به شعاع R و در حالت دوم پیچهٔ مسطحی به شعاع $2R$ درست می‌کنیم. اگر در هر دو حالت جریان الکتریکی یکسانی از دو پیچه عبور کند، اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه در حالت اول، چند برابر اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه در حالت دوم است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا تعداد حلقه‌های هر پیچه را برحسب طول سیم و شعاع پیچه بنویسید و سپس رابطهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه $(B=\frac{\mu_۰ NI}{۲R})$ را به صورت نسبتی بنویسید.

درس‌نامه Box

- اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز یک پیچهٔ حامل جریان I به شعاع R از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $(T.m/A)$ — تعداد دورهای پیچه — جریان الکتریکی (A) — میدان مغناطیسی (T) ← $B=\frac{\mu_۰ NI}{۲R}$ ← شعاع پیچه

- رابطهٔ طول سیمی که پیچه را با آن ساخته‌ایم با تعداد حلقه‌های پیچه به صورت زیر است:

تعداد حلقه‌های پیچه ← $N=\frac{L}{۲\pi R}$ ← طول سیم (m) / شعاع حلقه (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد حلقه‌های هر کدام از پیچه‌ها را برحسب شعاع و طول سیم می‌نویسیم:

$$N=\frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow \begin{cases} N_۱=\frac{L}{۲\pi R} \\ N_۲=\frac{L}{۲\pi(۲R)} \end{cases} \Rightarrow \frac{N_۱}{N_۲}=۲$$

گام دوم: رابطهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$B=\frac{\mu_۰ NI}{۲R} \Rightarrow \frac{B_۱}{B_۲}=\frac{N_۱}{N_۲}\times\frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{R_۲}{R_۱} \Rightarrow \frac{B_۱}{B_۲}=۲\times۱\times\frac{۲R}{R}=۴$$

www.konkur.in

۶۶ زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی با سطح یک حلقه برابر ۵۳° است. این زاویه چند درجه و چگونه تغییر کند تا شار مغناطیسی عبوری از حلقه ۲۵ درصد کاهش یابد؟ $(\cos ۵۳^\circ = ۰/۶)$

۱) ۱۶، کاهش یابد.
۲) ۳۷، کاهش یابد.
۳) ۱۶، افزایش یابد.
۴) ۳۷، افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

در گام اول، زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با میدان مغناطیسی را به دست آورید و سپس با توجه به دادهٔ سؤال یعنی $\Phi_۲ = ۰/۷۵\Phi_۱$ زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با میدان مغناطیسی را در حالت دوم محاسبه کنید و سپس زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی را با سطح حلقه در این حالت به دست آورید و تغییرات آن را محاسبه کنید.

درس Box

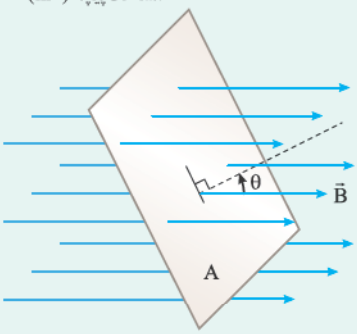
شار مغناطیسی، کمیتی نرده‌ای است و برای میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که از پیچه‌ای با مساحت معین A می‌گذرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

میدان مغناطیسی یکنواخت (T)

$$\Phi = BA\cos\theta$$

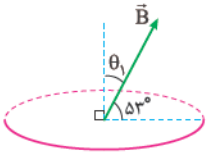
θ: زاویهٔ بین نیم‌خط عمود به سطح پیچه و میدان مغناطیسی

مساحت پیچه $(m^۲)$



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای محاسبهٔ شار مغناطیسی، ما به زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با میدان مغناطیسی نیاز داریم. مطابق شکل زیر، $\theta_۱$ برابر است با:



$$\theta_۱' = ۵۳^\circ$$

$$\theta_۱ = ۹۰^\circ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\Phi_۲ = \Phi_۱ - \frac{۲۵}{۱۰۰}\Phi_۱ = \frac{۷۵}{۱۰۰}\Phi_۱ \Rightarrow \Phi_۲ = ۰/۷۵\Phi_۱ \Rightarrow \cancel{BA}\cos\theta_۲ = \frac{۳}{۴}(\cancel{BA}\cos\theta_۱) \Rightarrow \cos\theta_۲ = \frac{۳}{۴}\times\cos ۳۷^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos ۳۷^\circ = ۰/۸} \cos\theta_۲ = ۰/۶ \Rightarrow \theta_۲ = ۵۳^\circ$$

$$\theta_۲' = ۹۰^\circ - \theta = ۹۰^\circ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$$

در حالت دوم خطوط میدان با سطح حلقه زاویهٔ ۳۷° می‌سازد، یعنی $\theta_۲' = ۳۷^\circ$.

گام دوم: خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

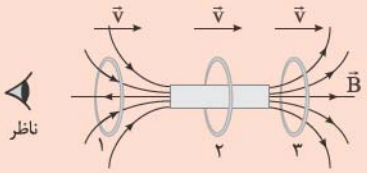
$$\Delta\theta' = \theta_۲' - \theta_۱' = ۳۷^\circ - ۵۳^\circ = -۱۶^\circ$$

گول نخوری

اگه دقت نکنی که خواستهٔ سؤال تغییرات زاویهٔ خطوط میدان با سطح حلقه است و $\Delta\theta$ رو محاسبه کنی، توی دام گزینهٔ (۳) می‌افتی.

www.konkur.in

۶۷ حلقهٔ رسانایی به طرف یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر، حلقه را در سه وضعیت نسبت به آهنربا نشان می‌دهد. اگر جریان القاشده در حلقه در وضعیت‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب I_1، I_2 و I_3 باشد، از دید ناظر مشخص‌شده در شکل، کدام درست است؟



۱) I_1، I_2 و I_3 هر سه ساعتگردند.

۲) I_1، I_2 و I_3 هر سه پادساعتگردند.

۳) I_1 ساعتگرد، I_3 پادساعتگرد و I_2 برابر صفر است.

۴) I_3 ساعتگرد، I_1 پادساعتگرد و I_2 برابر صفر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

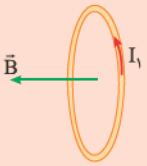
قانون لنز بیان می‌کند که وقتی شار مغناطیسی تغییر می‌کند، جریان در جهتی در حلقه القا می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از آن، با تغییر شار مخالفت می‌کند؛ یعنی:

- وقتی شار مغناطیسی افزایش می‌یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی در خلاف جهت هم هستند:

- وقتی شار مغناطیسی کاهش می‌یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی هم‌جهت هستند:

پاسخ خیلی تشریحی

وضعیت حلقه‌ها را تک به تک بررسی می‌کنیم:



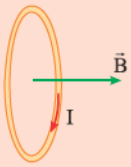
وضعیت (۱): حلقه در حال نزدیک‌شدن به آهنربا است، پس میدان مغناطیسی آهنربا در حلقه در حال افزایش است، در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از حلقه نیز در حال افزایش است، بنابراین طبق قانون لنز، باید جهت میدان مغناطیسی القایی در خلاف جهت میدان مغناطیسی آهنربا یعنی به سمت چپ باشد. به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در حلقه را مشخص می‌کنیم.

پس جریان القایی I_1 از دید ناظر، پادساعتگرد است.

وضعیت (۲): در این حالت میدان مغناطیسی عبوری از حلقه افقی و بدون تغییر است، پس جریان القایی $I_2 = 0$ است.

همین‌جا گزینهٔ درست مشخص شد، ولی ما وضعیت (۳) را هم بررسی می‌کنیم.

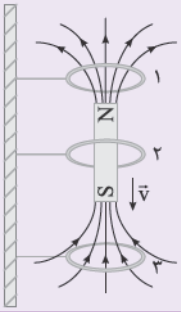
وضعیت (۳): حلقه در حال دورشدن از آهنربا است، پس میدان مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است، در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از حلقه نیز در حال کاهش است، بنابراین طبق قانون لنز، باید جهت میدان مغناطیسی القایی حلقه در جهت میدان مغناطیسی آهنربا و به سمت راست باشد تا با کاهش شار مخالفت کند. به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در حلقه را مشخص می‌کنیم.



پس جریان القایی I_3 از دید ناظر ساعتگرد است.

کنکور

در شکل زیر، آهنربایی از بالا رها شده تا در راستای قائم از درون حلقه‌های رسانا بگذرد. در لحظهٔ نشان داده شده، از نگاه بالا، جهت جریان القایی در حلقه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب چگونه است؟ (سؤال ۶۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)



۱) هر سه ساعتگرد

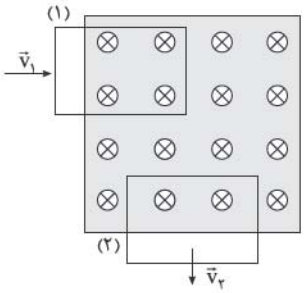
۲) هر سه پادساعتگرد

۳) ساعتگرد، صفر و پادساعتگرد

۴) پادساعتگرد، صفر و ساعتگرد

www.konkur.in

۶۸ در شکل زیر، قاب مستطیل‌شکل رسانایی در حالت (۱)، در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه و در حالت (۲)، در حال خروج از آن است. اگر تندی قاب در دو حالت یکسان باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) جریان القاشده در قاب در حالت (۱) ساعتگرد است.

ب) جریان القاشده در قاب در حالت (۲) ساعتگرد است.

پ) اندازهٔ جریان القاشده در قاب در حالت (۲) بیشتر از حالت (۱) است.

ت) اندازهٔ جریان القاشده در قاب در دو حالت، یکسان است.

۱) الف و پ

۲) الف و ت

۳) ب و پ

۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه Box

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$|\varepsilon_{av}| = |N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| \Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{av}| = |NAB(\frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\Delta t})| \\ |\varepsilon_{av}| = |NA\cos\theta(\frac{\Delta B}{\Delta t})| \\ |\varepsilon_{av}| = |NB\cos\theta(\frac{\Delta A}{\Delta t})| \end{cases}$$

اگر مقاومت پیچه یا سیملوله برابر با R باشد، جریان القایی متوسط در آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قاب (۱) در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت است که باعث افزایش شار عبوری از آن می‌شود، در نتیجه طبق قانون لنز، جهت میدان القایی باید در خلاف جهت میدان اصلی یعنی برون‌سو (⊙) باشد. طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان پادساعتگرد است.

قاب (۲) در حال خروج از میدان مغناطیسی یکنواخت است که باعث کاهش شار عبوری از آن می‌شود، بنابراین طبق قانون لنز، جهت میدان القایی باید هم‌جهت میدان اصلی یعنی درون‌سو (⊗) باشد. طبق قاعدهٔ دست راست جهت جریان ساعتگرد است.

تا این‌جا مورد «الف» نادرست و مورد «ب» درست است. (رد گزینه‌های (۱) و (۲))

گام دوم: جریان القایی در قاب طبق رابطهٔ $I_{av} = |\frac{-N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|$ به دست می‌آید. تغییرات شار، ناشی از تغییرات مساحت است، یعنی:

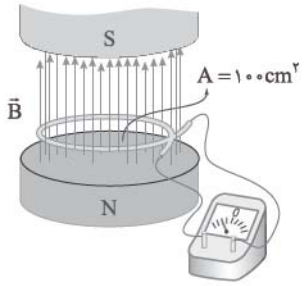
$$\Delta\Phi = B\cos\theta(\Delta A)$$

مطابق شکل سؤال، مشخص است که در بازهٔ زمانی یکسان، تغییر مساحت قاب (۲) بیشتر از تغییر مساحت قاب (۱) است، در نتیجه:

$$I_{av,2} > I_{av,1}$$

www.konkur.in

۶۹ در شکل زیر، میدان مغناطیسی بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدتی معین از $0/3\ T$ رو به بالا به $0/2\ T$ رو به پایین می‌رسد. اگر مقاومت الکتریکی حلقه $20\ \Omega$ باشد، در این مدت بار شارش‌یافته در حلقه چند میلی‌کولن است؟



۱) ۰/۰۵

۲) ۰/۲۵

۳) ۰/۵

۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

از ترکیب روابط $|I=|\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|$ و $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$ و جای‌گذاری $\Delta\Phi=(A\cos\theta)\Delta B$ در رابطهٔ نهایی، بار شارش‌یافته در حلقه را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با ترکیب دو رابطهٔ $|I=|\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|$ و $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$ داریم:

$$\Delta q=|\frac{N}{R}\Delta\Phi|\xrightarrow{\Phi=BA\cos\theta}\Delta q=|\frac{N}{R}A\cos\theta\Delta B|=|\frac{۱}{۲۰}\times۱۰۰\times۱۰^{-۴}\times۱\times(-۰/۲-۰/۳)|$$

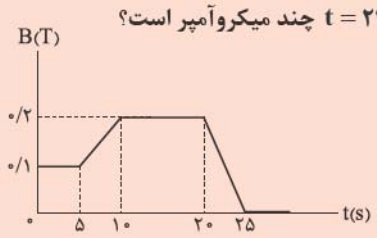
$$\Rightarrow \Delta q=۰/۲۵\times۱۰^{-۳}\,C=۰/۲۵\,mC$$

گول نخوری ✘

اگه تغییر جهت میدان مغناطیسی رو در نظر نگیری، توی دام گزینه‌های (۱) یا (۳) می‌افتی.

www.konkur.in

۷۰ یک حلقهٔ رسانای مربع‌شکل به ضلع $3\,cm$ و مقاومت الکتریکی $0/1\,\Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد به طوری که خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t=9\,s$ تا $t=24\,s$ چند میکروآمپر است؟



۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۷۲۰
۴) ۸۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا به کمک شیب نمودار، میدان مغناطیسی را در لحظات $t_1=9\,s$ و $t_2=24\,s$ به دست آورید و سپس داده‌ها را در رابطهٔ $I_{av}=\left|\frac{-N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$، جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی برای محاسبهٔ جریان القایی متوسط، به اندازهٔ میدان مغناطیسی در لحظات $t_1=9\,s$ و $t_2=24\,s$ نیاز داریم، پس:

شیب نمودار در بازهٔ زمانی $t=5\,s$ تا $t'=10\,s$ ثابت است:

$$\frac{B_{10}-B_5}{10-5}=\frac{B_9-B_5}{9-5}\Rightarrow\frac{0/2-0/1}{5}=\frac{B_9-0/1}{4}\Rightarrow B_9=0/18\,T$$

شیب نمودار در بازهٔ زمانی $t=20\,s$ تا $t'=25\,s$ ثابت است:

$$\frac{B_{25}-B_{20}}{25-20}=\frac{B_{24}-B_{20}}{24-20}\Rightarrow\frac{0-0/2}{5}=\frac{B_{24}-0/2}{4}\Rightarrow B_{24}=0/04\,T$$

جریان القایی متوسط را به کمک رابطه‌های $I_{av}=\frac{\varepsilon_{av}}{R}$ و $\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم:

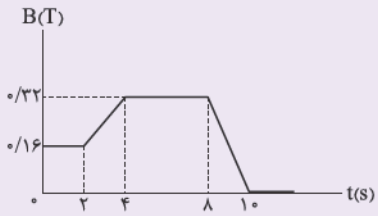
$$I_{av}=\left|\frac{-N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|\xrightarrow{\Phi=BA\cos\theta}I_{av}=\left|\frac{-NA\cos\theta}{R}\times\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|$$

$$\xrightarrow[R=0/1\,\Omega,\,\Delta B=B_{24}-B_9=-0/14\,T]{A=(0/03)^2=9\times10^{-4}\,m^2,\,\cos0=1}I_{av}=\left|-\frac{9\times10^{-4}\times1}{0/1}\times\frac{(-0/14)}{24-9}\right|=0/84\times10^{-4}\,A\times\frac{1\,\mu A}{10^{-6}\,A}$$

$$\Rightarrow I_{av}=84\,\mu A$$

کنکور یک حلقهٔ رسانای مربع‌شکل به ضلع $2\,cm$ و مقاومت الکتریکی $0/1\,\Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t=2\,s$ تا $t=10\,s$ چند میلی‌آمپر است؟

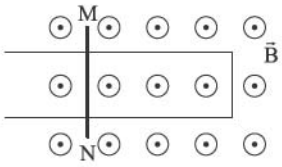
(سؤال ۷۱ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)



۱) صفر
۲) ۰/۰۴
۳) ۰/۰۶
۴) ۰/۰۸

www.konkur.in

۷۱ شکل زیر، رسانای U‌شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ $0/18\ T$ نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میلهٔ فلزی MN بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می‌دهد. میله با تندی ثابت روی دو بازوی رسانا حرکت می‌کند. اگر نیروی محرکهٔ القاشده در مدار برابر $9\ mV$ و جهت جریان القاشده در میله از M به N باشد، به ترتیب آهنگ تغییر مساحت مدار در SI و جهت حرکت میله کدام است؟



۱) ۰/۰۵، راست

۲) ۰/۰۵، چپ

۳) ۰/۵، راست

۴) ۰/۵، چپ

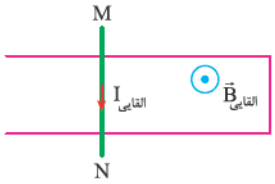
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا به کمک جهت جریان القایی در میلهٔ MN و طبق قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی القایی را مشخص کنید، سپس به کمک قانون لنز، تغییرات شار مغناطیسی و تغییرات مساحت را مشخص کنید و در آخر به کمک رابطهٔ $|\varepsilon_{av}| = |NB\cos\theta(\frac{\Delta A}{\Delta t})|$، آهنگ تغییر مساحت را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که جهت جریان القایی در میله از M به N است، یعنی جریان در حلقه پادساعتگرد است، به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی القایی را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ و میدان مغناطیسی القایی هم‌جهت هستند؛ در نتیجه طبق قانون لنز، شار مغناطیسی در حال کاهش است، پس مساحت مدار در حال کاهش است، یعنی میلهٔ MN به سمت راست حرکت می‌کند.

گام سوم: به کمک رابطهٔ $|\varepsilon_{av}| = |NB\cos\theta(\frac{\Delta A}{\Delta t})|$، آهنگ تغییر مساحت مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$|\varepsilon_{av}| = |NB\cos\theta(\frac{\Delta A}{\Delta t})| \Rightarrow 9\times10^{-3} = 1\times0/18\times\cos0\times\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0/05\ m^2/s$$

www.konkur.in

۷۲ طول سیملولهٔ حامل جریانی برابر ۵۰ cm و سطح مقطع آن برابر $10\ cm^2$ است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله در نقطه‌ای روی محور آن برابر ۳۰ G باشد، انرژی ذخیره‌شده در آن چند میلی‌ژول است؟

$(\mu_0 = 12/5\times10^{-7}\ T.m/A)$

۱) ۳۶ ۲) ۳/۶

۳) ۱۸ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

از ترکیب روابط $U=\frac{1}{2}LI^2$، $L=\frac{\mu_0 AN^2}{\ell}$ و $B=\frac{\mu_0 NI}{\ell}$ به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}\times\frac{AB^2\ell}{\mu_0}$ برسید و داده‌ها را جای‌گذاری کنید تا خواستهٔ سؤال محاسبه شود.

درس Box

۱) انرژی ذخیره‌شده در القاگر (سیملوله) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$U=\frac{1}{2}LI^2$ → انرژی القاگر (J)؛ جریان (A)؛ ضریب القاوری (H)

● ویژگی‌های فیزیکی هر القاگر (سیملوله) توسط ضریب القاوری آن تعیین می‌شود. ضریب القاوری به عواملی هم‌چون تعداد دور، طول و سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد بستگی دارد. در یک القاگر آرمانی و بدون هسته، ضریب القاوری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$L=\mu_0\frac{AN^2}{\ell}$ → تعداد حلقه‌ها؛ سطح مقطع حلقه‌ها (m^2)؛ طول سیملوله (m)؛ ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m/A)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از ترکیب روابط $U=\frac{1}{2}LI^2$ و $L=\frac{\mu_0 AN^2}{\ell}$ داریم:

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 AN^2}{\ell}\right)I^2 \quad (1)$$

گام دوم: از رابطهٔ میدان مغناطیسی سیملوله داریم:

$$B=\frac{\mu_0 NI}{\ell}\Rightarrow I=\frac{B\ell}{\mu_0 N} \quad (2)$$

گام سوم: رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری کرده و خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$U=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\mu_0 AN^2}{\ell}\right)\left(\frac{B\ell}{\mu_0 N}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{AB^2\ell}{\mu_0}=\frac{1}{2}\times\frac{10\times10^{-4}\times30\times30\times10^{-8}\times0/5}{12/5\times10^{-7}}$$

$$\Rightarrow U=1/8\times10^{-3}\,J\times\frac{1\,mJ}{10^{-3}\,J}=1/8\ mJ$$

www.konkur.in

۷۳ معادلهٔ جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر با ضریب القاوری ۴۰ mH برحسب زمان در SI به صورت $I = ۵\sin(۱۰۰\pi t)$ است. انرژی ذخیره‌شده در القاگر در لحظهٔ $t = ۷/۵\ ms$ چند ژول است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲۵

۳) ۱ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint کافی است جریان را در لحظهٔ $t = ۷/۵\ ms$ به دست آورید و داده‌ها را در رابطهٔ $U = \frac{۱}{۲}LI^۲$ جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جریان عبوری از القاگر را در لحظهٔ $t = ۷/۵\ ms$ محاسبه می‌کنیم:

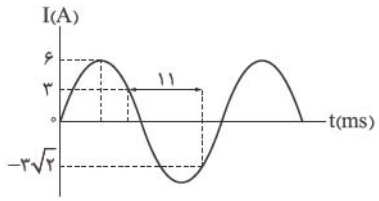
$$I = ۵\sin(۱۰۰\pi t) = ۵\sin(۱۰۰\pi \times ۷/۵ \times ۱۰^{-۳}) = ۵\sin(\frac{۳\pi}{۴}) = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\ A$$

گام دوم: انرژی ذخیره‌شده در القاگر را به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{۱}{۲}LI^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴۰ \times ۱۰^{-۳}(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})^۲ = ۰/۲۵\ J$$

www.konkur.in

۷۴ نمودار جریان متناوب سینوسی حاصل از یک مولد جریان متناوب برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ جریان الکتریکی عبوری از این مولد در لحظهٔ $t = ۱۶\ ms$ چند آمپر است؟

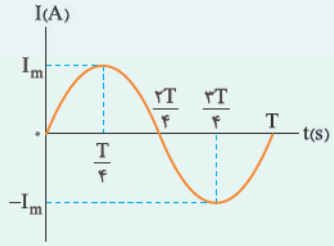


۱) ۳
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

جریان متناوب، جریانی است که اندازه و علامت آن به صورت تابع سینوسی با زمان تغییر می‌کند که نمودار و معادلهٔ جریان برحسب زمان به صورت زیر است:

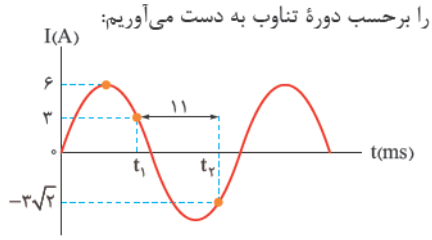


$$I = I_m \sin(\frac{۲\pi}{T}t)$$

I_m: جریان بیشینه (A)، T: دورهٔ تناوب (s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با جای‌گذاری جریان در معادلهٔ جریان متناوب، لحظات $t_۱$ و $t_۲$ را برحسب دورهٔ تناوب به دست می‌آوریم:



$$I = I_m \sin(\frac{۲\pi}{T}t) \Rightarrow ۳ = ۶\sin(\frac{۲\pi}{T}t_۱) \Rightarrow \sin(\frac{۲\pi}{T}t_۱) = \frac{۱}{۲}$$

طبق نمودار، در لحظهٔ $t_۱$ برای دومین بار جریان برابر با $۳\ A$ شده، پس:

$$\frac{۲\pi}{T}t_۱ = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow t_۱ = \frac{۵}{۱۲}T$$

برای محاسبهٔ $t_۲$ برحسب T داریم:

$$I = I_m \sin(\frac{۲\pi}{T}t) \Rightarrow -۳\sqrt{۲} = ۶\sin(\frac{۲\pi}{T}t_۲) \Rightarrow \sin(\frac{۲\pi}{T}t_۲) = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

طبق نمودار، در لحظهٔ $t_۲$ برای دومین بار جریان برابر با $-۳\sqrt{۲}\ A$ شده، پس:

$$\frac{۲\pi}{T}t_۲ = \frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow t_۲ = \frac{۷}{۸}T$$

گام دوم: طبق نمودار $t_۲ - t_۱ = ۱۱\ ms$ است؛ بنابراین:

$$t_۲ - t_۱ = \frac{۷}{۸}T - \frac{۵}{۱۲}T = ۱۱ \Rightarrow T(\frac{۱۱}{۲۴}) = ۱۱ \Rightarrow T = ۲۴\ ms$$

گام سوم: معادلهٔ جریان متناوب را برحسب داده‌ها می‌نویسیم و $t = ۱۶\ ms$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$I = ۶\sin(\frac{۲\pi}{۲۴}t) = ۶\sin(\frac{۲\pi}{۲۴}\times ۱۶) = ۶\sin(\frac{۴}{۳}\pi) = ۶\times(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) = -۳\sqrt{۳}\ A$$

$$\Rightarrow |I| = ۳\sqrt{۳}\ A$$

توجه چون یکای $t = ۱۶\ ms$ و $T = ۲۴\ ms$ یکسان بود، نیازی به تبدیل واحد وجود نداشت.

www.konkur.in

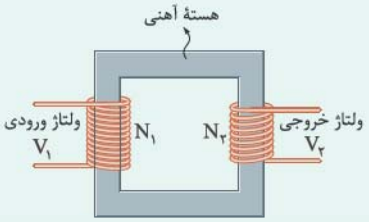
۷۵ تعداد دورهای اولیه و ثانویهٔ یک مبدل به ترتیب برابر ۷۵۰ و ۱۵ است. اگر دو سر پیچهٔ اولیهٔ آن به ولتاژ ۱۵۰ V وصل شود، از یک لامپ ۱۵ اهمی که به دو سر پیچهٔ ثانویهٔ مبدل متصل شده است، جریان چند آمپری می‌گذرد؟

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

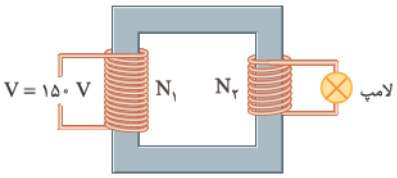
مطابق شکل، مبدل شامل دو پیچه با تعداد دورهای متفاوت است که دور یک هستهٔ آهنی (فرومغناطیسی نرم) پیچیده شده‌اند. برای یک مبدل آرمانی که مقاومت پیچه‌های آن ناچیز است، رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مبدل مطابق شکل زیر است؛ ولتاژ دو سر پیچهٔ ثانویه (اختلاف پتانسیل دو سر لامپ) را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}\Rightarrow\frac{V_2}{150}=\frac{15}{750}\Rightarrow V_2=3\ V$$

گام دوم: به کمک قانون اهم، جریان عبوری از لامپ ۱۵ اهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow I=\frac{V}{R}=\frac{3}{15}=0/2\ A$$

www.konkur.in

۷۶ درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) اوره و آمونیاک، هر دو از کودهای شیمیایی نیتروژن‌دار هستند و در مقیاس صنعتی، آمونیاک زودتر از اوره تولید شده است.

