

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله شانزدهم

پایه دوازدهم

۲۸/ فروردین ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۱ تا ۳ صفحه ۱ تا ۷۰	فصل ۱ صفحه ۱ تا ۳۶	فصل ۱ (درس ۳ و ۴) و فصل ۴ صفحه ۱۴ تا ۲۷ و ۶۹ تا ۹۳
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحه ۹ تا ۴۶	—	کل کتاب صفحه ۹ تا ۹۶
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۱ تا ۴۲	فصل ۳ و ۴ صفحه ۶۹ تا ۱۲۱	فصل ۷ (درس ۲ و ۳) صفحه ۱۵۲ تا ۱۷۰
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه	—		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلالی - کورش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی بابک سادات - علی شهرابی - مصطفی کرمی - محمد گودرزی - میلاد منصوری سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه کارشناس علمی: فرشاد حسن زاده - محمد گودرزی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - سید عباس حسینی - سیدمحمدرضا حسینی فرد محمد طاهر شعاعی - حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: سیدعباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مسعود درویشی - مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب - سعید قندچی	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sin \pi x}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $+\infty$

۲- در تابع f با ضابطه $f(x) = 1 - 3 \cos \frac{\pi x}{2}$ ، کدام مقادیر با هم برابرند؟

- (۱) دوره تناوب، قدرمطلق مقدار مینیمم
(۲) دوره تناوب، مقدار ماکزیمم
(۳) مقدار ماکزیمم، قدرمطلق مقدار مینیمم
(۴) مقدار ماکزیمم، عرض از مبدأ

۳- تابع f با ضابطه $f(x) = (a^2 - 4a)x^3 + a$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

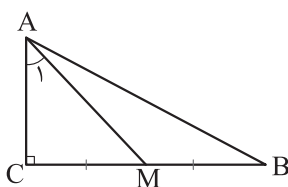
۴- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را یک واحد در راستای محور x به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس طول و عرض همه نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار توابع f و g در نقطه‌ای با کدام طول اشتراک دارند؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵- اگر $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ و $\tan 2x = \frac{2m+1}{m+3}$ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3} < m < 2$ (۲) $-2 < m < \frac{4}{3}$
(۳) $m < -\frac{4}{3}$ یا $m > 2$ (۴) $m < -2$ یا $m > \frac{4}{3}$

۶- در شکل زیر زاویه $\hat{A}_1$ به اندازه 45° از زاویه $\hat{B}$ بیشتر است. حاصل $2 \tan \hat{B} - \cot \hat{B}$ کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۵/۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۷- کم‌ترین فاصله بین صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = \sin x + \cos 3x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

محل انجام محاسبات



۸- نسبت بزرگ ترین جواب معادله $\tan x + \cot x = 16 \cos 2x \cos 4x$ به کوچک ترین جواب آن در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

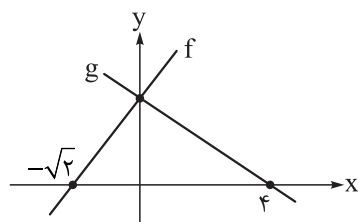
- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

۹- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x-2}{ax^2 + 2\sqrt{2}x + a-1}$ در یک همسایگی $x = b$ ، مانند شکل زیر است. حاصل $a + b^2$ کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۲

۱۰- نمودارهای دو تابع خطی f و g در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + mx + m - 1}{|x^2 - 1| + x + 1} = n$ باشد، عدد حقیقی n کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۱۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f فقط یک خط مجانب داشته باشد،

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) $(-2, 2)$ (۲) $(-4, 4)$ (۳) $\emptyset$ (۴) $\mathbb{R}$

۱۳- مجموع ۲۱ جمله اول یک دنباله حسابی برابر صفر شده است. جمله چندم این دنباله صفر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۴- ریشه پنجم عدد $\sqrt[4]{24} \sqrt[3]{144} \times \sqrt[6]{486}$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt[4]{6}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

۱۵- سهمی $y = x^2 + ax + a - 1$ به ازای دو مقدار a بر نیمساز نواحی اول و سوم مماس می شود. اختلاف مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

محل انجام محاسبات

۱۶- اختلاف جذر جواب‌های معادله $x^2 + 1 = 6x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷- از معادله $\frac{1}{2-\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2+\sqrt{x-3}} = \frac{a}{\sqrt{x-3}}$ یک جواب برای x به دست می‌آید. a چند مقدار صحیح نمی‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- دو ضلع مجاور یک مستطیل روی خطوط $y + mx = m - 1$ و $y + 2x = m$ قرار دارند. اگر مبدأ مختصات، یک رأس آن باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{34}$ (۲) $\frac{5}{34}$ (۳) $\frac{3}{34}$ (۴) $\frac{2}{17}$

محل انجام محاسبات

۱۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ m & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست. مجموع درایه های آن کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱۰

۲۰- برای ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$ ، آن گاه $|D|$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۲۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i \geq j \\ \frac{ij}{i-j} & ; i < j \end{cases}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A - 2I$ کدام است؟

- (۱) ۶۱/۵ (۲) ۷۵/۵ (۳) -۷۷/۵ (۴) -۸۲/۵

۲۲- خط d و پاره خط AB موازی با آن در صفحه مفروض اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و فاصله آن از خط d به اندازه طول پاره خط AB باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۲۳- اگر k عددی صحیح باشد، مساحت کوچک ترین دایره به معادله $x^2 + y^2 - 3x + 5y + k = 0$ ، چند برابر π است؟

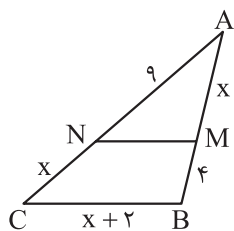
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۴- دو دایره که شعاع یکی دو برابر دیگری است و مرکز دایره کوچک تر روی محیط دایره بزرگ تر قرار دارد، مفروض اند. عمود منصف خط المרכזین دو دایره، نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه محورهای مختصات است. اگر نقطه $(-2, 3)$ مرکز دایره بزرگ تر باشد، مجموع طول های نقاط برخورد کدام است؟

- (۱) ۵/۷۵ (۲) -۴/۷ (۳) -۵/۷۵ (۴) ۴/۷

۲۵- چند مثلث به طول اضلاع ۵، x و ۳ می توان رسم کرد که در آن، اندازه یک ضلع واسطه هندسی دو ضلع دیگر باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

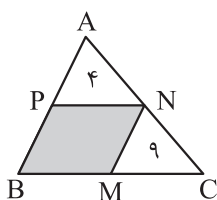


۲۶- در شکل مقابل، MN با BC موازی است. محیط مثلث کوچک تر کدام است؟

- (۱) ۱۹/۸ (۲) ۱۹/۶ (۳) ۱۹/۴ (۴) ۱۹/۲

محل انجام محاسبات

۲۷- در شکل زیر، چهارضلعی رنگی متوازی‌الاضلاع و مساحت دو مثلث کوچک‌تر، درون آن‌ها نوشته شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



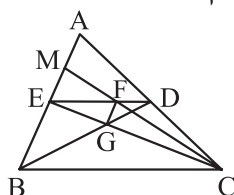
۱۳ (۲)

۱۴ (۱)

۱۲ (۴)

۱۵ (۳)

۲۸- در شکل زیر، نقاط D, E و M به ترتیب وسط‌های AC, AB و AE هستند. حاصل $\frac{GF}{AB}$ کدام است؟

 $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳)

۲۹- برای رسم خطی موازی با صفحه P که هر دو خط متناظر L و L' را قطع کند، در کدام حالت حتماً بی‌شمار جواب وجود دارد؟

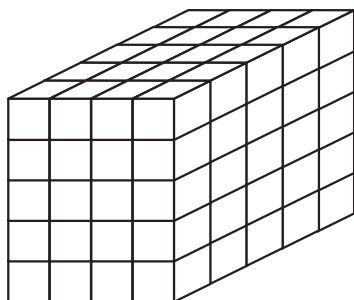
(۱) L و L' هر دو با P موازی باشند.

(۲) L موازی با P و L' با P متقاطع باشد.

(۳) L بر P عمود و L' با P موازی باشد.

(۴) L و L' هر دو با P متقاطع باشند.

۳۰- مکعب مستطیل شکل زیر را که از تعدادی مکعب واحد کوچک تشکیل شده است، در یک ظرف پر از رنگ فرو برده و سپس آن را بیرون می‌آوریم. تعداد مکعب‌های کوچکی که فقط یک وجه آن‌ها رنگی شده باشد، کدام است؟



۴۲ (۲)

۲۱ (۱)

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۳۱- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح $a-1$ و $b+1$ برابر $3d$ است. کدام نتیجه‌گیری ممکن است نادرست باشد؟

$$9 \mid ab - 1 \quad (1) \quad d \mid a + b \quad (2)$$

$$9d^2 \mid (a+b)^2 \quad (3) \quad 9 \mid ab + a - b - 1 \quad (4)$$

۳۲- باقی‌مانده تقسیم عدد $(2^{26} + 1)(16^{71} - 1)$ بر ۱۳ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۳۳- اگر از روز سه‌شنبه به اندازه عدد مضرب ۹، $3a2$ روز جلو برویم به کدام روز هفته می‌رسیم؟

$$(1) \text{ دوشنبه} \quad (2) \text{ چهارشنبه} \quad (3) \text{ پنج‌شنبه} \quad (4) \text{ جمعه}$$

۳۴- اگر رقم یکان دو عدد $(3a-5)(4a-7)$ و $(3a-7)(4a-5)$ غیر صفر و برابر باشند، رقم یکان عدد $9a+6$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 9 \quad (4)$$

۳۵- در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۴ رابطه‌های $\Delta(G) = 5$ و $\delta(G) = 3$ برقرار است. تعداد رأس‌های درجه ۳ در این گراف، برابر کدام یک نمی‌تواند باشد؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۳۶- گراف G, k - منتظم، ناتهی و غیرکامل از مرتبه ۹ است. اگر درجه رأس‌ها در گراف $\bar{G}$ برابر k' باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k' کدام است؟

$$10 \quad (1) \quad 12 \quad (2) \quad 14 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

۳۷- در گراف G از مرتبه ۵ داریم $\delta(G) = 4$. با حذف یک یال از گراف، چند دور به طول ۳ یا ۴ از گراف حذف می‌شود؟

$$6 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 9 \quad (4)$$

۳۸- میانگین، میانه و چارک اول هفت عدد طبیعی متمایز به ترتیب برابر ۷، ۷ و ۲ است. حداقل میانگین سه داده بزرگ‌تر کدام است؟

$$10 \quad (1) \quad 11 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 13 \quad (4)$$

۳۹- می‌خواهیم از بین ۳۹۱ داده آماری، نمونه‌ای ۱۷ عضوی به روش سیستماتیک انتخاب کنیم. اگر شماره عدد سوم انتخابی برابر ۵۱ باشد، انحراف معیار شماره داده‌های انتخاب‌شده کدام است؟

$$23\sqrt{6} \quad (1) \quad 12\sqrt{5} \quad (2) \quad 24\sqrt{5} \quad (3) \quad 46\sqrt{6} \quad (4)$$

۴۰- در یک نمونه، ده داده برابر میانگین و انحراف از میانگین شش داده دیگر $a, 2, 2, -1, -3, -3$ است. اگر انحراف معیار جامعه را برابر با انحراف معیار نمونه فرض کنیم، طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad \frac{3}{2} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad \frac{5}{2} \quad (4)$$

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله شانزدهم

پایه دوازدهم

۲۸/ فروردین/ ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه							مواد امتحانی
دهم	یازدهم	دوازدهم	مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	
بررسی تمرین‌ها، فعالیت‌ها و شکل‌های کتاب درسی	—	فصل ۱ و ۲ صفحه ۱ تا ۶۰	۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
مفاهیم (همه مباحث کتاب به جز قسمت‌های محاسباتی)		فصل ۱ و ۲ صفحه ۱ تا ۶۶	۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
—			۷۵ دقیقه	۶۵ سؤال			مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی - مصطفی واثقی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی - هادی نجفی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: فرشید ابراهیمی - پیمان خواجوی مجد - یاسر راش - عباس سرمایه سروش عبادی - یاسر عبداللہی - محسن مجنونی - امیرحسین مسلمی کارشناسان علمی: یاسر ذریه - محمدمهدی کریمیان - مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللہی - عباس سرمایه

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.



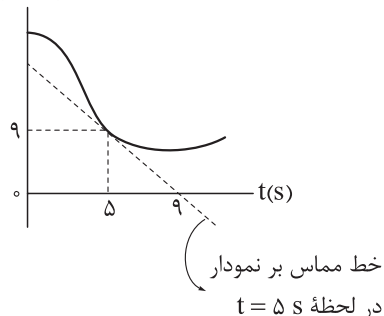
Azmoon.kheilisabz.com



۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه شتاب متحرک در

لحظه $t = 5$ s چند متر بر مربع ثانیه است؟

$v(m/s)$



(۱) $1/8$

(۲) $2/25$

(۳) $0/5$

(۴) $0/625$

۴۲- جابه جایی متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می کند، در یک بازه زمانی ۴ ثانیه ای برابر $\vec{i} (12 \text{ m})$ است.

اگر جهت بردار مکان متحرک در لحظه $t_1 = 5$ s تغییر کند، بردار مکان متحرک در لحظه $t_2 = 6$ s بر حسب متر، کدام است؟

(۴) $-18\vec{i}$

(۳) $18\vec{i}$

(۲) $-3\vec{i}$

(۱) $3\vec{i}$

۴۳- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = t^2 - 8t + 16$ است. کدام

موارد زیر درباره این متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت درست است؟

الف) حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

ب) جهت بردار مکان متحرک، یک مرتبه تغییر می کند.

پ) جهت حرکت متحرک، یک مرتبه تغییر می کند.

ت) جهت شتاب متحرک یک مرتبه تغییر می کند.

(۴) «پ» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

(۲) «الف» و «پ»

(۱) «الف» و «ب»

۴۴- سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، در مبدأ زمان برابر $\vec{i} (5 \text{ m/s})$ است. اگر

جابه جایی متحرک در ۳ ثانیه سوم برابر $\vec{i} (-30 \text{ m})$ باشد، در چه لحظه ای جهت حرکت متحرک تغییر می کند؟

(۴) $7/5$

(۳) 5

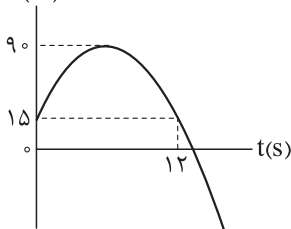
(۲) $3/5$

(۱) $2/5$

۴۵- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت

متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 24$ s برابر چند متر بر ثانیه است؟

$x(m)$



(۱) 15

(۲) 18

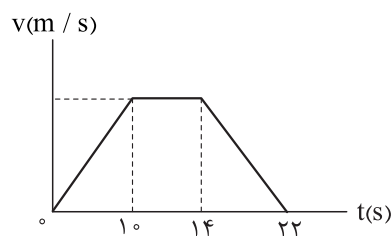
(۳) 25

(۴) 30

محل انجام محاسبات



۴۶- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه جابه جایی این متحرک



در ۶ ثانیه اول چند برابر اندازه جابه جایی آن در ۶ ثانیه سوم است؟

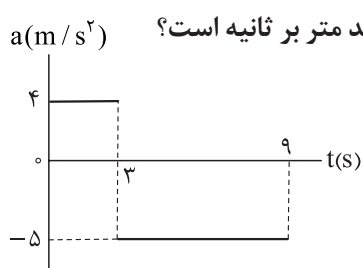
(۱) $0/18$

(۲) $0/2$

(۳) $0/36$

(۴) $0/4$

۴۷- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر جابه جایی این متحرک در



بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 9$ s برابر با $(27 \text{ m})\vec{i}$ باشد، سرعت متحرک در لحظه t_2 چند متر بر ثانیه است؟

(۱) $3\vec{i}$

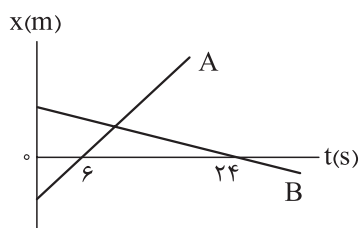
(۲) $-3\vec{i}$

(۳) $15\vec{i}$

(۴) $-15\vec{i}$

۴۸- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک A،

۲ برابر تندی متحرک B و فاصله دو متحرک در مبدأ زمان برابر ۶۰ m باشد، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 36$ s چند متر است؟



(۱) ۹۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۵۰

(۴) ۱۸۰

۴۹- دو متحرک A و B که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کنند، در مبدأ زمان با سرعت های متفاوت در جهت

محور x از مبدأ مکان می گذرند. اگر سرعت دو متحرک در لحظه $t = 3$ s برابر شود، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 5$ s

چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t = 4$ s است؟

(۴) $\frac{13}{10}$

(۳) $\frac{5}{8}$

(۲) ۴

(۱) $\frac{5}{4}$

۵۰- گلوله ای در شرایط خلأ از یک بلندی رها می شود و در ۴ ثانیه آخر حرکت خود، مسافت ۱۶۰ m را می پیماید. بزرگی

سرعت متوسط گلوله در ۱/۵ ثانیه آخر حرکت، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۴) $34/5$

(۳) $37/5$

(۲) $42/5$

(۱) $52/5$

محل انجام محاسبات



۵۱- معادلهٔ تکانه - زمان جسمی به جرم 5 kg در SI به صورت $p = t^2 - 10t + 12$ است. شتاب متوسط جسم در ۴ ثانیه

دوم، بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

- (۱) $0/4 \vec{i}$ (۲) $0/8 \vec{i}$ (۳) $-0/4 \vec{i}$ (۴) $-0/8 \vec{i}$

۵۲- شعاع سیاره A، ۳ برابر شعاع سیاره B و چگالی سیاره A، نصف چگالی سیاره B است. شتاب گرانش در سطح سیاره A

چند برابر شتاب گرانش در سطح سیاره B است؟

- (۱) ۶ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۳- به جسمی تنها دو نیروی هم‌اندازه و عمود بر هم وارد می‌شود و شتاب جسم برابر 4 m/s^2 است. اگر این دو نیرو

به طور هم‌جهت به این جسم وارد شوند، شتاب جسم برابر چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) ۸ (۴) $8\sqrt{2}$

۵۴- گویی به جرم 200 g در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر اندازهٔ شتاب گوی، هنگام بالارفتن برابر

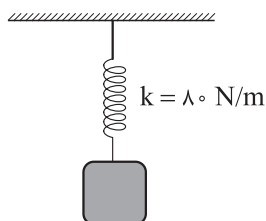
11 m/s^2 باشد، اندازهٔ شتاب گوی هنگام پایین آمدن چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($g = 9/8 \text{ N/kg}$) و اندازهٔ نیروی

مقاومت هوای وارد بر گوی را در تمام مسیر ثابت در نظر بگیرید.

- (۱) ۹ (۲) $8/8$ (۳) $8/6$ (۴) $8/4$

۵۵- در شکل زیر، اگر جرم جسم متصل به انتهای فنر، از 200 g به 600 g برسد، طول فنر ۲۰ درصد تغییر می‌کند. طول

فنر در حالتی که جسمی به انتهای آن متصل نیست، چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10 \text{ N/m}$)



(۱) ۲۰

(۲) $22/5$

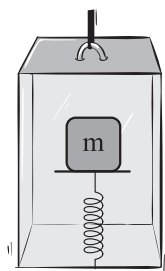
(۳) ۲۵

(۴) $27/5$

۵۶- در شکل زیر، ثابت فنر برابر با 800 N/m ، جرم جسم برابر 5 kg است و آسانسور با شتابی به بزرگی 2 m/s^2

به صورت کندشونده به سمت پایین در حال حرکت است. اگر طول فنر در این حالت 30 cm باشد، طول عادی فنر چند

سانتی‌متر است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) $22/5$

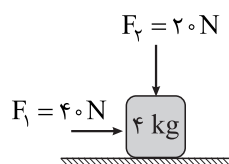
(۲) ۲۵

(۳) ۳۵

(۴) $37/5$

محل انجام محاسبات

۵۷- در شکل زیر، به جسم نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 وارد می‌شود. جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است. اندازه نیروی F_2 چند نیوتون کاهش یابد، تا بزرگی شتاب جسم به 2 m/s^2 برسد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



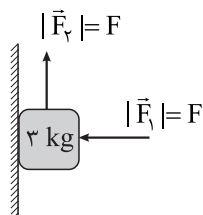
(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۵۸- در شکل زیر، به جسم دو نیروی افقی و قائم که اندازه هر یک برابر F است، وارد می‌شود و جسم با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به صورت کندشونده به سمت بالا در حال حرکت است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی سطح دیوار قائم با جسم برابر 0.4 باشد، F برابر چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



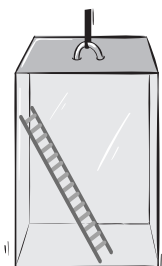
(۲) ۵۰

(۴) ۸۰

(۱) ۴۰

(۳) ۶۰

۵۹- در شکل زیر نردبانی به جرم 40 kg درون اتاقک آسانسوری قرار دارد. دیواره قائم اتاقک آسانسور، بدون اصطکاک و ضریب اصطکاک ایستایی کف اتاقک آسانسور برابر 0.75 است. آسانسور با شتابی به بزرگی 1 m/s^2 به صورت تندشونده به سمت بالا حرکت می‌کند و نردبان در آستانه سرخوردن است. در این حالت اندازه نیرویی که نردبان به دیوار قائم اتاقک آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) ۲۷۰

(۲) ۳۳۰

(۳) ۳۶۰

(۴) ۴۴۰

۶۰- متحرکی به جرم 4 kg روی محیط دایره‌ای به شعاع 5 m با تندی ثابت 36 km/h در حال حرکت است. اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر متحرک چند نیوتون است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۱۶۰

(۲) ۸

(۱) ۸۰

۶۱- گیاهی در مدت ۵ روز به اندازه $1/5$ متر رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه به صورت نمادگذاری علمی و بر حسب سانتی‌متر بر ساعت کدام است؟

(۴) $12/5 \times 10^{-1}$ (۳) $1/25$ (۲) 3×10^{-1} (۱) $0/3$

۶۲- در یک شیر آتش‌نشانی سطح مقطع قسمت ورودی و قسمت خروجی به ترتیب 30 cm^2 و 4 cm^2 است. اگر آب با تندی 2 m/s وارد شیر شود، با تندی چند متر بر ثانیه از شیر خارج می‌شود؟

(۴) ۱۵۰

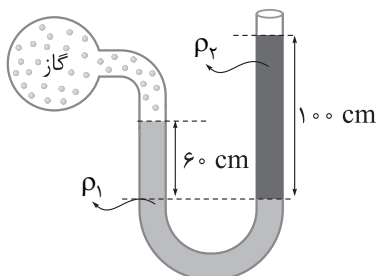
(۳) ۱۵

(۲) ۳۰

(۱) ۳

محل انجام محاسبات

۶۳- در شکل زیر، دو مایع به حالت تعادل قرار دارند. اگر چگالی آن‌ها $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_2 = 0.9 \text{ g/cm}^3$ باشد، فشار پیمانه‌ای گاز چند پاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



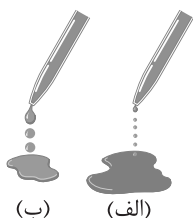
(۱) ۳۰۰۰

(۲) ۳۶۰۰

(۳) ۵۰۰۰

(۴) ۵۸۰۰

۶۴- شکل زیر، خروج قطره‌های روغن با دمای متفاوت را از دهانه دو قطره‌چکان نشان می‌دهد. به ترتیب از راست به چپ، در کدام شکل اندازه نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن بزرگ‌تر و در کدام شکل دمای روغن بیشتر است؟



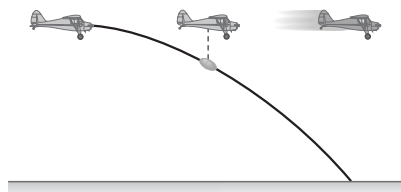
(۱) الف، الف

(۲) ب، ب

(۳) الف، ب

(۴) ب، الف

۶۵- در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع ۱۲۵ m از سطح زمین با تندی 180 km/h پرواز می‌کند، بسته‌ای را برای کمک به آسیب‌دیدگان رها می‌کند. تندی بسته هنگام برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



(مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)

(۱) $10\sqrt{5}$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) $50\sqrt{2}$ (۴) $50\sqrt{5}$

۶۶- شخصی گلوله‌ای برفی به جرم 200 g را از روی زمین برمی‌دارد و تا ارتفاع 150 cm بالا می‌برد و سپس در همان ارتفاع، آن را با تندی 12 m/s پرتاب می‌کند. کار انجام‌شده توسط شخص، روی گلوله برف چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

(مقاومت هوا صرف نظر کنید.)

(۴) $24/3$ (۳) $18/9$ (۲) $17/4$ (۱) $8/1$

۶۷- گلوله‌ای به جرم 50 g از دهانه تفنگی با تندی 150 m/s و ارتفاع $1/6 \text{ m}$ از سطح زمین شلیک می‌شود. اگر گلوله، با تندی 50 m/s به سطح زمین برخورد کند، در مدت حرکت گلوله، کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۴) $-240/2$ (۳) $-500/8$ (۲) $-250/8$ (۱) $-490/2$

محل انجام محاسبات

۶۸- اتومبیلی به جرم 1200 kg در یک جاده افقی شروع به حرکت می کند و پس از 10 s ، تندی آن به 90 km/h می رسد. در این حرکت، توان متوسط اتومبیل حداقل چند کیلووات است؟

- ۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۷/۵ (۳) ۷۵ (۴)

۶۹- یک بزرگراه از قطعات بتونی به طول 20 m ساخته شده است. این بخش ها در دمای 10°C بتون ریزی و عمل آورده شده اند. برای جلوگیری از تاب برداشتن این قطعات بتونی در دمای 60°C ، بین آنها باید فاصله چند سانتی متری در نظر گرفته شود؟ (ضریب انبساط طولی بتون 10^{-6} K^{-1} است.)

- ۱۴ (۱) ۱۶/۸ (۲) ۱/۴ (۳) ۱/۶۸ (۴)

۷۰- قطعه سربی به جرم 300 g را تا دمای 100°C گرم کرده و سپس آن را درون گرماسنجی که حاوی 100 g آب با دمای اولیه 15°C است، می اندازیم. اگر دمای نهایی این مجموعه 20°C شود، ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI کدام است؟

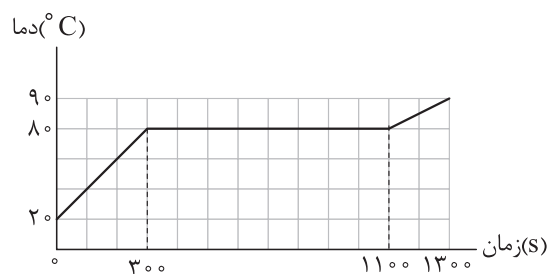
$$\left(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \text{ و } c_{\text{سرب}} = 125 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right)$$

- ۱۸۰ (۱) ۴۲۰ (۲) ۵۱۰ (۳) ۱۰۲۰ (۴)

۷۱- در چاله کوچکی $1/7 \text{ kg}$ آب با دمای 0°C قرار دارد. اگر بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و بقیه آن یخ ببندد، جرم آب تبخیر شده چند کیلوگرم است؟ (گرمای نهان ذوب یخ 336 J/g ، گرمای نهان تبخیر آب در دمای 0°C برابر 2520 J/g و مبادله گرما با محیط ناچیز است.)

- ۰/۱ (۱) ۰/۲ (۲) ۱/۵ (۳) ۱/۶ (۴)

۷۲- به جسم جامدی با دمای اولیه 20°C و جرم 200 g با توان ثابت 40 W گرما می دهیم. اگر نمودار دما - زمان این جسم به شکل زیر باشد، به ترتیب گرمای ویژه جسم در حالت جامد و گرمای نهان ذوب این جسم در SI کدام است؟

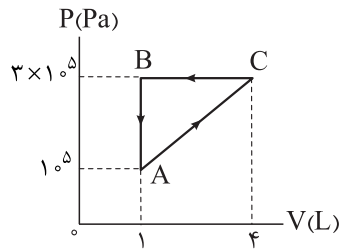


- $2 \times 10^5, 1000$ (۱)
 $1/6 \times 10^5, 1000$ (۲)
 $2 \times 10^5, 750$ (۳)
 $1/6 \times 10^5, 750$ (۴)

محل انجام محاسبات



۷۳- نمودار فشار بر حسب حجم مقدار معینی گاز کامل، در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. در این چرخه، کار انجام شده توسط گاز چند کیلوژول است؟



(۱) ۳

(۲) ۳ / ۰

(۳) -۳

(۴) ۳ / -۰

۷۴- یک ماشین گرمایی در هر چرخه، ۲۰۰ J گرما از منبع دمابالا می‌گیرد و ۱۲۰ J گرما به منبع دماپایین می‌دهد و بقیه آن تبدیل به کار می‌شود. اگر هر چرخه ۰/۲ s طول بکشد، توان خروجی این ماشین چند وات است؟

(۴) ۷۵

(۳) ۱۲۵

(۲) ۲۰۰

(۱) ۴۰۰

۷۵- در فشار ثابت 10^5 Pa دمای یک مکعب آلومینیمی توپُر به ضلع 20 cm ، از 50°C به 150°C می‌رسد. در این فرایند، کار انجام شده روی مکعب آلومینیمی چند ژول است؟ (ضریب انبساط طولی آلومینیم $\frac{1}{3} \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ است.)

(۴) $-55/2$ (۳) $-5/52$ (۲) $-18/4$ (۱) $-1/84$

۷۶- دانش آموزی در سه لوله آزمایش به یک اندازه آب ریخت و سپس به لوله A مقداری شکر، به لوله B چند قطره شیر و به لوله C مقداری منیزیم هیدروکسید افزود و آن‌ها را به خوبی تکان داد و در نهایت از چراغ قوه برای تاباندن پرتو نور به لوله‌ها استفاده کرد.

الف) مسیر عبور نور در کدام لوله(ها) دیده می‌شود؟

ب) مخلوط کدام لوله(ها)، سوسپانسیون محسوب می‌شود؟

- (۱) فقط C - B (۲) B و C - C (۳) A و B - B (۴) B و A - C و B

۷۷- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- کاغذ pH در حضور صابون و محلول اتانول در آب، به رنگ آبی درمی‌آید.
- در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلول اسیدهای قوی از اسیدهای ضعیف، به یقین بیشتر است.
- در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی، حداقل ۳ پیوند $C = C$ وجود دارد.
- با حل شدن دی‌نیتروژن پنتاکسید در آب، یون نیترات پدید می‌آید.

(۱) نادرست - درست - درست - درست (۲) نادرست - نادرست - درست - درست

(۳) درست - درست - نادرست - درست (۴) درست - نادرست - نادرست - نادرست

۷۸- اگر غلظت اولیه محلول دو اسید ضعیف HA و HB برابر با ۱/۰ مولار و در دمای یکسان، درصد یونش HA و HB به ترتیب برابر با ۱٪ و ۳٪ باشد، کدام مطلب درست است؟

- (۱) HA تمایل بیشتری برای پروتون‌دهی در محلول دارد و در نتیجه، K_a آن بزرگ‌تر است.
- (۲) نسبت غلظت یون‌های تولیدشده به غلظت اسید یونیده‌نشده در محلول HB، بیشتر از این نسبت در محلول HA است.
- (۳) در دمای ثابت با افزایش غلظت محلول HA، اختلاف درصد یونش دو اسید کاهش می‌یابد.
- (۴) برای مقایسه ثابت یونش دو اسید، باید pH محلول هر دو اسید مشخص باشد.

۷۹- در دمای اتاق، نسبت غلظت مولی یون هیدرونیوم به هیدروکسید در محلول 10^{-n} مولار اسید HA برابر 10^6 است. اگر درصد یونش اسید در محلول برابر ۱ باشد، n و pH محلول، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) ۴ - ۱ (۲) ۴ - ۲ (۳) ۳ - ۱ (۴) ۳ - ۲

۸۰- دو محلول زیر را در نظر بگیرید:

• محلول A: نیتریک اسید با غلظت ۰/۰۱ مولار

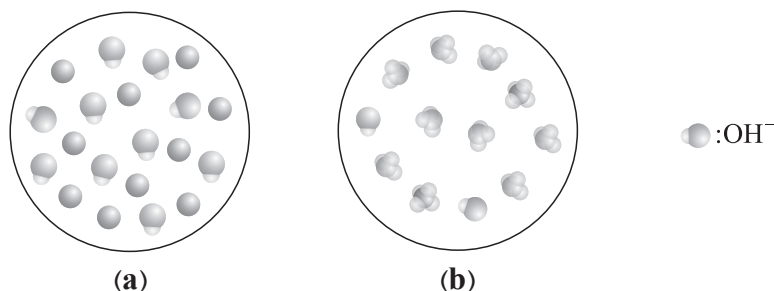
• محلول B: استیک اسید با غلظت ۰/۰۱ مولار و $K_a = 1/6 \times 10^{-5}$

اگر هر دو محلول در دمای $25^\circ C$ باشند، کدام مورد درست است؟

- (۱) غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول A، حدود ۲۵ برابر غلظت این یون در محلول B است.
- (۲) درصد یونش اسید در محلول B به تقریب برابر با ۱۰٪ است.
- (۳) غلظت یون هیدروکسید در محلول B برابر $1/0 \times 10^{-9}$ مولار است.
- (۴) تفاوت pH دو محلول برابر ۲ است.

محل انجام محاسبات

۸۱- مطابق شکل زیر دو محلول بازی در آب تهیه شده است. اگر حجم محلول‌ها یکسان و برابر ۲ لیتر و هر ذره معادل 10^{-4} مول باشد، کدام محلول pH بالاتری دارد و اگر محلول (b)، محلول آمونیاک باشد، ثابت یونش بازی آمونیاک کدام است؟



$$1 \times 10^{-5} - a \quad (2)$$

$$2 / 5 \times 10^{-5} - a \quad (1)$$

$$1 \times 10^{-5} - b \quad (4)$$

$$2 / 5 \times 10^{-5} - b \quad (3)$$

۸۲- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, O = 16, K = 39 : g.mol^{-1}$)

(الف) جوش شیرین خاصیت بازی دارد و نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن برابر یک است.

(ب) در واکنش کامل سولفوریک اسید با پودر جامد هیدروکسیدهای گروه دوم $(M(OH)_2)$ ، با افزایش شعاع M ، رسانایی الکتریکی محلول حاصل افزایش می‌یابد.

(پ) واکنش $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$ ، مبنایی برای کاربرد شوینده‌ها و پاک‌کننده‌ها است.

(ت) ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید ۲/۸ درصد جرمی با چگالی $1 g.mL^{-1}$ ، دارای pH برابر ۱۳/۳ است.

(۲) «ب» - «پ»

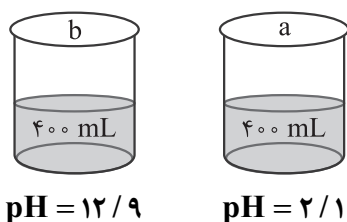
(۱) «الف» - «ت»

(۴) «ب» - «ت»

(۳) «الف» - «پ»

۸۳- با توجه به شکل‌های زیر که دو نمونه محلول از یک اسید قوی و یک باز قوی (هر دو تک‌ظرفیتی) را نشان می‌دهد،

تهیه کدام مخلوط منجر به تولید یک محلول خنثی می‌شود؟



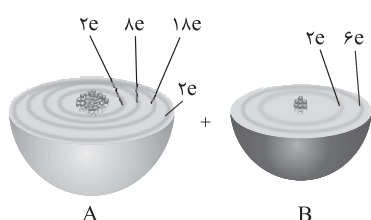
(۱) ۴۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول b

(۲) ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۲۰ میلی‌لیتر از محلول b

(۳) ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۴۰ میلی‌لیتر از محلول b

(۴) ۲۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول b

محل انجام محاسبات



۸۴- با توجه به شکل داده شده، کدام مطلب درست است؟

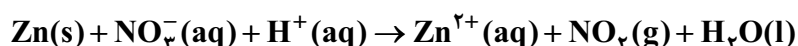
(۱) عنصری که عدد اتمی آن ۴ واحد از A کم تر است، قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به A داشته و آسان تر با B واکنش می دهد.

(۲) اگر مجموع $n + l$ برای الکترون های اتم عنصری، سه واحد بیشتر از B باشد، آن عنصر، اکسندترین عنصر جدول تناوبی است.

(۳) به ازای مصرف هر مول A، 6×10^{23} الکترون بین گونه های اکسند و کاهند مبادله می شود.

(۴) به ازای تولید 0.25 مول فرآورده یونی در این واکنش، اتم B، 3×10^{23} الکترون از دست می دهد.

۸۵- با توجه به واکنش زیر، کدام مورد درست است؟



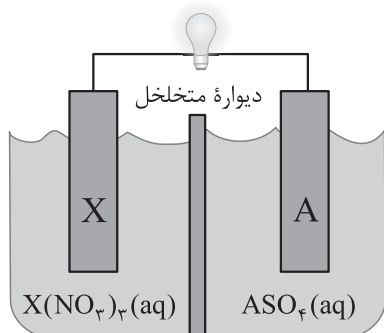
(۱) عدد اکسایش نیتروژن از ۵ به ۴ کاهش یافته است؛ بنابراین NO_3^- اکسند و Zn کاهند است.

(۲) عدد اکسایش نیتروژن از ۴ به ۵ افزایش یافته است؛ بنابراین NO_3^- کاهند و Zn اکسند است.

(۳) عدد اکسایش نیتروژن ثابت مانده است؛ بنابراین واکنش اکسایش - کاهش نیست.

(۴) در معادله موازنه شده، نسبت ضریب $\text{H}^+(\text{aq})$ به $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ برابر ۲ است.

۸۶- با توجه به شکل زیر، کدام گزینه درست است؟



$$E^\circ(\text{A}^{2+} / \text{A}) = +0.8 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{X}^{3+} / \text{X}) = -0.65 \text{ V}$$

(۱) با گذشت زمان، غلظت آنیون های سولفات در نیم سلول A کاهش یافته و غلظت یون A^{2+} در نیم سلول X افزایش می یابد.

(۲) اگر ولتاژ مورد نیاز برای روشنایی لامپ بیش از $1/45$ ولت باشد، برای روشن شدن آن باید جای A و X را عوض کرد.

(۳) الکترون ها از دیواره متخلخل عبور می کنند و از نیم سلول X به A می روند.

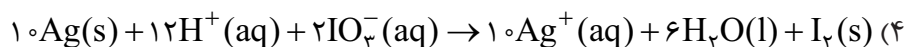
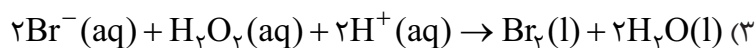
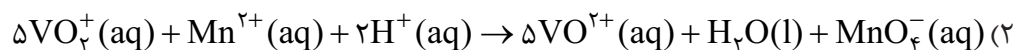
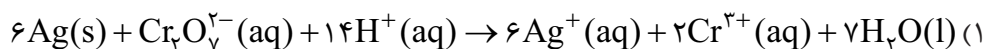
(۴) با گذشت زمان، جرم تیغه X کاهش می یابد و با جایگزین کردن نیم سلول SHE به جای X، نقش الکترو د A تغییری نمی کند.

محل انجام محاسبات



۸۷- با توجه به پتانسیل‌های کاهش داده شده، کدام واکنش به طور خودبه‌خودی انجام نمی‌شود؟

نیم‌واکنش کاهش	$E^{\circ} (V)$
$H_2O_2(aq) + 2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	+۱ / ۷۸
$MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) + 5e^- \rightarrow Mn^{2+}(aq) + 4H_2O(l)$	+۱ / ۵۱
$Cr_2O_7^{2-}(aq) + 14H^+(aq) + 6e^- \rightarrow 2Cr^{3+}(aq) + 7H_2O(l)$	+۱ / ۳۳
$IO_3^-(aq) + 6H^+(aq) + 5e^- \rightarrow \frac{1}{2}I_2(s) + 3H_2O(l)$	+۱ / ۲۰
$Br_2(l) + 2e^- \rightarrow 2Br^-(aq)$	+۱ / ۰۷
$VO_2^+(aq) + 2H^+(aq) + e^- \rightarrow VO^{2+}(aq) + H_2O(l)$	+۱ / ۰۰
$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$	+۰ / ۸۰
$Fe^{3+}(aq) + e^- \rightarrow Fe^{2+}(aq)$	+۰ / ۷۷



۸۸- کدام گزینه عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«در هر سلول برخلاف هر سلول ،»

(۱) گالوانی - الکترولیتی - جرم تیغه آندی کاهش می‌یابد

(۲) الکترولیتی - گالوانی - واکنش به طور غیرخودبه‌خودی و به کمک باتری انجام می‌شود

(۳) گالوانی - الکترولیتی - آنیون‌ها به سمت آند حرکت می‌کنند

(۴) الکترولیتی - گالوانی - در مجاورت کاتد، غلظت کاتیون‌ها کاهش می‌یابد

محل انجام محاسبات



۸۹- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) در فرایند آبکاری فلز آهن با نقره و الکترولیت نقره نیترات، جرم تیغه کاتدی و آنودی به یک اندازه تغییر می‌کند.
 (۲) در فرایند برقکافت منیزیم کلرید مذاب در یک سلول گالوانی، چگالی الکترولیت اولیه بیشتر از فلز منیزیم است.
 (۳) در فرایند هال، جرم تیغه‌های آنودی برخلاف کاتدی کاهش می‌یابد.
 (۴) در فرایند برقکافت آب، حجم گاز تولیدی در آند نصف حجم گاز تولیدی در کاتد است.
- ۹۰- اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند خوردگی آهن و فرایند هال برابر باشد، نسبت جرم فلز تولیدشده در فرایند هال به آهن مصرف‌شده در فرایند خوردگی کدام است؟ ($\text{Al} = 27, \text{Fe} = 56 : \text{g.mol}^{-1}$)

$$\frac{27}{56} \quad (1) \quad \frac{27}{28} \quad (2) \quad \frac{9}{28} \quad (3) \quad \frac{9}{56} \quad (4)$$

۹۱- کدام مورد درست است؟

- (۱) مجموع جرم یک پروتون و یک الکترون از جرم یک نوترون بیشتر است.
 (۲) فراوان‌ترین ایزوتوپ یک عنصر، ایزوتوپی است که جرم اتمی کم‌تری دارد.
 (۳) تاکنون هیچ ایزوتوپی از عنصر فسفر شناخته یا ساخته نشده است.
 (۴) مجموع شمار نوترون‌های ایزوتوپ‌های ساختگی اتم هیدروژن، برابر ۱۸ است.
- ۹۲- درستی یا نادرستی کدام گزینه درباره لیتیم سولفات با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) رنگ شعله آن با لیتیم کلرید مشابه و با سدیم سولفات متفاوت است.
 (۲) نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن با این نسبت در مس (I) کربنات برابر است.
 (۳) در آب سرد بهتر از آب گرم حل می‌شود.
 (۴) در ساختار آن، همه اتم‌ها و یون‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار رسیده‌اند.
- ۹۳- با توجه به عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی، کدام موارد درست‌اند؟
 الف) شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم فلزهای واسطه، با شماره گروه آن‌ها در جدول برابر است.
 ب) مجموع $(n + l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم نافلز مایع برابر ۳۳ است.
 پ) واکنش‌پذیری فلزهای این دوره، از چپ به راست به طور منظم کاهش می‌یابد.
 ت) بین دو عنصری که آرایش الکترونی آن‌ها از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند، ۵ عنصر دیگر وجود دارد.

(۱) «الف» - «ب» (۲) «پ» - «ت»

(۳) «الف» - «پ» - «ت» (۴) «ب» - «ت»

۹۴- مقداری گاز شهری یک بار به صورت ناقص و بار دیگر به صورت کامل سوزانده می‌شود. اگر رنگ شعله حاصل از سوختن در حالت (I) آبی و در حالت (II)، زرد باشد، کدام مورد درست است؟

- (۱) در واکنش (I) برخلاف واکنش (II)، گازی دواتمی در میان فراورده‌های واکنش وجود دارد.
 (۲) فراورده کربن‌داری که تنها در واکنش (II) تولید می‌شود، می‌تواند با فلج‌کردن سامانه عصبی، باعث مرگ شود.
 (۳) در واکنش (II) برخلاف واکنش (I)، واکنش به صورت کند انجام می‌شود.
 (۴) مقدار اکسیژن مصرفی در واکنش (II) بیشتر از واکنش (I) است.

محل انجام محاسبات

۹۵- چند مورد از ویژگی‌های زیر در اوزون نسبت به اکسیژن بیشتر است؟

- واکنش پذیری
- پایداری
- انحلال پذیری در آب
- نقطه جوش
- سطح انرژی

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۶- کدام مورد درست است؟

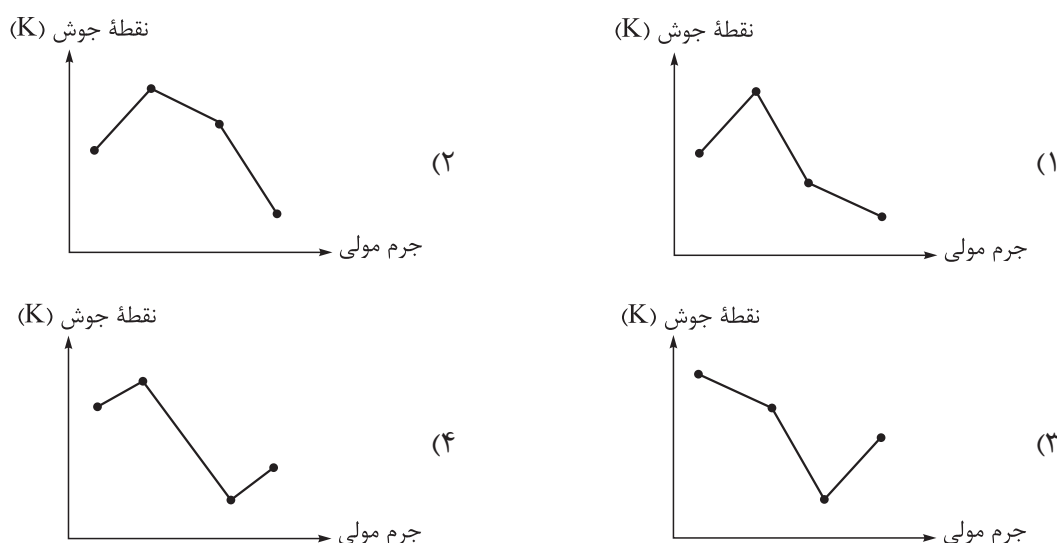
(۱) پیوند هیدروژنی میان مولکول‌هایی برقرار می‌شود که در ساختار خود علاوه بر H، حداقل یکی از عناصر N، O و F را نیز دارند.

(۲) گشتاور دوقطبی مولکول‌ها، میزان قطبیت آن‌ها را نشان می‌دهد و واحد آن، μ است.

(۳) با نزدیک کردن یک میله شیشه‌ای باردار به باریکه آب، مولکول‌های آب از سمت اتم‌های اکسیژن از میله دور می‌شوند.

(۴) در ساختار یخ، هر مولکول آب از طریق پیوندهای هیدروژنی به چهار مولکول آب دیگر متصل است.

۹۷- نمودار تقریبی تغییرات نقطه جوش نسبت به جرم مولی ترکیبات «هیدروژن فلوئورید، استون، اتانول و هیدروژن برمید»، به کدام صورت است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, F = 19, Br = 80 : g.mol^{-1}$)



۹۸- با توجه به چهار فلز Mg، Zn، Fe و Ag، کدام مورد درست است؟

(۱) فقط Mg و Zn، می‌توانند باعث تغییر رنگ محلول مس (II) سولفات شوند.

(۲) در میان این فلزها، احتمال خوردگی در هوای مرطوب برای Ag از همه بیشتر است.

(۳) در واکنش با محلول هیدروکلریک اسید، در حضور Fe، گاز با سرعت بیشتری آزاد می‌شود.

(۴) نگهداری Mg از همه دشوارتر است.

محل انجام محاسبات

۹۹- با توجه به جدول زیر که بخشی از جدول دوره‌های عنصرها را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

[illegible]

(الف) D همانند M رسانای جریان برق است؛ اما برخلاف آن توانایی تشکیل کاتیون ندارد.

(ب) E دارای دو آلوتروپ سفید و قرمز است که آلوتروپ قرمز آن، واکنش پذیری بیشتری نسبت به آلوتروپ سفید دارد.

(پ) عنصر X در دمای 373 K با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد و ترکیب HX تشکیل می‌دهد.

(ت) خصلت فلزی A از B بیشتر است و فرمول کربنات B می‌تواند به صورت BCO_3 باشد.

- (١) «الف» - «ب» (٢) «ب» - «پ» (٣) «الف» - «ت» (٤) «پ» - «ت»

۱۰۰- چند مورد از مطالب زیر با کلمهٔ «بیشتر»، به درستی تکمیل می‌شوند؟

(الف) تعداد پیوندهای دو گانه در نفتالن از نصف تعداد اتم‌های هیدروژن در سیکلو هگزان است.

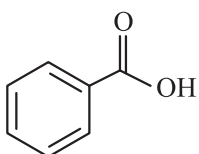
(ب) با افزایش شمار اتم‌های کربن، اختلاف نقطهٔ حوش آلکان‌های راست‌زنجیر متوالی می‌شود.

(پ) چسندگی و گرانروی وازلین از گریس است.

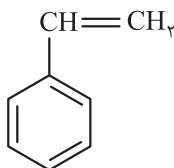
(ت) مجموع اعداد در نام آیوپاک ایزومری از ترکیب C_5H_{12} که بیشترین شاخه فرعی را دارد، از تعداد پیوندهای اشتراکی، اتین است.

- (١) ٢ (٢) ٣ (٣) ١ (٤) صفر

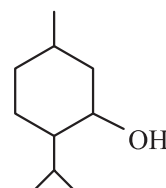
۱۰۱- با توجه به ساختار ترکیب‌های زیر، کدام عبارت نادرست است؟



(I)



(II)



(III)

- (۱) اگر به محلول پتاسیم پرمنگنات، مقدار کافی ماده (I) اضافه کرده و گرما دهیم، رنگ بنفش محلول از بین می‌رود.
- (۲) اختلاف جرم مولی ترکیب (II) با سرگروه ترکیبات آروماتیک، برابر جرم مولی ساده‌ترین آلکن است.
- (۳) اگر یک مول ترکیب (I) را با یک مول ترکیب (III) در حضور H^+ واکنش دهیم، ترکیبی با فرمول $C_{17}H_{24}O_2$ تشکیل می‌شود.
- (۴) شمار اتم‌های هیدروژن ترکیب (III)، با شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب ۳-اتیل - ۲، ۳-دی‌متیل بنتان برابر است.

محل انجام محاسبات



۱۰۲- کدام گزینه در مورد «گاز مرداب» نادرست است؟

- (۱) گشتاور دوقطبی مولکول‌های آن برابر صفر است و کم‌ترین ارزش سوختی را در بین هیدروکربن‌ها دارد.
 - (۲) از تجزیه گیاهان به وسیله باکتری‌های بی‌هوازی در زیر آب تولید می‌شود.
 - (۳) تأمین شرایط بهینه برای تولید این ماده در آزمایشگاه از عناصر سازنده آن، بسیار دشوار و پرهزینه است.
 - (۴) میزان سمی بودن آن کم است و تنفس آن به مقدار محدود، بر شش‌ها و بدن تأثیر چندانی ندارد.
- ۱۰۳- کدام واکنش با تولید گرما و افزایش شمار مول‌های گازی فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها همراه است؟
- (۱) تشکیل HCl از عناصر سازنده
 - (۲) تشکیل گازهای CO_2 و N_2 از گازهای CO و NO
 - (۳) تشکیل گاز هیدرازین از گازهای هیدروژن و نیتروژن
 - (۴) تجزیه محلول آب اکسیژنه به آب و گاز اکسیژن
- ۱۰۴- در واکنش تولید کدام پلیمر، فراورده جانبی دیگری نیز تولید می‌شود؟
- (۱) پلی‌اتن سنگین
 - (۲) تفلون
 - (۳) کولار
 - (۴) پلی‌وینیل کلرید
- ۱۰۵- کدام مطلب درست است؟

- (۱) بین مولکول‌های بنزالدهید برخلاف مولکول‌های ویتامین کا، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.
- (۲) متیل متانوات، ساده‌ترین استر است که با کربوکسیلیک اسیدی که در مورچه سرخ وجود دارد، ایزومر است.
- (۳) بر اثر واکنش کربوکسیلیک اسیدی مانند استیک اسید و آمینی مانند تری‌متیل آمین، آب و یک آمید ایجاد می‌شود.
- (۴) هر مول اتیلن گلیکول می‌تواند با دو مول استیک اسید واکنش دهد و یک مول دی‌استر تولید کند.

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله شانزدهم

پایه دوازدهم

۲۸/ فروردین / ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهبازی مصطفی کرمی - محمد گودرزی - میلاد منصوری - سروش موثینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - سید عباس حسینی - سیدمحمد رضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مسعود درویشی - مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی
فیزیک	علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی - مصطفی واثقی
شیمی	فرشید ابراهیمی - پیمان خواجهی مجد - یاسر راش - عباس سرمایه - سروش عبادی - یاسر عبداللہی محسن مجنونی - امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده محمد گودرزی	سهیل تقی زاده منصور زرکش اصفهانی سهند محمد کریم نژاد
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری مریم نظری ماهان فنی فر
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر سید عباس حسینی مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار مریم گلی حسن لو	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	آیدین طهماسبلی زاده پوریا علاقه مند امیر محمودی انزلی سعید محبی محمد رضا یاری
شیمی	یاسر عبداللہی	عباس سرمایه	پریسا حیدری یاسر عبداللہی	یاشار ذریه محمد مهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	محمد رضا بیاتلو آرمین عظیمی مهدیس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانیپور

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵



آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی زهره صفری - الهه صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - نادره ناز آوری ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی



۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sin \pi x}$ کدام است؟

+∞ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-∞ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مثال درس باکس رو بخون قبلش.

Hint

درس Box

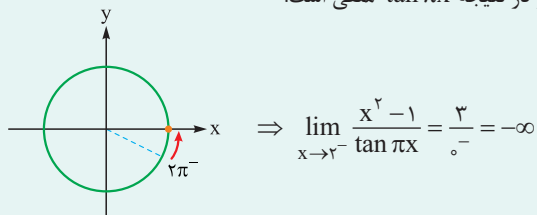
حد بی‌نهایت: در توابع کسری، اگر حد صورت، مخالف صفر و حد مخرج، صفر باشد، حاصل حد نهایی ∞ می‌شود، با توجه به علامت صورت و مخرج می‌توان فهمید که حاصل، $-\infty$ است یا $+\infty$.

مثال حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{\tan \pi x}$ کدام است؟

در این جا حد صورت برابر $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$ و عددی مثبت است. حد مخرج نیز صفر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \tan \pi x = \tan 2\pi = 0$$

اما باید ببینیم که علامت عبارت $\tan \pi x$ در یک همسایگی چپ $x = 2$ چیست! در دایره مثلثاتی شکل زیر، می‌بینیم که وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، انتهای کمان πx در ناحیه چهارم قرار می‌گیرد و در نتیجه $\tan \pi x$ منفی است:



گام اول: در یک همسایگی راست $x = 1$ ، حد عبارت صورت ۱ و حد عبارت مخرج برابر صفر است؛ بنابراین حاصل حد، $-\infty$ یا $+\infty$ است.
گام دوم: وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، انتهای کمان πx در ناحیه سوم قرار می‌گیرد و در نتیجه علامت $\sin \pi x$ منفی است؛ بنابراین با توجه به این که علامت صورت، مثبت است، حاصل حد، $-\infty$ می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

۲ در تابع f با ضابطه $f(x) = 1 - 3 \cos \frac{\pi x}{2}$ ، کدام مقادیر با هم برابرند؟

- (۱) دوره تناوب، قدرمطلق مقدار مینیمم
- (۲) دوره تناوب، مقدار ماکزیمم
- (۳) مقدار ماکزیمم، قدرمطلق مقدار مینیمم
- (۴) مقدار ماکزیمم، عرض از مبدأ

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

در توابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ روابط زیر برقرارند:

مقدار ماکزیمم: $f_{\max} = |a| + c$ و مقدار مینیمم: $f_{\min} = -|a| + c$

دوره تناوب: $T_f = \frac{2\pi}{|b|}$

گام اول: چهار مشخصه گفته شده در گزینه ها را برای تابع f حساب می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ ، $f(0) = 1 - 3 \cos 0 = -2$: عرض از مبدأ

مقدار ماکزیمم: $f_{\max} = 1 + |-3| = 4$ و مقدار مینیمم: $f_{\min} = 1 - |-3| = -2$

گام دوم: دوره تناوب و مقدار ماکزیمم برابرند و گزینه (۲)، پاسخ سؤال است.

ریاضیات

۳

تابع f با ضابطه $f(x) = (a^2 - 4a)x^2 + a$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a شامل چند عدد

صحیح است؟

صرفاً اکیداً نزولی منظور نیست!

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تابع f می‌تونه ثابت هم باشه.

 Hint

 درس Box

در توابع با ضابطه $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ ، علامت a وضعیت یکنوایی تابع را مشخص می‌کند:

• اگر $a < 0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

• اگر $a = 0$ باشد، تابع ثابت است و هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

• اگر $a > 0$ باشد، تابع اکیداً صعودی است.

با توجه به درس باکس، ضریب x^2 را در ضابطه تابع f باید نامثبت قرار دهیم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$a^2 - 4a \leq 0 \Rightarrow a(a - 4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 4$$

تعداد اعداد صحیح مجموعه $[0, 4]$ برابر ۵ است.

۴

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را یک واحد در راستای محور x به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس طول و عرض همه نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار توابع f و g در نقطه‌ای با کدام طول اشتراک دارند؟

$$\frac{3}{2} (4)$$

$$-\frac{3}{2} (3)$$

$$\frac{2}{3} (2)$$

$$-\frac{2}{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

تبدیل نمودار:

درس Box

• اگر نمودار تابع f را k واحد به راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(x - k)$ به دست می‌آید. ($k > 0$)

• اگر نمودار تابع f را k واحد به چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(x + k)$ به دست می‌آید. ($k > 0$)

• اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را در k ضرب کنیم، نمودار تابع $y = f(\frac{x}{k})$ به دست می‌آید.

• اگر عرض نقاط روی نمودار تابع f را در k ضرب کنیم، نمودار تابع $y = kf(x)$ به دست می‌آید.

گام اول: ابتدا تبدیلات گفته‌شده را به ترتیب روی نمودار تابع f اعمال می‌کنیم تا ضابطه تابع g به دست آید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = \frac{1}{x-1}$$

$$\xrightarrow[\text{طول و عرض را دو برابر می‌کنیم}]{g(x) = 2 \times \frac{1}{\frac{x}{2}-1}} \Rightarrow g(x) = \frac{4}{x-2}$$

گام دوم: برای به دست آوردن طول نقطه اشتراک نمودارهای این دو تابع، باید معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{x-2} \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{4x = x-2} 4x = x-2 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

۵ اگر $x \in (\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}) - \{\frac{\pi}{4}\}$ و $\tan 2x = \frac{2m+1}{m+3}$ باشد، حدود m کدام است؟

$$-2 < m < \frac{4}{3} \quad (2)$$

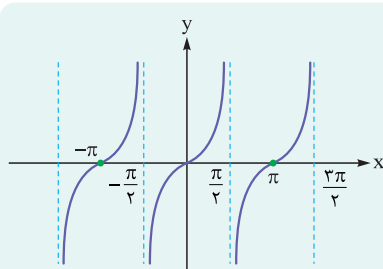
$$-\frac{4}{3} < m < 2 \quad (1)$$

$$m > \frac{4}{3} \text{ یا } m < -2 \quad (4)$$

$$m > 2 \text{ یا } m < -\frac{4}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع $y = \tan x$:

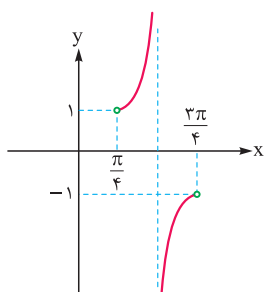


درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا محدوده مکان $2x$ را به دست می آوریم:

$$\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}; x \neq \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{4} < 2x < \frac{3\pi}{4}; 2x \neq \frac{\pi}{2}$$

گام دوم: حالا با استفاده از نمودار تابع تانژانت، حدود $\tan 2x$ را به دست می آوریم:



پس حدود عبارت $\tan 2x$ ، $\mathbb{R} - [-1, 1]$ است. دقت کنید: $\tan \frac{3\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$.

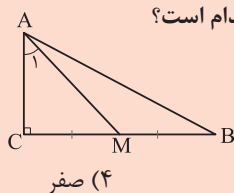
گام سوم: پس حدود عبارت $\frac{2m+1}{m+3}$ نیز $\mathbb{R} - [-1, 1]$ است. برای سادگی فرض می کنیم حدود عبارت مورد نظر بازه $[-1, 1]$ باشد:

$$-1 \leq \frac{2m+1}{m+3} = 2 - \frac{5}{m+3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -\frac{5}{m+3} \leq -1 \Rightarrow 1 \leq \frac{5}{m+3} \leq 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3} \leq \frac{m+3}{5} \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{3} \leq m+3 \leq 5$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq m \leq 2$$

پاسخ درست ما متمم محدوده بالا است، یعنی $m > 2$ یا $m < -\frac{4}{3}$.

در شکل زیر زاویه $\hat{A}_1$ به اندازه 45° از زاویه $\hat{B}$ بیشتر است. حاصل $\cot \hat{B} - 2 \tan \hat{B}$ کدام است؟



$$\hat{A}_1 = \hat{B} + 45^\circ$$

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲/۵

(۱) ۲

پاسخ: گزینه ۲

همه رو بر حسب $\tan \hat{B}$ بنویس.

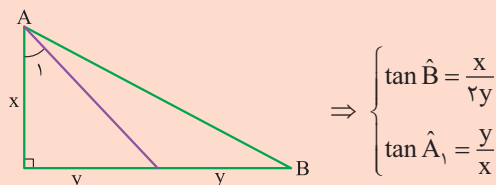
Hint

اتحاد تانژانت مجموع و تفاضل کمان:

درس Box

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \\ \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: شکل مقابل را داریم:



و می توان نتیجه گرفت که:

$$\tan \hat{A}_1 = \frac{1}{2 \tan \hat{B}}$$

گام دوم: طبق فرض داریم: $\hat{A}_1 = 45^\circ + \hat{B}$. حالا $\tan \hat{A}_1$ را بر حسب $\tan \hat{B}$ می نویسیم:

$$\tan \hat{A}_1 = \frac{1 + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{B}}$$

این تساوی را در تساوی گام اول جای گذاری می کنیم:

$$\frac{1 + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{B}} = \frac{1}{2 \tan \hat{B}} \Rightarrow 2 \tan^2 \hat{B} + 2 \tan \hat{B} = 1 - \tan \hat{B} \Rightarrow 2 \tan^2 \hat{B} + 3 \tan \hat{B} - 1 = 0 \quad (*)$$

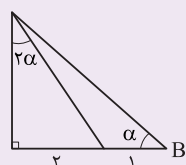
گام سوم: عبارت خواسته سؤال را باز نویسی می کنیم:

$$\cot \hat{B} - 2 \tan \hat{B} = \frac{1}{\tan \hat{B}} - 2 \tan \hat{B} = \frac{1 - 2 \tan^2 \hat{B}}{\tan \hat{B}}$$

از معادله (*) استفاده می کنیم:

$$\xrightarrow{(*)} 1 - 2 \tan^2 \hat{B} = 3 \tan \hat{B} \Rightarrow \frac{1 - 2 \tan^2 \hat{B}}{\tan \hat{B}} = 3$$

(سؤال الکنکور ریاضی ۱۴۰۳ (فارج از کشور))

در شکل زیر، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

کنکور

کمترین فاصله بین صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = \sin x + \cos 3x$ کدام است؟

۷

جوابهای معادله $f(x) = 0$

$$\frac{3\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

معادلات مثلثاتی:

درس Box

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \theta_0 \\ \theta = 2k\pi + \pi - \theta_0 \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \\ \cos \theta &= \cos \theta_0 \Rightarrow \theta = 2k\pi \pm \theta_0 \end{aligned}$$

گام اول: صفرهای تابع، جوابهای معادله $f(x) = 0$ هستند، پس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sin x$$

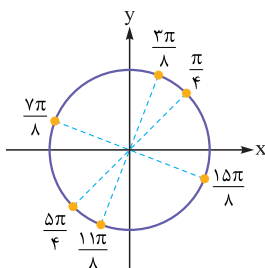
$-\sin x$ را بر حسب $\cos x$ می نویسیم:

$$-\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

گام دوم: و حالا طبق درس باکس داریم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: انتهای کمانهای جوابها را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم:



همانطور که از شکل بالا مشخص است، کمترین فاصله بین صفرها برابر $\frac{\pi}{8}$ است:

$$\begin{cases} \frac{5\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نسبت بزرگ‌ترین جواب معادله $\tan x + \cot x = 16 \cos 2x \cos 4x$ به کوچک‌ترین جواب آن در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۱۵ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اتحاد کمکی:



$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

گام اول: سمت چپ تساوی را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

پس معادله زیر را داریم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 16 \cos 2x \cos 4x$$

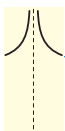
$$\frac{\frac{2}{\sin 2x}}{\frac{2}{\sin 2x} \neq 0} \rightarrow 1 = 8 \underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} \cos 4x = 4 \underbrace{\sin 4x \cos 4x}_{\frac{1}{2} \sin 8x} \Rightarrow \sin 8x = \frac{1}{4} = \sin \frac{\pi}{6}$$

گام دوم: طبق درس باکس پاسخ قبلی داریم:

$$\begin{cases} 8x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(12k+1)\pi}{48} \\ 8x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(12k+5)\pi}{48} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: جواب‌های بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{48}, \frac{5\pi}{48}, \frac{13\pi}{48}$ و $\frac{17\pi}{48}$; بنابراین بزرگ‌ترین جواب، ۱۷ برابر کوچک‌ترین جواب است.