۲) در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش‌های گرماده، انرژی فعال‌سازی واکنش از اختلاف سطح انرژی فراورده‌ها و سدّ انرژی بیشتر است.

۳) در مبدل کاتالیستی، در سطح سرامیک‌ها که به شکل توری هستند، فلزهای Pd، Pt و Ru نشانده شده است.

۴) دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود یکی از اکسیدهای نیتروژن است که عدد اکسایش اتم نیتروژن در آن برابر ۲+ است. (NO_2)

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۱): برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

با توجه به ترتیب زمانی تهیهٔ این مواد، آمونیاک زودتر از اوره سنتز شده است.

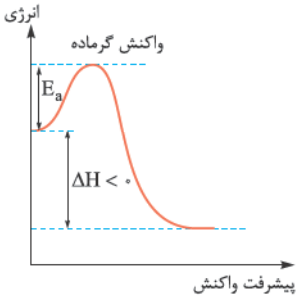
انقلاب صنعتی ⇒ تهیهٔ آمونیاک (NH_3) → تهیهٔ اوره ($CO(NH_2)_2$) → تهیهٔ ویتامین A ($C_{20}H_{30}O$) → ساخت مواد عایق گرما

کودهای شیمیایی (تأمین غذای جمعیت جهان) — افزایش مراقبت‌های بهداشتی — پوشش‌های دوستدار محیط زیست

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): در نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها با قلهٔ نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش (رفت) را نشان می‌دهد و تفاوت سطح انرژی فراورده‌ها با قلهٔ نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت را نشان می‌دهد.

با توجه به نمودار، *واضح و مبرهن است که* در واکنش گرماده انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت بیشتر از واکنش رفت است:



گزینهٔ (۳): مبدل‌های کاتالیستی، توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. به نماد فلزها دقت کنید.

گزینهٔ (۴): رنگ قهوه‌ای هوا به دلیل وجود NO_2 است:

$$\text{عدد اکسایش N در } NO_2 \Rightarrow N + 2O = 0 \Rightarrow N + 2(-2) = 0 \Rightarrow N = +4$$

www.konkur.in

۷۷ **اگر انرژی فعال‌سازی واکنش‌های (۱)، (۲) و (۳) در شرایط یکسان به ترتیب برابر a، $a-x$ و $a+x$ کیلوژول باشد، در صورت تأمین ..... کیلوژول انرژی، ..... انجام می‌شود. (x عددی مثبت است.)**

۱) a، واکنش‌های (۱) و (۲) با سرعت برابری

۲) $a+x$، به یقین هر سه واکنش با سرعت بسیار زیاد

۳) $a-x$، فقط واکنش (۲)

۴) $a-2x$، به یقین واکنش (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مقایسهٔ مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها به صورت $(۲) < (۱) < (۳)$ است؛ *حالا بریم سراغ بررسی گزینه‌ها:*

گزینهٔ (۱): با توجه به این‌که مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش (۱) بیشتر از واکنش (۲) است، با تأمین انرژی فعال‌سازی واکنش (۱)، انرژی فعال‌سازی واکنش (۲) هم تأمین خواهد شد و هر دو واکنش انجام می‌شوند، اما از *اون‌جایی که* انرژی فعال‌سازی دو واکنش برابر نیست، سرعت انجام آن‌ها یکسان نخواهد بود.

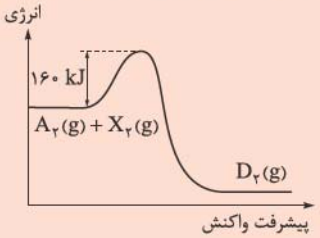
گزینهٔ (۲): در صورت تأمین انرژی فعال‌سازی واکنش (۳)، هر سه واکنش انجام می‌شوند، اما با توجه به این‌که مقدار عددی انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها را نداریم، *نمی‌تونیم با قطعیت بگیم سرعتشون زیاده یا کم!*

گزینهٔ (۳): مقدار $(a-x)$، انرژی فعال‌سازی واکنش (۲) است که از دو واکنش دیگر هم کم‌تر می‌باشد؛ بنابراین با تأمین $(a-x)$ کیلوژول انرژی، فقط واکنش (۲) انجام می‌شود.

گزینهٔ (۴): برای انجام واکنش (۱) باید حداقل a کیلوژول انرژی تأمین شود.

www.konkur.in

۷۸ با توجه به نمودار انرژی ـ پیشرفت زیر، اگر مجموع آنتالپی پیوندها در A_2، X_2 و D_2 برحسب $kJ.mol^{-1}$ به ترتیب برابر ۱۷۱۹، ۴۳۶ و ۲۳۳۴ باشد، در صورتی که کاتالیزگر واکنش، انرژی فعال‌سازی را ۴۰ درصد کاهش دهد، فاصلهٔ سدّ انرژی و سطح انرژی فراوردهٔ واکنش در حالتی که از کاتالیزگر استفاده می‌کنیم، چند کیلوژول خواهد بود؟



۱) ۲۳۴
۲) ۲۴۳
۳) ۲۵۷
۴) ۲۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به گرماده‌بودن واکنش، فاصلهٔ سد انرژی تا فراورده از جمع $|\Delta H|$ و E_a به دست می‌آید، پس قبل از هر کاری لازمه این دو کمیت را محاسبه کنیم:

محاسبهٔ ΔH با استفاده از آنتالپی پیوند:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}]$$

$$\Delta H = [A_2 + X_2] - [D_2] = [۱۷۱۹ + ۴۳۶] - [۲۳۳۴] = -۱۷۹\ kJ$$

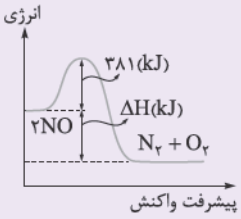
محاسبهٔ E_a جدید:

$$E'_a = E_a - \frac{۴۰}{۱۰۰}E_a = \frac{۶۰}{۱۰۰}E_a = ۰/۶ \times ۱۶۰ = ۹۶\ kJ$$

فاصلهٔ فراورده تا قله $\Rightarrow E'_a + |\Delta H| = ۹۶ + ۱۷۹ = ۲۷۵\ kJ$

کنکور با توجه به شکل زیر، اگر انرژی پیوندهای $N=O$، $N\equiv N$ و $O=O$ به ترتیب برابر ۶۰۷، ۹۴۴ و ۴۹۶ کیلوژول بر مول باشد، جمع جبری ΔH و E_a در واکنش (رفت) نشان داده شده، چند کیلوژول است؟

(سؤال ۲۱۹ کنکور ریاضی ۱۳۹۸)



۱) +۱۵۵
۲) +۱۸۷
۳) +۴۲۱
۴) +۶۰۷

www.konkur.in

۷۹ کاربرد کاتالیزگر در واکنش شیمیایی، موجب چه تعداد از تغییرهای زیر می‌شود؟

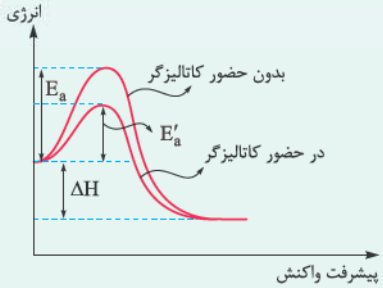
- تغییر مسیر انجام واکنش
- افزایش سرعت واکنش
- کاهش سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها
- افزایش پایداری فراورده‌ها
- کاهش ΔH (آنتالپی) واکنش
- افزایش مقدار فراورده‌ها

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- کاتالیزگر با **تغییر مسیر واکنش**، انرژی فعال‌سازی را کاهش داده و باعث می‌شود واکنش‌دهنده‌ها سریع‌تر به فراورده‌ها تبدیل شوند. *هواستون باشه* که کاتالیزگر، سطح انرژی واکنش‌دهنده(ها) و فراورده(ها) و در نتیجه ΔH واکنش را تغییر نمی‌دهد.



کاتالیزگر، این موارد را کاهش می‌دهد.	کاتالیزگر، این موارد را افزایش می‌دهد.	کاتالیزگر، این موارد را تغییر نمی‌دهد.
● انرژی فعال‌سازی واکنش ● سطح انرژی ذرهٔ تشکیل‌شده در قلهٔ نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش ● زمان انجام واکنش	● سرعت واکنش (شیب نمودار غلظت ـ زمان) ● پایداری ذرهٔ تشکیل‌شده در قلهٔ نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش	● سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ● ΔH واکنش ● مقدار نهایی فراورده

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس بالا، کاتالیزگر باعث تغییر ۱) مسیر انجام واکنش ۲) سرعت انجام واکنش می‌شود.

www.konkur.in

۸۰ با توجه به جدول داده‌شده، با طی مسافت ۱۰۰ کیلومتر توسط یک خودرو، به تقریب چند گرم کربن دی‌اکسید از طریق واکنش‌های انجام‌شده در مبدل کاتالیستی خودرو وارد هوا می‌شود؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_8H_{18}	NO
مقدار گرم آلاینده به ازای طی یک کیلومتر مسافت	بدون کاتالیزگر	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	با کاتالیزگر	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

۱) ۴۹۴ ۲) ۷۲۵
۳) ۸۶۹ ۴) ۱۳۳۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

کربن دی‌اکسید واردشده به هواکره از طریق واکنش‌های زیر است:

۱) واکنش حذف کربن مونواکسید (سوختن): $2CO(g)+O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$

۲) واکنش حذف هیدروکربن‌های نسوخته (سوختن): $C_xH_y+(x+\frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g)+\frac{y}{2}H_2O(g)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

(۱) جرم CO مصرف‌شده در واکنش $= 5/99-0/61=5/38\ g$

(۲) جرم C_8H_{18} مصرف‌شده در واکنش $= 1/67-0/07=1/6\ g$

(۱) واکنش $\Rightarrow 2CO+O_2 \rightarrow 2CO_2$

CO_2 تولیدشده به ازای ۱۰۰ km $= 100\,km \times \frac{5/38\ g\ CO}{1\ km} \times \frac{1\ mol\ CO}{28\ g\ CO} \times \frac{2\ mol\ CO_2}{2\ mol\ CO} \times \frac{44\ g\ CO_2}{1\ mol\ CO_2}$

$= 845/4\ g\ CO_2$

(۲) واکنش $\Rightarrow 2C_8H_{18}+25\,O_2 \rightarrow 16CO_2+18H_2O$

CO_2 تولیدشده به انرژی ۱۰۰ km جرم $= 100\,km \times \frac{1/6\ g\ C_8H_{18}}{1\,km} \times \frac{1\,mol\,C_8H_{18}}{114\,g\,C_8H_{18}} \times \frac{16\,mol\,CO_2}{2\,mol\,C_8H_{18}} \times \frac{44\,g\,CO_2}{1\,mol\,CO_2}$

$= 494\ g\ CO_2$

مجموع جرم $CO_2 = 494+845/4=1339/4\ g$

www.konkur.in

۸۱ کدام مورد، جملهٔ داده‌شده را به درستی تکمیل نمی‌کند؟

«در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی، ..... .»

۱) بین دو محفظه، مخزن آمونیاک وجود داشته و در هر دو محفظه، بخار آب تولید می‌شود.

۲) فراوردهٔ کربن‌دار واکنش سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی به عنوان واکنش‌دهنده در محفظهٔ اول مصرف می‌شود.

۳) در محفظهٔ دوم، فراوردهٔ هابر به عنوان واکنش‌دهنده و یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هابر، به عنوان فراورده می‌باشد.

۴) همانند خودروهای بنزینی، ۳ نوع ماده در واکنش‌های شیمیایی مربوط به حذف آلاینده‌ها تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در خودروهای بنزینی، ۴ نوع ماده (CO_2، H_2O، N_2 و O_2) و در خودروهای دیزلی، ۳ نوع ماده (CO_2، H_2O و N_2) از انجام واکنش‌های شیمیایی تولید می‌شود.