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x-2}{ax^2 + 2\sqrt{2}x + a-1}$ در یک همسایگی $x = b$ مانند شکل زیر است. حاصل $a + b^2$ کدام است؟



$x = b$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: مطابق شکل رسم شده، حد تابع در $x = b$ ، $+\infty$ شده است. هر دو حد چپ و راست $+\infty$ شده است، این یعنی $x = b$ ریشه مضاعف عبارت درجه دوم مخرج است:

$$ax^2 + 2\sqrt{2}x + a - 1 \xrightarrow{\Delta=0} (2\sqrt{2})^2 - 4a(a-1) = 0 \Rightarrow 8 - 4a^2 + 4a = 0 \xrightarrow{:(-4)} a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 2, -1$$

گام دوم: ریشه مضاعف مخرج $-\frac{2\sqrt{2}}{2a}$ است:

$$\Rightarrow b = \frac{-2\sqrt{2}}{2a} = -\frac{\sqrt{2}}{a} = \begin{cases} \sqrt{2} ; a = -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} ; a = 2 \end{cases}$$

از طرفی حد عبارت باقی مانده در ضابطه $f(x)$ باید مثبت باشد؛ زیرا حد تابع $+\infty$ شده است:

$$\Rightarrow \frac{b-2}{a} > 0$$

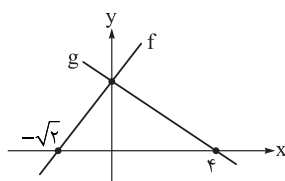
بنابراین $a = -1$ و $b = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

گام سوم: خواسته سؤال را حساب می کنیم:

$$a + b^2 = -1 + 2 = 1$$

۱۰

نمودارهای دو تابع خطی f و g در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$ کدام است؟



$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$-2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (1)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

قضیه پرتوان:

درس Box

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

یعنی در حد در ∞ ، کافی است فقط جمله با بزرگترین توان را در نظر بگیریم.

گام اول: عرض از مبدأ دو تابع f و g برابرند؛ این مقدار را h در نظر می‌گیریم و براساس آن ضابطه‌های دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$(\circ, h), (-\sqrt{2}, \circ) \in f \Rightarrow f(x) = \frac{h}{\sqrt{2}}x + h$$

$$(\circ, h), (\sqrt{2}, \circ) \in g \Rightarrow g(x) = -\frac{h}{\sqrt{2}}x + h$$

گام دوم: حالا ضابطه‌های توابع f^{-1} و g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{h}x - \sqrt{2} \\ g^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{h}x + \sqrt{2} \end{cases}$$

وارون تابع $f(x) = ax + b$ تابع $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است.

نکته

گام سوم: و حال حاصل حد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{h}x - \sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{h}x + \sqrt{2}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{h}}{\frac{\sqrt{2}}{h}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

شیب وارون تابع خطی، معکوس شیب تابع اصلی است؛ پس اگر شیب تابع خطی f برابر m_f باشد. شیب تابع f^{-1} برابر $\frac{1}{m_f}$

یه‌چور دیگه

است. به همین ترتیب شیب تابع g^{-1} برابر $\frac{1}{m_g}$ است.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)} = \frac{\frac{1}{m_f}}{\frac{1}{m_g}} = \frac{m_g}{m_f} \xrightarrow{m_f = \frac{h}{\sqrt{2}}, m_g = -\frac{h}{\sqrt{2}}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)} = \frac{-\frac{h}{\sqrt{2}}}{\frac{h}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۱ اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + mx + m - 1}{|x^2 - 1| + x + 1} = n$ باشد، عدد حقیقی n کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

حد چپ و راست رو به دست بیار و برابر قرار بده.

گام اول: در ابتدا داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x^2 + mx + m - 1 = (x + 1)(x + m - 1)$$

حدهای چپ و راست را حساب می‌کنیم:

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+m-1)}{|x^2-1|+x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+m-1)}{x^2-1+x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+m-1)}{x(x+1)} = \frac{m-2}{-1} = 2-m$$

مثبت است

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+m-1)}{|x^2-1|+x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+m-1)}{-x^2+1+x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+m-1)}{-(x+1)(x-2)} = \frac{m-2}{3}$$

منفی است

گام دوم: حدهای چپ و راست را برابر قرار می‌دهیم:

$$2-m = \frac{m-2}{3} \Rightarrow m = 2$$

در این صورت مقدار حقیقی n برابر حد تابع و برابر صفر است:

$$n = 0$$

تیزبازی

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + m - 1}{|x^2 - 1| + x + 1} = (x + m - 1) \times \frac{x + 1}{|x^2 - 1| + x + 1}$$

تابع $y = \frac{x+1}{|x^2-1|+x+1}$ در $x = -1$ حد ندارد، پس برای این که تابع f در $x = -1$ حد داشته باشد، لازم است $x + m - 1 = 0$ باشد.

عامل صفرکننده باشد، این یعنی صورت $f(x)$ در $x = -1$ ریشه مضاعف دارد و از آن جا که ریشه مخرج ساده است، حاصل حد صفر است.

تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f فقط یک خط مجانب داشته باشد،

هم مجانب افقی منظور است هم قائم.

 $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
 $\emptyset \setminus \{3\}$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

 $(-4, 4) \cup (2, 4)$
 $(-2, 2) \cup (1, 4)$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

• اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ باشد، خط $x = x_0$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

• در توابع گویا، مجانب قائم از بین ریشه‌های مخرج (پس از ساده کردن با ریشه‌های صورت) انتخاب می‌شود.

• اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ باشد، خط $y = y_0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

گام اول: خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع است؛ زیرا:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بنابراین نمودار تابع f حداقل یک خط مجانب (که آن هم افقی است) دارد و طبق فرض، دیگر هیچ خط مجانبی نباید داشته باشد.

گام دوم: ضابطه تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\text{صورت: } x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\text{مخرج: } x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x^2 + ax + 4} ; x \neq 1$$

گام سوم: نمودار تابع f نباید هیچ مجانب قائمی داشته باشد، پس مخرج کسر بالا نباید ریشه داشته باشد، یعنی Δ آن منفی باشد:

$$x^2 + ax + 4 \neq 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < a < 4$$

ریاضیات

۱۳

مجموع ۲۱ جمله اول یک دنباله حسابی برابر صفر شده است. جمله چندم این دنباله صفر است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس باکس و نکته رو حتماً بخون.

Hint

درس Box

دنباله حسابی:

جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت d به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d) = d\left[n - \left(1 - \frac{a_1}{d}\right)\right]$$

مجموع n جمله اول دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = \frac{d}{2}n\left[n - \left(1 - \frac{2a_1}{d}\right)\right]$$

از روابط بالا نتیجه می شود که اگر جمله $\left(1 - \frac{a_1}{d}\right)$ ام دنباله حسابی صفر شود، مجموع $\left(1 - \frac{2a_1}{d}\right)$ جمله اول صفر می شود، به بیان دیگر اگر جمله N ام دنباله حسابی صفر شود، S_{2N-1} صفر می شود.

طبق درس باکس و نکته، داریم:

$$2N-1=21 \Rightarrow N=11$$

یعنی جمله یازدهم دنباله، صفر است.

$$S_{21} = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a_1 + 20d] = 0 \Rightarrow a_1 + 10d = a_{11} = 0$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

په جور دیگه

ریشه پنجم عدد $\sqrt[4]{24} \sqrt[3]{144} \times \sqrt[6]{486}$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{6}} \quad (۳)$$

$$\sqrt[4]{6} \quad (۲)$$

$$\sqrt{6} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

همه عددها رو برحسب توان‌های ۲ و ۳ تجزیه کن.

 Hint

 درسی Box

ویژگی‌های رادیکال:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ \sqrt[n]{a^m} = k \sqrt[n]{a^{km}} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا داریم:

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$144 = 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$$

$$486 = 2 \times 243 = 2 \times 3^5$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[4]{24} \sqrt[3]{144} \times \sqrt[6]{486} = \sqrt[4]{2^3 \times 3} \times \sqrt[3]{2^4 \times 3^2} \times \sqrt[6]{2 \times 3^5}$$

گام دوم: توان‌های ۲ و ۳ را در عدد A به دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم:

$$A = 2^{\frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = 2^{\frac{15}{12}} \times 3^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{5}{6}}$$

گام سوم: حالا باید ریشه پنجم عدد A را به دست آوریم:

$$\sqrt[5]{A} = \sqrt[5]{2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

و عدد حاصل را بر $\sqrt{6}$ تقسیم کنیم:

$$\frac{\sqrt[5]{A}}{\sqrt{6}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} \times \frac{3^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \times \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$$

ریاضیات

۱۵

سهمی $y = x^2 + ax + a - 1$ به ازای دو مقدار a بر نیمساز نواحی اول و سوم مماس می شود. اختلاف مقادیر a کدام است؟

Δ ی معادله حاصل از تقاطع صفر است.

خط $y = x$

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

اگر خطی بر یک سهمی مماس شود، Δ ی معادله درجه دوم حاصل از تقاطع این دو باید صفر شود.

نکته

گام اول: سهمی را با خط $y = x$ قطع می دهیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x^2 + ax + a - 1 = x \Rightarrow x^2 + (a - 1)x + a - 1 = 0$$

گام دوم: برای مماس بودن خط بر سهمی لازم است که Δ ی معادله بالا صفر شود:

$$\Delta = (a - 1)^2 - 4(a - 1) = (a - 1)(a - 1 - 4) = (a - 1)(a - 5) \xrightarrow{\Delta=0} a = 1, a = 5$$

اختلاف مقادیر a برابر ۴ است.

اختلاف جذر جواب‌های معادله $x^2 + 1 = 6x$ کدام است؟

$\sqrt{\beta}$ و $\sqrt{\alpha}$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

اگر α و β جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، مجموع جواب‌ها $S = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب جواب‌ها $P = \frac{c}{a}$ است.

روابط تکمیلی زیر را بین α و β داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2}{P} - 2$$

$$|\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}| = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$$

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{P(S + 2\sqrt{P})}$$

$$\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} = \sqrt{S^3 - 3SP + 2P\sqrt{P}}$$

گام اول: جواب‌های معادله را α و β می‌گیریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 6 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

لازم به ذکر است که هر دو جواب، مثبت‌اند.

گام دوم: اختلاف جذر جواب‌ها عبارت $A = |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|$ است. آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^2 = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = S - 2\sqrt{P} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} \xrightarrow{S=6, P=1} A = \sqrt{6 - 2} = 2$$



۱۷ از معادله $\frac{1}{2-\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2+\sqrt{x-3}} = \frac{a}{\sqrt{x-3}}$ یک جواب برای x به دست می‌آید. a چند مقدار صحیح نمی‌تواند داشته باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: عبارت $\sqrt{x-3}$ خیلی در معادله تکرار شده است، پس آن را متغیر جدید t می‌گیریم:

$$\xrightarrow{t>0} \frac{1}{2-t} - \frac{1}{2+t} = \frac{a}{t}$$

گام دوم: سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2+t-(2-t)}{4-t^2} = \frac{a}{t} \Rightarrow \frac{2t}{4-t^2} = \frac{a}{t}$$

پس طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2t^2 = 4a - at^2 \Rightarrow (2+a)t^2 = 4a \Rightarrow t^2 = \frac{4a}{2+a}$$

گام سوم: t^2 مثبت است، پس باید $\frac{4a}{2+a}$ نیز مثبت باشد:

$$\frac{4a}{2+a} = 4 - \frac{8}{a+2} > 0 \Rightarrow \frac{8}{a+2} < 4 \Rightarrow \begin{cases} a+2 < 0 \Rightarrow a < -2 \\ \text{یا} \\ a+2 > 2 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$$

یعنی a نمی‌تواند سه مقدار صحیح -2 ، -1 و 0 را داشته باشد.

دو ضلع مجاور یک مستطیل روی خطوط $y + mx = m - 1$ و $(2m - 1)y + 2x = m$ قرار دارند. اگر مبدأ مختصات،

بر هم عمودند.

یک رأس آن باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

$$\frac{2}{17} (4)$$

$$\frac{3}{34} (3)$$

$$\frac{5}{34} (2)$$

$$\frac{7}{34} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

• شیب خط معادله $ax + by = c$ از رابطه $m = -\frac{a}{b}$ به دست می آید.

• اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب های آنها -1 می شود.

• فاصله نقطه مبدأ مختصات از خط $ax + by = c$ از رابطه $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا شیب دو ضلع مجاور مستطیل را به دست می آوریم:

$$y + mx = m - 1 \Rightarrow \text{شیب} = -m$$

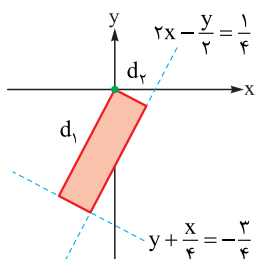
$$(2m - 1)y + 2x = m \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{2m - 1}$$

چون معادله خطوط، مربوط به اضلاع مجاور هستند، پس خطوط بر هم عمودند، یعنی حاصل ضرب شیب های آنها برابر -1 است:

$$\Rightarrow \frac{2m}{2m - 1} = -1 \Rightarrow 2m = -2m + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

پس خط های $-\frac{1}{4}y + 2x = \frac{1}{4}$ و $y + \frac{x}{4} = -\frac{3}{4}$ را داریم.

گام دوم: هیچ کدام از این دو خط از مبدأ مختصات نمی گذرند، پس فاصله مبدأ مختصات از این دو خط برابر طول اضلاع مستطیل است:



$$\begin{cases} d_1 = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + (\frac{1}{4})^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \\ d_2 = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{4 + (-\frac{1}{2})^2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{17}} \end{cases}$$

درس باکس →

بنابراین مساحت مستطیل برابر $d_1 \times d_2 = \frac{3}{34}$ است.

۱۹ ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ m & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست. مجموع درایه های آن کدام است؟

۲ (۲)

(۱) صفر

۱۰ (۴)

۳ (۳)

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال های امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ درس هندسه (۳) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۴

باید $|A| = 0$.

Hint

(۱) ماتریس مربعی A زمانی وارون پذیر است که $|A| \neq 0$.

درس Box

(۲) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با $|A| = ad - bc$.پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: شرط آن که ماتریس مربعی A وارون پذیر نباشد، آن است که $|A| = 0$ ، پس:

$$A = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ m & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2(m+1) - 3m = -m + 2 \xrightarrow{|A|=0} m = 2$$

گام دوم: پس ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ که مجموع درایه های آن برابر با ۱۰ است.

مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & 2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد. (سؤال ۸ - امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)



۲۰. برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$ ، آن‌گاه $|D|$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ماتریس C را به دست می‌آوریم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: حال ماتریس D را حساب می‌کنیم:

$$D = B \times C \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

گام سوم: دترمینان ماتریس D را حساب می‌کنیم:

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 20 = 16$$

گام اول: در رابطه مربوط به ماتریس D ، ماتریس C را جایگزین می‌کنیم:

$$D = B \times C \times A = B \times A \times B \times A = (B \times A)^2 \Rightarrow |D| = |B \times A|^2$$

گام دوم: ماتریس $B \times A$ را حساب می‌کنیم:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |B \times A| = -4$$

گام سوم: دترمینان D را حساب می‌کنیم:

$$|D| = |B \times A|^2 = 16$$

یه‌چور دیگه

برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

(سوال ۳۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

۴ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

کنکور

۲۱ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} i+j ; i \geq j \\ \frac{ij}{i-j} ; i < j \end{cases}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A - 2I$ کدام است؟

(۱) ۶۱/۵

(۲) ۷۵/۵

(۳) -۷۷/۵

(۴) -۸۲/۵

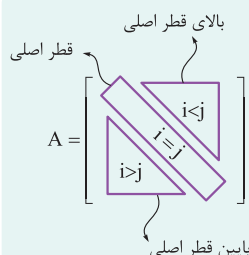
مشاوره

به کمک درایه عمومی آن و «محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 »، هر دو از مباحث مهم، هم در آزمون‌های تشریحی و هم در آزمون‌های تستی هستند، در نتیجه این سؤال، سؤال بسیار مهمی از فصل اول هندسه (۳) است.

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) در ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ، رابطه بین شماره سطر (i) و شماره ستون j به صورت مقابل است.



(۲) برای محاسبه دترمینان هر ماتریس 3×3 ، می‌توان آن را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود. مثلاً اگر بخواهیم دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه کنیم، داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مجموع شماره سطر و ستون a_{11}

دترمینان حاصل از حذف سطر و ستونی که a_{11} در آن قرار دارد.

(۳) اگر در بین درایه‌های یک ماتریس 3×3 عدد صفر وجود داشته باشد، بهتر است برای ساده‌شدن محاسبات، دترمینان را برحسب سطر یا ستونی که بیشترین صفر در آن وجود دارد، محاسبه کنیم.

گام اول: ماتریس A را به کمک درایه عمومی آن مشخص می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس $A - 2I$ را به دست می‌آوریم:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

گام سوم: برای محاسبه حاصل $|A - 2I|$ ، مقدار آن را برحسب سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - \frac{3}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 36 - \frac{3}{2} \times 7 = 72 - 10\frac{1}{2} = 61\frac{1}{2}$$

ریاضیات

۲۲

خط d و پاره خط AB موازی با آن در صفحه مفروض اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و فاصله آن از خط d به اندازه طول پاره خط AB باشد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی شمار

مشاوره این سؤال با توجه به مفاهیم مکان هندسی‌های معروف در صفحه و مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۹ کتاب درسی هندسه (۳) طراحی شده است.

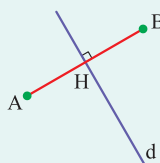
پاسخ: گزینه ۳

طول پاره خط AB می‌تواند برابر هر عدد حقیقی دلخواه باشد.

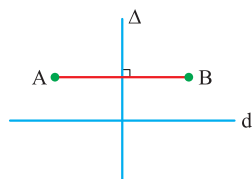
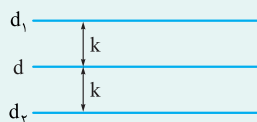
Hint

درس: Box

(۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره خط AB است.

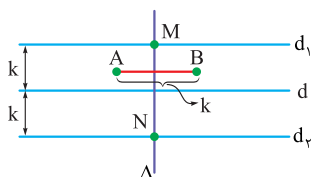


(۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k باشند، دو خط موازی با d در طرفین آن و به فاصله k از آن هستند.



گام اول: خط d و پاره خط AB موازی با d را مطابق شکل در نظر بگیرید. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، خط Δ عمودمنصف پاره خط AB است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: فرض کنید طول پاره خط AB برابر k باشد ($k > 0$). در این صورت مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از خط d برابر k (طول پاره خط AB) باشد، دو خط d_1 و d_2 در طرفین خط d هستند که فاصله هر کدام از آن‌ها از خط d برابر k است.

گام سوم: مطابق شکل، نقاط برخورد خط Δ با دو خط d_1 و d_2 ، یعنی نقاط M و N جواب‌های مسئله هستند، یعنی هم از نقاط A و B به یک فاصله هستند و هم فاصله آن‌ها از خط d ، دقیقاً برابر طول پاره خط AB است.

ریاضیات

۲۳ اگر k عددی صحیح باشد، مساحت کوچک‌ترین دایره به معادله $x^2 + y^2 - 3x + 5y + k = 0$ ، چند برابر π است؟

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

🗨 مشاوره این سؤال، با ایده گرفتن از تمرین ۲ در صفحه ۴۶ کتاب درسی هندسه (۳) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱

شرط دایره بودن معادله گسترده را اعمال کنید.

💡 Hint

📦 درسی Box

می‌دانیم اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، معادله گسترده یک دایره باشد، طول شعاع این دایره از رابطه $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ به دست می‌آید، اما این معادله گسترده می‌تواند یک دایره را مشخص نکند. شرط آن که این معادله گسترده، مربوط به یک دایره باشد، آن است که در فرمول محاسبه طول شعاع، عددی که زیر رادیکال قرار می‌گیرد، مثبت باشد، یعنی $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$.

گام اول: با توجه به درس باکس، برای آن که معادله $x^2 + y^2 - 3x + 5y + k = 0$ یک دایره را مشخص کند، باید:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - k > 0 \Rightarrow \frac{9}{4} + \frac{25}{4} - k > 0 \Rightarrow \frac{34}{4} - k > 0 \Rightarrow k < \frac{34}{4} = 8.5$$

گام دوم: با شرط $k < 8.5$ ، معادله $x^2 + y^2 - 3x + 5y + k = 0$ یک دایره را مشخص می‌کند. که شعاع آن برابر است با $r = \sqrt{8.5 - k}$ ، پس هر چه k بزرگ‌تر باشد، r کوچک‌تر خواهد بود.

گام سوم: با توضیحی که در گام قبل دادیم، اگر k عددی صحیح باشد، کم‌ترین مقدار شعاع، به ازای $k = 8$ به دست می‌آید، یعنی $r = \sqrt{8.5 - 8} = \sqrt{0.5}$ ، پس مساحت کوچک‌ترین دایره برابر است با:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi (\sqrt{0.5})^2 = \frac{1}{2} \pi$$

✓ پاسخ خیلی تشریحی

دو دایره که شعاع یکی دو برابر دیگری است و مرکز دایره کوچک‌تر روی محیط دایره بزرگ‌تر قرار دارد، مفروض‌اند. عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره، نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه محورهای مختصات است. اگر نقطه $(-2, 3)$ مرکز دایره بزرگ‌تر باشد، مجموع طول‌های نقاط برخورد کدام است؟

$$-4/7 (2)$$

$$5/75 (1)$$

$$4/7 (4)$$

$$-5/75 (3)$$

مشاوره این سؤال بسیار دشوار، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۲ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

(۱) بازتاب نقطه $A(\alpha, \beta)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات، نقطه $A'(-\beta, -\alpha)$ است.

(۲) معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است.

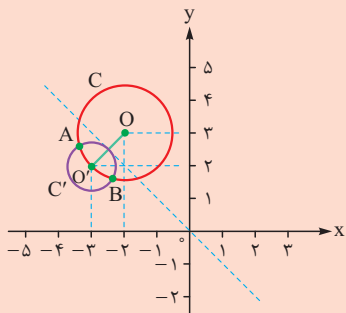
(۳) برای به دست آوردن معادله وترمشترک دو دایره متقاطع، معادله‌های آن‌ها را از هم کم می‌کنیم تا معادله یک خط حاصل شود.

(۴) برای به دست آوردن نقاط تقاطع دو دایره، ابتدا معادله وترمشترک آن دو را به دست آورده و نقاط برخورد وترمشترک را با یکی از آن‌ها به دست می‌آوریم.

(۵) اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه حقیقی باشد، مجموع آن دو ریشه برابر است با $-\frac{b}{a}$.

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: چون عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره، نیمساز ربع دوم و چهارم است، پس مختصات مرکز دایره کوچک‌تر، نقطه $O(-y_0, -x_0) = (-3, 2)$ است.

گام سوم: چون دایره بزرگ‌تر از نقطه O' می‌گذرد، پس شعاع آن برابر با طول پاره خط OO' است؛ یعنی:

$$R = OO' = \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2}$$

$$R' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام چهارم: معادلات این دو دایره به صورت زیر هستند:

$$C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2, \quad C': (x+3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0 \\ C': x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12/5 = 0 \end{cases}$$

گام پنجم: اگر معادله‌های این دو دایره را از هم کم کنیم، معادله وترمشترک دو دایره به دست می‌آید و داریم:

$$C' - C: 2x + 2y + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow y = -x - \frac{3}{4}$$

گام ششم: این خط را با یکی از دایره‌ها (مثلاً دایره C) تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = -x - \frac{3}{4} \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2 + (-x - \frac{3}{4} - 3)^2 = 2 \Rightarrow (x+2)^2 + (-x - 3\frac{3}{4})^2 = 2$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 7\frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4} = 2$$

$$2x^2 + 11\frac{1}{2}x + \dots = 0$$

ریشه‌های این معادله، طول‌های نقاط A و B هستند، پس:

$$x_A + x_B = -\frac{b}{a} = -\frac{11/5}{2} = -5/2$$

خط d به معادله $y - x = 0$ ، عمودمنصف خط‌المركزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس باشد، حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

(سوال ۳۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

$$\frac{65}{64} \quad (4)$$

$$\frac{65}{32} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

کنکور

چند مثلث به طول اضلاع ۵، x و ۳ می‌توان رسم کرد که در آن، اندازه یک ضلع واسطه هندسی دو ضلع دیگر باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) اگر x واسطه هندسی y و z باشد، آن‌گاه $x^2 = y.z$.

(۲) سه عدد مثبت، زمانی می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که بزرگ‌ترین آن‌ها از مجموع دوتای دیگر، کوچک‌تر باشد.

گام اول: سه حالت در نظر می‌گیریم و در هر حالت مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

حالت اول: $3 \times 5 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{15}$ ، ۳، ۵: طول اضلاع $\Rightarrow x = \sqrt{15}$

حالت دوم: $3x = 5^2 \Rightarrow x = \frac{25}{3}$ ، ۳، $\frac{25}{3}$ ، ۵: طول اضلاع $\Rightarrow x = \frac{25}{3}$

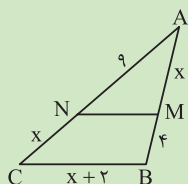
حالت سوم: $5x = 3^2 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$ ، ۳، $\frac{9}{5}$ ، ۵: طول اضلاع $\Rightarrow x = \frac{9}{5}$

گام دوم: در حالت اول، از آن‌جا که $5 < 3 + \sqrt{15}$ ، می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۳، ۵ و $\sqrt{15}$ رسم کرد.

در حالت دوم، از آن‌جا که $\frac{25}{3} > 5 + 3$ ، نمی‌توان مثلثی به طول اضلاع ۳، ۵ و $\frac{25}{3}$ رسم کرد.

در حالت سوم: از آن‌جا که $5 > 3 + \frac{9}{5}$ ، نمی‌توان مثلثی به طول اضلاع ۳، ۵ و $\frac{9}{5}$ رسم کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۲۶ در شکل مقابل، MN با BC موازی است. محیط مثلث کوچک تر کدام است؟

$$۱۹/۶ (۲)$$

$$۱۹/۲ (۴)$$

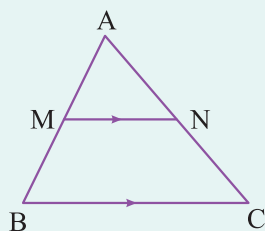
$$۱۹/۸ (۱)$$

$$۱۹/۴ (۳)$$

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسی هندسه (۱) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱

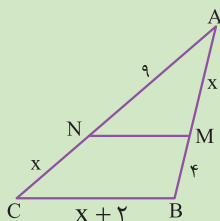
مطابق شکل، در مثلث ABC اگر دو نقطه M و N را به ترتیب روی AB و AC طوری انتخاب کنیم که MN با BC موازی باشد، آن‌گاه:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \text{ (قضیه تالس)}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \text{ (تعمیم قضیه تالس)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** بنا به قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:



$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

گام دوم: بنا به تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{MN}{19} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{MN}{19} \Rightarrow MN = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$

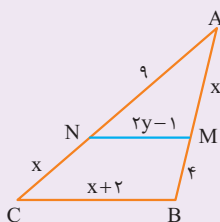
گام سوم: خواسته سؤال، برابر است با:

$$AN + MN + AM = 9 + \frac{24}{5} + 6 = \frac{19}{1}$$

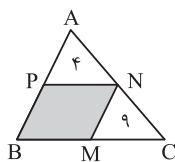
(هندسه (۱)، تمرین ۳، صفحه ۳۶ کتاب درسی)

در شکل زیر $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.

کتاب درسی



در شکل زیر، چهارضلعی رنگی متوازی الاضلاع و مساحت دو مثلث کوچک تر، درون آن ها نوشته شده است. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟



۱۳ (۲)

۱۴ (۱)

۱۲ (۴)

۱۵ (۳)

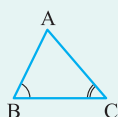
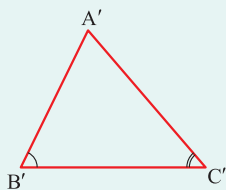
پاسخ: گزینه ۴

سه مثلث APN، NMC و ABC متشابه اند.

Hint

درس Box

(۱) اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه اند.



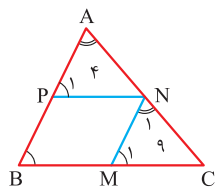
$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

(۲) اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت مساحت های آن ها برابر با مجذور نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) آن ها است.

$$\text{اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{، آن گاه } \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \text{ (۳)}$$

گام اول: به دلیل قضیه موازی - مورب، $\hat{A} = \hat{N}$ و $\hat{P} = \hat{B} = \hat{M}$ ؛ بنابراین طبق حالت تساوی دو زاویه، مثلث های APN، ABC و NMC با هم متشابه اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: به دلیل تشابه دو مثلث APN و NMC داریم:

$$\frac{S_{APN}}{S_{NMC}} = \left(\frac{AN}{NC}\right)^2 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AN+NC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$$

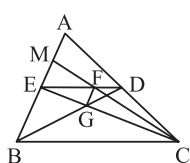
گام سوم: دو مثلث APN و ABC نیز متشابه اند، پس داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{APN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{4}{S_{ABC}} = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{ABC} = 25$$

گام چهارم: در نهایت داریم:

$$S_{BMNP} = S_{ABC} - S_{APN} - S_{NMC} = 25 - 4 - 9 = 12$$

در شکل زیر، نقاط D، E و M به ترتیب وسط‌های AC، AB و AE هستند. حاصل $\frac{GF}{AB}$ کدام است؟ **۲۸**



$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

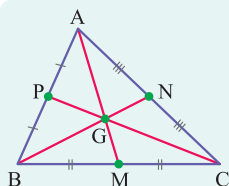
پاسخ: گزینه ۲

G و F به ترتیب محل هم‌رسی میانه‌های دو مثلث ABC و ACE هستند.

Hint

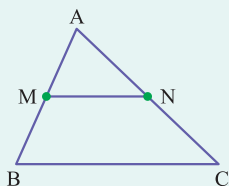
درس‌Box

(۱) میانه‌های هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطه هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\frac{GM}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GP}{CP} = \frac{1}{3}$$

(۲) بنا به عکس قضیه تالس در مثلث، اگر در مثلث ABC، دو نقطه M و N را به ترتیب روی AB و AC طوری در نظر بگیریم که $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ، آن‌گاه $MN \parallel BC$.

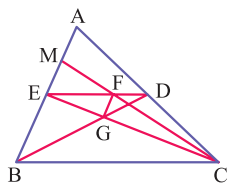


گام اول: در مثلث ABC، BD و CE میانه هستند، پس نقطه تقاطع آن‌ها یعنی G نقطه هم‌رسی میانه‌هاست، پس $\frac{GD}{BD} = \frac{1}{3}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: در مثلث ACE، DE میانه نظیر ضلع AC و CM میانه نظیر ضلع AE است، پس F نقطه هم‌رسی میانه‌هاست؛

$$\text{بنابراین } \frac{DF}{DE} = \frac{1}{3}$$



گام سوم: در مثلث BED، داریم:

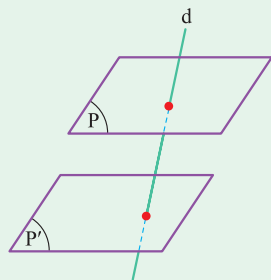
$$\frac{DF}{DE} = \frac{GD}{BD} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} GF \parallel BE \Rightarrow \frac{GF}{BE} = \frac{DF}{DE} = \frac{1}{3} \Rightarrow GF = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} \times \frac{AB}{2} = \frac{1}{6} AB$$

برای رسم خطی موازی با صفحه P که هر دو خط متناظر L و L' را قطع کند، در کدام حالت حتماً بی‌شمار جواب وجود دارد؟

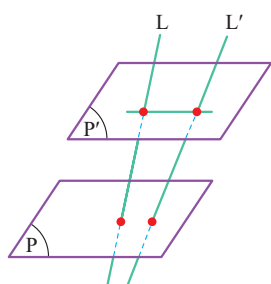
- (۱) L و L' هر دو با P موازی باشند.
- (۲) L موازی با P و L' با P متقاطع باشد.
- (۳) L بر P عمود و L' با P موازی باشد.
- (۴) L و L' هر دو با P متقاطع باشند.

پاسخ: گزینه ۴

اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.



با توجه به نکته بالا، در حالتی که هر دو خط L و L' با صفحه P متقاطع باشند، هر صفحه موازی با P ، هر دو خط L و L' را قطع می‌کند و از به هم وصل کردن دو نقطه تقاطع یک جواب به وجود می‌آید.

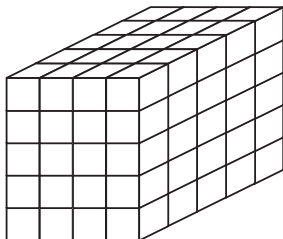


پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

۳۰

مکعب مستطیل شکل زیر را که از تعدادی مکعب واحد کوچک تشکیل شده است، در یک ظرف پر از رنگ فرو برده و سپس آن را بیرون می آوریم. تعداد مکعب های کوچکی که فقط یک وجه آن ها رنگی شده باشد، کدام است؟



۲۱ (۱)

۴۲ (۲)

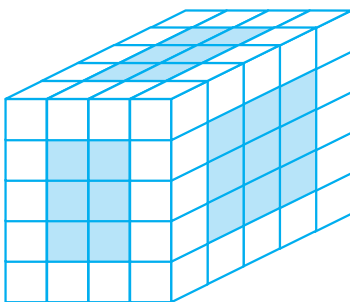
۲۴ (۳)

۴۸ (۴)

مشاوره این سؤال، برگرفته از کتاب درسی است و مشابه آن در کنکور سراسری هم مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۲

مکعب های کوچکی را که فقط یک وجه آن ها رنگی می شود در شکل نمایش داده ایم. توجه داشته باشیم که همین تعداد مکعب نیز در وجه های مقابل آن ها (که در شکل دیده نمی شوند) وجود دارند. تعداد آن ها برابر است با:



$42 = 2(3 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 3)$ = تعداد مکعب های کوچکی که فقط یک وجه آن ها رنگی شده اند.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح $a-1$ و $b+1$ برابر $3d$ است. کدام نتیجه گیری ممکن است نادرست باشد؟

$$d \mid a+b \quad (2)$$

$$9 \mid ab-1 \quad (1)$$

$$9 \mid ab+a-b-1 \quad (4)$$

$$9d^2 \mid (a+b)^2 \quad (3)$$

مشاوره درست است که در نظریه اعداد، هم‌نهمی مهم‌تر از بقیه مباحث است، اما در سال‌های گذشته رابطه عادکردن پای ثابت سؤال‌های کنکور بوده است.

پاسخ: گزینه ۱

$$3d \mid a-1 \text{ و } 3d \mid b+1$$

Hint

درس: Box

ب.م.م: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم a و b هر دو با هم صفر نیستند و می‌نویسیم $(a, b) = d$. هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند و اگر دو شرط زیر برقرار باشد، آن‌گاه $(a, b) = d$.

$$d \mid a, d \mid b \quad (\text{الف})$$

$$\forall m > 0; m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d \quad (\text{ب})$$

ویژگی‌های عادکردن:

از رابطه $a \mid b$ چه نتایجی می‌توانیم بگیریم	
$\pm a \mid \pm b$	علامت مهم نیست.
$ka \mid kb$	دو طرف را در عدد صحیح دلخواه k ضرب کنیم.
$a^n \mid b^n$	دو طرف را به توان عدد طبیعی دلخواه n برسانیم.
$a \mid b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی n برسانیم (b را چاق کنیم).
$a \mid kb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح k ضرب کنیم (b را چاق کنیم).
$ a \leq b $ (باید $b \neq 0$)	قدرمطلق سمت راست بزرگ‌تر یا مساوی قدرمطلق سمت چپ است.
به جای a می‌توانیم مقسوم علیه آن را قرار دهیم (a را لاغر کنیم).	

از دو رابطه $a \mid b$ و $a \mid c$ چه نتایجی می‌توانیم بگیریم	
$a \mid b \pm c$	سمت راست‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم.
$a \mid mb \pm nc$	سمت راست‌ها را در عدد صحیح دلخواه ضرب کرده و بعد جمع و تفریق کنیم.

گام اول: ب.م.م، هر دو عدد را عاد می‌کند، پس داریم:

$$\begin{cases} 3d \mid a-1 \\ 3d \mid b+1 \end{cases}$$

گام دوم: سمت راست دو رابطه عادکردن را می‌توانیم جمع یا تفریق کنیم:

$$3d \mid a+b$$

گام سوم: می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم، پس $9d^2 \mid (a+b)^2$ یا این‌که سمت چپ را لاغر کنیم، پس $d \mid a+b$. پس گزینه‌های (۲) و (۳) درست هستند.

گام چهارم: دو طرف رابطه عادکردن را می‌توانیم در هم ضرب کنیم، پس $9d^2 \mid ab+a-b-1 \Rightarrow (3d)(3d) \mid (a-1)(b+1)$. با لاغر کردن سمت چپ، گزینه (۴) هم درست است.

حواست باشه: اگر $a=4$ و $b=2$ ، واضح است که $9 \nmid ab-1$ و گزینه (۱) غلط است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۲ باقی مانده تقسیم عدد $(1 + 2^{26})(1 - 16^{71})$ بر ۱۳ کدام است؟

۱۲ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

توان های ۲ و ۳ رو جست و جو کن و سعی کن عددی هم نهشت ۱ یا -۱ به پیمانه ۱۳ پیدا کنی.

درس Box

هم نهشتی:

$$a \equiv b \Leftrightarrow m \mid a - b \Leftrightarrow a \in [b]_m$$

ویژگی های هم نهشتی اگر $a \equiv b \pmod m$ آن گاه
$a + c \equiv b + c \pmod m$
$ca \equiv cb \pmod m$
$a^n \equiv b^n \pmod m$
$a \equiv b \pm mk \pmod m$
اگر $n \mid m$ ، آن گاه $a \equiv b \pmod n$.

به دست آوردن باقی مانده اعداد توان دار:

- ۱) اگر a عددی بزرگ باشد، هم نهشت آن به پیمانه m که کوچک تر از آن است (منفی یا مثبت مهم نیست) را قرار می دهیم.
- ۲) توانی از a را پیدا می کنیم که هم نهشت ۱ یا -۱ به پیمانه m باشد (اگر نشد، سعی می کنیم توانی از a که هم نهشت عدد کوچکی به پیمانه m باشد پیدا کنیم).
- ۳) با به توان رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب، a^n را می سازیم.
- قضیه فرما: اگر p اول باشد، $a \not\equiv 0 \pmod p$ ؛ آن گاه $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (در نهایی مجاز نیست).
- اگر پیمانه اول باشد، با قضیه فرما هم می توانیم رابطه هم نهشتی اولیه بنویسیم.

گام اول: سعی می کنیم با جست و جو، هم نهشتی اولیه بنویسیم و اعداد توان دار را بسازیم:

$$16 \equiv 3 \pmod{13}, \quad 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{\text{توان } 23} 3^{69} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{\times 3^2} 3^{71} \equiv 3 \pmod{13}$$

گام دوم:

$$3^6 \equiv -1 \pmod{13} \xrightarrow{\text{توان } 4} 3^{24} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{\times 2^2} 3^{26} \equiv 4 \pmod{13}$$

گام سوم: به جای اعداد، هم نهشت آن ها را قرار می دهیم:

$$(3^{71} - 1)(3^{26} + 1) \equiv (3 - 1)(4 + 1) = 40 \equiv 1 \pmod{13}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(سوال ۵ - امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۲)

باقی مانده تقسیم عدد $A = 6^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.
 امتحان
نهایی

ریاضیات

۳۳

اگر از روز سه‌شنبه به اندازه عدد مضرب ۹، $\overline{3a2}$ روز جلو برویم به کدام روز هفته می‌رسیم؟

(۱) دوشنبه (۲) چهارشنبه (۳) پنج‌شنبه (۴) جمعه

پاسخ: گزینه ۱

Hint اول از قاعده بخش‌پذیری بر ۹، a رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$\overline{3a2} \equiv 0 \Rightarrow \underbrace{3+a+2}_{5+a} \equiv 0 \xrightarrow{0 \leq a \leq 9} a = 4$$

گام دوم: باقی‌مانده عدد $\overline{342}$ بر ۷ برابر ۶ است پس کافی است از سه‌شنبه ۶ روز جلو برویم که به دوشنبه می‌رسیم.

بخش‌پذیری بر اعداد خاص:

پیمانه	قاعده	توضیح فارسی
۳ یا ۹	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n$	هر عدد به پیمانه ۳ یا ۹، هم‌نهشت مجموع ارقام خودش است.
۵ یا ۱۰ یا ۲	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0$	هر عدد، هم‌نهشت رقم یکان خود به پیمانه ۵ یا ۱۰ یا ۲ است.
۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_1 a_0$	هر عدد، هم‌نهشت دو رقم آخر (یکان و دهگان) خود به پیمانه ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ است.
۱۱	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$	ارقام را از سمت راست یکی در میان + و - می‌گذاریم. هر عدد به پیمانه ۱۱ هم‌نهشت آن است.
۸	$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_2 a_1 a_0$	هر عدد، هم‌نهشت سه رقم سمت راست به پیمانه ۸ است.

ریاضیات

۳۴

اگر رقم یکان دو عدد $(3a-5)(4a-7)$ و $(3a-7)(4a-5)$ غیر صفر و برابر باشند، رقم یکان عدد $9a+6$ کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

دو عدد رو به پیمانه 10 هم‌نهشت بگذار و بین a چی می‌تونه باشه.

گام اول: شرط برابری یکان دو عدد این است که هر دو عدد به پیمانه 10 هم‌نهشت باشند:

$$(3a-5)(4a-7) \equiv (3a-7)(4a-5) \pmod{10} \Rightarrow (3a-5)(4a-7) - (3a-7)(4a-5) \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 2a \equiv 0 \pmod{10} \xrightarrow{\div 2} a \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a \text{ بر } 5 \text{ بخش پذیر است.}$$

گام دوم: دو حالت برای a پیش می‌آید:

حالت اول: رقم یکان a برابر صفر باشد، یعنی $a \equiv 0 \pmod{10}$ ، در این صورت هر دو عدد هم‌نهشت 35 یا 5 به پیمانه، 10 هستند (قبول).

حالت دوم: رقم یکان a برابر 5 باشد، در این صورت $a \equiv 5 \pmod{10}$ و داریم:

$$3a-5 \equiv 15-5 \equiv 10 \pmod{10}$$

این حالت قبول نیست، چون گفته رقم یکان اعداد داده شده صفر نیست.

$$9a+6 \equiv 9 \times 0 + 6 \pmod{10} \Rightarrow 9a+6 \equiv 6 \pmod{10}$$

گام سوم: رقم یکان $9a+6$ برابر 6 است چون:

(سوال ۱۴۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)

دو عدد a^2-1 و $14a+6$ ، رقم یکان برابری دارند. رقم یکان a^2+a کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکور

در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۴ رابطه‌های $\Delta(G) = 5$ و $\delta(G) = 3$ برقرار است. تعداد رأس‌های درجه ۳ در این گراف، برابر کدام یک نمی‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

مشاوره در سال‌های گذشته، از درس اول گراف معمولاً یک سؤال در کنکور آمده است؛ حواستان به مفاهیم درجه و همسایگی بیشتر از بقیه چیزها باشد.

پاسخ: گزینه ۴

تعداد رأس‌های درجه ۳ و ۴ و ۵ را به ترتیب x و y و z بگیر و از رابطه مجموع درجات استفاده کن.

Hint

گام اول: درجه رأس‌های گراف را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

درجه	۳	۴	۵
تعداد	x	y	z

گام دوم: ۷ رأس داریم، پس:

$$x + y + z = 7$$

گام سوم: مجموع درجات برابر ۲۹ است، پس:

$$3x + 4y + 5z = 2 \times 14$$

گام چهارم: اگر $z = 7 - x - y$ را در رابطه گام سوم جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$3x + 4y + 5(7 - x - y) = 28 \Rightarrow 3x - 5x + 4y - 5y = -7 \Rightarrow 2x + y = 7$$

گام پنجم: به ازای $x = 4$ حاصل y منفی می‌شود، در صورتی که y تعداد رأس‌های درجه ۴ است و منفی نمی‌تواند باشد، پس $x = 4$ نمی‌تواند باشد.

نماد	مفهوم	نماد	مفهوم
$V(G)$	مجموعه رأس‌های گراف	$\lceil x \rceil$	سقف x
$E(G)$	مجموعه یال‌های گراف	G^C یا $\bar{G}$	گراف مکمل G
p	مرتبه گراف	$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گری گراف G
q	اندازه گراف	P_n	مسیر n رأسی
$\deg_G(v)$	درجه رأس v در گراف G	C_n	دور n رأسی
Δ	ماکزیمم درجه	$\sum_{i=1}^p \deg v_i$	مجموع درجات
δ	مینیمم درجه	(a, b)	
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a	$N_G[a]$	همسایگی بسته رأس a

قضیه مهم: مجموع درجه رأس‌ها برابر با دو برابر تعداد یال‌های گراف است. $(\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q)$

گراف G ، k - منتظم، ناتهی و غیر کامل از مرتبه ۹ است. اگر درجه رأس‌ها در گراف $\bar{G}$ برابر k' باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k' کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دقت کن که k فرد نیست (زوج) و ۰ و ۸ نمی‌تونه باشه.

Hint

درس‌Box

انواع گراف و ویژگی‌های آن‌ها:

ویژگی‌ها	تعریف	نماد	اسم
(۱) درجه همه رأس‌ها $p-1$ است. (۲) گراف $(p-1)$ - منتظم است. (۳) $q = \frac{p(p-1)}{2}$ (۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبه خود دارد.	گرافی که هر دو رأس در آن مجاورند (به هم وصل‌اند).	K_p	گراف کامل مرتبه P
(۱) $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$ (۲) $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p-1$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس G است. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارند.	$\bar{G}$	گراف مکمل G
(۱) $kp = 2q$ که $0 \leq k \leq p-1$. (۲) گراف فرد منتظم مرتبه فرد نداریم (از بین k و p حداقل یکی زوج باید باشد).	گرافی که درجه هر رأس برابر k است.	-	گراف k - منتظم

گام اول: مرتبه گراف منتظم فرد است، پس درجه رأس‌ها یا k باید زوج باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: اگر $k = 0$ باشد، گراف یال ندارد، پس تهی است و اگر $k = 8$ باشد هم گراف کامل است، پس $k = 2, 4, 6$ می‌تواند باشد.

گام سوم: مجموع درجه رأس در G و درجه همان رأس در $\bar{G}$ برابر $p-1$ می‌شود؛ یعنی $k + k' = 8$.

$$k = 2 \Rightarrow k' = 6$$

$$k = 4 \Rightarrow k' = 4 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر ممکن برابر } k' = 4 \Rightarrow 6 + 4 + 2 = 12$$

$$k = 6 \Rightarrow k' = 2$$

در یک گراف ۷ رأسی غیر تهی و غیر کامل K - منتظم، K چند عدد می‌تواند اختیار کند؟ (سوال ۱۵۵ کنکور ریاضی ۱۳۹۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

در گراف G از مرتبه ۵ داریم $\delta(G) = 4$. با حذف یک یال از گراف، چند دور به طول ۳ یا ۴ از گراف حذف می‌شود؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

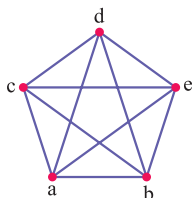
بین اگه از K_5 یک یال حذف کنی، چند دور به طول ۳ یا ۴ حذف می‌شه.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: حداکثر درجه در گراف مرتبه ۵، برابر ۴ است. از طرفی مینیمم درجه هم برابر ۴ است؛ پس درجه همه رأس‌ها برابر ۴ است و گراف کامل مرتبه ۵ است.

گام دوم: شکل گراف به صورت مقابل است:



گام سوم: کافی است مثلاً دورهای به طول ۳ یا ۴ که حتماً شامل یال ab هستند را شمارش کنیم، چون با حذف یال ab ، این دورها از گراف حذف می‌شوند.

گام چهارم: دورهای به طول ۳ شامل یال ab :

$abca, abda, abea$

دورهای به طول ۴ شامل یال ab : $abdea, abdca, abeca, abeda, abcea$ و $abcd$ ، پس ۹ دور حذف می‌شود.

حواست باشه:

(۱) با حذف یک یال از گراف کامل K_p ، $(p-2)$ دور به طول ۳ از گراف کاسته می‌شود.

(۲) با حذف یک یال از گراف کامل K_p ، $2 \times \binom{p-2}{2}$ دور به طول ۴ از گراف کاسته می‌شود.

میانگین، میانه و چارک اول هفت عدد طبیعی متمایز به ترتیب برابر ۷، ۷ و ۲ است. حداقل میانگین سه داده بزرگتر کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تا جا بگذار و میانه و چارک اول رو تو جای مناسب قرار بده. بین بقیه اعداد چی باید باشن.

Hint

درس Box

میانه:

عددی که بعد از مرتب کردن داده‌ها، در وسط قرار می‌گیرد.

فرض کنید n داده داریم. دو حالت ممکن است پیش بیاید:

(۱) **فرد باشد:** در این جا فقط یک عدد در وسط قرار می‌گیرد که همان میانه است. شماره این داده (نه خودش) $\frac{n+1}{2}$ می‌شود؛ مثلاً می‌خواهیم میانه اعداد ۳، ۱، ۱، ۷، ۲ را به دست آوریم. اول با مرتب‌سازی به ۱، ۱، ۲، ۳، ۷ می‌رسیم. ۵ تا عدد داریم. داده شماره ۳ $= \frac{5+1}{2}$ ؛ یعنی سومی که عدد ۲ باشد، میانه است.

(۲) **n زوج باشد:** در این جا دو عدد در وسط قرار می‌گیرند. شماره‌های این دو عدد $\frac{n}{2} + 1$ و $\frac{n}{2}$ است؛ مثلاً اگر ده تا عدد داشته باشیم، پنجمی و ششمی در وسط می‌افتند. معدل این دو عدد را میانه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً میانه اعداد ۱، ۱، ۲، ۵، ۷، ۱۰ معدل داده‌های سوم و چهارم، یعنی $3/5 = \frac{2+5}{2}$ می‌شود.

چارک اول و سوم:

میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم می‌گوییم. چارک اول و سوم را به ترتیب با Q_1 و Q_3 نمایش می‌دهیم. چارک دوم همان میانه است، پس میانه را با Q_2 نمایش می‌دهیم؛ مثلاً برای محاسبه چارک‌های داده‌های زیر داریم:

داده‌های بعد از میانه: ۶، ۷، ۹
 داده‌های قبل از میانه: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵
 $Q_1 = 2/5$, Q_2 , $Q_3 = 6/5$

برای محاسبه چارک اول و سوم میانه را کنار بگذارید و فقط داده‌های قبل و بعد را در نظر بگیرید.

نکته

گام اول: میانه یا داده وسطی برابر ۷ است. چارک اول برابر ۲ است؛ پس داده‌ها به صورت زیرند:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$a, 2, b, 7, c, d, e$, $a < 2 < b < 7 < c < d < e$

گام دوم: چون عددها طبیعی‌اند، پس $a = 1$ است. از طرفی میانگین برابر ۷ است، پس:

$$\frac{1+2+b+7+c+d+e}{7} = 7 \Rightarrow b+c+d+e = 39$$

گام سوم: میانگین سه داده بزرگتر برابر است با:

$$\frac{c+d+e}{3} = \frac{39-b}{3} = 13 - \frac{b}{3}$$

گام چهارم: بیشترین مقدار b برابر ۶ است، پس حداقل مقدار میانگین ۳ داده بزرگتر برابر است با:

$$13 - \frac{6}{3} = 11$$

می‌خواهیم از بین ۳۹۱ داده آماری، نمونه‌ای ۱۷ عضوی به روش سیستماتیک انتخاب کنیم. اگر شماره عدد سوم

انتخابی برابر ۵۱ باشد، انحراف معیار شماره داده‌های انتخاب شده کدام است؟

$$۱۲\sqrt{۵} \quad (۲)$$

$$۲۳\sqrt{۶} \quad (۱)$$

$$۴۶\sqrt{۶} \quad (۴)$$

$$۲۴\sqrt{۵} \quad (۳)$$

مشاوره در سال‌های گذشته، از کل آمار معمولاً یک سؤال در کنکور مطرح شده است که در اکثر مواقع از شاخص‌های پراکندگی بوده است.

پاسخ: گزینه ۴

قدر نسبت اعداد انتخاب شده رو به دست بیار و از فرمول انحراف معیار دنباله حسابی استفاده کن.

Hint

درس: Box

شاخص‌های پراکندگی:

شاخص	فرمول	توضیح فارسی
واریانس	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ یا $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$	هر داده را منهای میانگین کرده به توان ۲ می‌رسانیم، سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می‌کنیم. به زبان دیگر واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین هاست.
انحراف معیار	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	جذر واریانس است.
ضریب تغییرات	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	$\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$
واریانس ۵ عدد متوالی	۲	-
واریانس n عدد حسابی با قدرنسبت d	$\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12}\right)d^2$	اگر اعداد، تشکیل دنباله حسابی بدهند، این فرمول راحت‌تر از تعریف واریانس است.

انواع روش‌های نمونه‌گیری (اندازه نمونه برابر n و اندازه جامعه برابر N است).

روش	تعریف	شانس انتخاب هر عضو
تصادفی ساده	نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.	$\frac{n}{N}$
خوشه‌ای	نمونه‌گیری که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند، سپس همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیرد.	$\frac{n}{N}$
طبقه‌ای	روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا، یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.	اگر از هر طبقه متناسب با تعداد اعضا برداریم، همان $\frac{n}{N}$ است.
سامانمند (سیستماتیک)	نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.	$\frac{n}{N}$

حواست باشه: شماره‌های انتخاب شده به صورت ۵، ۲۸، ۵۱، ... هستند ولی تأثیری در محاسبه انحراف معیار ندارند.

ریاضیات

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $\frac{391}{17} = 23$ ، پس ۱۷ عدد با قدرنسبت ۲۳ انتخاب کرده‌ایم.

گام دوم: واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} d^2 = \frac{17^2 - 1}{12} \times 23^2 = \frac{(17-1) \times (17+1)}{12} \times 23^2 = 16 \times \frac{9}{6} \times 23^2$$

گام سوم: انحراف معیار، جذر واریانس است:

$$\sigma = \sqrt{16 \times \frac{9}{6} \times 23^2} = 4 \times 23 \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 4 \times 23 \times 3 \times \frac{\sqrt{6}}{6} = 46\sqrt{6}$$

در یک نمونه، ده داده برابر میانگین و انحراف از میانگین شش داده دیگر a ، 2 ، 2 ، -1 ، -3 ، -3 ، -3 است. اگر انحراف معیار جامعه را برابر با انحراف معیار نمونه فرض کنیم، طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی کدام است؟

$$\frac{5}{2} (4)$$

$$2 (3)$$

$$\frac{3}{2} (2)$$

$$1 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

۱۶ داده داریم. مجموع انحراف از میانگین‌ها را برابر صفر بگذار تا a به دست بیاد.

Hint

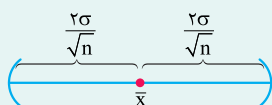
درس‌Box

برآورد بازه‌ای:

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضریب اطمینان، شهرت دارد.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$



که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

(۱) وسط بازه اطمینان همان میانگین نمونه ($\bar{x}$) است.

(۲) طول بازه اطمینان برابر با $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر داده‌ای برابر میانگین باشد، انحراف آن از میانگین برابر صفر است.

گام دوم: مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر صفر است، پس داریم:

$$-3 - 3 - 1 + 2 + 2 + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

گام سوم: ۱۶ داده داریم که واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2}{16} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

گام چهارم: $\sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ یا انحراف معیار جامعه برابر انحراف معیار نمونه است، پس $\sigma = \frac{3}{2}$.

گام پنجم:

$$\text{طول بازه اطمینان} = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4 \times \frac{3}{2}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{2}$$

اگر انحراف ۵ داده آماری از y ، به ترتیب برابر -1 ، -5 ، -6 ، -7 و ۴ باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟

(سؤال ۲۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

$$25 / 4 (4)$$

$$24 / 6 (3)$$

$$16 / 4 (2)$$

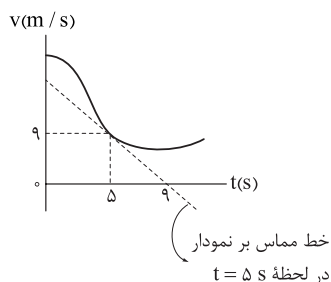
$$15 / 6 (1)$$

کنکور

فیزیک

۴۱

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه شتاب متحرک در لحظه $t = 5$ s چند متر بر مربع ثانیه است؟



(۱) $1/8$

(۲) $2/25$

(۳) $0/5$

(۴) $0/625$

پاسخ: گزینه ۲

کافی است اندازه شیب خط چین مماس را محاسبه کنید.

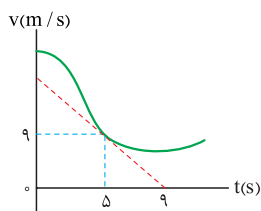
Hint

درس Box

در نمودار سرعت - زمان، شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه، برابر با شتاب لحظه‌ای است؛ یعنی در نمودار زیر، شیب خط d شتاب متحرک را در لحظه t_1 نشان می‌دهد.



شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه برابر با شتاب متحرک در آن لحظه است، در نتیجه برای محاسبه اندازه شتاب متحرک در لحظه $t = 5$ s کافی است اندازه شیب خط چین مماس بر نمودار در شکل را به دست آوریم. از آنجا که خط چین رسم شده شیب ثابت دارد، با توجه به داده‌های نمودار، اندازه شیب قسمتی از خط چین که رنگی شده را محاسبه می‌کنیم:



$$|a_{t=5s}| = \frac{9-0}{9-5} = \frac{9}{4} = 2/25 \text{ m/s}^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جابه‌جایی متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در یک بازه زمانی ۴ ثانیه‌ای برابر $\vec{i} (12 \text{ m})$ است. اگر جهت بردار مکان متحرک در لحظه $t_1 = 5 \text{ s}$ تغییر کند، بردار مکان متحرک در لحظه $t_2 = 6 \text{ s}$ بر حسب متر، کدام است؟

- (۱) $3\vec{i}$ (۲) $-3\vec{i}$
(۳) $18\vec{i}$ (۴) $-18\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱



با استفاده از داده‌های سؤال، سرعت ثابت و مکان اولیه متحرک را پیدا کنید؛ سپس با نوشتن معادله مکان - زمان و جای‌گذاری $t = 6 \text{ s}$ در معادله، بردار مکان متحرک را به دست آورید.

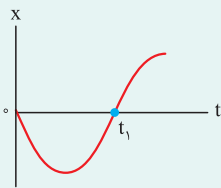
درس‌Box

(۱) در حرکت با سرعت ثابت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر، همواره ثابت است. معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

سرعت متحرک (m/s)

$$x = vt + x_0 \rightarrow (m)$$
 مکان اولیه متحرک (m)
 زمان (s) مکان متحرک
 در لحظه t (m)

(۲) در لحظه‌هایی که نمودار مکان - زمان، محور t را قطع می‌کند، متحرک در حال عبور از مبدأ مکان است؛ یعنی بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. در نمودار زیر متحرک در لحظه t_1 تغییر جهت می‌دهد:



گام اول: حرکت با سرعت ثابت است؛ پس به کمک معادله $x = vt + x_0$ و با توجه به این که در یک بازه زمانی ۴ ثانیه‌ای، جابه‌جایی برابر با $\vec{i} (12 \text{ m})$ است، داریم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow 12 = v \times 4 \Rightarrow v = (3 \text{ m/s})\vec{i}$$

گام دوم: از آن‌جا که بردار مکان متحرک در لحظه $t_1 = 5 \text{ s}$ تغییر کرده، یعنی مکان متحرک در این لحظه برابر با صفر است:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t_1=5 \text{ s}]{x=0, v=3 \text{ m/s}} 0 = 3 \times 5 + x_0 \Rightarrow x_0 = -15 \text{ m}$$

گام سوم: کافی است معادله مکان - زمان را بنویسیم و $t_2 = 6 \text{ s}$ را در آن جای‌گذاری کنیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x_0=-15 \text{ m}]{v=3 \text{ m/s}} x = 3t - 15 \xrightarrow[t_2=6 \text{ s}]{t_2=6 \text{ s}} x = 3 \times 6 - 15 = 3 \text{ m} \Rightarrow \vec{x} = (3 \text{ m})\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = t^2 - 8t + 16$ است. کدام

موارد زیر درباره این متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت درست است؟

الف) حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

ب) جهت بردار مکان متحرک، یک مرتبه تغییر می کند.

پ) جهت حرکت متحرک، یک مرتبه تغییر می کند.

ت) جهت شتاب متحرک یک مرتبه تغییر می کند.

(۲) «الف» و «پ»

(۱) «الف» و «ب»

(۴) «پ» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

پاسخ: گزینه ۲

به کمک معادله داده شده، نمودار مکان - زمان را رسم کنید، سپس تک تک عبارت ها را بررسی کنید.

 Hint

گام اول: با مقایسه معادله سؤال و معادله مکان - زمان در حرکت شتاب ثابت، مکان اولیه و تندی اولیه را به دست آورده

 پاسخ خیلی تشریحی

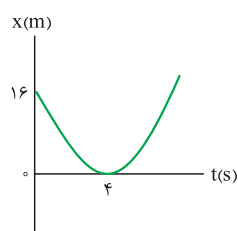
و نمودار مکان - زمان را رسم می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x &= t^2 - 8t + 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \text{ m/s}^2 \rightarrow \text{شتاب ثابت} \\ v_0 &= -8 \text{ m/s} \\ x_0 &= 16 \text{ m} \end{aligned}$$

برای رسم نمودار با توجه به این که شتاب مثبت است، گودی سهمی رو به بالاست و چون معادله داده شده در $t = 4 \text{ s}$ ریشه

مضاعف دارد، نمودار در این لحظه به محور t مماس است.

$$t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow (t - 4)^2 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ s} \quad (\text{مضاعف})$$



گام دوم: حالا به کمک نمودار، عبارت ها را بررسی می کنیم:

الف) شیب مماس بر نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک را نشان می دهد. طبق نمودار، اندازه شیب مماس، ابتدا کاهش یافته

و در لحظه $t = 4 \text{ s}$ به صفر رسیده و بعد از آن افزایش یافته است. پس حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. ✓

ب) چون نمودار محور t را قطع نکرده و فقط در $t = 4 \text{ s}$ بر محور t مماس شده است، پس جهت بردار مکان اصلاً تغییر نکرده است. ✗

پ) با توجه به نمودار، جهت حرکت در ۴ ثانیه اول خلاف جهت محور x و پس از آن در جهت محور است. ✓

ت) با مقایسه معادله داده شده با معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، شتاب این حرکت، ثابت و برابر با 2 m/s^2 است

بنابراین جهت آن تغییر نمی کند. ✗



سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در مبدأ زمان برابر $\vec{i} (5 \text{ m/s})$ است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۳ ثانیه سوم برابر $\vec{i} (-30 \text{ m})$ باشد، در چه لحظه‌ای جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند؟

(۲) $3/5$

(۱) $2/5$

(۴) $7/5$

(۳) 5

پاسخ: گزینه ۱



به کمک رابطه $\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T$ ، شتاب حرکت را به دست آورید و سپس با توجه به این موضوع که در لحظه تغییر جهت حرکت، سرعت صفر می‌شود، معادله سرعت زمان را نوشته و به جای v عدد صفر را جای‌گذاری کنید تا لحظه تغییر جهت به دست آید.