نکته

گازهای خروجی ناشی از واکنش‌های انجام‌شده در مبدل کاتالیستی

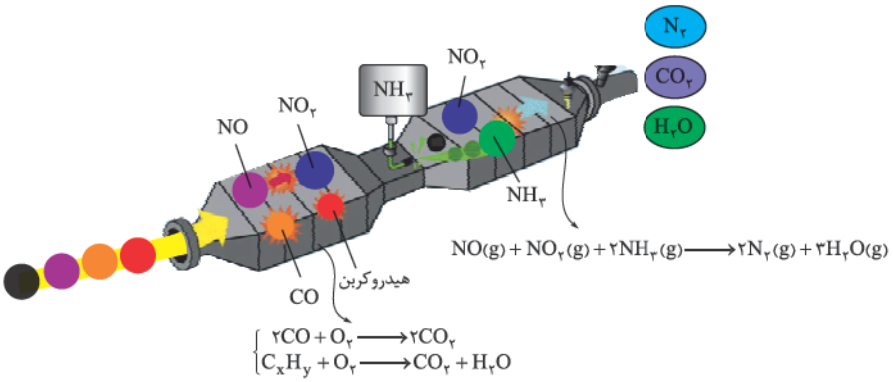
- خودروهای بنزینی ← O_2, N_2, H_2O, CO_2 (یکی بیشتر (O_2) داره که مربوط به واکنش $2NO \rightarrow N_2 + O_2$ است.)
- خودروهای دیزلی ← N_2, H_2O, CO_2

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به شکل کتاب درسی، مشخص است که بین دو محفظه در مبدل‌های کاتالیسیتی خودروهای دیزلی، مخزن آمونیاک (NH_3) وجود دارد. در این مبدل‌های کاتالیستی، علاوه بر کاتالیزگرها، گاز آمونیاک را نیز به داخل مخلوط آلاینده‌ها تزریق می‌کنند (در محفظهٔ دوم) تا طی واکنش زیر، گازهای NO و NO_2 تا حدود زیادی به گاز بی‌خطر N_2 تبدیل شوند:

$$NO(g) + NO_2(g) + 2NH_3(g) \rightarrow 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

هم‌چنین با توجه به شکل زیر می‌توان گفت که در هر دو محفظه، بخار آب ($H_2O(g)$) تولید می‌شود:



گزینهٔ (۲): فراوردهٔ کربن‌دار واکنش سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی، همان گاز کربن مونواکسید ($CO(g)$) است. در محفظهٔ اول مبدل‌های کاتالیستی در خودروهای دیزلی، گاز CO طی واکنش $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$ سوخته و به گاز کربن دی‌اکسید تبدیل می‌شود.

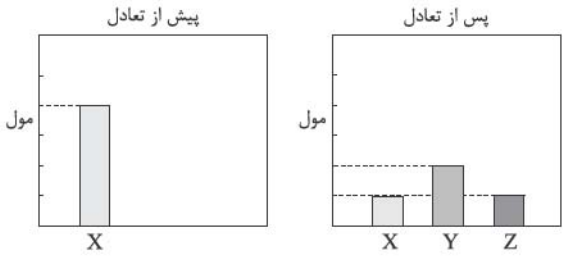
گزینهٔ (۳): واکنش انجام‌شده در محفظهٔ دوم مبدل‌های کاتالیستی خودروهای دیزلی به صورت زیر است:

$$NO(g) + NO_2(g) + 2NH_3(g) \rightarrow 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

بنابراین در این محفظه، گاز آمونیاک (فراوردهٔ فرایند هابر)، به عنوان واکنش‌دهنده و گاز نیتروژن (یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هابر)، به عنوان فراورده در واکنش حضور دارد.

www.konkur.in

۸۲ با توجه به شکل زیر که مربوط به یک واکنش تعادلی است، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟ (همهٔ مواد به حالت گازند و حجم ظرف واکنش، ۰/۵ لیتر و شمار مول‌های اولیهٔ X برابر ۲ است.)



۱) ۴

۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا باید با توجه به تغییر مقدار مول مواد، معادلهٔ واکنش رو بنویسیم! برای موازنهٔ واکنش هم، مول تمامی مواد شرکت‌کننده را به کم‌ترین مول تقسیم می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به نمودار، به ازای مصرف ۱/۵ مول X، ۱ مول Y و ۰/۵ مول Z تولید می‌شود.

$$\text{ضریب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده} \Rightarrow \begin{cases} X \rightarrow \frac{۱/۵}{۰/۵} = ۳ \\ Y \rightarrow \frac{۱}{۰/۵} = ۲ \\ Z \rightarrow \frac{۰/۵}{۰/۵} = ۱ \end{cases}$$

معادلهٔ واکنش	$۳X \rightleftharpoons ۲Y + Z$		
مقادیر قبل از تعادل	۲ mol	۰	۰
مقادیر بعد از تعادل	۰/۵	۱	۰/۵

$$K = \frac{[Z]\times[Y]^۲}{[X]^۳} = \frac{(\frac{۰/۵}{۰/۵})\times(\frac{۱}{۰/۵})^۲}{(\frac{۰/۵}{۰/۵})^۳} = \frac{۱\times۴}{۱} = ۴$$

www.konkur.in

۸۳ با توجه به جدول زیر و واکنش تعادلی $2A(g)+Z(g) \rightleftharpoons 2B(g)$، کدام موارد درست است؟

$\theta(^\circ C)$	K
۴۳۵	4×10^{-5}
۲۲۵	4×10^{-11}
۲۵	$2/5\times10^{-25}$

الف) واکنشی گرماگیر بوده و در آن، مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها بزرگ‌تر از مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها است.

ب) اثر افزایش غلظت B، مشابه اثر افزایش دما، تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

پ) طبق معادلهٔ واکنش، غلظت تعادلی B دو برابر غلظت تعادلی Z است.

ت) اگر حجم سامانه را از ۳ لیتر به ۱ لیتر تغییر دهیم، مقدار ثابت تعادل واکنش کاهش می‌یابد.

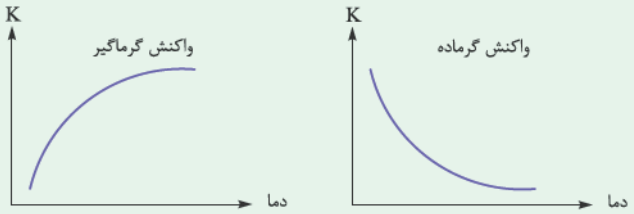
۱) ب ـ ت
۲) الف ـ ب
۳) الف ـ پ
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته

از میان عوامل مؤثر بر تعادل، تنها دما است که می‌تواند ثابت تعادل را تغییر دهد. در واکنش‌های گرماده با افزایش دما، ثابت تعادل کاهش و در واکنش‌های گرماگیر با افزایش دما، ثابت تعادل افزایش می‌یابد؛ بنابراین نمودار تغییرات ثابت تعادل برحسب دما برای این دو نوع واکنش به صورت زیر است:



عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به افزایش K در اثر افزایش دما، واکنش گرماگیر بوده و ΔH آن عددی مثبت است. رابطهٔ ΔH با آنتالپی پیوند به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}]$$

$$\Delta H > 0 \Rightarrow \text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها} > \text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}$$

ب) طبق اصل لوشاتلیه، هنگامی که در **دمای ثابت**، غلظت یکی از مواد شرکت‌کننده در سامانهٔ تعادلی **افزایش** یابد، واکنش در جهت **مصرف** آن پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن را مصرف کند و به تعادل **جدید** برسد. همین‌طور در واکنش‌های گرماگیر با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما (جهت رفت) جابه‌جا می‌شود.

پ) طبق ضریب استوکیومتری مواد، به ازای مصرف ۲ مول B، ۱ مول Z تولید می‌شود. نسبت غلظت تعادلی این دو ماده به مقدار اولیهٔ B بستگی دارد و لزوماً دوبرابر Z نیست.

ت) تغییر حجم، تأثیری بر مقدار ثابت تعادل ندارد.

www.konkur.in

۸۴ در ظرفی دربسته به حجم دو لیتر، ۵ مول AB به همراه دو مول از هر یک از گازهای A_2 و B_2 در تعادل هستند. اگر به این ظرف در دمای ثابت، چهار مول AB بیفزاییم، در لحظهٔ برقراری تعادل، اختلاف غلظت مولی گازهای AB و A_2 به تقریب چه‌قدر خواهد بود؟

$$A_2(g) + B_2(g) \rightleftharpoons 2AB(g)$$

۱) ۲/۱۷ ۲) ۳/۱۴ ۳) ۵/۲۳ ۴) ۶/۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا ثابت تعادل واکنش را حساب می‌کنیم. در نظر داشته باشید که اگر مقدار مول گازی در دو سمت واکنش برابر باشد، می‌توان در عبارت ثابت تعادل به جای غلظت از مول استفاده کرد:

$$\underset{2\,mol}{A_2} + \underset{2\,mol}{B_2} \rightleftharpoons \underset{5\,mol}{2AB}$$

$$K = \frac{[AB]^2}{[A_2][B_2]} \Rightarrow K = \frac{5^2}{2\times 2} = \frac{25}{4}$$

با افزودن ۴ مول AB، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود:

A_2	B_2	$2AB$	
۲	۲	۵	تعادل اولیه
۲	۲	۹	پس از افزودن AB
$2+x$	$2+x$	$9-2x$	تعادل جدید

با تغییر مقدار مواد، ثابت تعادل بدون تغییر باقی می‌ماند:

$$K = \frac{25}{4} = \frac{(9-2x)^2}{(2+x)^2} \xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از دو طرف تساوی}} \frac{5}{2} = \frac{9-2x}{2+x} \Rightarrow 10+5x = 18-4x \Rightarrow$$

$$x = \frac{8}{9}$$

$$\text{غلظت AB} = \frac{\text{مول AB}}{\text{حجم ظرف}} = \frac{9-2x}{2}$$

$$\text{غلظت } A_2 = \frac{\text{مول } A_2}{\text{حجم ظرف}} = \frac{2+x}{2}$$

$$\text{اختلاف غلظت AB و } A_2 = \frac{7-3x}{2} = \frac{7-3(\frac{8}{9})}{2} = \frac{21-8}{6} = \frac{13}{6} \simeq 2/17\ mol.L^{-1}$$

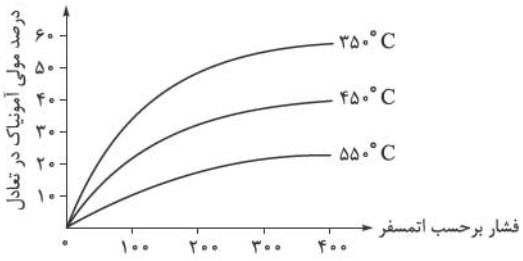
کنکور

در فرایند تعادلی تولید $SO_3(g)$، ۶ مول از هر یک از گازهای SO_2 و O_2 در یک ظرف ده‌لیتری واکنش می‌دهند. پس از خارج‌شدن ۲ مول از فراورده و برقراری دوبارهٔ تعادل، غلظت $SO_3(g)$ به ۰/۲ مول بر لیتر رسیده است. مقدار ثابت تعادل این واکنش چند $L.mol^{-1}$ است؟ (سؤال ۲۶۳ کنکور تجربی ۱۳۹۴ (خارج از کشور))

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۲۵

www.konkur.in

۸۵ **نمودار زیر، تأثیر تغییر دما و فشار را بر درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی فرایند هابر نشان می‌دهد. با توجه به نمودار، کدام مورد زیر درست است؟**



۱) مناسب‌ترین شرایط برای تولید آمونیاک، فشار کم و دمای بالا است.

۲) با افزایش دما، شمار مولکول‌های آمونیاک موجود در مخلوط افزایش می‌یابد.

۳) در دو آزمایش با دما و فشار متفاوت، ممکن نیست درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی یکسان باشد.

۴) در فشار ۳۰۰ atm و دمای $350\,^{\circ}C$، از هر ۱۰۰ مولکول موجود در ظرف، ۵۰ مولکول، آمونیاک است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار، در فشار ۳۰۰ atm و دمای $350\,^{\circ}C$، درصد مولی آمونیاک در تعادل به تقریب برابر ۵۰ است؛ بنابراین می‌توان گفت که از هر ۱۰۰ مول گاز، ۵۰ مول آن آمونیاک است یا از هر ۱۰۰ مولکول گاز، ۵۰ مولکول، آمونیاک می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار، مشخص است که با افزایش فشار، درصد مولی آمونیاک افزایش می‌یابد؛ بنابراین فشار بالا، شرایط مناسب‌تری برای تولید آمونیاک است.

گزینهٔ (۲): با توجه به نمودار، در یک فشار مشخص، هرچه دما بالاتر باشد، درصد مولی آمونیاک کم‌تر خواهد بود. با توجه به گرماده‌بودن فرایند هابر $(N_2 + 3N_2 \rightleftharpoons 2NH_3 + Q)$، افزایش دما، تعادل را در جهت برگشت جابه‌جا می‌کند.

گزینهٔ (۳): مثلاً درصد مولی ۱۰ را در نظر بگیرید. هم در دمای $450\,^{\circ}C$ و فشار حدود ۵۰ atm می‌توان به این درصد مولی رسید و هم در دمای $550\,^{\circ}C$ و فشار حدود ۱۵۰ atm!

www.konkur.in

۸۶ کدام مورد نادرست است؟

۱) آمونیاک، سولفوریک اسید، متانول و بنزین، جزء فراورده‌های پتروشیمیایی هستند که پس از پالایش نفت خام به دست می‌آیند.

۲) خام‌فروشی، تنها برای منابع شیمیایی مانند نفت خام، گاز و زغال‌سنگ و منابع معدنی مانند سنگ آهن، مس و روی صادق است.

۳) انرژی و فناوری شیمیایی از جمله عوامل لازم برای تهیهٔ مواد اولیهٔ مهم و پرکاربرد در صنایع از مواد خام است.

۴) سنتز مواد جدید از مواد خام، به دانش شناخت ساختار و رفتار گروه‌های عاملی، شرایط انجام واکنش و عوامل مؤثر بر انجام واکنش نیاز دارد.

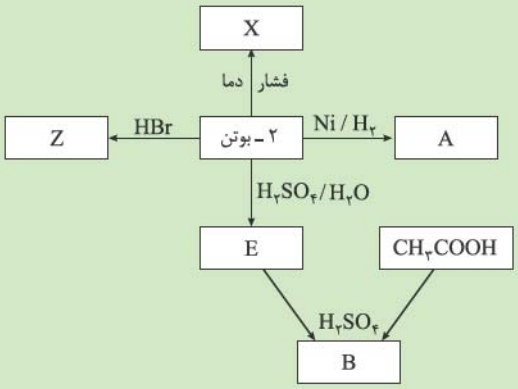
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ خام‌فروشی علاوه بر نفت، برای منابع معدنی مانند سنگ معدن، آهن، مس، روی و حتی منابع کشاورزی مانند پنبه نیز صدق می‌کند.

www.konkur.in

۸۷ نمودار زیر مربوط به سنتز مواد مختلف از ۲ـ بوتن است. کدام موارد زیر درست‌اند؟

$(H=1, C=12, O=16, Br=80 : g.mol^{-1})$



الف) ترکیب E و دی‌اتیل اتر، ایزومر یکدیگرند.