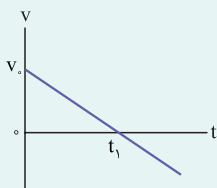
درس‌Box

(۱) جابه‌جایی در T ثانیه n ام، به کمک یک دنباله حسابی با قدرنسبت aT^2 و طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T$$

(۲) در لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود، یعنی در نمودار سرعت - زمان، نمودار محور t را قطع می‌کند، جهت حرکت متحرک، تغییر می‌کند.

در نمودار زیر قبل از لحظه t_1 ، سرعت مثبت است؛ پس متحرک در جهت محور x در حال حرکت است، بعد از لحظه t_1 ، سرعت منفی شده در نتیجه متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم در لحظه t_1 متحرک تغییر جهت داده است.



گام اول: اطلاعات مسئله را در رابطه $\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T$ جای‌گذاری می‌کنیم تا شتاب حرکت را به دست آوریم:

$$\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T \xrightarrow[v_0 = 5 \text{ m/s}, T = 3]{\Delta x = -30 \text{ m}, n = 3} -30 = (3 - 0/5)a(3^2) + 5 \times 3$$

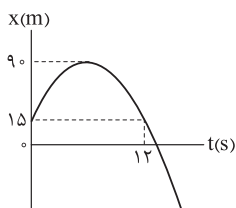
$$\Rightarrow -30 = \frac{45}{5}a + 15 \Rightarrow -45 = \frac{45}{5}a \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: کافی است معادله سرعت - زمان را بنویسیم و سرعت را برابر با صفر قرار دهیم تا لحظه تغییر جهت حرکت به دست آید:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = 5 \text{ m/s}]{v = 0, a = -2 \text{ m/s}^2} 0 = -2t + 5 \Rightarrow t = 5/2 \text{ s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 24$ s برابر چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۱۵

(۲) ۱۸

(۳) ۲۵

(۴) ۳۰

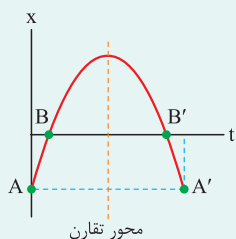
پاسخ: گزینه ۳



با توجه به تقارن سهمی، مختصات رأس آن را مشخص کنید، سپس به کمک معادله مکان - زمان، شتاب متحرک را به دست آورید. با داشتن شتاب می‌توانید مکان را در $t = 24$ s محاسبه کرده و در نهایت اندازه سرعت متوسط را به دست آورید.

درس Box

(۱) در نمودار مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، تقارن نمودار به راحتی قابل مشاهده است؛ در شکل زیر نقطه‌های A و A' با هم و نقطه‌های B و B' با هم متقارن هستند؛ یعنی لحظه وسط A و A' یا B و B' ، نقطه اکسترم نمودار است. در نقطه اکسترم سرعت متحرک صفر است.



(۲) معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست به صورت زیر است:

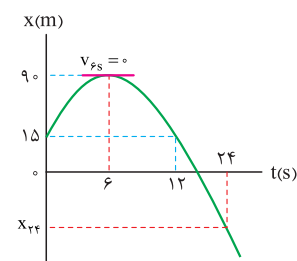
شتاب حرکت (m/s^2)

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه (m)}$$

سرعت اولیه (m/s)
مکان متحرک
در لحظه t (m)

گام اول: برای محاسبه اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 24$ s طبق رابطه $v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ ، مکان متحرک را در هر دو لحظه می‌خواهیم. برای این کار باید ابتدا شتاب حرکت متحرک را پیدا کنیم.

با توجه به نمودار، چون مکان متحرک در دو لحظه $t_1 = 0$ و $t' = 12$ s برابر است، لحظه وسط آن‌ها یعنی $t = 6$ s رأس t ، لحظه‌ای است که متحرک تغییر جهت داده (سرعت در آن لحظه صفر است) پس با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت در بازه زمانی $t = 6$ s تا $t = 12$ s شتاب را پیدا می‌کنیم:



$$x_{12s} = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{1}{2} a (6)^2 + 0 + 90 \Rightarrow -75 = 18a \Rightarrow a = \frac{-25}{6} m/s^2$$

گام دوم: با پیدا کردن شتاب و نوشتن معادله مکان - زمان برای بازه زمانی $t_1 = 6$ s تا $t_2 = 24$ s، مکان متحرک در $t_2 = 24$ s را محاسبه می‌کنیم:

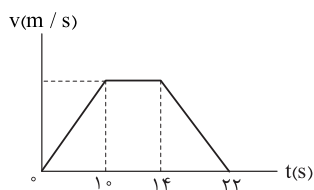
$$x_{24s} = \frac{1}{2} a t'^2 + v_0 t' + x_0 \xrightarrow{t'=24-6=18s} x_{24s} = \frac{1}{2} \left(\frac{-25}{6} \right) (18)^2 + 0 + 90 \Rightarrow x_{24s} = -585 m$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام سوم: حالا خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{24s} - x_0}{24 - 0} = \frac{-58.5 - (15)}{24} = -2.5 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}| = 2.5 \text{ m/s}$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه جابه جایی این متحرک در ۶ ثانیه اول چند برابر اندازه جابه جایی آن در ۶ ثانیه سوم است؟



$$(1) \quad 18/0$$

$$(2) \quad 2/0$$

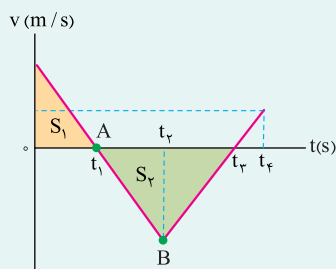
$$(3) \quad 36/0$$

$$(4) \quad 4/0$$

پاسخ: گزینه ۳

بررسی نمودار سرعت - زمان:

درس Box



(۱) محاسبه جابه جایی در نمودار $v-t$:

مساحت محصور بین نمودار و محور t برابر با مقدار جابه جایی است. برای تعیین علامت جابه جایی داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر مساحت محصور بالای محور } t \text{ باشد.} \Rightarrow \text{جابه جایی متحرک در جهت مثبت} \Rightarrow S_1 > 0 \Leftrightarrow \Delta x_{(0, t_1)} > 0 \\ \text{اگر مساحت محصور زیر محور } t \text{ باشد.} \Rightarrow \text{جابه جایی متحرک در جهت منفی} \Rightarrow S_2 < 0 \Leftrightarrow \Delta x_{(t_1, t_3)} < 0 \end{array} \right.$$

(۲) شتاب متوسط: شیب خط واصل بین دو نقطه برابر با شتاب متوسط در آن بازه زمانی است، یعنی:

$$\text{شتاب } (t_1, t_2) = \text{شیب خط } AB = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_2 - t_1}$$

(۳) معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر بیان می شود:

$$v = at + v_0 \rightarrow \text{سرعت اولیه (m/s)}$$

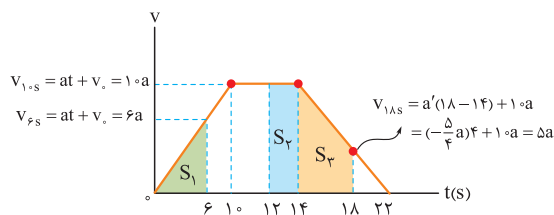
$$\text{شتاب متحرک (m/s}^2\text{)}$$

جابه جایی در هر بازه زمانی برابر با مساحت زیر نمودار سرعت - زمان در آن بازه است. مطابق شکل ما نسبت مساحت S_1 به $(S_2 + S_3)$ را می خواهیم.

گام اول: شتاب قسمت اول حرکت را a فرض کرده و سرعت در $t_1 = 6\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ را بر حسب a می نویسیم:

$$v_{6s} = at + v_0 = 6a + 0 = 6a$$

$$v_{10s} = at + v_0 = 10a + 0 = 10a \Rightarrow v_{14s} = 10a$$



گام دوم: شتاب را در بازه زمانی ۱۴ s تا ۲۲ s، a' در نظر می گیریم و a' را بر حسب a پیدا می کنیم:

$$a' = \frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{0 - 10a}{22 - 14} = -\frac{10a}{8} = -\frac{5}{4}a$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

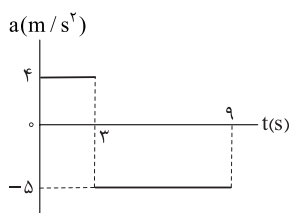
گام سوم: حالا کافی است نسبت مساحت سطح زیر نمودار در ۶ ثانیه اول و ۶ ثانیه سوم را بنویسیم:

$$\frac{\Delta x_{(0,6s)}}{\Delta x_{(12s,18s)}} = \frac{S_1}{S_2 + S_3} = \frac{\frac{6a \times 6}{2}}{(14-12) \times 10a + \frac{(18-14)(5a+10a)}{2}} = \frac{18a}{50a} = 0.36$$

فیزیک

۴۷

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر جابه جایی این متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 9$ s برابر با $(27 \text{ m})\vec{i}$ باشد، سرعت متحرک در لحظه t_2 چند متر بر ثانیه است؟



(۱) $3\vec{i}$

(۲) $-3\vec{i}$

(۳) $15\vec{i}$

(۴) $-15\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴



ابتدا از برابری مجموع معادله جابه جایی دو مرحله با 27 m ، سرعت در لحظه $t = 0$ را به دست آورید. سپس سرعت متحرک در لحظه $t_2 = 9$ s را برحسب v_0 نوشته و خواسته سؤال را به دست آورید.

گام اول: سرعت اولیه در $t = 0$ را v_0 در نظر می گیریم و سرعت در $t = 3$ s و $t = 9$ s را برحسب آن می نویسیم:

$$v_{3s} = at + v_0 = 4 \times 3 + v_0 = 12 + v_0$$

$$v_{9s} = a'(t - 3) + v_{3s} = -5 \times 6 + 12 + v_0 = -18 + v_0$$

برای محاسبه خواسته سؤال کافی است v_0 را محاسبه کنیم.

گام دوم: جابه جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 9$ s برابر با $(27 \text{ m})\vec{i}$ است؛ پس مجموع جابه جایی هر دو مرحله را برابر با 27 m قرار می دهیم تا v_0 به دست آید.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + \frac{1}{2}a't'^2 + v_{3s}t'$$

$$\Rightarrow 27 = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 + 3v_0 + \frac{1}{2}(-5)(9-3)^2 + (12+v_0)(9-3)$$

$$\Rightarrow 27 = 18 + 3v_0 - 90 + 72 + 6v_0 \Rightarrow v_0 = 3 \text{ m/s}$$

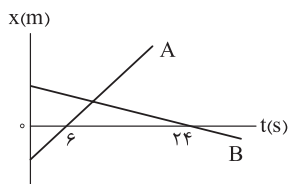
گام سوم: حالا برای محاسبه خواسته سؤال v_0 را در معادله v_{9s} جای گذاری می کنیم:

$$v_{9s} = -18 + 3 = -15 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_{9s} = (-15\vec{i}) \text{ m/s}$$

اگر به خواسته سؤال توجه نکنی و با محاسبه $v_0 = 3 \text{ m/s}$ سراغ گزینه ها بری، توی دام گزینه (۱) می افتی.

گول نخوری

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک A، ۲ برابر تندی متحرک B و فاصله دو متحرک در مبدأ زمان برابر ۶۰ m باشد، فاصله دو متحرک در لحظه $t = ۳۶$ s چند متر است؟



چند متر است؟

(۱) ۹۰

(۲) ۱۲۰

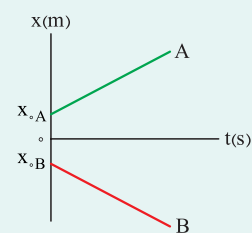
(۳) ۱۵۰

(۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

بررسی نمودار مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

(۱) خط راست با شیب ثابت: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{av}$ شیب خط

در نمودار بالا:

$$\begin{cases} \text{شیب A} > 0 \Rightarrow v_A > 0 \\ \text{شیب B} < 0 \Rightarrow v_B < 0 \end{cases}$$

(۲) نقطه عرض از مبدأ در $t = ۰$ مکان اولیه متحرک را نشان می دهد.

گام اول: با توجه به نمودار، هر دو متحرک با سرعت ثابت در حال حرکت هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x_A = v_A t + x_{A0} \text{ و } x_B = v_B t + x_{B0}$$

از طرفی در لحظه $t = ۶$ s، مکان متحرک A برابر با صفر است؛ پس:

$$0 = v_A \times ۶ + x_{A0} \quad (I)$$

و در لحظه $t = ۲۴$ s، مکان متحرک B برابر با صفر است؛ پس:

$$0 = v_B \times ۲۴ + x_{B0} \xrightarrow{v_A = -2v_B} 0 = -12v_A + x_{B0} \quad (II)$$

(دقت کنید با توجه به شیب نمودارها، سرعت متحرک A، مثبت و سرعت متحرک B منفی است.)

گام دوم: از تفاضل دو رابطه (I) و (II) و با توجه به این که $x_{B0} - x_{A0} = ۶۰$ m است، داریم:

$$۶v_A + x_{A0} + 12v_A - x_{B0} = 0 \Rightarrow 18v_A = x_{B0} - x_{A0} = ۶۰$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{10}{3} \text{ m/s} \text{ و } v_B = -\frac{v_A}{2} = -\frac{10}{6} \text{ m/s} = -\frac{5}{3} \text{ m/s}$$

گام سوم: معادلات حرکت دو متحرک را داریم، پس فاصله دو متحرک در $t = ۳۶$ s را محاسبه می کنیم:

$$x_A = \frac{10}{3}t + x_{A0}, \quad x_B = -\frac{5}{3}t + x_{B0}$$

$$t = ۳۶ \text{ s در } x_A - x_B = \frac{10}{3}(۳۶) + x_{A0} - \left(-\frac{5}{3} \times ۳۶ + x_{B0}\right)$$

$$\Rightarrow x_A - x_B = 120 + x_{A0} + ۶۰ - x_{B0} = 180 - (x_{B0} - x_{A0}) = 180 - ۶۰ = ۱۲۰ \text{ m}$$

اگر توی محاسبه خواسته سؤال، $x_{B0} - x_{A0}$ رو در نظر نگیری، توی دام گزینه (۴) می افتی.

گول نخوری ✗

دو متحرک A و B که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کنند، در مبدأ زمان با سرعت‌های متفاوت در جهت محور x از مبدأ مکان می‌گذرند. اگر سرعت دو متحرک در لحظه $t = 3$ s برابر شود، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 5$ s چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t = 4$ s است؟

(۱) $\frac{5}{4}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{13}{10}$

پاسخ: گزینه ۲

به کمک برابری سرعت‌ها در $t = 3$ s، رابطه بین اختلاف شتاب‌ها و اختلاف سرعت‌های اولیه را پیدا کنید. سپس با نوشتن خواسته



سؤال و جای‌گذاری معادلات، نسبت $\frac{x_{A,5s} - x_{B,5s}}{x_{A,4s} - x_{B,4s}}$ را محاسبه کنید.

گام اول: با توجه به این که سرعت دو متحرک در لحظه $t = 3$ s برابر است، داریم:

$$v_{A,3s} = v_{B,3s} \Rightarrow a_A \times 3 + v_{0A} = a_B \times 3 + v_{0B} \Rightarrow 3(a_A - a_B) = v_{0B} - v_{0A} \quad (I)$$

گام دوم: خواسته سؤال نسبت فاصله دو متحرک در لحظه $t = 5$ s به فاصله آن‌ها در لحظه $t = 4$ s است؛ پس: (دقت کنید x_0 هر دو متحرک را برابر صفر گرفتیم چون در مبدأ زمان در مبدأ مکان بوده‌اند).

$$\begin{aligned} \frac{x_{A,5s} - x_{B,5s}}{x_{A,4s} - x_{B,4s}} &= \frac{\frac{1}{2}a_A(5)^2 + v_{0A}(5) - \frac{1}{2}a_B(5)^2 - v_{0B}(5)}{\frac{1}{2}a_A(4)^2 + v_{0A}(4) - \frac{1}{2}a_B(4)^2 - v_{0B}(4)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}(2a_A + v_{0A} - 2a_B - v_{0B})}{4(2a_A + v_{0A} - 2a_B - v_{0B})} = \frac{5}{4} \times \frac{2/5(a_A - a_B) - (v_{0B} - v_{0A})}{2(a_A - a_B) - (v_{0B} - v_{0A})} \\ &\xrightarrow{(I)} \frac{x_{A,5s} - x_{B,5s}}{x_{A,4s} - x_{B,4s}} = \frac{5}{4} \times \frac{2/5(a_A - a_B) - 3(a_A - a_B)}{2(a_A - a_B) - 3(a_A - a_B)} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

اگر حواست به نسبت خواسته شده نباشه و فاصله متحرک در $t = 4$ s رو نسبت به $t = 5$ s به دست بیاری، توی دام گزینه (۴) می‌افتی.



گول نخوری

۵۰. گلوله ای در شرایط خلأ از یک بلندی رها می شود و در ۴ ثانیه آخر حرکت خود، مسافت ۱۶۰ m را می پیماید. بزرگی سرعت متوسط گلوله در ۱/۵ ثانیه آخر حرکت، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$(۲) \quad ۴۲/۵$$

$$(۱) \quad ۵۲/۵$$

$$(۴) \quad ۳۴/۵$$

$$(۳) \quad ۳۷/۵$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با توجه به این که در ۴ ثانیه آخر حرکت گلوله، مسافت ۱۶۰ m طی شده، زمان کل حرکت (t) را محاسبه کنید؛ سپس سرعت گلوله در دو بازه زمانی t و t - ۱/۵ را به دست آورده و با کمک رابطه $v_{av} = \frac{v_t + v_{t-1/5}}{2}$ ، بزرگی سرعت متوسط را محاسبه کنید.

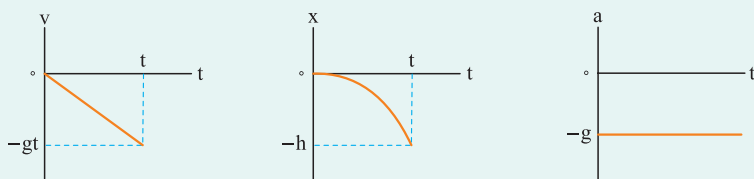
هرگاه جسمی تنها تحت تأثیر جاذبه گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط کند و اثر مقاومت هوا را بتوان برای آن نادیده گرفت، حرکت آن، سقوط آزاد نامیده می شود.

معادلات حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه:

$$v = -gt \quad \text{سرعت - زمان}$$

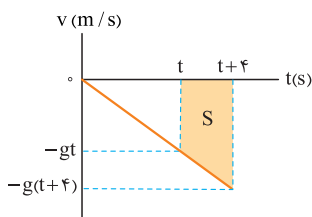
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \quad \text{مکان - زمان}$$

نمودارهای حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه در ارتفاع h در t ثانیه:



گام اول: نمودار سرعت - زمان حرکت سقوط آزاد را به طور کیفی رسم می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



طبق صورت سؤال، گلوله در ۴ s آخر حرکت خود، مسافت ۱۶۰ m را طی می کند؛ یعنی مساحت سطح زیر نمودار در بازه زمانی t تا t + ۴ برابر با ۱۶۰ m است.

$$S_{\text{دورنگه}} = 160 \Rightarrow \frac{gt + g(t+4)}{2} \times 4 = 160$$

$$\xrightarrow{g=10 \text{ m/s}^2} 10t + 10t + 40 = 80 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$t_p = t + 4 = 2 + 4 = 6 \text{ s}$$

پس گلوله ۶ s پس از رهاشدن به زمین برخورد کرده است.

گام دوم: ۱/۵ ثانیه آخر حرکت، یعنی بازه زمانی $t_1 = 4/5 \text{ s}$ تا $t_p = 6 \text{ s}$ ، بزرگی سرعت متوسط در این بازه زمانی برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} v_{av} &= \frac{v_{6s} + v_{4/5s}}{2} \\ v = -gt &\Rightarrow \begin{cases} v_{6s} = -10 \times 6 = -60 \text{ m/s} \\ v_{4/5s} = -10 \times 4/5 = -40 \text{ m/s} \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{60 + 40}{2} = 50 \text{ m/s}$$

معادلهٔ مکان - زمان جسمی به جرم 5 kg در SI به صورت $p = t^2 - 10t + 12$ است. شتاب متوسط جسم در 4 ثانیه دوم، بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

$$0 / 8 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

$$0 / 4 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

$$-0 / 8 \text{ m/s}^2 \quad (4)$$

$$-0 / 4 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا طبق معادله، مکان جسم را در $t_1 = 4 \text{ s}$ و $t_2 = 8 \text{ s}$ محاسبه کنید. سپس به کمک رابطه $p = mv$ ، سرعت جسم را در t_1 و t_2 به دست آورید و در نهایت با استفاده از رابطه $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ، شتاب را به دست آورید.

Hint

درس Box

تکانه برابر با حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن است؛ یعنی:

تکانه $(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}})$

$$\vec{p} = m \vec{v} \rightarrow (\text{m/s}) \text{ سرعت جسم}$$

جرم جسم (kg)

تکانه یک کمیت برداری است و همواره هم جهت با بردار سرعت است.

گام اول: 4 ثانیه دوم، یعنی بازه زمانی $t_1 = 4 \text{ s}$ تا $t_2 = 8 \text{ s}$ ، ابتدا تکانهٔ جسم را در این دو لحظه محاسبه می کنیم:

$$p_1 = (4)^2 - 10(4) + 12 = -12 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$p_2 = (8)^2 - 10(8) + 12 = -4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

گام دوم: برای محاسبهٔ شتاب در 4 ثانیه دوم، به سرعت متحرک در لحظه های $t_1 = 4 \text{ s}$ و $t_2 = 8 \text{ s}$ نیاز داریم؛ پس به کمک رابطهٔ تکانه $(p = mv)$ داریم:

$$p_1 = mv_1 \Rightarrow -12 = 5v_1 \Rightarrow v_1 = -2/5 \text{ m/s}$$

$$p_2 = mv_2 \Rightarrow -4 = 5v_2 \Rightarrow v_2 = -0/5 \text{ m/s}$$

گام سوم: کافی است به کمک رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، شتاب را محاسبه کنیم:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-0/5 - (-2/5)}{8 - 4} = 1/2 = 0/4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a} = (0/4 \text{ m/s}^2) \hat{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شعاع سیاره A، ۳ برابر شعاع سیاره B و چگالی سیاره A، نصف چگالی سیاره B است. شتاب گرانش در سطح سیاره A چند برابر شتاب گرانش در سطح سیاره B است؟

- (۱) ۶ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲



فقط کافی است با توجه به این که شتاب گرانش با چگالی و شعاع سیاره رابطه مستقیم دارد، رابطه نسبتی شتاب گرانش سطح سیاره A به شتاب گرانش سطح سیاره B را بنویسید.

درس Box

از برابری رابطه های $W = mg$ و $W = \frac{GMm}{R^2}$ داریم:

$$g = \frac{GM}{R^2} \xrightarrow{M=\rho V} g = \frac{G\rho V}{R^2} \xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{G\rho(\frac{4}{3}\pi R^3)}{R^2}$$

$$\Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi G\rho R$$

شتاب گرانش در سطح هر سیاره با چگالی و شعاع سیاره، رابطه مستقیم دارد.

• برای نوشتن رابطه نسبتی شتاب گرانش در سطح سیاره A به سیاره B داریم:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{R_A}{R_B}$$

با توجه به رابطه ای که در درس باکس بیان کردیم، داریم:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{R_A}{R_B} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به جسمی تنها دو نیروی هم‌اندازه و عمود بر هم وارد می‌شود و شتاب جسم برابر 4 m/s^2 است. اگر این دو نیرو به

طور هم‌جهت به این جسم وارد شوند، شتاب جسم برابر چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$8\sqrt{2} \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

فقط کافی است برای هر دو حالت، قانون دوم نیوتون را بنویسید.

 Hint

طبق قانون دوم نیوتون هرگاه بر جسم نیروی خالص غیرصفری وارد شود، حرکت جسم شتابدار است که این شتاب طبق رابطه زیر با جرم جسم رابطه عکس و با نیروی خالص رابطه مستقیم دارد:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} \rightarrow \begin{matrix} \text{نیروی خالص (N)} \\ \text{جرم (kg)} \end{matrix}$$

گام اول: در حالت اول به جسم تنها دو نیروی هم‌اندازه و عمود بر هم وارد می‌شود؛ پس طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4m$$

$$\xrightarrow{F_1=F_2=F} \sqrt{F^2 + F^2} = 4m \Rightarrow F\sqrt{2} = 4m \Rightarrow m = \frac{F\sqrt{2}}{4}$$

گام دوم: در حالت دوم، این دو نیرو به طور هم‌جهت به این جسم وارد می‌شوند؛ یعنی:

$$F'_{\text{net}} = ma' \Rightarrow F_1 + F_2 = ma' \xrightarrow{\substack{F_1=F_2=F \\ m=\frac{F\sqrt{2}}{4}}} 2F = \frac{F\sqrt{2}}{4} \times a' \Rightarrow a' = 4\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

 درس Box

گویی به جرم 200 g در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر اندازه شتاب گوی، هنگام بالارفتن برابر 11 m/s^2 باشد، اندازه شتاب گوی هنگام پایین آمدن چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($g = 9/8 \text{ N/kg}$) و اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر گوی را در تمام مسیر ثابت در نظر بگیرید.

$$2) \quad 8/8$$

$$1) \quad 9$$

$$4) \quad 8/4$$

$$3) \quad 8/6$$

پاسخ: گزینه ۳



در مسیر بالارفتن، نیروهای وارد بر گوی را رسم کرده و طبق قانون دوم نیوتن، بزرگی نیروی مقاومت هوا را محاسبه کنید؛ سپس با نوشتن قانون دوم نیوتن در مسیر پایین آمدن، شتاب گوی را به دست آورید.

درس Box

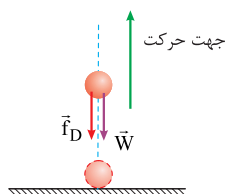
وقتی جسمی در یک شاره (مایع یا گاز) قرار دارد و نسبت به آن حرکت می‌کند، از طرف شاره نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم، به آن وارد می‌شود که به آن نیروی مقاومت شاره می‌گویند و آن را با f_D نشان می‌دهند.

● اگر جسم در هوا حرکت کند به آن نیروی مقاومت هوا می‌گویند.

● نیروی مقاومت شاره به بزرگی جسم، تندی جسم و ... بستگی دارد.

گام اول: نیروهای وارد بر گوی را در مسیر بالارفتن رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتن، بزرگی نیروی مقاومت هوا را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



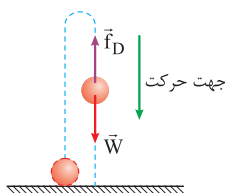
(شتاب حرکت کندشونده و به سمت بالا است؛ پس با توجه به در نظر گرفتن جهت مثبت به سمت بالا، شتاب منفی است.)

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -W - f_D = ma_1$$

$$\frac{W=mg, m=200 \cdot g=200 \times 10^{-3} \text{ kg}, g=9/8 \text{ N/kg}}{a_1=-11 \text{ m/s}^2} \rightarrow -200 \times 10^{-3} \times 9/8 - f_D = 200 \times 10^{-3} \times (-11)$$

$$\Rightarrow f_D = -1/96 + 2/2 = 0/24 \text{ N}$$

گام دوم: نیروهای وارد بر گوی را در مسیر پایین آمدن رسم کرده و شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:



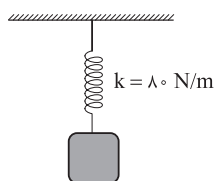
طبق اطلاعات سؤال، بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر گوی در کل مسیر ثابت است.

$$F'_{\text{net}} = ma' \Rightarrow -W + f_D = ma_2$$

$$\frac{W=mg, m=200 \cdot g=200 \times 10^{-3} \text{ kg}, g=9/8 \text{ N/kg}}{f_D=0/24 \text{ N}} \rightarrow -200 \times 10^{-3} \times 9/8 + 0/24 = 200 \times 10^{-3} a_2$$

$$\Rightarrow -1/96 + 0/24 = 0/24 a_2 \Rightarrow a_2 = -8/6 \text{ m/s}^2 \Rightarrow |a_2| = 8/6 \text{ m/s}^2$$

در شکل زیر، اگر جرم جسم متصل به انتهای فنر، از g به $600g$ برسد، طول فنر 20% درصد تغییر می‌کند. طول فنر در حالتی که جسمی به انتهای آن متصل نیست، چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10 \text{ N/m}$)



(۱) ۲۰

(۲) ۲۲/۵

(۳) ۲۵

(۴) ۲۷/۵

پاسخ: گزینه ۲



با نوشتن قانون دوم نیوتون برای هر دو حالت، تغییرات طول فنر را به دست آورید. با توجه به این که $\Delta x = x - x_0$ است و طول فنر در حالت دوم 20% درصد بیشتر از طول فنر در حالت اول است، x_0 (طول فنر در حالت بدون جسم) را پیدا کنید.



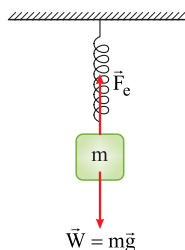
وقتی به فنر نیرو وارد شود، باعث می‌شود فنر فشرده یا کشیده شود؛ در نتیجه فنر نیرویی به طرف نقطه تعادل وارد می‌کند.

تغییر طول فنر با اندازه نیرویی که به آن وارد می‌شود، متناسب است؛ یعنی:

$$\begin{array}{ll} \text{نیروی کشسانی فنر} & \text{طول ثانویه فنر (m)} \\ \uparrow & \uparrow \\ F_e = kx \rightarrow (m) \text{ تغییر طول فنر} & x = \ell - \ell_0 \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{ثابت فنر (N/m)} & \text{طول اولیه فنر (m)} \end{array}$$

گام اول: در هر دو حالت، فنر در حالت تعادل است؛ پس طبق شکل زیر در هر دو حالت تغییر طول فنر را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F_e = W \Rightarrow k\Delta x = mg \Rightarrow \Delta x = \frac{mg}{k}$$

$$\text{حالت اول: } \Delta x = \frac{200 \times 10^{-3} \times 10}{10} = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = 20 \text{ cm} \quad (1)$$

$$\text{حالت دوم: } \Delta x' = \frac{600 \times 10^{-3} \times 10}{10} = 0.6 \text{ m} = 60 \text{ cm} \Rightarrow x' - x_0 = 60 \text{ cm} \quad (2)$$

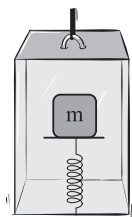
گام دوم: طبق صورت سؤال، طول فنر با تغییر جرم جسم، 20% درصد تغییر کرده که چون جرم افزایش یافته، پس طول فنر 20% درصد افزایش یافته؛ یعنی:

$$x' = x + 0.2x = 1.2x \xrightarrow{(2)} 1.2x - x_0 = 60 \text{ cm} \quad (3)$$

گام سوم: از حل معادلات (۱) و (۳) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x - x_0 = 20 \\ 1.2x - x_0 = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 40 \text{ cm}, x_0 = 20 \text{ cm}$$

در شکل زیر، ثابت فنر برابر با ۸۰۰ N/m ، جرم جسم برابر $m = ۵ \text{ kg}$ است و آسانسور با شتابی به بزرگی ۲ m/s^2 به صورت کندشونده به سمت پایین در حال حرکت است. اگر طول فنر در این حالت ۳۰ cm باشد، طول عادی فنر چند سانتی متر است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$)



(۱) $۲۲/۵$

(۲) ۲۵

(۳) ۳۵

(۴) $۳۷/۵$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و قانون دوم نیوتون را بنویسید تا x محاسبه شود، سپس از رابطه $x = \ell - \ell_0$ طول عادی فنر را به دست آورید.