ب) تفاوت جرم مولی B و Z، کم‌تر از $\frac{1}{2}$ جرم مولی A است.

پ) هر مولکول از B دارای ۲۰ پیوند اشتراکی است.

ت) ترکیب X برخلاف Z، ترکیبی سیرشده است.

۱) الف ـ پ

۲) ب ـ ت

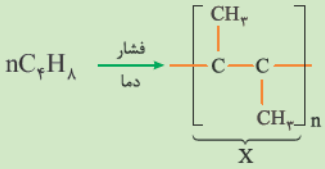
۳) پ ـ ت

۴) الف ـ ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

۲ـ بوتن یک آلکن ۴کربنه با فرمول C_4H_8 است. قبل از هر کاری باید واکنش‌های انجام‌شده در شکل بالا را بنویسیم:

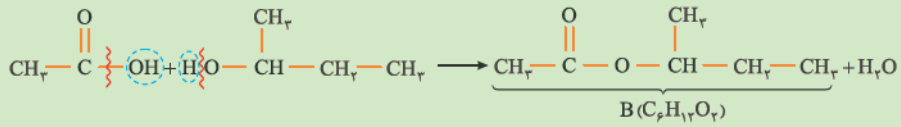


$$C_4H_8 + H_2 \xrightarrow{Ni} \underbrace{C_4H_{10}}_{A}$$

$$C_4H_8 + HBr \rightarrow \underbrace{C_4H_9Br}_{Z}$$

$$C_4H_8 + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} \underbrace{C_4H_{10}O}_{E}$$

از واکنش اتانوئیک اسید CH_3COOH و بوتانول (E)، یک استر ساخته می‌شود.



بررسی عبارت‌ها:

الف) (E) بوتانول یک الکل ۴کربنه با فرمول $C_4H_{10}O$ است که با دی‌اتیل اتر با فرمول $C_4H_{10}O$ ایزومر است، زیرا فرمول مولکولی یکسان و ساختار متفاوت دارند.

ب)

دی‌اتیل‌اتر: $CH_3CH_2-O-CH_2CH_3$

$$Z \rightarrow C_4H_9Br \xrightarrow{\text{جرم‌مولی}} \overset{۴۸}{\cancel{(4\times12)}} + (9\times1) + 80 = 137\ g.mol^{-1}$$

$$B \rightarrow C_6H_{12}O_2 \xrightarrow{\text{جرم‌مولی}} \overset{۷۲}{\cancel{(6\times12)}} + (12\times1) + \overset{۳۲}{\cancel{(2\times16)}} = 116\ g.mol^{-1}$$

جرم مولی Z − جرم مولی B $= 137 - 116 = 21$

جرم مولی A $(C_4H_{10}) \Rightarrow (4\times12) + (10\times1) = 58\ g.mol^{-1} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 29$

$21 < 29$

www.konkur.in

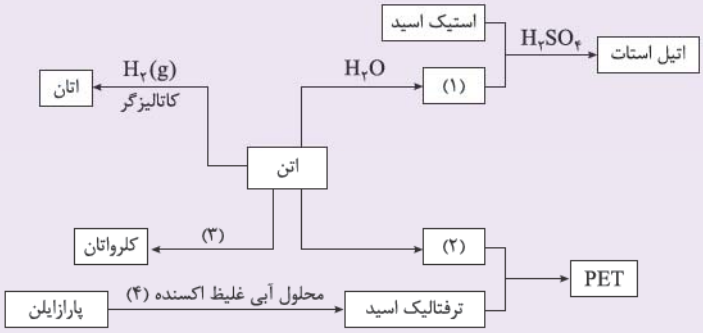
پ)

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{(C\times۴)+(H\times۱)+(O\times۲)}{۲} = \frac{\overset{۲۴}{\cancel{(۶\times۴)}}+(۱۲\times۱)+\overset{۴}{\cancel{(۲\times۲)}}}{۲} = ۲۰$$

ت) X و Z هر دو فاقد پیوند دوگانه و سه‌گانه کربن ـ کربن هستند و هر دو سیرشده محسوب می‌شوند.

شکل زیر، مراحل سنتز برخی ترکیب‌های آلی را نشان می‌دهد. با توجه به آن به پرسش‌ها پاسخ دهید.

(سؤال ۱۵ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)



الف) در جاهای خالی (۱)، (۲) و (۳) نام یا فرمول شیمیایی مادهٔ مورد نظر را بنویسید.

ب) نام یا فرمول شیمیایی اکسندهٔ (۴) را بنویسید.

پ) کدام ماده به عنوان افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد؟ و کدام ترکیب حلال چسب است؟

www.konkur.in

۸۸ با توجه به مطالب کتاب درسی، مولکول حلال چسب و مولکولی که در تهیهٔ افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد، در کدام مورد مشابه هستند؟

($C_4H_8O_2$) (C_2H_5Cl)

۱) سنتز مستقیم از اتن
۲) مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن
۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی
۴) شمار پیوندهای C—H

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

$\overbrace{C_2H_4}^{\text{گاز اتان}} + \underbrace{HCl}_{\text{گاز هیدروژن‌کلرید}} \rightarrow \underbrace{C_2H_5Cl}_{\text{کلرواتان}}$ (افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی)

$\underbrace{C_2H_4O_2}_{\text{استیک‌اسید}} + \underbrace{C_2H_6O}_{\text{اتانول}} \rightarrow \underbrace{C_4H_8O_2}_{\text{اتیل استات}} + \underbrace{H_2O}_{\text{آب}}$

اتیل استات ← حلال چسب

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در هر دو مولکول برابر ۴− است.

$\overset{+1}{H}_5\ \overset{-1}{Cl} \Rightarrow 2C + 5 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{2C = -4}$

$\overset{+1}{H}_8\ \overset{-2}{O}_2 \Rightarrow 4C + 8 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{4C = -4}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

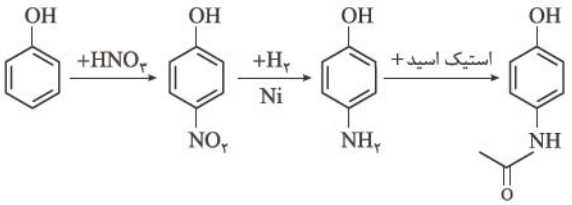
گزینهٔ (۱): با توجه به واکنش تهیهٔ این دو ماده، کلرواتان مستقیم از اتن ولی اتیل استات به صورت غیرمستقیم از اتن، سنتز شده است.

گزینهٔ (۳): کلرواتان به دلیل وجود Cl، ۳ جفت‌الکترون ناپیوندی دارد و اتیل استات به دلیل داشتن دو اتم اکسیژن در ساختارش، ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی دارد.

گزینهٔ (۴): در کلرواتان، ۵ پیوند C—H و در اتیل استات، ۸ پیوند C—H وجود دارد.

www.konkur.in

۸۹ با توجه به مراحل سنتز استامینوفن، کدام مطلب نادرست است؟



۱) فرمول مولکولی استامینوفن، به صورت $C_8H_9NO_2$ بوده و دارای گروه‌های هیدروکسیل و آمیدی است.

۲) سنتز دارو، شامل سه مرحله است که در هر سه مرحله، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در حلقهٔ آروماتیک تغییر می‌کند.

۳) اگر بازده مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب ۸۰، ۸۰ و ۵۰ درصد باشد، بازدهٔ کلی فرایند، ۳۲ درصد است.

۴) مرحلهٔ دوم این سنتز، دارای انرژی فعال‌سازی بالایی است و برای کاهش آن از کاتالیزگر نیکل استفاده می‌شود.

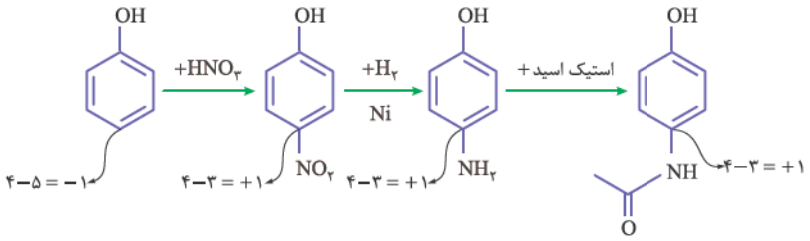
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بیایید گزینه‌ها را به ترتیب بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): با توجه به ساختار داده‌شده، فرمول مولکولی استامینوفن به صورت $C_8H_9NO_2$ است. این ترکیب دارای گروه‌های هیدروکسیل ($-OH$) و آمیدی ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-\overset{H}{\overset{|}{N}}-$) است.

گزینهٔ (۲): *سه مرحله‌ای بودن فرایند سنتز که از روی شکل‌ها معلوم‌ه!* بریم سراغ محاسبهٔ عدد اکسایش اتم‌های کربنی که گروه‌های متصل به آن‌ها تغییر کرده‌اند. با توجه به این‌که کربن، ۴ الکترون ظرفیتی دارد و خصلت نافلزی آن از هیدروژن، بیشتر و از نیتروژن کم‌تر است، خواهیم داشت:



فقط در مرحلهٔ اول، عدد اکسایش کربن تغییر کرده است.

گزینهٔ (۳): در یک واکنش چندمرحله‌ای، بازده کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

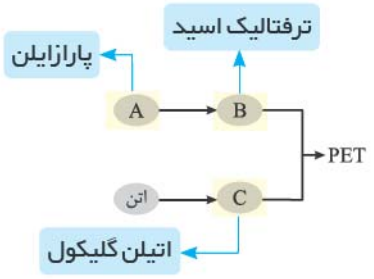
$$\text{بازده کلی} = (\frac{\text{بازده مرحلهٔ ۱}}{۱۰۰} \times \frac{\text{بازده مرحلهٔ ۲}}{۱۰۰} \times \frac{\text{بازده مرحلهٔ ۳}}{۱۰۰} \times \cdots) \times ۱۰۰$$

$$\text{بازده کلی} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۰}{۱۰۰} \times \frac{۵۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۳۲$$

گزینهٔ (۴): *کاملاً درسته* زیرا کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی واکنش را کاهش می‌دهد.

www.konkur.in

۹۰ با توجه به شکل زیر که مربوط به فرایند کلی تولید PET می‌باشد، کدام موارد درست است؟



الف) شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی B با شمار اتم‌های هیدروژن در مولکول پروپن برابر است.

ب) اگر در تبدیل A به B، از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات استفاده شود، بازده واکنش بالاتر از زمانی است که از O_2 و کاتالیزگر استفاده می‌شود.

پ) بر اثر واکنش C با استیک اسید، می‌توان دی‌استر تولید کرد.

ت) تفاوت جرم مولی B و معروف‌ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک، برابر جرم مولی CO_2 است.

۱) الف ـ ت
۲) ب ـ پ
۳) الف ـ پ ـ ت
۴) الف ـ ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

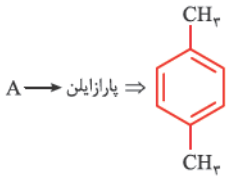
(واکنش از نوع اکسایش ـ کاهش است.) ترفتالیک اسید ($C_8H_6O_4$) + پارازایلن (C_8H_{10}) → محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات

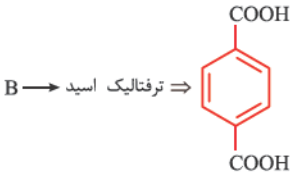
(واکنش از نوع اکسایش ـ کاهش است.) اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) → محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات + گاز اتن (C_2H_4)

(واکنش از نوع اکسایش ـ کاهش نیست.) ترفتالیک اسید ($C_8H_6O_4$) + اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) → $\{C_{10}H_8O_4\}_n$ (PET) + آب

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست‌اند.





C ⟶ اتیلن گلیکول ⇒ HO—CH_2—CH_2—OH

بررسی عبارت‌ها:

الف) تعداد اتم‌های هیدروژن در ترفتالیک اسید (B) برابر با ۶ و در پروپن که یک آلکن ۳کربنه با فرمول C_3H_6 است نیز برابر ۶ می‌باشد.

ب) اکسایش پارازایلن (A) به ترفتالیک اسید (B)، *کاری بس دشوار و طاقت‌فرساست!* و با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات، باز هم شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین نمی‌شود. انرژی فعال‌سازی این واکنش زیاد است. با افزایش دما هم، اگرچه شرایط انجام واکنش تأمین می‌شود اما **بازده هم‌چنان مطلوب نیست.**

تحقیقات شیمی‌دان‌ها نشان می‌دهد که با استفاده از اکسیژن هوا و کاتالیزگرهای مناسب نیز می‌توان پارازایلن را به ترفتالیک اسید تبدیل کرد. این روش *انگاری* آسان‌تر از روش قبل است و بازده بالاتری دارد.

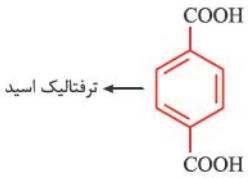
پ) با توجه به این‌که اتیلن گلیکول (C) یک الکل دوعاملی است، هر مولکول آن با دو مولکول اسید واکنش می‌دهد:

آب ۲ + دی‌استر ← استیک اسید ۲ + اتیلن گلیکول

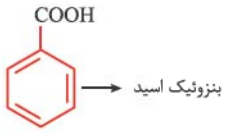
ت) معروف‌ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک، بنزوئیک اسید است.

www.konkur.in

با توجه به ساختار و فرمول مولکولی دو ترکیب، اختلاف جرم مولی آن‌ها برابر با جرم مولی CO_2 است.