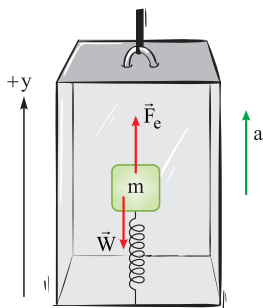
کارت Box

برای بررسی حرکت آسانسور و مشخص کردن جهت شتاب، از قواعد زیر کمک می گیریم:

(۱) حرکت به سمت بالا و تندشونده $\Leftarrow$ شتاب به سمت بالا $a > 0$ (۲) حرکت به سمت بالا و کندشونده $\Leftarrow$ شتاب به سمت پایین $a < 0$ (۳) حرکت به سمت پایین و تندشونده $\Leftarrow$ شتاب به سمت پایین $a < 0$ (۴) حرکت به سمت پایین و کندشونده $\Leftarrow$ شتاب به سمت بالا $a > 0$

گام اول: حرکت آسانسور به سمت پایین و کندشونده است؛ پس شتاب به سمت بالاست و ما هم جهت مثبت را بالا در نظر می گیریم؛ به جسم، دو نیروی وزن و نیروی فنر وارد می شود؛ پس طبق قانون دوم نیوتون داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$F_e - W = ma \Rightarrow kx - mg = ma$$

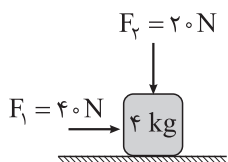
$$\Rightarrow ۸۰۰x - ۵۰ = ۵ \times ۲ \Rightarrow x = \frac{۶۰}{۸۰۰} m$$

$$\Rightarrow x = ۷/۵ \text{ cm}$$

گام دوم: سؤال طول عادی فنر را خواسته، پس با توجه به این که حرکت آسانسور، کندشونده به سمت پایین است، فنر فشرده می شود و داریم:

$$x = \ell - \ell_0 \Rightarrow -۷/۵ = ۳۰ - \ell_0 \Rightarrow \ell_0 = ۳۷/۵ \text{ cm}$$

در شکل زیر، به جسم نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 وارد می‌شود. جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است. اندازه نیروی F_2 چند نیوتون کاهش یابد، تا بزرگی شتاب جسم به 2 m/s^2 برسد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۶ (۱)

۸ (۲)

۱۲ (۳)

۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳



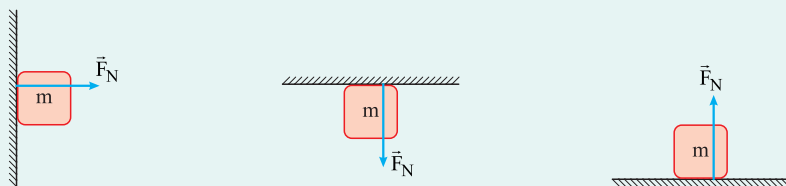
Hint

با رسم تمام نیروهای وارد بر جسم و با توجه به این که جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، به کمک قانون دوم نیوتون، μ_k را به دست آورید. سپس بار دیگر نیروهای جدید را رسم کرده و با توجه به این که شتاب حرکت جسم 2 m/s^2 است، اندازه F_2 را محاسبه کنید و تغییرات آن را به دست آورید.

درس Box

(۱) نیروی عمودی ناشی از تغییر شکل سطح تماس دو جسم، نیروی عمودی سطح (F_N) نامیده می‌شود.

● نیروی عمودی سطح همواره بر سطح تکیه‌گاه عمود و به سمت بیرون جسم است.



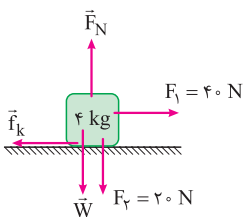
(۲) نیرویی که از طرف سطح در خلاف جهت حرکت به جسم متحرک وارد می‌شود، نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) نام دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

نیروی عمودی سطح (N)

$$f_k = \mu_k F_N$$

ضریب اصطکاک جنبشی

گام اول: در حالتی که جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است، نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستاهای قائم و افقی می‌نویسیم تا ضریب اصطکاک جنبشی به دست آید.



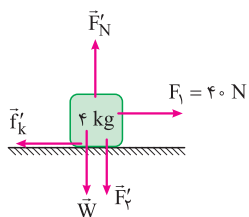
$$\text{در راستای قائم: } F_{\text{net}, y} = ma = 0$$

$$\Rightarrow F_N - F_2 - W = 0 \Rightarrow F_N = W + F_2$$

$$\Rightarrow F_N = 4 \times 10 + 20 = 60 \text{ N}$$

$$\text{در راستای افقی: } F_{\text{net}, x} = ma = 0 \Rightarrow F_1 - f_k = 0 \Rightarrow F_1 = \mu_k F_N \Rightarrow \mu_k = \frac{F_1}{F_N} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

گام دوم: در حالت دوم شتاب حرکت جسم در راستای افقی 2 m/s^2 است؛ پس در راستای افقی داریم:



$$F'_{\text{net},x} = ma \Rightarrow F_1 - f'_k = ma$$

$$\Rightarrow 40 - \frac{2}{3} F'_N = 4 \times 2 \Rightarrow F'_N = 48 \text{ N}$$

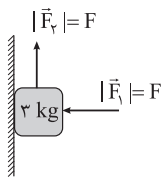
در راستای قائم، جسم حرکتی ندارد، در نتیجه:

$$W + F'_v = F'_N \Rightarrow 4 \times 10 + F'_v = 48 \Rightarrow F'_v = 8 \text{ N}$$

بنابراین نیروی F_v باید 12 N کاهش پیدا کند.

$$F'_v - F_v = 8 - 20 = -12 \text{ N}$$

در شکل زیر، به جسم دو نیروی افقی و قائم که اندازه هر یک برابر F است، وارد می‌شود و جسم با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به صورت کندشونده به سمت بالا در حال حرکت است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی سطح دیوار قائم با جسم برابر 0.4 باشد، F برابر چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) ۴۰

(۲) ۵۰

(۳) ۶۰

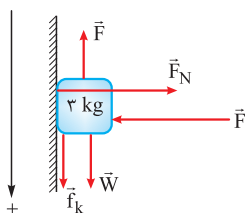
(۴) ۸۰

پاسخ: گزینه ۱



ابتدا به کمک جهت شتاب، جهت مثبت حرکت را مشخص کنید؛ سپس با رسم نیروها و به کمک قانون دوم نیوتون، اندازه نیروی F را محاسبه کنید.

جسم به صورت کندشونده به سمت بالا در حرکت است، پس جهت شتاب به سمت پایین است. با در نظر گرفتن جهت مثبت به سمت پایین، با رسم نیروها و به کمک قانون دوم نیوتون، داریم:



$$F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow F_N = F$$

$$F_{\text{net},y} = ma \Rightarrow W + \underbrace{f_k}_{\mu_k F_N = \mu_k F} - F = ma$$

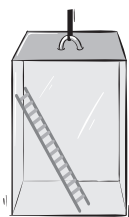
$$\Rightarrow 3 \times 10 + 0.4F - F = 3 \times 2$$

$$\Rightarrow 30 - 0.6F = 6 \Rightarrow 24 = 0.6F \Rightarrow F = 40 \text{ N}$$

اگر جهت شتاب رو به طرف بالا در نظر بگیریم، در دام گزینه (۳) می‌افتیم.



در شکل زیر نردبانی به جرم 40 kg درون اتاقک آسانسوری قرار دارد. دیواره قائم اتاقک آسانسور، بدون اصطکاک و ضریب اصطکاک ایستایی کف اتاقک آسانسور برابر 0.75 است. آسانسور با شتابی به بزرگی 1 m/s^2 به صورت تندشونده به سمت بالا حرکت می‌کند و نردبان در آستانه سر خوردن است. در این حالت اندازه نیرویی که نردبان به دیوار قائم اتاقک آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) ۲۷۰

(۲) ۳۳۰

(۳) ۳۶۰

(۴) ۴۴۰

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

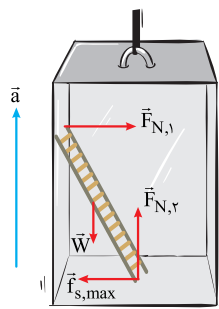
هرگاه به جسمی که روی یک سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی F وارد کنیم و جسم در حال سکون باقی بماند، یعنی برابری نیروهای وارد بر جسم صفر است؛ بنابراین نیرویی به اندازه نیروی F و در خلاف جهت آن به جسم وارد شده که آن را خنثی کرده است. این نیرو، نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) نامیده می‌شود. در واقع نیروی اصطکاک ایستایی فرمول خاصی ندارد و همواره با نیروی خالص محرکی که به جسم وارد می‌شود، هم‌اندازه است.

● اگر نیروی F را افزایش دهیم به طوری که جسم در آستانه حرکت قرار گیرد، در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه ($f_{s,max}$) به جسم وارد می‌شود. نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \rightarrow (N) \text{ نیروی عمودی سطح}$$

ضریب اصطکاک ایستایی

گام اول: نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. با توجه به این که آسانسور با شتابی تندشونده به سمت بالا حرکت می‌کند، جهت مثبت را به سمت بالا در نظر می‌گیریم.



گام دوم: در راستای قائم قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم تا $F_{N,2}$ را به دست آوریم و سپس با نوشتن قانون دوم در راستای افقی، اندازه $F_{N,1}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{در راستای قائم: } F_{\text{net},y} = ma \Rightarrow F_{N,2} - W = ma \Rightarrow F_{N,2} - 400 = 40 \times 1$$

$$\Rightarrow F_{N,2} = 400 + 400 = 440 \text{ N}$$

$$\text{در راستای افقی: } F_{\text{net},x} = ma = 0 \Rightarrow F_{N,1} = f_{s,max} = \mu_s F_{N,2}$$

$$\Rightarrow F_{N,1} = 0.75 \times 440 = 330 \text{ N}$$

$F_{N,1}$ اندازه نیرویی است که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند که طبق قانون سوم نیوتون با نیرویی که نردبان به دیوار قائم وارد می‌کند، برابر است؛ پس:

اگر شتاب رو اشتباهاً با علامت منفی در رابطه جای‌گذاری کنی و اندازه نیروی $F_{N,2}$ رو 360 N به دست بیاری، توی دام گزینه (۱) می‌افتی.

کول نخوری

فیزیک

۶۰. متحرکی به جرم 4 kg روی محیط دایره‌ای به شعاع 5 m با تندی ثابت 36 km/h در حال حرکت است. اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر متحرک چند نیوتون است؟

۱۶ (۴)

۱۶۰ (۳)

۸ (۲)

۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اندازه نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای از رابطه $F = \frac{mv^2}{R}$ به دست می‌آید.

Hint

شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت از رابطه $a_c = \frac{v^2}{R}$ محاسبه می‌شود که در آن v ، تندی برحسب m/s و R شعاع چرخش برحسب m است.

درس Box

طبق قانون دوم نیوتون، اندازه نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = ma \xrightarrow{a = \frac{v^2}{R}} F = \frac{mv^2}{R}$$

فقط کافی است سرعت را برحسب m/s نوشته و داده‌ها را در رابطه $F = \frac{mv^2}{R}$ جای‌گذاری کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$v = 36 \text{ km/h} \div 3.6 = 10 \text{ m/s}$$

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{4 \times 10^2}{5} = 80 \text{ N}$$

گیاهی در مدت ۵ روز به اندازه $1/5$ متر رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه به صورت نمادگذاری علمی و بر حسب سانتی‌متر بر ساعت کدام است؟

- (۱) $0/3$ (۲) 3×10^{-1}
(۳) $1/25$ (۴) $12/5 \times 10^{-1}$

پاسخ: گزینه ۳

آشنایی با پیشوندها:

کرتس Box

گاهی اوقات در فیزیک، کمیت اندازه‌گیری شده، خیلی کوچک یا خیلی بزرگ است که اگر بخواهیم از یکای استاندارد آن استفاده کنیم، باید از اعداد با رقم‌های زیاد استفاده کنیم. برای جلوگیری از این موضوع، از پیشوندهایی که همگی به صورت 10^n هستند، استفاده می‌کنیم. این پیشوندها می‌توانند پیشوندهای بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از واحد باشند که در جدول زیر آن‌ها را آورده‌ایم:

نام	دکا	هکتو	کیلو	مگا	گیگا	ترا
پیشوندهای بزرگ‌تر از واحد	da	h	k	M	G	T
معنا	$\times 10^1$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^6$	$\times 10^9$	$\times 10^{12}$
نام	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو
پیشوندهای کوچک‌تر از واحد	d	c	m	μ	n	p
معنا	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-6}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-12}$

برای تبدیل یکا از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم که در آن اندازه کمیت مورد نظر را در یک کسر تبدیل (یعنی نسبتی از یکاها که برابر یک است) ضرب می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر بخواهیم 216 km/h را به m/s تبدیل کنیم، داریم:

$$216 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \Rightarrow \frac{216 \times 1000}{3600} \text{ m/s}$$

گام اول: ابتدا آهنگ رشد گیاه را محاسبه می‌کنیم: پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{میزان رشد گیاه} = \frac{\text{آهنگ رشد گیاه}}{\text{مدت زمان}} \Rightarrow \frac{1/5}{5} \text{ m/روز}$$

گام دوم: تبدیل یکای آن را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\frac{1/5}{5} \frac{\text{m}}{\text{روز}} \times \frac{1 \text{ روز}}{24 \text{ ساعت}} \times \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \Rightarrow \frac{1/5 \times 100}{5 \times 24} = 1/25 \text{ cm/h}$$

در یک شیر آتش‌نشانی سطح مقطع قسمت ورودی و قسمت خروجی به ترتیب 30 cm^2 و 4 cm^2 است. اگر آب با تندی 2 m/s وارد شیر شود، با تندی چند متر بر ثانیه از شیر خارج می‌شود؟

(۲) ۳۰

(۱) ۳

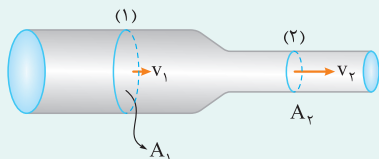
(۴) ۱۵۰

(۳) ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

درس‌Box

معادله پیوستگی: اگر مطابق شکل زیر، شاره تراکم‌ناپذیری همه‌جای لوله را پر کرده باشد و درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است. به زبان ریاضی:



$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{v: تندی شاره})$$

$$A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow P_2 < P_1$$



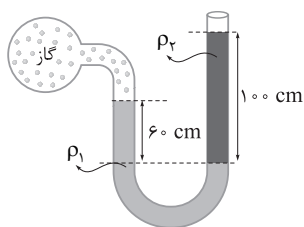
به کمک معادله پیوستگی، تندی خروج آب از شیر را حساب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \frac{A_1 = 30 \text{ cm}^2 = 30 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{A_2 = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2, v_1 = 2 \text{ m/s}} \rightarrow 30 \times 10^{-4} \times 2 = 4 \times 10^{-4} \times v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{60}{4} = 15 \text{ m/s}$$

در شکل زیر، دو مایع به حالت تعادل قرار دارند. اگر چگالی آن‌ها $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_2 = 0.9 \text{ g/cm}^3$ باشد،

فشار پیمانه‌ای گاز چند پاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) ۳۰۰۰

(۲) ۳۶۰۰

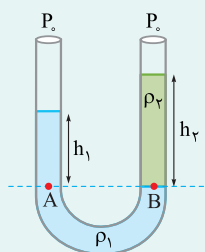
(۳) ۵۰۰۰

(۴) ۵۸۰۰

پاسخ: گزینه ۱

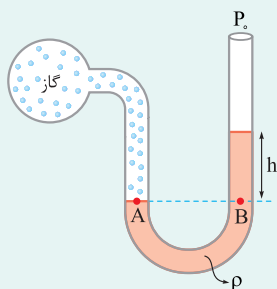
در لوله‌های U شکل، مطابق شکل زیر، در نقاط هم‌تراز که در یک مایع قرار دارند، فشار برابر است:

درس‌Box



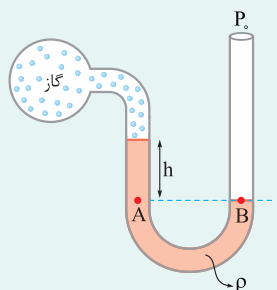
$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

وسيلة اندازه‌گیری فشار گاز (مانومتر):



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho g h + P_0$$

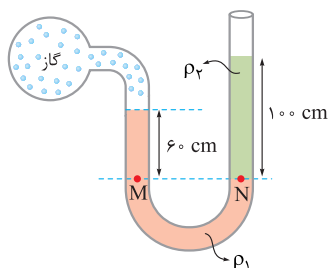
$$(P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho g h: \text{فشار پیمانه‌ای})$$



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho g h = P_0$$

$$(P_{\text{گاز}} - P_0 = -\rho g h: \text{فشار پیمانه‌ای})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا فشار نقاط M و N را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم:



$$P_M = P_N$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + P_0$$

گام دوم: با جای گذاری مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 9 \text{ g/cm}^3 = 9000 \text{ kg/m}^3}{h_1 = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}, h_2 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}, g = 10 \text{ N/kg}} \rightarrow P_{\text{زک}} + 1000 \times 10 \times 0.6 = 9000 \times 10 \times 1 + P_0$$

$$\Rightarrow P_{\text{زک}} + 6 \times 10^3 = 9 \times 10^3 + P_0$$

$$\Rightarrow P_{\text{زک}} = 3000 + P_0 \Rightarrow P_g = P_{\text{زک}} - P_0 = 3000 \text{ Pa}$$

۶۴

شکل زیر، خروج قطره‌های روغن با دمای متفاوت را از دهانه دو قطره‌چکان نشان می‌دهد. به ترتیب از راست به چپ، در کدام شکل اندازه نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن بزرگ‌تر و در کدام شکل دمای روغن بیشتر است؟



(۱) الف، الف

(۲) ب، ب

(۳) الف، ب

(۴) ب، الف

پاسخ: گزینه ۴

نیروی هم‌چسبی نوعی نیروی بین مولکولی است. به طور کلی نیروهای بین مولکول‌های همسان مانند نیروهای بین مولکول‌های آب را نیروی هم‌چسبی می‌نامیم.

افزایش دما سبب کاهش نیروهای هم‌چسبی در مایع می‌شود.

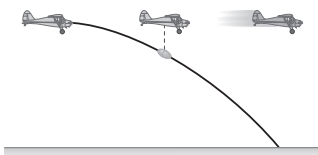
هر چه دمای قطره‌های روغن بالاتر باشد، نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آن کاهش یافته و قطره‌های ریزتری تشکیل می‌شوند. بنابراین در شکل (الف) که قطره‌های ریزتری داریم، دمای روغن بیشتر است و نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آن کم‌تر است. پس پاسخ گزینه (۴) می‌باشد.

کارت Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع ۱۲۵ m از سطح زمین با تندی 180 km/h پرواز می‌کند، بسته‌ای را برای کمک به آسیب‌دیدگان رها می‌کند. تندی بسته هنگام برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)، از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.



$$(1) 10\sqrt{5}$$

$$(2) 10\sqrt{2}$$

$$(3) 50\sqrt{2}$$

$$(4) 50\sqrt{5}$$

پاسخ: گزینه ۳

(۱) انرژی مکانیکی جسم برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است:

$$E = K + U$$

انرژی مکانیکی (J): E

جرم (kg)

$$K = (J) \text{ انرژی جنبشی} \rightarrow K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow (m/s) \text{ تندی}$$

جرم (kg)

$$U = (J) \text{ انرژی پتانسیل گرانشی} \rightarrow U = m g h \rightarrow (m) \text{ ارتفاع}$$

شتاب گرانشی (m/s^2)

(۲) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: در غیاب نیروهای اتلافی مانند مقاومت هوا، اصطکاک و ... انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر حرکت جسم مقدار یکسانی دارد:

$$E_1 = E_2 \xrightarrow{\Delta E=0} \Delta K + \Delta U = 0$$

گام اول: با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی می‌توانیم تندی نهایی را به دست آوریم:

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + 0$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر خواهیم داشت:

$$\frac{v_1 = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}, h_1 = 125 \text{ m}}{g = 10 \text{ m/s}^2} \rightarrow 1250 \text{ m} + 1250 \text{ m} = \frac{m v_2^2}{2} \Rightarrow m(2500) = \frac{m v_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2500 \times 2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} v_2 = 50\sqrt{2} \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شخصی گلوله‌ای برفی به جرم 200 g را از روی زمین برمی‌دارد و تا ارتفاع 150 cm بالا می‌برد و سپس در همان ارتفاع، آن را با تندی 12 m/s پرتاب می‌کند. کار انجام‌شده توسط شخص، روی گلوله برف چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$) و از مقاومت هوا صرف نظر کنید.

$$17/4 \quad (2)$$

$$8/1 \quad (1)$$

$$24/3 \quad (4)$$

$$18/9 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

(۱) انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

انرژی جنبشی (J)

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \text{تندی (m/s)}$$

جرم (kg)

(۲) رابطه تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم:

جرم (kg)

$$\Delta U = m g \Delta h \rightarrow \text{تغییر ارتفاع جسم از سطح زمین (m)}$$

شتاب گرانشی انرژی پتانسیل

گرانشی (J) (N/kg)

$$W_{mg} = -\Delta U$$

کار نیروی وزن برابر فرینت تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است.

(۳) قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K$$

$$W_t = K_f - K_i$$

W_t : کار برآیند (J)

K_f : انرژی جنبشی در حالت (۲) (J)

K_i : انرژی جنبشی در حالت (۱) (J)

گام اول: کار نیروی وزن را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$W_{\text{وزن}} = -\Delta U = -mg\Delta h$$

$$\xrightarrow[m=200 \text{ g}=0.2 \text{ kg}]{\Delta h=150 \text{ cm}=1.5 \text{ m}} W_{\text{وزن}} = -0.2 \times 10 \times 1.5 = -3 \text{ J}$$

گام دوم: به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی کار شخص را محاسبه می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K = K_f - K_i$$

$$\Rightarrow W_{\text{شخص}} + W_{\text{وزن}} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \xrightarrow[v_f=12 \text{ m/s}]{v_i=0} W_{\text{شخص}} + (-3) = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (144)$$

$$\Rightarrow W_{\text{شخص}} = 14/4 + 3 = 17/4 \text{ J}$$

گلوله‌ای به جرم 50 g از دهانه تفنگی با تندی 150 m/s و ارتفاع $1/6 \text{ m}$ از سطح زمین شلیک می‌شود. اگر گلوله، با تندی 50 m/s به سطح زمین برخورد کند، در مدت حرکت گلوله، کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟

($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۲) $-250/8$

(۱) $-490/2$

(۴) $-240/2$

(۳) $-500/8$

پاسخ: گزینه ۲

قانون پایستگی انرژی: کار نیروهای اتلافی، مانند اصطکاک و مقاومت هوا، برابر با تغییرات انرژی مکانیکی است.

$$W_f = \Delta E = E_f - E_1 = (K_f + U_f) - (K_1 + U_1) = \Delta K + \Delta U$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: قانون پایستگی انرژی را برای گلوله می‌نویسیم:

$$W_f = E_f - E_1$$

$$W_f = (K_f + U_f) - (K_1 + U_1)$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر داده‌شده خواهیم داشت:

$$W_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \right)$$

$$\frac{m=50 \text{ g}=50 \times 10^{-3} \text{ kg}, h=1/6 \text{ m}}{v_1=150 \text{ m/s}, v_f=50 \text{ m/s}, g=10 \text{ m/s}^2} \rightarrow W_f = \underbrace{\frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times 50^2}_{62/5} - \left(\underbrace{\frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times 150^2}_{562/5} + \underbrace{50 \times 10^{-3} \times 10 \times 1/6}_{0/8} \right)$$

$$\Rightarrow W_f = 62/5 - 562/5 = -500/8 \text{ J}$$

اتومبیلی به جرم 1200 kg در یک جاده افقی شروع به حرکت می کند و پس از 10 s ، تندی آن به 90 km/h می رسد. در این حرکت، توان متوسط اتومبیل حداقل چند کیلووات است؟

۷۵ (۴)

۳۷/۵ (۳)

۳۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

کارت Box

توان: کار انجام شده در واحد زمان (آهنگ انجام کار) را توان متوسط می گوئیم.

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

↑ کار مفید (J)
↓ بازه زمانی (s)

← توان متوسط (W)

اگر نیرویی که کار را انجام می دهد ثابت بماند، توان لحظه ای و توان متوسط برابر می شوند ($P = P_{av}$).

گام اول: ابتدا با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

$$\xrightarrow[v_0=0, v=90 \text{ km/h}=25 \text{ m/s}]{m=1200 \text{ kg}} \Delta K = \frac{1}{2} \times 1200 \times (25^2 - 0) = 375 \times 10^3 \text{ J} = W_t$$

گام دوم: حالا کار کل به دست آمده را در رابطه توان جای گذاری می کنیم:

$$P = \frac{W_t}{t} \xrightarrow{t=10 \text{ s}} P = \frac{375 \times 10^3}{10} = 375 \times 10^4 \text{ W} = 37.5 \text{ kW}$$

یک بزرگراه از قطعات بتونی به طول 20 m ساخته شده است. این بخش‌ها در دمای 10°C بتون‌ریزی و عمل آورده شده‌اند. برای جلوگیری از تاب برداشتن این قطعات بتونی در دمای 60°C ، بین آن‌ها باید فاصله چند سانتی‌متری در نظر گرفته شود؟ (ضریب انبساط طولی بتون $14 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ است.)

$$16/8 \quad (2)$$

$$14 \quad (1)$$

$$1/68 \quad (4)$$

$$1/4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

رابطه انبساط طولی:

درس Box

ضریب انبساط طولی
 $((^\circ\text{C})^{-1} \text{ یا } \text{K}^{-1})$
 تغییر طول (m)
 $\Delta L = L_1 \alpha \Delta T \rightarrow$ تغییر دما (K) یا $(^\circ\text{C})$
 طول اولیه (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با استفاده از رابطه انبساط طولی، فاصله (ΔL) را به دست می‌آوریم:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T$$

$$\frac{L_1 = 20\text{ m}, \Delta T = 50^\circ\text{C}}{\alpha = 14 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}} \rightarrow \Delta L = 20 \times 14 \times 10^{-6} \times 50$$

$$\Rightarrow \Delta L = 14 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta L = 14 \times 10^{-1} \text{ cm} = 1/4 \text{ cm}$$

فیزیک

۷۰

قطعه سربی به جرم ۳۰۰ g را تا دمای 100°C گرم کرده و سپس آن را درون گرماسنجی که حاوی ۱۰۰ g آب با دمای

اولیه 15°C است، می‌اندازیم. اگر دمای نهایی این مجموعه 20°C شود، ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI کدام

است؟ $\left(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \text{ و } c_{\text{سرب}} = 125 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right)$

(۲) ۴۲۰

(۱) ۱۸۰

(۴) ۱۰۲۰

(۳) ۵۱۰

پاسخ: گزینه ۱

اگر دو یا چند جسم با دماهای متفاوت در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند و به تعادل گرمایی می‌رسند. براساس قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

در این رابطه برای اجسامی که گرما می‌گیرند $Q > 0$ و برای اجسامی که گرما از دست می‌دهند $Q < 0$ است.

برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی، فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = \text{گرما (J)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$c = \text{گرمای ویژه } \left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right)$$

$$C = mc = \text{ظرفیت گرمایی } \left(\frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}} \right) \text{ یا } \left(\frac{\text{J}}{\text{K}} \right)$$

$$\Delta\theta = \Delta T = \text{تغییر دما (K) یا } (^{\circ}\text{C})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا طرح‌واره تبادل گرما را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{آب } 100 \text{ g} \\ 15^{\circ}\text{C} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{Q_1 > 0} \begin{array}{|c|} \hline \text{آب } 100 \text{ g} \\ 20^{\circ}\text{C} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{گرماسنج} \\ 15^{\circ}\text{C} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{Q_2 > 0} \begin{array}{|c|} \hline \text{گرماسنج} \\ 20^{\circ}\text{C} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 300 \text{ g} \\ \text{سرب } 100^{\circ}\text{C} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{Q_3 < 0} \begin{array}{|c|} \hline \text{سرب } 20^{\circ}\text{C} \\ \hline \end{array}$$

گام دوم: تک تک گرماها را به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = mc\Delta\theta \text{ : آب}$$

$$\frac{m=0.1 \text{ kg}, c_{\text{آب}}=4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}}{\Delta\theta=5^{\circ}\text{C}} \rightarrow Q_1 = 0.1 \times 4200 \times 5 = 2100 \text{ J}$$

$$Q_2 = mc\Delta\theta \text{ : گرماسنج}$$

$$\frac{mc=C_{\text{گرماسنج}}}{\Delta\theta=5^{\circ}\text{C}} \rightarrow Q_2 = \frac{mc}{C} \times 5 = 5 C_{\text{گرماسنج}}$$

$$Q_3 = mc\Delta\theta \text{ : سرب}$$

$$\frac{c_{\text{سرب}} = 125 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}, m = 0.3 \text{ kg}}{\Delta\theta = -80^\circ\text{C}} \rightarrow Q_3 = 0.3 \times 125 \times (-80) = -3000 \text{ J}$$

گام سوم: حالا با کمک قانون پایستگی انرژی و جمع جبری گرما، خواهیم داشت:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$2100 + \Delta C_{\text{گرماسنج}} + (-3000) = 0$$

$$\Delta C = 900 \Rightarrow C_{\text{گرماسنج}} = 180 \text{ J/K}$$

در چاله کوچکی $1/7 \text{ kg}$ آب با دمای 0°C قرار دارد. اگر بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و بقیه آن یخ ببندد، جرم آب تبخیرشده چند کیلوگرم است؟ (گرمای نهان ذوب یخ 336 J/g ، گرمای نهان تبخیر آب در دمای 0°C برابر 2520 J/g و مبادله گرما با محیط ناچیز است.)

$$0/2 \quad (2)$$

$$0/1 \quad (1)$$

$$1/6 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

وقتی در اثر تبادل گرما فقط تغییر حالت رخ دهد، داریم:

$$Q = \text{گرما (J)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$L_V = \text{گرمای نهان تبخیر (J/kg)}$$

$$L_F = \text{گرمای نهان ذوب (J/kg)}$$



در سؤالات تعادل گرمایی، مجموع اندازه گرماهایی که جسم گرم تر از دست می دهد، برابر مجموع اندازه گرماهایی است که جسم سردتر دریافت می کند.

کافی است اندازه گرمای مبادله شده برای تبخیر و اندازه گرمای مبادله شده برای انجماد را برابر با هم قرار دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$|Q_{\text{تبخیر}}| = |Q_{\text{انجماد}}|$$

$$\Rightarrow m_1 L_V = m_2 L_F$$

$$\frac{L_V = 2520 \text{ J/g}, L_F = 336 \text{ J/g}}{m_2 = 1/7 - m_1} \rightarrow 2520 \cdot m_1 = (1/7 - m_1) \cdot 336$$

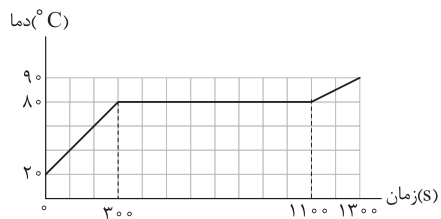
$$m_1: \text{جرم آب تبخیرشده (kg)}$$

$$\Rightarrow 2520 \cdot m_1 = 1/7 \times 336 - 336 m_1$$

$$m_2: \text{جرم آب منجمدشده (kg)}$$

$$\Rightarrow 2856 m_1 = 571/7 \Rightarrow m_1 = 0/2 \text{ kg}$$

به جسم جامدی با دمای اولیه 20°C و جرم 200 g با توان ثابت 40 W گرما می‌دهیم. اگر نمودار دما - زمان این جسم به شکل زیر باشد، به ترتیب گرمای ویژه جسم در حالت جامد و گرمای نهان ذوب این جسم در SI کدام است؟



$$(1) 2 \times 10^5, 1000$$

$$(2) 1/6 \times 10^5, 1000$$

$$(3) 2 \times 10^5, 750$$

$$(4) 1/6 \times 10^5, 750$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا با توجه به نمودار، در 300 ثانیه اول که تغییر دما داریم، گرمای ویژه (c) را به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta$$

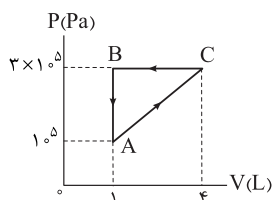
$$\frac{Q=Pt, P=40\text{ W}, t=300\text{ s}}{m=0.2\text{ kg}, \Delta\theta=80-20=60^{\circ}\text{C}} \rightarrow 40 \times 300 = 0.2 \times c \times 60 \Rightarrow c = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

گام دوم: از ثانیه 300 تا ثانیه 1100 تغییر حالت داریم و می‌توانیم در این بازه، گرمای نهان ذوب را به دست آوریم:

$$Q = mL_F$$

$$\frac{Q=Pt, P=40\text{ W}, t=800\text{ s}}{m=0.2\text{ kg}} \rightarrow 40 \times 800 = 0.2 L_F \Rightarrow L_F = 1/6 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

نمودار فشار بر حسب حجم مقدار معینی گاز کامل، در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. در این چرخه، کار انجام‌شده توسط گاز چند کیلوژول است؟



(۱) ۳

(۲) ۰/۳

(۳) -۳

(۴) -۰/۳

پاسخ: گزینه ۴

Hint

کافی است مساحت سطح داخل چرخه را که برابر با اندازه کار انجام‌شده روی گاز است، محاسبه کنید و با توجه به این که کار محیط روی گاز (W) قرینه کار گاز روی محیط (W') است، علامت آن را مشخص کنید.