$C_8H_6O_4$



$C_7H_6O_2$

$$C_8H_6O_4 - C_7H_6O_2 = CO_2$$

www.konkur.in

۹۱ کدام مورد نادرست است؟

۱) پلاستیک‌ها به دلیل چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان‌بودن و مقاومت در برابر خوردگی، کاربردهای وسیعی در زندگی دارند.

۲) PET برخلاف پلیمرهای طبیعی، ماندگاری زیادی دارد و در طبیعت به کندی تجزیه می‌شود.

۳) در بازیافت شیمیایی PET با متانول، مونومرهای اولیهٔ این پلیمر بازتولید می‌شوند.

۴) جمع‌آوری، شست‌وشو، ذوب‌کردن و ساخت ابزارهای جدید، مراحل بازیافت پلی‌اتیلن ترفتالات هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- پلاستیک‌ها را می‌توان یکی از نتایج خلاقیت و نوآوری بشر دانست.

پلاستیک‌ها
- از ویژگی‌های آن‌ها می‌توان به چگالی کم، نفوذ ناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان‌بودن و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.
- امروزه سالانه حدود ۴۰۰ میلیون تن از آن‌ها در جهان تولید می‌شود.
- به طور معمول، زیست‌تخریب‌ناپذیرند و برای مدت طولانی در طبیعت باقی می‌مانند.

- یکی از مواد پلاستیکی قابل بازیافت، پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) است. برای این منظور، ابتدا باید آن‌ها را جداگانه جمع‌آوری و سپس با انجام فرایندهای فیزیکی و شیمیایی، به مواد قابل استفاده تبدیل کرد. دو راه برای بازیافت وسایل پلاستیکی وجود دارد:

۱) این مواد را پس از شست‌وشو و تمیزکردن، ذوب کرده و دوباره از آن‌ها برای تولید وسایل و ابزار دیگر استفاده می‌کنند و یا این‌که آن‌ها را خرد کرده و به تکه‌های کوچکی به نام **پَرک** تبدیل و در تولید مواد پلاستیکی دیگر استفاده می‌کنند.

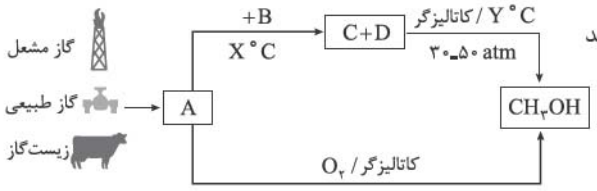
۲) پسماندها را به مونومرهای سازنده یا مواد اولیهٔ مفید و ارزشمند تبدیل می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در بازیافت PET با متانول، مواد مفیدی (نه لزوماً مونومرهای اولیهٔ آن) برای تولید پلیمرهای دیگر تولید می‌شود.

www.konkur.in

۹۲ با توجه به شکل که به روش‌های تولید متانول مربوط است، اگر نقطهٔ جوش C از D بالاتر باشد، کدام مطلب درست است؟

H_2 ← ? → CO



۱) X، دمای کم‌تری نسبت به Y است.

۲) گاز C را می‌توان از واکنش هیدروکلریک اسید با فلز منیزیم نیز تهیه کرد.

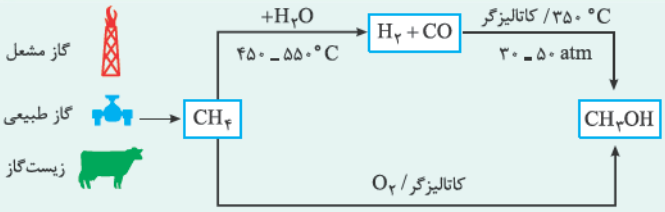
۳) شمار پیوندهای کووالانسی A دوبرابر B است و B یکی از محصولات سوختن کامل متانول است.

H_2O

۴) در دمای اتاق گازهای نیتروژن و D با هم واکنش می‌دهند و نقطهٔ جوش فراورده از نقطهٔ جوش A بالاتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box



پاسخ خیلی تشریحی ✔

$A \rightarrow CH_4 \xrightarrow[\text{کووالانسی}]{\text{تعداد پیوند}} ۴$

$B \rightarrow H_2O \xrightarrow[\text{کووالانسی}]{\text{تعداد پیوند}} ۲$

واکنش سوختن متانول: $CH_3OH + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): گسترهٔ دمایی X، ۵۵۰ °C ـ ۴۵۰ اما دمای Y، ۳۵۰ °C است.

گزینهٔ (۲): با توجه به صورت سؤال که نقطهٔ جوش C را بیشتر از D اعلام کرده است، پس C نشان‌دهندهٔ CO و D نشان‌دهندهٔ H_2 است، زیرا CO به دلیل قطبی‌بودن، نقطهٔ جوش بالاتری از H_2 ناقطبی دارد.

از واکنش HCl با فلز Mg، گاز H_2 تولید می‌شود نه گاز CO!

گزینهٔ (۴): گاز H_2 یا همان D در دمای اتاق با N_2 واکنش نمی‌دهد، زیرا انرژی فعال‌سازی واکنش زیاد است.

www.konkur.in

۹۳ درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیشتری از واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل شوند.

۲) از ترفتالیک اسید می‌توان به عنوان مونومر در تولید برخی از پلی‌استرها و پلی‌آمیدها استفاده کرد.

۳) از زیست‌گاز می‌توان به عنوان مادهٔ اولیهٔ فرایند بازیافت شیمیایی PET استفاده کرد.

۴) شمار اتم‌های کربن مولکول پارازایلن و مولکول استیرن، برابرند.

C_8H_{10} — C_8H_8

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

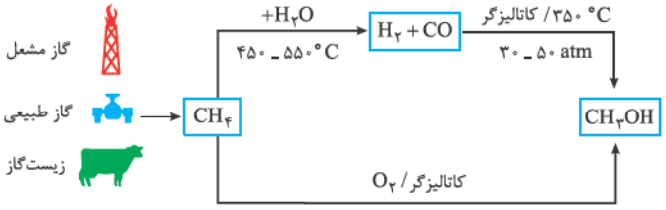
گزینهٔ (۱) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

یک واکنش شیمیایی، هنگامی ازدیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراوردهٔ سودمند تبدیل شوند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): یکی از مونومرهای سازندهٔ پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، یک کربوکسیلیک اسید دوعاملی است که ترفتالیک اسید با توجه به دارابودن دو گروه کربوکسیل (COOH —) در ساختارش می‌تواند مونومر سازندهٔ پلی‌استر و پلی‌آمید باشد.

گزینهٔ (۳): PET در شرایط مناسب می‌تواند با متانول واکنش دهد و به مواد مفیدی تبدیل شود. این مواد را می‌توان برای تولید پلیمرها به کار برد. اما برای این کار سالانه به مقدار زیادی متانول نیاز است. متانول مورد نیاز را می‌توان با یکی از روش‌های زیر تهیه کرد که زیست‌گاز هم یکی از مواد اولیهٔ مورد نیاز می‌تواند باشد.



گزینهٔ (۴): ساختار پارازایلن و استیرن به صورت زیر است:

(استیرن) (پارازایلن)

هر دو، ۸ کربن در ساختارشان دارند.

www.konkur.in

۹۴ کدام مورد دربارهٔ سلولز و نشاسته، نادرست است؟

۱) هر دو، جزء درشت‌مولکول‌های طبیعی بوده و شمار اتم‌های سازندهٔ هر مولکول از آن‌ها، زیاد است.

۲) مولکول‌های نشاسته در محیط گرم و مرطوب، به سرعت به مونومرهای سازندهٔ خود، تبدیل می‌شود.

۳) الیاف پنبه از سلولز و سه عنصر کربن، هیدروژن و اکسیژن ساخته شده است.

۴) هر دو پلیمر مانند پلی‌سیانواتن، فقط از یک نوع مونومر ساخته شده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

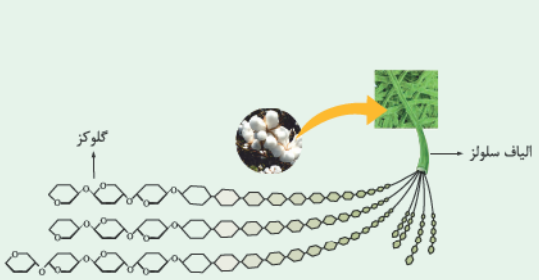
مولکول‌های نشاسته در شرایط مناسب مانند محیط مرطوب با کاتالیزگر یا محیط گرم و مرطوب، به **آرامی** به گلوکز تجزیه شده و مزهٔ شیرین ایجاد می‌کنند.

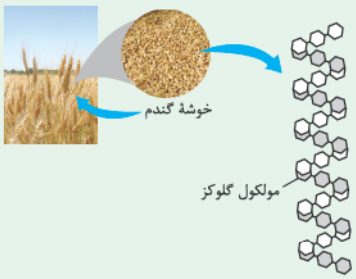
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نکته

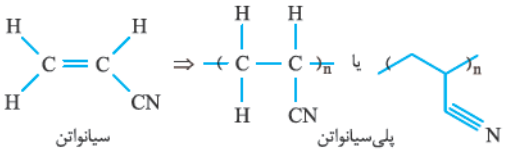
سلولز و نشاسته هر دو، جزء **درشت‌مولکول‌های طبیعی** هستند که از اتصال مولکول‌های **گلوکز** به یکدیگر ساخته شده‌اند؛ اما نحوهٔ اتصال مولکول‌های گلوکز در این دو درشت‌مولکول با هم تفاوت دارد. با توجه به شکل‌های زیر، *واضح و مبرهن است!* که سلولز به صورت خطی است در حالی که مولکول نشاسته *پیچ تو پیچه!* (حالت مارپیچی دارد.) به دلیل همین تفاوت ساختار، خواص مولکول‌های نشاسته و سلولز متفاوت است.





گزینهٔ (۳): پنبه از الیاف (مولکول‌های) سلولز تشکیل شده و هر یک از الیاف سلولز، *خودش!* زنجیره‌ای بسیار بلند است که از اتصال تعداد بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر ساخته می‌شود. گلوکز $(C_6H_{12}O_6)$ از عنصرهای C، H و O تشکیل شده است.

گزینهٔ (۴): سلولز و نشاسته، هر دو از مونومر گلوکز درست شده و پلی‌سیانواتن هم فقط از مونومر سیانواتن تشکیل شده است.



www.konkur.in

۹۵ **اگر در مولکول وینیل کلرید به جای کلر، ..... قرار گیرد، به ترکیبی تبدیل می‌شود که ..... .**

$(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) گروه متیل ـ برای سوختن کامل هر مول از آن، ۴ مول گاز اکسیژن لازم است.

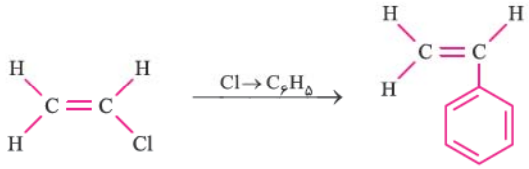
۲) حلقهٔ بنزن ـ درصد جرمی کربن در آن دوازده برابر درصد جرمی هیدروژن آن است.

۳) گروه CN ـ بر اثر بسپارش به ترکیبی تبدیل می‌شود که در تولید سرنگ کاربرد دارد.

۴) اتم فلوئور ـ بین مولکول‌های آن مانند مولکول آمونیاک، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با جایگزین‌کردن بنزن به جای کلر در ساختار وینیل کلرید (کلرو اتن) به ساختار استیرن می‌رسیم.

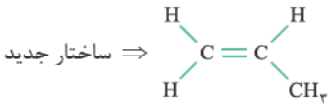


وینیل کلرید (کلرو اتن) — (استیرن) C_8H_8

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{\frac{\text{جرم C}}{\text{جرم کل}}}{\frac{\text{جرم H}}{\text{جرم کل}}} = \frac{(8\times C)}{(8\times H)} = \frac{8\times 12}{8\times 1} = 12$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

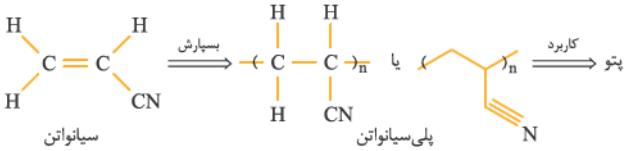
گزینهٔ (۱):



واکنش سوختن: $2C_3H_6 + 9O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

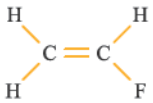
به ازای سوختن هر مول از آن، ۴/۵ مول گاز اکسیژن لازم است.

گزینهٔ (۳): پس از جایگزین‌کردن CN به جای کلر به ترکیب زیر تبدیل می‌شود:



سیانواتن — پلی‌سیانواتن

گزینهٔ (۴): در ترکیب حاصل، F به کربن متصل است و نه هیدروژن! به همین دلیل توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را ندارد.



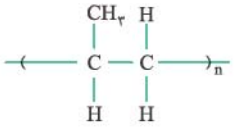
www.konkur.in

۹۶ در یک نمونه از پلی‌پروپن، جرم اتم‌های کربن، ۶ گرم بیشتر از جرم اتم‌های هیدروژن است. جرم این نمونه چند گرم است؟ $(H = ۱, C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۲ ۲) ۴/۲
۳) ۵/۰ ۴) ۸/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

ساختار پلی‌پروپن 

$$(C_۳H_۶)_n \Rightarrow \begin{cases} \text{جرم کربن} = (۳\times ۱۲\times n) \\ \text{جرم هیدروژن} = (۶\times ۱\times n) \end{cases}$$

$$\text{جرم هیدروژن} - \text{جرم کربن} = ۶$$

$$۳۶n - ۶n = ۶ \rightarrow ۳۰n = ۶ \Rightarrow n = \frac{۱}{۵}\,mol$$

$$\text{جرم پلی‌پروپن} = \text{جرم واحد تکرارشونده} \times n = [\overbrace{(۳\times ۱۲)}^{C} + \overbrace{(۱\times ۶)}^{H}]\times n = ۴۲\times\frac{۱}{۵} = ۸/۴\,g$$

یه جور دیگه

$$mg\,(C_۳H_۶)_n \times \frac{۱mol\,(C_۳H_۶)_n}{۴۲\,ng\,(C_۳H_۶)_n} \times \frac{۳۰\,ng\ (\text{تفاوت جرم کربن و هیدروژن})}{۱mol\,(C_۳H_۶)_n} = ۶g \Rightarrow m = \frac{۶\times ۴۲}{۳۰} = ۸/۴\,g$$

www.konkur.in

۹۷ در واکنش پلیمری‌شدن اتن، جرم مولی میانگین پلیمر به مقدار کاتالیزگرهای به‌کاررفته بستگی دارد. اگر در واکنش بسپارش اتن به ازای مصرف هر گرم کاتالیزگر دارای آلومینیم به تقریب ۳/۱۵ گرم کاتالیزگر دارای تیتانیم مصرف شود، شمار میانگین واحدهای تکرارشونده (n) برای پلیمر ایجادشده کدام است؟ (کاتالیزگرهای به‌کاررفته دارای فرمول‌های $TiCl_4$ (با جرم مولی ۱۹۰ گرم) و $AlCl(C_2H_5)_2$ (با جرم مولی ۱۲۰/۵ گرم) می‌باشند.)

شمار مول کاتالیزگر حاوی تیتانیم	شمار مول کاتالیزگر حاوی آلومینیم	جرم مولی پلیمر ($g.mol^{-1}$)
۱	۲	۲۹۴۰۰۰
۱	۱	۲۸۲۸۰۰
۱	۰/۵	۲۱۰۰۰
۱	۰/۲	۳۰۸۰۰

۱) ۱۰۵۰۰ ۲) ۱۰۱۰۰

۳) ۷۵۰ ۴) ۱۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فرض می‌کنیم یک گرم کاتالیزگر دارای Al و ۳/۱۵ گرم کاتالیزگر دارای Ti داریم:

$$1\ g\ AlCl(C_2H_5)_2 \times \frac{1\ mol\ AlCl(C_2H_5)_2}{120/5\ g\ AlCl(C_2H_5)_2} = \frac{1}{120/5}\ mol\ AlCl(C_2H_5)_2$$

$$3/15\ g\ TiCl_4 \times \frac{1\ mol\ TiCl_4}{190\ g\ TiCl_4} = \frac{3/15}{190}\ mol\ TiCl_4$$

نسبت مولی کاتالیزگر دارای آلومینیم به کاتالیزگر دارای تیتانیم برابر است با:

$$\frac{\frac{1}{120/5}}{\frac{3/15}{190}} \simeq 0/5$$

پس با توجه به جدول، جرم مولی پلی‌اتن برابر ۲۱۰۰۰ گرم است.

$$\text{جرم مولی اتن} = (2\times12)+(4\times1) = 28\ g.mol^{-1}$$

$$n = \frac{\text{جرم مولی پلیمر}}{\text{جرم مولی مونومر}} = \frac{21000}{28} = 750$$

www.konkur.in

۹۸ کدام موارد زیر دربارهٔ الکل‌های یک‌عاملی سیرشده و غیرحلقوی (ROH)، درست است؟

$(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، خاصیت چربی‌دوستی افزایش می‌یابد.

ب) در هر مولکول از آن‌ها با n اتم کربن، $\frac{3n+2}{2}$ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پ) نیروی بین مولکولی غالب در الکلی با جرم مولی $60\ g.mol^{-1}$، پیوند هیدروژنی است.

C_3H_8O

ت) اولین عضو این خانواده بر اثر گزش مورچهٔ سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش می‌شود.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ

۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) **در الکل‌های کوچک و تا پنج اتم کربن (یعنی از متانول تا پنتانول)، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه می‌کند و مولکول در مجموع قطبی است.** به همین دلیل سهم بیشتر نیروی بین مولکولی الکل‌ها تا ۵ اتم کربن مربوط به پیوند هیدروژنی است؛ در نتیجه این الکل‌ها به خوبی در آب حل می‌شوند. در الکل‌های بزرگ‌تر، سهم بیشتر نیروی بین مولکولی از نوع وان‌درووالسی است؛ پس این الکل‌ها در آب حل نشده *به پاش!* در چربی حل می‌شوند.

با افزایش شمار اتم‌های کربن الکل‌ها ← افزایش انحلال‌پذیری در چربی و کاهش انحلال‌پذیری در آب ← افزایش چربی‌دوستی یا کاهش چربی‌گریزی و کاهش آب‌دوستی یا افزایش آب‌گریزی

ب) فرمول عمومی الکل‌های سیرشده و غیرحلقوی، $C_nH_{2n+2}O$ است.

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی (کوالانسی) در یک ترکیب آلی} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های N}\times 3)+(\text{تعداد اتم‌های O}\times 2)+(\text{تعداد اتم‌های H}\times 1)+(\text{تعداد اتم‌های C}\times 4)}{2}$$

تعداد پیوند اشتراکی در الکلی با n اتم کربن:

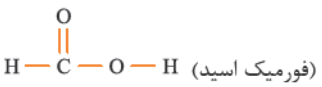
$$\frac{(n\times 4)+(2n+2)+(1\times 2)}{2}=\frac{6n+4}{2}=3n+2$$

پ) فرمول عمومی الکل‌های سیرشده و غیرحلقوی به صورت $C_nH_{2n+2}O$ است.

جرم مولی الکل: $(n\times 12)+2n+2+16=14n+18=60 \Rightarrow 14n=42 \Rightarrow n=3$

نیروی بین مولکولی در الکل سه‌کربنه از نوع هیدروژنی است.

ت) اولین و **ساده‌ترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها (متانوئیک اسید)** بر اثر گزش مورچهٔ سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود:



متانوئیک اسید (فورمیک اسید)

www.konkur.in

۹۹ اگر A، آشناترین عضو خانوادهٔ اسیدهای آلی و B، استر عامل طعم و بوی آناناس باشد، تفاوت جرم مولی A و B با جرم مولی کدام ماده برابر است؟

استیک‌اسید $(C_2H_4O_2)$ ← $C_6H_{12}O_2$

۱) بوتن
۲) بوتان
۳) پنتن
۴) پنتان

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها، اتانوئیک اسید با فرمول $C_2H_4O_2$ است.

بو و طعم آناناس، ناشی از استری به نام اتیل بوتانوات $(C_6H_{12}O_2)$ است.

با کم‌کردن فرمول دو ماده از یکدیگر، خواهیم داشت:

$$C_6H_{12}O_2 - C_2H_4O_2 = C_4H_8$$

بوتن $\rightarrow C_4H_8$

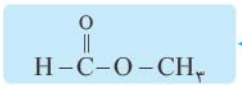
بوتان $\rightarrow C_4H_{10}$

پنتن $\rightarrow C_5H_{10}$

پنتان $\rightarrow C_5H_{12}$

www.konkur.in

۱۰۰ کدام مورد نادرست است؟



۱) جرم مولی گلوکز، ۳ برابر جرم مولی ساده‌ترین استر است.

۲) ممکن است در ساختار یک پلیمر، هیچ اتم هیدروژنی وجود نداشته باشد.

۳) در کربوکسیلیک اسیدها، اتم کربن گروه کربوکسیل، حداقل به یک اتم کربن دیگر متصل است.

۴) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب تغییر محسوسی ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

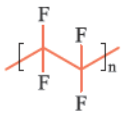
فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدها به صورت $R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ است که به جای R می‌توان هم هیدروژن و هم زنجیر کربنی قرار داد؛ بنابراین در نخستین عضو این خانواده $(H-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH)$، اتم کربن گروه کربوکسیل به اتم کربن دیگری متصل نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فرمول مولکولی گلوکز، $C_6H_{12}O_6$ و فرمول ساده‌ترین استر به صورت $C_2H_4O_2$ می‌باشد.

نوع اتم‌ها در این دو ترکیب یکسان است و تعداد اتم‌های C، O و H در گلوکز سه برابر تعداد همین اتم‌ها در استر است؛ بنابراین جرم مولی گلوکز سه برابر استر خواهد بود.

گزینهٔ (۲): مثلاً در ساختار تفلون، اتم هیدروژن وجود ندارد.



$\Rightarrow$ پلی‌تترافلوئورو اتن یا تفلون

گزینهٔ (۴): آلکان‌های راست‌زنجیر، ناقطبی و در آب نامحلول هستند.

www.konkur.in

۱۰۱ **اگر جرم مولی الکل و اسید سازندهٔ استری با فرمول مولکولی $C_9H_{18}O_2$ برابر باشد، کدام مورد درست است؟ (استر، یک‌عاملی، سیرشده و غیرحلقوی است.)**

۱) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی الکل و اسید برابر ۲ است.

۲) الکل سازنده به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

۳) نام استر می‌تواند پنتیل بوتانوات باشد.

۴) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اسید سازنده برابر ۱۷ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در تهیهٔ استری با فرمول $C_9H_{18}O_2$، الکل و اسید با فرمول عمومی زیر شرکت کرده‌اند:

الکل $\rightarrow C_bH_{2b+2}O$

اسید $\rightarrow C_aH_{2a}O_2$

هنگام تبدیل‌شدن به استر، یک مولکول H_2O حذف می‌شود:

$$\text{فرمول کلی استر} \Rightarrow C_{a+b}H_{(2b+2+2a-2)}O_{(3-1)} \Rightarrow C_{a+b}H_{2(a+b)}O_2 \Rightarrow C_9H_{18}O_2$$

$$a+b=9$$

$$\text{جرم مولی اسید} = \underbrace{(a\times12)}_{C}+\underbrace{(2a\times1)}_{H}+\underbrace{(16\times2)}_{O}=14a+32$$

$$\text{جرم مولی الکل} = \underbrace{(b\times12)}_{C}+\underbrace{((2b+2)\times1)}_{H}+\underbrace{(16\times1)}_{O}=14b+18$$

طبق صورت سؤال، جرم مولی الکل با اسید برابر است:

$$14a+32=14b+18 \Rightarrow 14a-14b=-14$$

$$14(a-b)=-14 \Rightarrow a-b=-1 \Rightarrow b=a+1$$

از طرفی می‌دانیم که $a+b=9$، پس:

$$a+(a+1)=9 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$$

$$\text{فرمول الکل} \Rightarrow C_bH_{2b+2}O \Rightarrow C_5H_{12}O$$

$$\text{فرمول اسید} \Rightarrow C_aH_{2a}O_2 \Rightarrow C_4H_8O_2$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اختلاف تعداد هیدروژن مولکول الکل و اسید برابر با $12-8=4$ است.

گزینهٔ (۲): فقط الکل‌های ۱، ۲ و ۳ کربنه به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

گزینهٔ (۳): با توجه به فرمول اسید و الکل که به ترتیب ۴ و ۵ کربنه هستند، نام استر می‌تواند پنیل بوتانوات باشد.

نام استر ← بر وزن آلکیل آلکانوآت

براساس: تعداد C الکل تعداد C اسید

گزینهٔ (۴): تعداد پیوند اشتراکی در ساختار اسید از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{(C\times4)+(H\times1)+(O\times2)}{2}=\frac{(4\times4)+(8\times1)+(2\times2)}{2}=\frac{16+8+4}{2}=14$$

www.konkur.in

یه‌جور دیگه

برای پیداکردن الکل و اسید سازندهٔ استر به طوری که جرم مولی آن‌ها با هم برابر باشد، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\text{استر} + \overbrace{\text{آب}}^{H_2O:\ 18\ g.mol^{-1}} = \text{اسید} + \text{الکل}$$

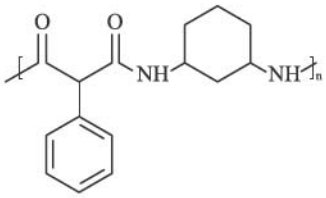
$$C_9H_{18}O_2:\ 158\ g.mol^{-1}$$

$$\underbrace{\text{جرم‌مولی الکل}}_{x} + \underbrace{\text{جرم‌مولی اسید}}_{x} = 158 + 18 = 176\ g.mol^{-1}$$

$$2x = 176 \Rightarrow x = 88 \begin{cases} \text{الکل: } C_xH_{2x+2}O = 88 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow C_5H_{12}O \\ \text{اسید: } C_yH_{2y}O_2 = 88 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C_4H_8O_2 \end{cases}$$

www.konkur.in

۱۰۲ اختلاف تعداد پیوندهای کووالانسی در مولکول دی‌آمین سازندهٔ پلیمر زیر با تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در دی‌اسید سازندهٔ این پلیمر کدام است؟



۱) ۱۴

۲) ۲۴

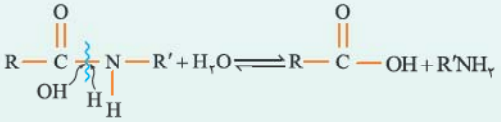
۳) ۱۸

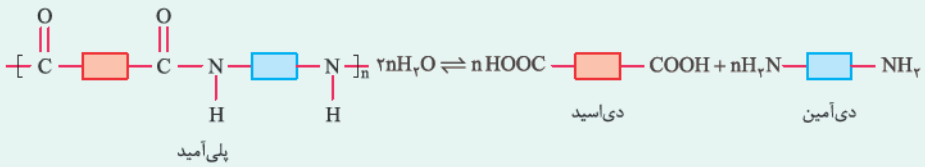
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

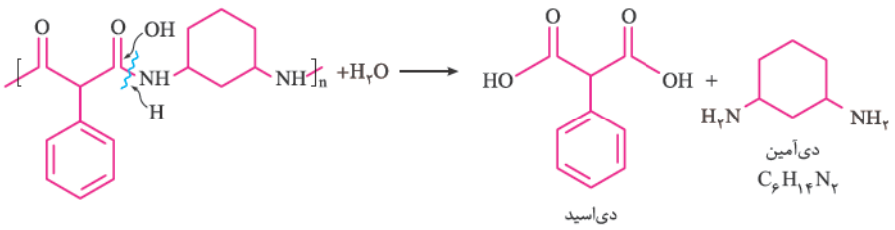
درس Box

پلی‌آمیدها می‌توانند در شرایط مناسب با آب واکنش دهند و به مونومرهای سازندهٔ خود یعنی کربوکسیلیک اسید دوعاملی (دی‌اسید) و آمین دوعاملی (دی‌آمین) تبدیل شوند.