درس Box

اگر دستگاه پس از طی کردن مجموعه‌ای از فرایندهای ترمودینامیکی، به حالت اولیه خود برگردد، چرخه ترمودینامیکی را طی کرده است. در طی یک چرخه ترمودینامیکی چون دستگاه به حالت اولیه خود برمی‌گردد، انرژی درونی دستگاه تغییر نمی‌کند.

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = Q_{\text{چرخه}} + W_{\text{چرخه}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{چرخه}} = -W_{\text{چرخه}}$$

در نمودار $P-V$ ، قدرمطلق کار انجام‌شده روی دستگاه برابر با مساحت چرخه است، یعنی:

$$|Q_{\text{چرخه}}| = |W_{\text{چرخه}}| = \text{مساحت داخل چرخه}$$

اگر چرخه ساعتگرد باشد، کار انجام‌شده روی دستگاه منفی است:

$$Q_{\text{چرخه}} > 0 \Rightarrow W_{\text{چرخه}} < 0$$

اگر چرخه پادساعتگرد باشد، کار انجام‌شده روی دستگاه مثبت است:

$$Q_{\text{چرخه}} < 0 \Rightarrow W_{\text{چرخه}} > 0$$

در نمودار $P-V$ ، قدرمطلق کار انجام‌شده روی دستگاه، برابر با مساحت سطح داخل چرخه است، پس:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$|W| = \text{مساحت سطح داخل چرخه} = \frac{(3 \times 10^5 - 10^5)(4 - 1) \times 10^{-3}}{2} = 300 \text{ J} = 0.3 \text{ kJ}$$

چون چرخه پادساعتگرد است، کار انجام‌شده روی گاز (W) مثبت است، پس کار انجام‌شده توسط گاز (W') منفی است؛ یعنی:

$$W' = -W = -0.3 \text{ kJ}$$

یک ماشین گرمایی در هر چرخه، 200 J گرما از منبع دمابالا می‌گیرد و 120 J گرما به منبع دمابالین می‌دهد و بقیه آن تبدیل به کار می‌شود. اگر هر چرخه 0.2 s طول بکشد، توان خروجی این ماشین چند وات است؟

۷۵ (۴)

۱۲۵ (۳)

۲۰۰ (۲)

۴۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

کار انجام شده در هر چرخه را به دست آورید و سپس طبق رابطه $P = \frac{W}{t}$ ، توان خروجی ماشین را محاسبه کنید.

Hint

درس‌Box

(۱) در ماشین‌های گرمایی، دستگاه از یک منبع دمابالا، گرمای Q_H را می‌گیرد، بر روی محیط کار $|W|$ را انجام می‌دهد و گرمای $|Q_L|$ را به منبع دمابالین می‌دهد و این چرخه پی‌درپی تکرار می‌شود؛ پس:

$$Q_H = |Q_L| + |W|$$

(۲) توان خروجی یا توان مفید ماشین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{t} \rightarrow \begin{matrix} \text{کار انجام شده روی محیط (J)} \\ \text{زمان (s)} \end{matrix}$$

گام اول: کاری که ماشین در هر چرخه انجام می‌دهد برابر است با: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$W = Q_H - |Q_L| = 200 - 120 = 80 \text{ J}$$

گام دوم: توان خروجی این ماشین را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{t} = \frac{80}{0.2} = 400 \text{ W}$$

۷۵

در فشار ثابت 10^5 Pa دمای یک مکعب آلومینیمی توپر به ضلع 2 cm ، از 50°C به 150°C می‌رسد. در این فرایند،

کار انجام شده روی مکعب آلومینیمی چند ژول است؟ (ضریب انبساط طولی آلومینیم $\frac{1}{C} \times 10^{-5} \times \frac{2}{3}$ است.)

$$(2) -18/4$$

$$(1) -1/84$$

$$(4) -55/2$$

$$(3) -5/52$$

پاسخ: گزینه ۳

کافی است تغییرات حجم را از رابطه $\Delta V = V_1 \alpha \Delta \theta$ به دست آورید و در رابطه $W = -P\Delta V$ جای‌گذاری کنید.

Hint

حجم بیشتر اجسام با افزایش دما، افزایش می‌یابد. اگر دمای جسمی به حجم V_1 و دمای اولیه θ_1 را به اندازه $\Delta \theta$ تغییر دهیم تا به حجم V_2 برسد، این تغییر حجم از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

درس Box

ضریب انبساط طولی $(\frac{1}{K})$ یا $(\frac{1}{C})$

$$\Delta V = V_1 (\alpha) \Delta \theta \rightarrow (\text{K یا } ^\circ \text{C})$$

تغییر دما
حجم اولیه تغییرات حجم

در فرایند هم‌فشار، اندازه کار انجام شده روی یک مکعب از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$W = -P\Delta V \xrightarrow{\Delta V = V_1 (\alpha) \Delta \theta} W = -10^5 \times (0/2)^2 \times 3 \times 2 / 3 \times 10^{-5} \times 100$$

$$\Rightarrow W = -5/52 \text{ J}$$

توجه کنید که چون حجم مکعب افزایش یافته، پس کار انجام شده روی مکعب منفی است.



دانش آموزی در سه لوله آزمایش به یک اندازه آب ریخت و سپس به لوله A مقداری شکر، به لوله B چند قطره شیر و به لوله C مقداری منیزیم هیدروکسید افزود و آن‌ها را به خوبی تکان داد و در نهایت از چراغ قوه برای تاباندن پرتو نور به لوله‌ها استفاده کرد.

الف) مسیر عبور نور در کدام لوله(ها) دیده می‌شود؟

ب) مخلوط کدام لوله(ها)، سوسپانسیون محسوب می‌شود؟

۲) B و C -

۱) فقط B - C

۴) B و A - C

۳) A - B

پاسخ: گزینه ۲



ویژگی	نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است. / ته‌نشین می‌شود.	ناپایدار است. / ته‌نشین می‌شود.	پایدار است. / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است. / ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا	
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب قند، آب نمک	

A ← آب و شکر (محلول)

B ← شیر (کلوئید)

C ← آب و منیزیم هیدروکسید (سوسپانسیون)

مسیر عبور نور از میان کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها مشخص است، زیرا این مخلوط‌ها نور را پخش می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- کاغذ pH در حضور صابون و محلول اتانول در آب، به رنگ آبی درمی آید.
- در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلول اسیدهای قوی از اسیدهای ضعیف، به یقین بیشتر است.
- در ساختار پاک کننده های غیرصابونی، حداقل ۳ پیوند $C=C$ وجود دارد.
- با حل شدن دی نیتروژن پنتا اکسید در آب، یون نیترات پدید می آید.

(۱) نادرست - درست - درست - درست

(۲) نادرست - نادرست - درست - درست

(۳) درست - درست - نادرست - درست

(۴) درست - نادرست - نادرست - نادرست

پاسخ: گزینه ۲

عبارتهای اول و دوم، نادرست و عبارتهای سوم و چهارم، درست اند.

بررسی عبارتها:

• کاغذ pH در محیط اسیدی به رنگ قرمز و در محیط بازی به رنگ آبی درمی آید.

دقت کنید که اتانول (C_2H_5OH)، خاصیت اسیدی یا بازی ندارد و کاغذ pH در محلول آن، تغییر رنگ نمی دهد.

• بستگی به غلظت محلول ها نیز دارد. اگر غلظت اولیه محلول ها یکسان باشد، به دلیل یونش بیشتر اسید قوی نسبت به اسید

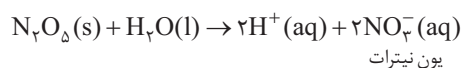
ضعیف، غلظت یون ها در محلول اسید قوی و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول بیشتر خواهد بود.

• در ساختار پاک کننده های غیرصابونی، حلقه بنزن وجود دارد؛ از این رو در ساختار این پاک کننده ها حداقل ۳ پیوند دوگانه

وجود دارد.



• معادله واکنش N_2O_5 با آب به صورت زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر غلظت اولیهٔ محلول دو اسید ضعیف HA و HB برابر با ۱/۰ مولار و در دمای یکسان، درصد یونش HA و HB به ترتیب برابر با ۱٪ و ۳٪ باشد، کدام مطلب درست است؟

- (۱) HA تمایل بیشتری برای پروتون‌دهی در محلول دارد و در نتیجه، K_a آن بزرگ‌تر است.
- (۲) نسبت غلظت یون‌های تولیدشده به غلظت اسید یونیده‌نشده در محلول HB، بیشتر از این نسبت در محلول HA است.
- (۳) در دمای ثابت با افزایش غلظت محلول HA، اختلاف درصد یونش دو اسید کاهش می‌یابد.
- (۴) برای مقایسهٔ ثابت یونش دو اسید، باید pH محلول هر دو اسید مشخص باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

غلظت اولیهٔ هر دو محلول برابر است؛ بنابراین با توجه به بیشتر بودن درصد یونش HB، می‌توان گفت HB اسید قوی‌تر بوده و K_a آن بزرگ‌تر است. با توجه به قوی‌تر بودن اسید HB، در محلول آن نسبت به محلول اسید HA، غلظت یون‌ها بیشتر و غلظت اسید یونیده‌نشده، کم‌تر است. در مورد گزینهٔ (۳) دقت کنید که با توجه به رابطهٔ $K_a = M\alpha^2$ ، در دمای ثابت، درصد یونش یک اسید با غلظت محلول آن رابطهٔ وارونه دارد، یعنی با افزایش غلظت محلول اسید، درصد یونش آن کم می‌شود. با این حساب اگر غلظت HA بیشتر *بشه* درصد یونش *اون کم می‌شه* و اختلافش با درصد یونش HB بیشتر می‌شه!

در دمای اتاق، نسبت غلظت مولی یون هیدرونیوم به هیدروکسید در محلول 10^{-n} مولار اسید HA برابر 10^6 است. اگر درصد یونش اسید در محلول برابر ۱ باشد، n و pH محلول، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$$۴ - ۲ \quad (۲)$$

$$۴ - ۱ \quad (۱)$$

$$۳ - ۲ \quad (۴)$$

$$۳ - ۱ \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

روابط محلول‌های اسیدی:



$$۱) \text{ در دمای } ۲۵^\circ\text{C}: [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

$$۲) K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}$$

$$۳) [\text{H}^+] = M\alpha$$

$$۴) \text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

گام اول: محاسبه میزان یون $[\text{H}^+]$ از روی رابطه: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{[\text{H}^+]}{[\text{OH}^-]} = 10^6 \xrightarrow{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}} [\text{H}^+] \times \frac{[\text{H}^+]}{10^{-6}} = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+]^2 = 10^{-8} \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-4}$$

گام دوم: محاسبه pH از روی غلظت $[\text{H}^+]$:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log 10^{-4} \Rightarrow \text{pH} = 4$$

گام سوم: محاسبه n به کمک رابطه درصد یونش:

$$\alpha = \frac{\text{درصد یونش}}{100} = 0.01$$

$$[\text{H}^+] = M\alpha \Rightarrow 10^{-4} = 10^{-n} \times 10^{-2} \Rightarrow n + 2 = 4 \Rightarrow n = 2$$

اگر درصد یونش محلول 10^{-n} مول بر لیتر از اسید HA، در دمای اتاق برابر یک و $\text{pH} = 4$ باشد:

(سؤال ۱۲ - امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۲)

الف) مقدار n را محاسبه کنید.

ب) نسبت غلظت یون H^+ به OH^- را در این محلول به دست آورید.

دو محلول زیر را در نظر بگیرید:

• محلول A: نیتریک اسید با غلظت ۰/۰۱ مولار

• محلول B: استیک اسید با غلظت ۰/۰۱ مولار و $K_a = 1/6 \times 10^{-5}$

اگر هر دو محلول در دمای 25°C باشند، کدام مورد درست است؟

(۱) غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول A، حدود ۲۵ برابر غلظت این یون در محلول B است.

(۲) درصد یونش اسید در محلول B به تقریب برابر با ۱۰٪ است.

(۳) غلظت یون هیدروکسید در محلول B برابر $1/0 \times 10^{-9}$ مولار است.

(۴) تفاوت pH دو محلول برابر ۲ است.

پاسخ: گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱):



$$\frac{[\text{H}^+]_A}{[\text{H}^+]_B} = \frac{10^{-2}}{4 \times 10^{-4}} = \frac{100}{4} = 25$$

گزینه (۲):

$$\text{درصد یونش} = \frac{[\text{H}^+]}{M_{\text{HB}}} \times 100 = \frac{4 \times 10^{-4}}{10^{-2}} \times 100 = 4$$

گزینه (۳):

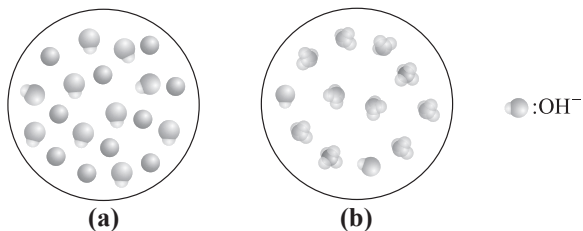
$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-4}} = 25 \times 10^{-11}$$

گزینه (۴):

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \begin{cases} \text{pH(A)} = -\log 10^{-2} = 2 \\ \text{pH(B)} = -\log(4 \times 10^{-4}) = 4 - \log 4 = 4 - 2 \log 2 = 3/4 \end{cases}$$

$$\text{pH(B)} - \text{pH(A)} = 3/4 - 2 = 1/4$$

مطابق شکل زیر دو محلول بازی در آب تهیه شده است. اگر حجم محلول‌ها یکسان و برابر ۲ لیتر و هر ذره معادل 10^{-4} مول باشد، کدام محلول pH بالاتری دارد و اگر محلول (b)، محلول آمونیاک باشد، ثابت یونش بازی آمونیاک کدام است؟



$$1 \times 10^{-5} - a \quad (2)$$

$$2 / 5 \times 10^{-5} - a \quad (1)$$

$$1 \times 10^{-5} - b \quad (4)$$

$$2 / 5 \times 10^{-5} - b \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(a) شکل $\Rightarrow$ عدد یون OH^-

(b) شکل $\Rightarrow$ عدد یون OH^-

غلظت یون هیدروکسید در محلول a بیشتر است؛ به همین دلیل pH بالاتری دارد.

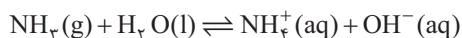
قسمت دوم: برای محاسبه میزان ثابت یونش، هم به غلظت مولی آمونیاک (NH_3) در لحظه تعادل و هم به غلظت مولی OH^- و NH_4^+ نیاز است.

مول یون هیدروکسید $\Rightarrow 2 \times 10^{-4} \Rightarrow$ عدد یون OH^- محلول b

$$\text{غلظت یون } \text{OH}^- = \frac{\text{مول } \text{OH}^-}{\text{حجم (L)}} = \frac{2 \times 10^{-4}}{2} = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

مول آمونیاک $\Rightarrow 8 \times 10^{-4} \Rightarrow$ عدد آمونیاک یونیده نشده

$$\text{غلظت آمونیاک تعادلی} = \frac{\text{مول آمونیاک}}{\text{حجم (L)}} = \frac{8 \times 10^{-4}}{2} = 4 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$



$$K_b = \frac{[\text{NH}_4^+][\text{OH}^-]}{[\text{NH}_3]} = \frac{10^{-4} \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 2 / 5 \times 10^{-5}$$

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, O = 16, K = 39 : g.mol^{-1}$)



الف) جوش شیرین خاصیت بازی دارد و نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن برابر یک است.

ب) در واکنش کامل سولفوریک اسید با پودر جامد هیدروکسیدهای گروه دوم ($M(OH)_2$)، با افزایش شعاع M رسانایی الکتریکی محلول حاصل افزایش می‌یابد.

پ) واکنش $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$ ، مبنایی برای کاربرد شوینده‌ها و پاک‌کننده‌ها است.

ت) ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید $2/8$ درصد جرمی با چگالی $1 g.mL^{-1}$ ، دارای pH برابر $13/3$ است.

(۲) «ب» - «پ»

(۱) «الف» - «ت»

(۴) «ب» - «ت»

(۳) «الف» - «پ»

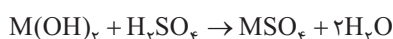
پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

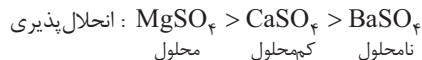
بررسی عبارت‌ها:

الف) جوش شیرین با فرمول $NaHCO_3$ که به عنوان ضداسید به کار می‌رود، از جمله بازها به شمار می‌رود. کاتیون این ترکیب Na^+ و آنیون آن HCO_3^- و نسبت شمار کاتیون به آنیون آن برابر ۱ است.

ب) معادله کلی واکنش به صورت زیر است:



رسانایی الکتریکی محلول‌ها، بستگی به غلظت یون‌های موجود در آن‌ها دارد. اگر M انحلال‌پذیری کمی در آب داشته باشد، غلظت یون‌ها در محلول حاصل، کم خواهد بود. در گروه دوم، از بالا به پایین با افزایش شعاع اتمی، انحلال‌پذیری نمک سولفات آن‌ها کاهش می‌یابد:



پ) واکنش خنثی‌شدن اسید و باز، مبنایی برای کاربرد پاک‌کننده‌ها است. معادله کلی این واکنش به صورت $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$ است.

ت) ابتدا غلظت مولی محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{چگالی (d)} \times \text{درصد جرمی (a)} \times 10 = \text{غلظت مولی} \times \text{جرم مولی}$$

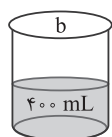
$$KOH \text{ غلظت مولی} = \frac{10 \times 2 / 8 \times 1}{56} = 0.36 \text{ mol.L}^{-1}$$

KOH یک باز قوی است و غلظت یون هیدروکسید در محلول آن، با غلظت اولیه محلول برابر است:

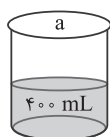
$$[OH^-] = 0.36 \Rightarrow [H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{0.36} = 2.78 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = 14 - \log 2.78 = 13.54$$

با توجه به شکل‌های زیر که دو نمونه محلول از یک اسید قوی و یک باز قوی (هر دو تک‌ظرفیتی) را نشان می‌دهد، تهیه کدام مخلوط منجر به تولید یک محلول خنثی می‌شود؟



pH = ۱۲/۹



pH = ۲/۱

(۱) ۴۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول b

(۲) ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۲۰ میلی‌لیتر از محلول b

(۳) ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۴۰ میلی‌لیتر از محلول b

(۴) ۲۰ میلی‌لیتر از محلول a با ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول b

پاسخ: گزینه ۳

درس‌Box

اسیدها و بازها می‌توانند با هم واکنش داده و همدیگر را خنثی می‌کنند. به طور کلی برای حل این مسائل، دو روش وجود دارد: (۱) معادله موازنه‌شده واکنش را نوشته (اگر نداده بودن!) و مانند سایر مسائل استوکیومتری واکنش‌ها، از روش کسر تبدیل یا کسر تناسب، به خواسته سؤال می‌رسیم.

(۲) از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 حجم باز × غلظت باز = حجم اسید × غلظت اسید × ظرفیت اسید

منظور از ظرفیت (n) در اسیدها، تعداد هیدروژن اسیدی و برای بازها، تعداد OH^- است. در ضمن برای آمونیاک که هر مولکول آن می‌تواند یک یون OH^- در آب تولید کند، n را برابر ۱ در نظر می‌گیریم.

n_b	باز	n_a	اسید
۱	NH_3 , NaOH , KOH	۱	RCOOH , HNO_3 , HBr , HCl
۲	Ba(OH)_2 , Ca(OH)_2 , Mg(OH)_2	۲	H_2CO_3 , H_2SO_4
۳	Al(OH)_3	۳	H_3PO_4

توجه! هرچند در واکنش خنثی‌شدن اسید و باز، در واقع یون‌های H^+ و OH^- با یکدیگر واکنش می‌دهند؛ اما *هواستون باشه* که در هر دو روش حل مسائل خنثی‌شدن اسید و باز، باید از غلظت اولیه اسید و باز (M) استفاده کنیم و نه غلظت یون‌های H^+ و OH^- ؛ پس در این مسائل، اگر $[\text{H}^+]$ یا $[\text{OH}^-]$ و یا pH محلول‌ها را به شما داده بودند، سریع باید آن‌ها را به غلظت مولار محلول‌ها تبدیل کنید.

اسید و باز داده‌شده، قوی و تک‌ظرفیتی‌اند؛ بنابراین در محلول a، غلظت محلول با $[\text{H}^+]$ و در محلول (b)، غلظت محلول با $[\text{OH}^-]$ برابر است:

$$(a) \text{ محلول: } M_a = [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2.1}$$

$$(b) \text{ محلول: } [\text{H}^+] = 10^{-12.9} \Rightarrow M_b = [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-12.9}} = 10^{-1.1}$$

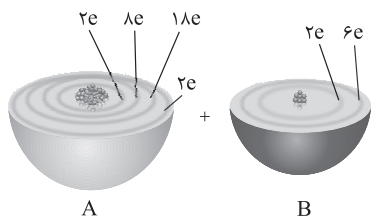
حالا با توجه به رابطه خنثی‌شدن، نسبت حجم دو محلول را حساب می‌کنیم:

$$n_a M_a V_a = n_b M_b V_b \Rightarrow 1 \times 10^{-2.1} \times V_a = 1 \times 10^{-1.1} \times V_b$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{10^{-1.1}}{10^{-2.1}} \times V_b = 10 V_b \Rightarrow \text{فقط در گزینه (۳) حجم محلول اسیدی، ۱۰ برابر حجم محلول بازی است.}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به شکل داده شده، کدام مطلب درست است؟



(۱) عنصری که عدد اتمی آن ۴ واحد از A کم تر است، قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به A داشته و آسان تر با B واکنش می دهد.

(۲) اگر مجموع $n+1$ برای الکترون های اتم عنصری، سه واحد بیشتر از B باشد، آن عنصر، اکسندترین عنصر جدول تناوبی است.

(۳) به ازای مصرف هر مول A، $6/02 \times 10^{23}$ الکترون بین گونه های اکسند و کاهند مبادله می شود.

(۴) به ازای تولید $25/0$ مول فرآورده یونی در این واکنش، اتم B، $3/01 \times 10^{23}$ الکترون از دست می دهد.

پاسخ: گزینه ۲

عنصر B با عدد اتمی ۸، همان اکسیژن است.

مجموع $n+1$ برای الکترون های F، سه واحد بیشتر از O است. F اکسندترین عنصر جدول تناوبی است.

$${}_8\text{O} : 1s^2 / 2s^2 2p^4 \Rightarrow n+1 = 2(1+0) + 2(2+0) + 4(2+1) = 18$$

$${}_9\text{F} : 1s^2 / 2s^2 2p^5 \Rightarrow n+1 = 2(1+0) + 2(2+0) + 5(2+1) = 21$$

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): عنصر A با عدد اتمی ۳۰، فلز روی است. قدرت کاهندگی آهن با عدد اتمی ۲۶ از روی کم تر است.

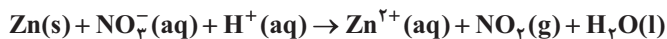
گزینه (۳): با مصرف هر مول Zn، ۲ مول الکترون ($2 \times 6/02 \times 10^{23}$) بین گونه های اکسند و کاهند مبادله می شود.

گزینه (۴): اتم اکسیژن در این واکنش الکترون می گیرد (روی الکترون از دست می دهد).

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به واکنش زیر، کدام مورد درست است؟

۸۵



(۱) عدد اکسایش نیتروژن از ۵ به ۴ کاهش یافته است؛ بنابراین NO_3^- اکسنده و Zn کاهنده است.

(۲) عدد اکسایش نیتروژن از ۴ به ۵ افزایش یافته است؛ بنابراین NO_3^- کاهنده و Zn اکسنده است.

(۳) عدد اکسایش نیتروژن ثابت مانده است؛ بنابراین واکنش اکسایش - کاهش نیست.

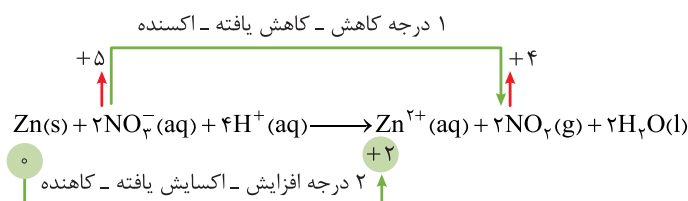
(۴) در معادله موازنه شده، نسبت ضریب $\text{H}^+(\text{aq})$ به $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ برابر ۲ است.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

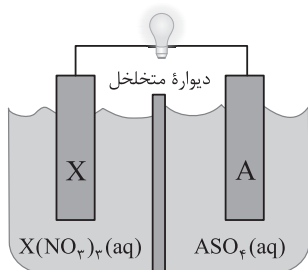
ابتدا باید معادله واکنش را موازنه کنیم.

اصل کلی در موازنه واکنش‌ها به روش عدد اکسایش این است که پس از محاسبه عدد اکسایش عناصرها، باید مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضریب گونه اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسنده را ضریب گونه کاهنده قرار دهیم و سپس با توجه به ضرایب معلوم شده، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین کنیم.



در این واکنش، عدد اکسایش نیتروژن از ۵ به ۴ در NO_3^- رسیده است؛ بنابراین NO_3^- نقش اکسنده را دارد، زیرا کاهش یافته است. از طرفی عدد اکسایش Zn از صفر به ۲ در Zn^{2+} رسیده است، یعنی اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد.

۸۶ با توجه به شکل زیر، کدام گزینه درست است؟



$$E^\circ(A^{2+}/A) = +0.8 \text{ V}$$

$$E^\circ(X^{3+}/X) = -0.65 \text{ V}$$

- (۱) با گذشت زمان، غلظت آنیون‌های سولفات در نیم‌سلول A کاهش یافته و غلظت یون A^{2+} در نیم‌سلول X افزایش می‌یابد.
- (۲) اگر ولتاژ مورد نیاز برای روشنایی لامپ بیش از ۱/۴۵ ولت باشد، برای روشن شدن آن باید جای X و A را عوض کرد.
- (۳) الکترون‌ها از دیواره متخلخل عبور می‌کنند و از نیم‌سلول X به A می‌روند.
- (۴) با گذشت زمان، جرم تیغه X کاهش می‌یابد و با جایگزین کردن نیم‌سلول SHE به جای X، نقش الکتروود A تغییری نمی‌کند.

پاسخ: گزینه ۴

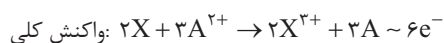
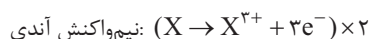


در سلول‌های گالوانی

نیم‌سلول کاتد	نیم‌سلول آند
قطب مثبت است.	قطب منفی است.
در آن نیم‌واکنش کاهش صورت می‌گیرد.	در آن نیم‌واکنش اکسایش صورت می‌گیرد.
E° آن نسبت به E° بزرگ‌تر است.	E° آن نسبت به E° کوچک‌تر است.
با گذشت زمان، غلظت کاتیون‌های الکترولیت کم می‌شود.	با گذشت زمان، غلظت کاتیون‌های الکترولیت زیاد می‌شود.
به طور معمول جرم تیغه افزایش می‌یابد (چاق می‌شود).	به طور معمول جرم تیغه کاهش می‌یابد (لاغر می‌شود).
کاتیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می‌شوند.	آنیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می‌شوند.

الکتروود X با E° کم‌تر، نقش آند و الکتروود A با E° بیشتر، نقش کاتد سلول را ایفا می‌کند:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): در سلول‌های گالوانی، آنیون‌ها از طریق دیواره متخلخل به سمت آند و کاتیون‌ها به سمت کاتد می‌روند:



گزینه (۲): با تغییر جای A و X، ولتاژ سلول تغییر نمی‌کند.

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0.8 - (-0.65) = 1.45 \text{ V}$$

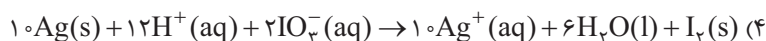
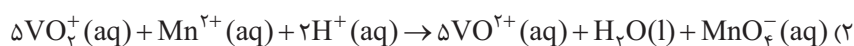
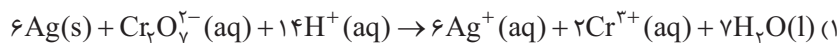
گزینه (۳): الکترون‌ها از طریق مدار بیرونی یعنی سیم (نه از طریق دیواره متخلخل!)، از آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

گزینه (۴): آند سلول است و با گذشت زمان از جرم آن کاسته می‌شود. اگر به جای X، نیم‌سلول SHE ($E^\circ = 0$) قرار گیرد، با توجه به مثبت بودن E° نیم‌سلول A، باز هم A کاتد خواهد بود.

با توجه به پتانسیل‌های کاهش‌ی استاندارد داده‌شده، کدام واکنش به طور خودبه‌خودی انجام نمی‌شود؟

۸۷

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ (V)$
$H_2O_2(aq) + 2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	+۱/۷۸
$MnO_4^-(aq) + 8H^+(aq) + 5e^- \rightarrow Mn^{2+}(aq) + 4H_2O(l)$	+۱/۵۱
$Cr_2O_7^{2-}(aq) + 14H^+(aq) + 6e^- \rightarrow 2Cr^{3+}(aq) + 7H_2O(l)$	+۱/۳۳
$IO_3^-(aq) + 6H^+(aq) + 5e^- \rightarrow \frac{1}{2}I_2(s) + 3H_2O(l)$	+۱/۲۰
$Br_2(l) + 2e^- \rightarrow 2Br^-(aq)$	+۱/۰۷
$VO_2^+(aq) + 2H^+(aq) + e^- \rightarrow VO^{2+}(aq) + H_2O(l)$	+۱/۰۰
$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$	+۰/۸۰
$Fe^{3+}(aq) + e^- \rightarrow Fe^{2+}(aq)$	+۰/۷۷



پاسخ: گزینه ۲

درس Box

به کمک E° یا جایگاه نیم‌سلول‌ها در سری الکتروشیمیایی، می‌توان انجام‌پذیر بودن یا نبودن یک واکنش بین دو گونه را تعیین کرد. هر چه E° مربوط به یک نیم‌واکنش کوچک‌تر باشد (یعنی در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر باشد)، گونه سمت راست آن تمایل بیشتری به اکسیدشدن دارد و از طرفی هر چه E° مربوط به یک نیم‌واکنش بزرگ‌تر باشد (یعنی در سری الکتروشیمیایی بالاتر باشد)، گونه سمت چپ آن تمایل بیشتری برای کاهش‌یافتن دارد؛ بنابراین می‌توان گفت که:

گونه سمت راست از نیم‌واکنش پایین‌تر (E° کم‌تر) می‌تواند با گونه سمت چپ از نیم‌واکنش بالاتر (E° بیشتر)، به طور خودبه‌خودی واکنش دهد.