پاسخ خیلی تشریحی ✔



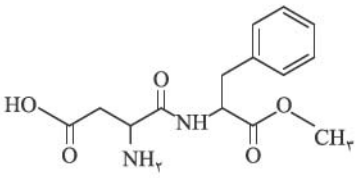
$$\text{تعداد پیوند در دی‌آمین} = \frac{(C\times 4)+(H\times 1)+(N\times 3)}{2} = \frac{(6\times 4)+(14\times 1)+(2\times 3)}{2} = 22$$

$$\text{تعداد جفت‌الکترون ناپیوندی دی‌اسید} = (O\times 2) = 4\times 2 = 8$$

$$\text{اختلاف} = 22-8 = 14$$

www.konkur.in

۱۰۳ آسپارتام یک شیرین‌کنندهٔ مصنوعی است که در صنایع نانوایی و محصولات قنادی به کار می‌رود. با توجه به ساختار این ماده، کدام عبارت‌ها درست‌اند؟ ($H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$)



الف) بر اثر آبکافت آن متانول تولید می‌شود.

ب) جرم مولی آن $292\ g.mol^{-1}$ است و دارای یک حلقهٔ آروماتیک است.

پ) دارای دو گروه آمینی است و بین مولکول‌های آن پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

ت) نسبت شمار الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول آن برابر ۷/۵ است.

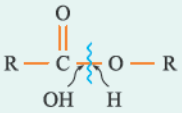
ث) سه اتم کربن در آن دارای عدد اکسایش صفر هستند.

۱) الف ـ ب ـ ث
۲) ب ـ پ ـ ت
۳) الف ـ ت
۴) الف ـ ت ـ ث

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

برای تشخیص کربوکسیلیک اسید و الکل سازندهٔ یک استر، ابتدا پیوند یگانهٔ بین اتم کربن و اکسیژن را شکسته، سپس به اتم کربن، OH اضافه می‌کنیم تا کربوکسیلیک اسید اولیه به دست آید. به همین صورت به اکسیژن، H اضافه می‌کنیم تا الکل اولیه حاصل شود؛ یعنی *این‌طوری*:



نکته

برای محاسبهٔ تعداد اتم‌های هیدروژن و تعداد پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیبی با } n \text{ اتم کربن} = (2n+2) - (\text{تعداد پیوندهای دوگانه} \times 2) - (\text{تعداد حلقه‌ها} \times 2) - (\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه} \times 4) + (\text{تعداد اتم‌های نیتروژن} \times 1)$$

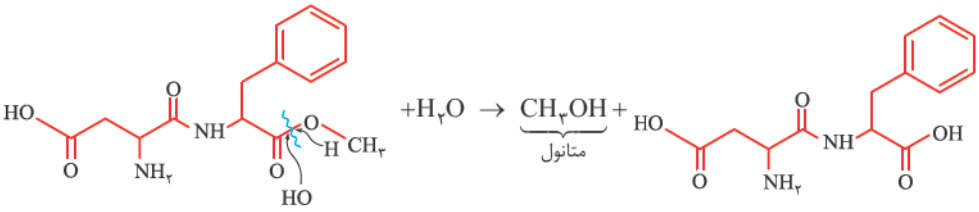
$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی (کووالانسی) در یک ترکیب آلی} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های C} \times 4) + (\text{تعداد اتم‌های H} \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های O} \times 2) + (\text{تعداد اتم‌های N} \times 3)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف»، «ت» و «ث» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از آبکافت آسپارتام، طبق واکنش زیر متانول تولید می‌شود:



ب) برای محاسبهٔ جرم مولی آسپارتام، ابتدا فرمول مولکولی آن را پیدا می‌کنیم. با توجه به فرمول ذکرشده، تعداد H به روش زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد C} = 14$$

$$\text{تعداد H} = ((2\times\underbrace{14}_{\text{تعداد C}})+2) - \underbrace{(2\times6)}_{\text{پیوند دوگانه}} - \underbrace{(2\times1)}_{\text{حلقه}} + \underbrace{(2\times1)}_{\text{نیتروژن}} = 18$$

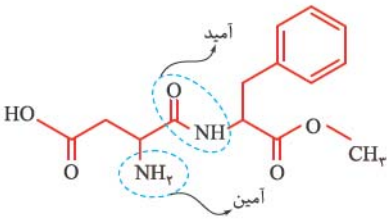
$$\Rightarrow \text{فرمول: } C_{14}H_{18}N_2O_5$$

$$\text{جرم مولی} = \overbrace{(14\times12)}^{168} + \overbrace{(18\times1)}^{18} + \overbrace{(2\times14)}^{28} + \overbrace{(5\times16)}^{80} = 294\ g.mol^{-1}$$

آسپارتام با جرم مولی $294\ g.mol^{-1}$، دارای یک حلقه آروماتیک (بنزنی) است.

www.konkur.in

پ) آسپارتام دارای یک گروه آمین و یک گروه آمید است و به دلیل داشتن OH و NH، قادر به تشکیل پیوند هیدروژنی است:



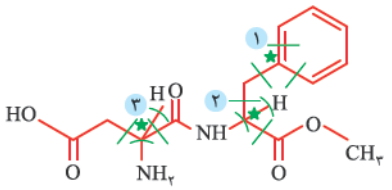
ت)

$$\text{تعداد جفت‌الکترون پیوندی} = \frac{\overbrace{(۱۴\times۴)}^{C}+\overbrace{(۱۸\times۱)}^{H}+\overbrace{(۲\times۳)}^{N}+\overbrace{(۵\times۲)}^{O}}{۲} = ۴۵ \Rightarrow \text{تعداد الکترون پیوندی} = ۴۵\times۲ = ۹۰$$

$$\text{تعداد جفت‌الکترون ناپیوندی} = (O\times۲)+(N\times۱) = (۵\times۲)+(۲\times۱) = ۱۲$$

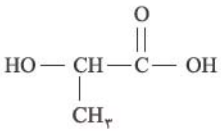
$$\frac{\text{شمار الکترون پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون ناپیوندی}} = \frac{۹۰}{۱۲} = ۷/۵$$

ث) عدد اکسایش کربن‌های ستاره‌دار صفر (۰ = ۴ − ۴) است:



www.konkur.in

۱۰۴ با توجه به شکل زیر که فرمول ساختاری لاکتیک اسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



۱) برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک‌اسید، نخست نشاستهٔ موجود در فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر را به این ماده تبدیل می‌کنند.

۲) پلیمر حاصل از آن، پلیمر سبز بوده و در تهیهٔ ظروف پلاستیکی یک‌بارمصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله و کیسهٔ پلاستیکی و ... کاربرد دارد.

۳) پلیمر حاصل از آن، پلی‌استر بوده و برای تهیهٔ آن نیازی به کربوکسلیک اسید دوعاملی و الکل دوعاملی نیست.

۴) در فرایند پلیمری‌شدن آن، مجموع جرم مونومرها با جرم پلیمر حاصل برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

پلیمرهای سبز را به طور معمول از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند.

پلی‌لاکتیک اسید نمونه‌ای از پلیمرهای سبز است. این پلیمر، یک **پلی‌استر** ساختگی است که *انواع و اقسام!* ظرف‌های پلاستیکی یک‌بارمصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله، کیسهٔ پلاستیکی و ... را از آن تولید می‌کنند و *روزبه‌روز!* هم کاربردهای آن بیشتر می‌شود. این پلاستیک‌ها به دلیل استفاده از پلیمر سبز، امکان تبدیل‌شدن به کود را دارند؛ به همین دلیل ردپای کوچک‌تری در محیط‌زیست از خود برجای می‌گذارند.

پلی‌لاکتیک اسید را می‌توان از یک ترکیب متفاوت به نام لاکتیک‌اسید که دارای هر دو نوع گروه عاملی هیدروکسیل و کربوکسیل است، تهیه کرد. شیر ترش‌شده دارای لاکتیک‌اسید است.

برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک اسید، ابتدا نشاستهٔ موجود در گیاهان را به لاکتیک‌اسید تبدیل کرده و سپس از واکنش پلیمری‌شدن لاکتیک اسید، پلی‌لاکتیک اسید تولید می‌کنند.

نشاسته ⟶ لاکتیک اسید ⟶ (بسپارش) پلی‌لاکتیک اسید

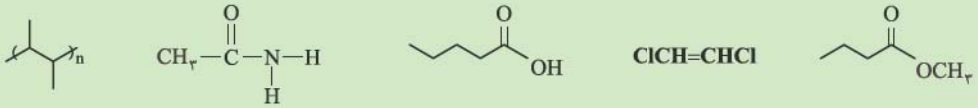
پاسخ خیلی تشریحی ✔

در واکنش پلیمری‌شدن لاکتیک اسید از هر مولکول لاکتیک اسید یک H و یک OH به صورت H_2O جدا می‌شود؛ بنابراین جرم پلیمر با مجموع جرم مونومرها برابر نیست.

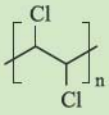
در مورد گزینهٔ (۳) دقت کنید که در ساختار لاکتیک اسید، هر دو نوع گروه عاملی هیدروکسیل و کربوکسیل لازم برای تهیهٔ پلی‌استر وجود دارد؛ بنابراین این واکنش بدون حضور اسید و الکل دوعاملی انجام می‌شود.

www.konkur.in

۱۰۵ با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام مورد نادرست است؟



۱) نقطهٔ جوش ترکیب (۳) از ترکیب (۵) بالاتر است.

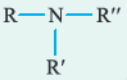
۲) ساختار پلیمر حاصل از ترکیب (۴) به صورت  است.

۳) نام مونومر سازندهٔ پلیمر (۱)، ۲ـ بوتن است.

۴) ترکیب (۲) یک آمید است که از واکنش ساده‌ترین آمین و استیک‌اسید تولید شده است.

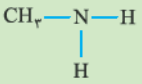
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

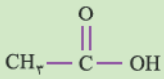
آمین‌ها دسته‌ای از ترکیبات آلی هستند که در ساختار آن‌ها اتم‌های C، H و N وجود دارد. فرمول عمومی آمین‌ها به صورت  است که در آن حداقل یکی از گروه‌های R، R′ یا R″، گروه هیدروکربنی است.

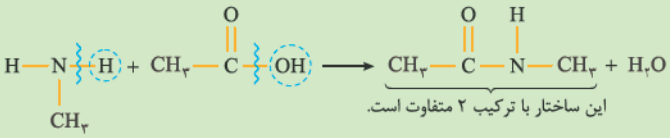
پاسخ خیلی تشریحی

ساده‌ترین آمین ← متیل آمین

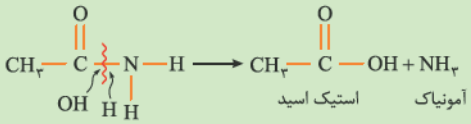


استیک اسید ←





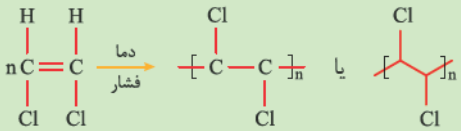
در واقع ترکیب (۲) از واکنش آمونیاک با استیک اسید به دست آمده است:



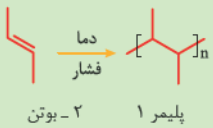
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ترکیب‌های (۳) و (۵) ایزومر یکدیگرند، اما ترکیب (۳) به دلیل توانایی پیوند هیدروژنی، نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

گزینهٔ (۲):



گزینهٔ (۳):



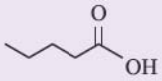
www.konkur.in

با توجه به ساختار ترکیب‌های داده‌شده به پرسش‌ها پاسخ دهید. (سؤال ۱۲ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

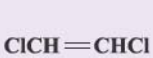
(۱)

نشاسته

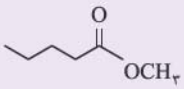
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

الف) ساختار پلیمر تولیدشده از مونومر (۴) را رسم کنید.

ب) یک کاربرد از پلیمر (۱) را بنویسید.

پ) نام مونومر سازنده ترکیب (۲) را بنویسید.

ت) ساختار الکل سازندهٔ استر (۵) را رسم کنید.

ث) نقطه جوش ترکیب‌های (۳) و (۵) را با بیان دلیل مقایسه کنید.