واکنش انجام‌پذیر است. $\rightarrow$ چپ بالاتر + راست پایین‌تر
اکسندۀ قوی‌تر کاهندۀ قوی‌تر

در جدول داده‌شده، نیم‌سلول‌ها از E° بیشتر به E° کم‌تر مرتب شده‌اند، پس واکنش‌های ۱، ۳ و ۴ به طور طبیعی انجام می‌شوند؛ زیرا در آن‌ها، گونه سمت راست نیم‌واکنش با E° کم‌تر، با گونه سمت چپ نیم‌واکنش با E° بیشتر واکنش داده است؛ اما واکنش (۲) به طور طبیعی انجام نمی‌شود، زیرا E° مربوط به نیم‌واکنش Mn^{2+} بیشتر از E° مربوط به نیم‌واکنش VO_2^+ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



کدام گزینه عبارت زیر را به درستی تکمیل می کند؟

«در هر سلول برخلاف هر سلول ،»

- (۱) گالوانی - الکترولیتی - جرم تیغه آندی کاهش می یابد
- (۲) الکترولیتی - گالوانی - واکنش به طور غیرخودبه خودی و به کمک باتری انجام می شود
- (۳) گالوانی - الکترولیتی - آنیون ها به سمت آند حرکت می کنند
- (۴) الکترولیتی - گالوانی - در مجاورت کاتد، غلظت کاتیون ها کاهش می یابد

پاسخ: گزینه ۲

مقایسه سلول های گالوانی و الکترولیتی

درس Box

سلول الکترولیتی	سلول گالوانی	
انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی تبدیل می شود.	انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می شود.	تفاوت ها
با اعمال یک ولتاژ بیرونی، یک واکنش اکسایش - کاهش دلخواه در خلاف جهت طبیعی انجام می شود.	یک واکنش شیمیایی در جهت طبیعی پیش می رود.	
دو الکترود درون یک الکترولیت قرار گرفته اند (الکترولیت، یک محلول یونی یا یک ترکیب یونی مذاب است).	دارای دو الکترولیت است که توسط دیواره ای متخلخل از هم جدا شده اند (الکترولیت ها حاوی کاتیون هایی از جنس الکترودها هستند).	
آند، قطب مثبت و کاتد، قطب منفی است.	آند، قطب منفی و کاتد، قطب مثبت است.	
معمولاً الکترودهای آند و کاتد بی اثرند و در واکنش شرکت نمی کنند.	معمولاً الکترودهای آند و کاتد در واکنش شرکت می کنند.	
اکسایش در آند و کاهش در کاتد انجام می شود.		شباهت ها
جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد است.		
کاتیون ها به سمت کاتد و آنیون ها به سمت آند حرکت می کنند.		

سلول های الکترولیتی به طور غیرخودبه خودی و با اعمال ولتاژ بیرونی فعالیت می کنند، در حالی که سلول های گالوانی به صورت خودبه خودی و بدون نیاز به اعمال ولتاژ بیرونی فعالیت می کنند.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): در هر دو سلول، فرایند اکسایش در تیغه آند صورت می گیرد و در صورتی که الکترودها، کاهنده باشد، در هر دو سلول، جرم آند کاهش می یابد.

گزینه (۳): در هر دو سلول الکترولیتی و گالوانی، آنیون ها به سمت آند حرکت می کنند.

گزینه (۴): در هر دو سلول الکترولیتی و گالوانی، کاتیون ها به سمت کاتد حرکت می کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) در فرایند آبکاری فلز آهن با نقره و الکترولیت نقره نیترات، جرم تیغه کاتدی و آندی به یک اندازه تغییر می‌کند.
- (۲) در فرایند برقکافت منیزیم کلرید مذاب در یک سلول گالوانی، چگالی الکترولیت اولیه بیشتر از فلز منیزیم است.
- (۳) در فرایند هال، جرم تیغه‌های آندی برخلاف کاتدی کاهش می‌یابد.
- (۴) در فرایند برقکافت آب، حجم گاز تولیدی در آند نصف حجم گاز تولیدی در کاتد است.

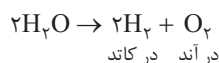
پاسخ: گزینه ۲

گزینه (۲) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): در فرایند آبکاری، هر چه قدر از جرم آند و فلز پوشاننده (آبکاری‌کننده) کم می‌شود، به همان میزان به جرم کاتد (جسمی که قرار است آبکاری شود)، افزوده می‌شود.
- گزینه (۲): در فرایند برقکافت منیزیم، فلز تولیدشده در سطح سلول و الکترولیت مذاب در کف سلول قرار دارد، یعنی چگالی الکترولیت از چگالی فلز بیشتر است، ولی *مواستون باشه که* فرایند برقکافت در سلول الکترولیتی انجام می‌شود، نه گالوانی!
- گزینه (۳): در سلول هال، جنس آند و کاتد از گرافیت است. گرافیت کاتد در واکنش شرکت نمی‌کند و جرم آن ثابت است، در حالی که گرافیت آند در واکنش شرکت کرده و در واکنش با گاز اکسیژن، کربن دی‌اکسید تولید می‌کند.
- گزینه (۴): در برقکافت آب، در آند گاز اکسیژن و در کاتد، گاز هیدروژن تولید می‌شود. با توجه به ضرایب استوکیومتری این گازها در معادله کلی واکنش، می‌توان گفت حجم گاز اکسیژن تولیدشده، نصف حجم گاز هیدروژن تولیدشده است:



۹۰ اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند خوردگی آهن و فرایند هال برابر باشد، نسبت جرم فلز تولیدشده در فرایند هال به آهن مصرف‌شده در فرایند خوردگی کدام است؟ ($\text{Al} = ۲۷, \text{Fe} = ۵۶ : \text{g.mol}^{-1}$)

$$\frac{۹}{۵۶} \quad (۴)$$

$$\frac{۹}{۲۸} \quad (۳)$$

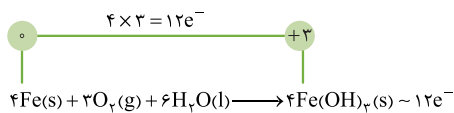
$$\frac{۲۷}{۲۸} \quad (۲)$$

$$\frac{۲۷}{۵۶} \quad (۱)$$

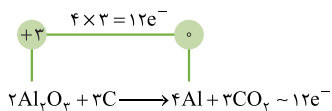
پاسخ: گزینه ۱

واکنش کلی خوردگی آهن به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



واکنش کلی فرایند هال به صورت زیر است:



در هر دو واکنش، ۱۲ الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Al جرم} = ۱۲ \text{ mol } e^- \times \frac{۱ \text{ mol Al}}{۳ \text{ mol } e^-} \times \frac{۲۷ \text{ g Al}}{۱ \text{ mol Al}} = ۱۰۸ \text{ g Al} \\ \text{Fe جرم} = ۱۲ \text{ mol } e^- \times \frac{۱ \text{ mol Fe}}{۳ \text{ mol } e^-} \times \frac{۵۶ \text{ g Fe}}{۱ \text{ mol Fe}} = ۲۲۴ \text{ g Fe} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{Al جرم}}{\text{Fe جرم}} = \frac{۱۰۸}{۲۲۴} = \frac{۲۷}{۵۶}$$

بین Al و Fe تناسب برقرار می‌کنیم:

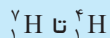
په‌جور دیگه ➡

$$۴\text{Al} \sim ۴\text{Fe}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{\text{Al جرم}}{\text{Fe جرم}} = \frac{۲۷}{۵۶}$$

کدام مورد درست است؟ ۹۱

- (۱) مجموع جرم یک پروتون و یک الکترون از جرم یک نوترون بیشتر است.
 (۲) فراوان ترین ایزوتوپ یک عنصر، ایزوتوپی است که جرم اتمی کمتری دارد.
 (۳) تاکنون هیچ ایزوتوپی از عنصر فسفر شناخته یا ساخته نشده است.
 (۴) مجموع شمار نوترون های ایزوتوپ های ساختگی اتم هیدروژن، برابر ۱۸ است.



پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ایزوتوپ های ساختگی هیدروژن عبارت اند از:



بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱):

$$\left. \begin{array}{l} \text{جرم پروتون: } 1.0073 \text{ amu} \\ \text{جرم الکترون: } 0.0005 \text{ amu} \\ \text{جرم نوترون: } 1.0087 \text{ amu} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جرم نوترون} < \text{جرم پروتون و جرم الکترون} \Rightarrow \underbrace{1.0073 + 0.0005}_{1.0078} < 1.0087$$

گزینه (۲): مثلاً لیتیم دارای دو ایزوتوپ طبیعی (${}^6\text{Li}$ و ${}^7\text{Li}$) است که ایزوتوپ سنگین تر، فراوانی بیشتری دارد.

گزینه (۳): در صفحه ۸ کتاب درسی، تصویر رادیوایزوتوپی از فسفر نشان داده شده است.

درستی یا نادرستی کدام گزینه دربارهٔ لیتیم سولفات با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) رنگ شعلهٔ آن با لیتیم کلرید مشابه و با سدیم سولفات متفاوت است.
- (۲) نسبت شمار کاتیون به آنیون در آن با این نسبت در مس (I) کربنات برابر است.
- (۳) در آب سرد بهتر از آب گرم حل می‌شود.
- (۴) در ساختار آن، همهٔ اتم‌ها و یون‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار رسیده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

گزینهٔ (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): رنگ شعلهٔ فلز لیتیم و ترکیب‌های آن (مانند لیتیم سولفات و لیتیم کلرید)، سرخ است در حالی که رنگ شعلهٔ فلز سدیم و ترکیب‌های آن (مانند سدیم سولفات)، زرد است. دقت کنید رنگ شعلهٔ یک نمک به آنیون سازندهٔ آن بستگی ندارد، به همین دلیل رنگ شعلهٔ لیتیم سولفات و سدیم سولفات متفاوت است.

گزینهٔ (۲):

$$\text{Li}_2\text{SO}_4 : \text{لیتیم سولفات} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Cu}_2\text{CO}_3 : \text{مس (I) کربنات} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{1} = 2$$

گزینهٔ (۳): طبق نمودار انحلال‌پذیری نمک‌ها برحسب دما، انحلال‌پذیری نمک لیتیم سولفات با افزایش دما کاهش می‌یابد، پس هر چه دمای آب کمتر (آب سردتر) باشد، این نمک بهتر در آب حل می‌شود.

گزینهٔ (۴): آرایش الکترونی لیتیم ($1s^2 2s^1$) با از دست دادن یک الکترون به $1s^2$ می‌رسد که مطابق آرایش الکترونی گاز نجیب دوتایی هلیوم است. لیتیم قاعدهٔ دوتایی را رعایت می‌کند نه هشت‌تایی را.

با توجه به عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی، کدام موارد درست‌اند؟

الف) شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم فلزهای واسطه، با شماره گروه آن‌ها در جدول برابر است.

ب) مجموع $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم نافلز مایع برابر ۳۳ است.

پ) واکنش‌پذیری فلزهای این دوره، از چپ به راست به طور منظم کاهش می‌یابد.

ت) بین دو عنصری که آرایش الکترونی آن‌ها از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند، ۵ عنصر دیگر وجود دارد.

(۱) «الف» - «ب» (۲) «پ» - «ت»

(۳) «الف» - «پ» - «ت» (۴) «ب» - «ت»

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

الف) فلزهای واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ قرار دارند. شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم این عناصر، با شماره گروه آن‌ها برابر است:

$${}_{26}\text{Fe}: [{}_{18}\text{Ar}] 3d^6 4s^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{الکترون ظرفیتی} = 8 \\ \text{شماره گروه} = 8 \end{cases}$$

ب) تنها نافلز مایع در جدول، ${}_{35}\text{Br}$ در گروه ۱۷ جدول تناوبی است.

$${}_{35}\text{Br} = [\text{Ar}] 3d^5 4s^2 4p^5 \Rightarrow \underbrace{((4+0) \times 2)}_{4s^2} + \underbrace{((4+1) \times 5)}_{4p^5} = 33$$

لایه ظرفیت

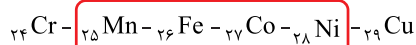
پ) این روند کلی فقط برای فلزهای اصلی برقرار است. در فلزهای واسطه، از این قاعده نیست! مثلاً فلز روی (${}_{30}\text{Zn}$) با این که در

سمت راست فلز مس (${}_{29}\text{Cu}$) قرار گرفته است، اما واکنش‌پذیری بیشتری دارد.

ت) دو عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ ، دو عنصری هستند که از قاعده آفبا پیروی نمی‌کنند.



میان این دو عنصر، ۴ عنصر وجود دارد نه ۵ عنصر.

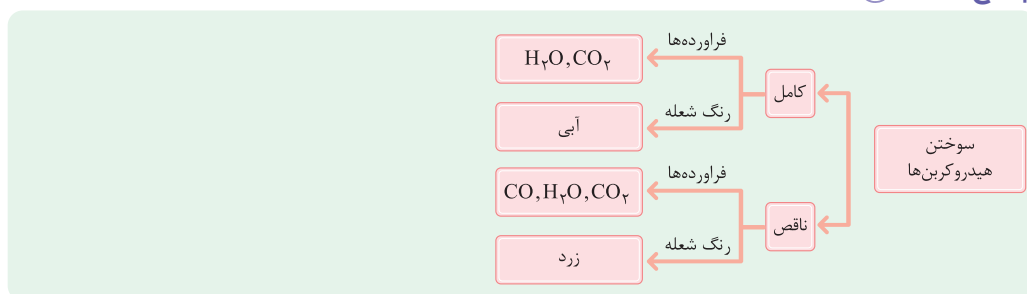


$4 = 1 - (29 - 24) = 1 - 5$ تفاوت عدد اتمی دو عنصر = شمار عنصرها بین دو عنصر

مقداری گاز شهری یک بار به صورت ناقص و بار دیگر به صورت کامل سوزانده می‌شود. اگر رنگ شعله حاصل از سوختن در حالت (I) آبی و در حالت (II)، زرد باشد، کدام مورد درست است؟

- ۱) در واکنش (I) برخلاف واکنش (II)، گازی دواتمی در میان فراورده‌های واکنش وجود دارد.
- ۲) فراورده کربن‌داری که تنها در واکنش (II) تولید می‌شود، می‌تواند با فلج‌کردن سامانه عصبی، باعث مرگ شود.
- ۳) در واکنش (II) برخلاف واکنش (I)، واکنش به صورت کند انجام می‌شود.
- ۴) مقدار اکسیژن مصرفی در واکنش (II) بیشتر از واکنش (I) است.

پاسخ: گزینه ۲



گاز شهری به طور عمده از متان (CH_4) تشکیل شده است. اگر این گاز به طور کامل بسوزد، رنگ شعله آن آبی‌رنگ و اگر به صورت ناقص بسوزد، رنگ شعله آن زردرنگ خواهد بود؛ بنابراین واکنش (I) مربوط به سوختن کامل گاز شهری و واکنش (II) مربوط به سوختن ناقص آن است. گاز کربن مونواکسید، تنها در واکنش سوختن ناقص (واکنش (II)) گاز شهری تولید می‌شود. از آن‌جا که میل ترکیبی هموگلوبین خون با این گاز بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است، مولکول‌های آن پس از اتصال به هموگلوبین از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری می‌کنند. این ویژگی باعث مسمومیت شده و سامانه عصبی را فلج می‌کند، به طوری که قدرت هرگونه اقدامی را از فرد مسموم می‌گیرد و بدین ترتیب باعث مرگ می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): *اتفاقاً برعکس!* گاز کربن مونواکسید (CO)، گازی دواتمی است که در واکنش (II) (واکنش سوختن ناقص گاز شهری) تولید می‌شود؛ نه در واکنش (I) (واکنش سوختن کامل گاز شهری)!

گزینه (۳): توجه داشته باشید که واکنش سوختن (چه ناقص و چه کامل) برخلاف واکنش اکسایش، سریع انجام می‌شود.

گزینه (۴): اگر در واکنش سوختن گاز شهری، اکسیژن کافی باشد، سوختن کامل (واکنش (I)) انجام می‌شود، اما اگر مقدار اکسیژن کم باشد، سوختن ناقص (واکنش (II)) انجام می‌شود؛ بنابراین مقدار اکسیژن موجود برای سوختن گاز شهری، در واکنش (II) کمتر از واکنش (I) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چند مورد از ویژگی‌های زیر در اوزون نسبت به اکسیژن بیشتر است؟

- واکنش پذیری
- پایداری
- سطح انرژی
- انحلال پذیری در آب
- نقطه جوش

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

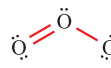
پاسخ: گزینه ۳

به جز پایداری، بقیه موارد برای اوزون (O_3) بیشتر از اکسیژن است. دقت کنید که اوزون، واکنش پذیری بیشتر و سطح انرژی بالاتری نسبت به اکسیژن دارد؛ به همین دلیل، ناپایدارتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



مقایسه اکسیژن و اوزون:

O_3	O_2	آلوتروپ
 (خمیده یا V شکل)		ساختار لوویس
$-112^\circ C$ (بیشتر)	$-183^\circ C$ (کمتر)	نقطه جوش
آسان تر	سخت تر	مایع شدن
آبی پررنگ	آبی کم رنگ	رنگ در حالت مایع
بیشتر (گندزدا)	کم تر	واکنش پذیری
کم تر	بیشتر	پایداری
قطبی	ناقطبی	قطبیت
بیشتر	کم تر	انحلال پذیری در آب

(۱) پیوند هیدروژنی میان مولکول‌هایی برقرار می‌شود که در ساختار خود علاوه بر H، حداقل یکی از عناصر N، O و F را نیز دارند.

(۲) گشتاور دوقطبی مولکول‌ها، میزان قطبیت آن‌ها را نشان می‌دهد و واحد آن، μ است.

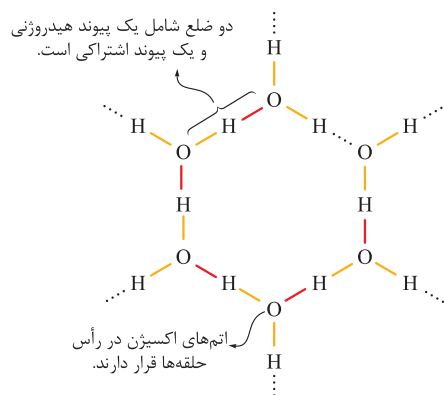
(۳) با نزدیک کردن یک میله شیشه‌ای باردار به باریکه آب، مولکول‌های آب از سمت اتم‌های اکسیژن از میله دور می‌شوند.

(۴) در ساختار یخ، هر مولکول آب از طریق پیوندهای هیدروژنی به چهار مولکول آب دیگر متصل است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ساختار یخ، آرایش مولکول‌های آب به گونه‌ای است که در آن، اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های شش ضلعی (نه شش وجهی!) قرار دارند و شبکه‌ای مانند کندوی زنبور عسل را به وجود می‌آورند. این شبکه با داشتن فضاهای خالی منظم، در سه بُعد گسترش می‌یابد.



- ۴ پیوند هیدروژنی با مولکول‌های دیگر تشکیل می‌دهد. هر مولکول آب ۲ پیوند اشتراکی (کووالانسی) درون مولکول خود دارد.
- ۲ پیوند هیدروژنی با اتم‌های H در ۲ مولکول دیگر برقرار می‌کند. هر اتم اکسیژن ۲ پیوند اشتراکی با اتم‌های H مولکول خود دارد.
- ۱ پیوند هیدروژنی با اتم O در مولکول دیگر برقرار می‌کند. هر اتم هیدروژن ۱ پیوند اشتراکی با اتم O مولکول خود دارد.
-

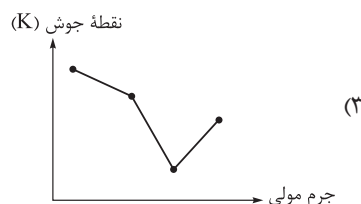
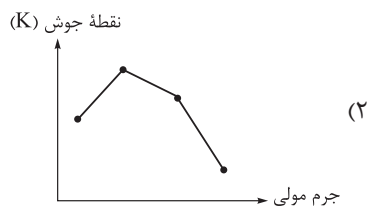
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): صرف این که یک مولکول اتم H، O، F، N داشته باشد، دلیل بر داشتن پیوند هیدروژنی نیست، بلکه باید اتم هیدروژن از یک مولکول به اتم F یا O یا N (از مولکول دیگر) متصل شود تا پیوند هیدروژنی حاصل شود.

گزینه (۲): واحد اندازه‌گیری قطبیت مولکول‌ها، دپای (D) است که با μ نشان داده می‌شود.

گزینه (۳): میله شیشه‌ای دارای بار منفی است و با نزدیک کردن آن به باریکه آب، آب به میله نزدیک می‌شود.

نمودار تقریبی تغییرات نقطه جوش نسبت به جرم مولی ترکیبات «هیدروژن فلوئورید، استون، اتانول و هیدروژن برمید» به کدام صورت است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, F = 19, Br = 80 : g.mol^{-1}$)



پاسخ: گزینه ۲

در دمای اتاق، حالت فیزیکی اتانول و استون، مایع و حالت فیزیکی HF و HBr، گاز است. از طرفی می‌دانیم نقطه جوش اتانول از استون بیشتر است (به دلیل پیوندهای هیدروژنی تشکیل شده در اتانول). هم‌چنین HF به دلیل توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی نقطه جوش بالاتری نسبت به HBr دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ماده	هیدروژن فلوئورید	هیدروژن برمید	اتانول	استون
فرمول شیمیایی	HF	HBr	C_2H_6O	C_3H_6O
جرم مولی $g.mol^{-1}$	۲۰	۸۱	۴۶	۵۸

با توجه به چهار فلز Mg ، Zn ، Fe و Ag ، کدام مورد درست است؟

- (۱) فقط Mg و Zn می توانند باعث تغییر رنگ محلول مس (II) سولفات شوند.
- (۲) در میان این فلزها، احتمال خوردگی در هوای مرطوب برای Ag از همه بیشتر است.
- (۳) در واکنش با محلول هیدروکلریک اسید، در حضور Fe ، گاز با سرعت بیشتری آزاد می شود.
- (۴) نگهداری Mg از همه دشوارتر است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در بین عناصر داده شده، نگهداری فلز منیزیم (Mg) که متعلق به گروه دوم جدول تناوبی است، به دلیل واکنش پذیری بالای آن، دشوارتر است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): مقایسه واکنش پذیری فلزهای داده شده به صورت زیر است:

$Mg > Zn > Fe > Cu > Ag$:واکنش پذیری

علاوه بر Mg و Zn ، Fe نیز می تواند با Cu^{2+} واکنش دهد.

گزینه (۲): احتمال خوردگی منیزیم بیشتر از بقیه فلزها است.

گزینه (۳): فلزی سریع تر گاز هیدروژن آزاد می کند که واکنش پذیری بیشتری داشته باشد، یعنی منیزیم!

[illegible]

(٣) «الف» - «ت»

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

$$\text{Mn}^{\text{v}+}\text{CO}_{\text{v}}^{\text{v}-} \Rightarrow \text{MnCO}_{\text{v}}$$

چند مورد از مطالب زیر با کلمه «بیشتر» به درستی تکمیل می‌شوند؟

الف) تعداد پیوندهای دوگانه در نفتالن از نصف تعداد اتم‌های هیدروژن در سیکلوهگزان است.

ب) با افزایش شمار اتم‌های کربن، اختلاف نقطه جوش آلکان‌های راست‌زنجیر متوالی می‌شود.

پ) چسبندگی و گرانروی وازلین از گریس است.

ت) مجموع اعداد در نام آیوپاک ایزومری از ترکیب C_5H_{12} که بیشترین شاخه فرعی را دارد، از تعداد پیوندهای اشتراکی اتین است.

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۳

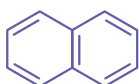
۱) ۲

پاسخ: گزینه ۳

تنها مورد «پ» با واژه «بیشتر» کامل می‌شود.

بررسی عبارت‌ها:

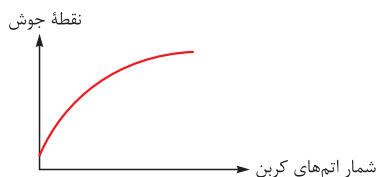
الف) نفتالن ۵ پیوند دوگانه دارد.



سیکلوهگزان با فرمول C_6H_{12} ، ۱۲ اتم هیدروژن دارد.

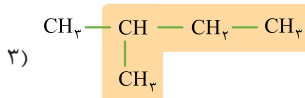
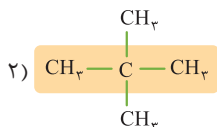
پس تعداد پیوندهای دوگانه نفتالن (۵ تا) از نصف تعداد اتم‌های هیدروژن در سیکلوهگزان ($\frac{12}{2} = 6$)، کم‌تر است.

ب) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر، اختلاف نقطه جوش آلکان‌های متوالی کاهش می‌یابد (شیب نمودار کم‌تر می‌شود).



پ) فرمول عمومی وازلین به صورت $C_{25}H_{52}$ و فرمول عمومی گریس به صورت $C_{18}H_{38}$ است؛ هر چه تعداد کربن و هیدروژن ترکیب بیشتر باشد، چسبندگی و عدم تمایل به جاری شدن مولکول (گرانروی) افزایش می‌یابد، پس چسبندگی و گرانروی وازلین بیشتر از گریس است.

ت) ترکیب C_5H_{12} دارای سه ایزومر است:

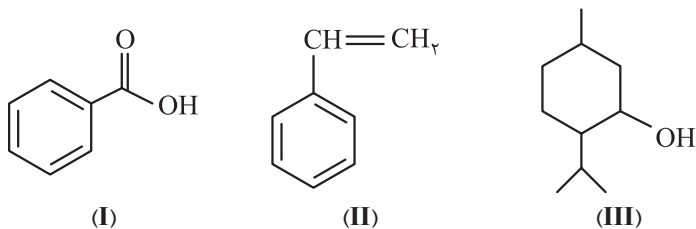


از بین این سه ترکیب، حالت شماره ۲، دارای بیشترین شاخه فرعی است. و نام آن ۲، ۲-دی‌متیل پروپان است. مجموع اعداد در نام آن برابر $2+2=4$ است. ترکیب اتین با فرمول $CH \equiv CH$ ، دارای ۵ پیوند اشتراکی (۱ سه‌گانه و ۲ یگانه) است.

پس مجموع اعداد در نام C_5H_{12} از تعداد پیوند اشتراکی ترکیب اتین، کم‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۰۱ با توجه به ساختار ترکیب‌های زیر، کدام عبارت نادرست است؟



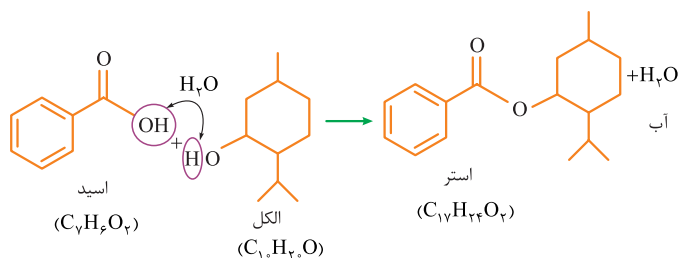
- (۱) اگر به محلول پتاسیم پرمنگنات، مقدار کافی ماده (I) اضافه کرده و گرما دهیم، رنگ بنفش محلول از بین می‌رود.
 (۲) اختلاف جرم مولی ترکیب (II) با سرگروه ترکیبات آروماتیک، برابر جرم مولی ساده‌ترین آلکن است.
 (۳) اگر یک مول ترکیب (I) را با یک مول ترکیب (III) در حضور H^+ واکنش دهیم، ترکیبی با فرمول $C_{17}H_{24}O_2$ تشکیل می‌شود.
 (۴) شمار اتم‌های هیدروژن ترکیب (III)، با شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب ۳-اتیل - ۲، ۳-دی‌متیل پنتان برابر است.

پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): محلول بنفش رنگ پتاسیم پرمنگنات در واکنش با اسیدهای آلی، با گرم شدن محلول بی‌رنگ می‌شود.
 گزینه (۲): فرمول مولکولی ترکیب (II)، C_8H_8 و فرمول مولکولی بنزن، C_6H_6 است. اختلاف جرم مولی آن‌ها با جرم مولی C_2H_2 یعنی ساده‌ترین آلکن برابر است. فرمول ساده‌ترین آلکن، C_2H_2 است.
 گزینه (۳): از واکنش یک مول $C_7H_6O_2$ با یک مول $C_{10}H_{20}O$ در حضور کاتالیزگر اسیدی، یک مول H_2O و یک مول $C_{17}H_{24}O_2$ تشکیل می‌شود.



- گزینه (۴): فرمول مولکولی ترکیب (III)، $C_{10}H_{20}O$ و فرمول مولکولی ۳-اتیل - ۲، ۳-دی‌متیل پنتان، C_9H_{20} است.

کدام گزینه در مورد «گاز مرداب» نادرست است؟

متان

- (۱) گشتاور دوقطبی مولکول‌های آن برابر صفر است و کم‌ترین ارزش سوختی را در بین هیدروکربن‌ها دارد.
- (۲) از تجزیه گیاهان به وسیله باکتری‌های بی‌هوازی در زیر آب تولید می‌شود.
- (۳) تأمین شرایط بهینه برای تولید این ماده در آزمایشگاه از عناصر سازنده آن، بسیار دشوار و پرهزینه است.
- (۴) میزان سمی بودن آن کم است و تنفس آن به مقدار محدود، بر شش‌ها و بدن تأثیر چندانی ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

منظور از گاز مرداب همان متان است. متان (CH_4) کم‌ترین جرم مولی و بیشترین ارزش سوختی را در بین هیدروکربن‌ها دارد.

کدام واکنش با تولید گرما و افزایش شمار مول‌های گازی فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها همراه است؟

(۱) تشکیل HCl از عناصر سازنده

(۲) تشکیل گازهای CO_۲ و N_۲ از گازهای CO و NO

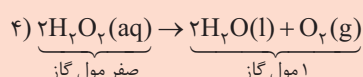
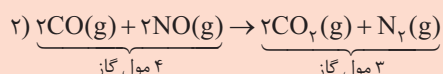
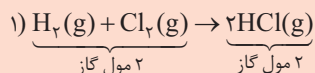
(۳) تشکیل گاز هیدرازین از گازهای هیدروژن و نیتروژن

(۴) تجزیهٔ محلول آب‌اکسیژنه به آب و گاز اکسیژن

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

واکنش‌های (۱)، (۲) و (۴) گرماده هستند، ولی فقط در گزینهٔ (۴)، شمار مول‌های گازی در فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است.



نکته

فرایندهای گرماگیر ($\Delta H > 0$)	فرایندهای گرماده ($\Delta H < 0$)
(۱) تغییر حالت‌های فیزیکی ذوب، تبخیر و تصعید (فرازش)	(۱) تغییر حالت‌های فیزیکی انجماد، میعان و چگالش
(۲) واکنش فتوسنتز: $۶CO_2(g) + ۶H_2O(l) \rightarrow C_6H_{12}O_6(s) + ۶O_2(g)$	(۲) همهٔ واکنش‌های سوختن (مانند سوختن گاز هیدروژن، کربن، هیدروکربن‌ها و ...)
(۳) انحلال آمونیوم نیترات در آب: $NH_4NO_3(s) \xrightarrow{\text{آب}} NH_4^+(aq) + NO_3^-(aq)$	(۳) انحلال کلسیم کلرید در آب: $CaCl_2(s) \xrightarrow{\text{آب}} Ca^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq)$
(۴) تجزیهٔ N _۲ O _۴ به NO _۲ : $N_2O_4(g) \rightarrow 2NO_2(g)$	(۴) واکنش فلزهای گروه اول با گاز کلر: $2M(s) + Cl_2(g) \rightarrow 2MCl(s)$ گروه اول
(۵) تولید اوزون از گاز اکسیژن: $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$	(۵) تشکیل HCl از H _۲ و Cl _۲ : $H_2(g) + Cl_2(g) \rightarrow 2HCl(g)$
(۶) تشکیل NO از N _۲ و O _۲ : $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$	(۶) تشکیل NH _۳ از H _۲ و N _۲ (فرایند هابر): $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$
(۷) تشکیل N _۲ H _۴ (هیدرازین) از H _۲ و N _۲ : $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g)$	(۷) تشکیل آمونیاک از هیدرازین و هیدروژن: $N_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$
(۸) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید جامد: $H_2(g) + I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$	(۸) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید: $2H_2O_2(aq) \rightarrow 2H_2O(l) + O_2(g)$
	(۹) واکنش گازهای CO و NO: $2CO(g) + 2NO(g) \rightarrow 2CO_2(g) + N_2(g)$
	(۱۰) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید گازی: $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$

کدام واکنش با جذب گرما و کاهش شمار مول‌های گازی فراورده(ها) نسبت به واکنش‌دهنده(ها) همراه است؟

(سؤال ۹۲ کنکور ریاضی ۱۳۰۴ - نوبت اول)

- (۱) تجزیه هیدروژن پراکسید به آب و گاز اکسیژن
- (۲) تشکیل هیدرازین از عنصرهای سازنده
- (۳) تجزیه آمونیاک به عنصرهای سازنده
- (۴) شکل‌متان از گرافیت و هیدروژن

در واکنش تولید کدام پلیمر، فراورده جانبی دیگری نیز تولید می‌شود؟

پلی استرها و پلی آمیدها

(۲) تفلون

(۱) پلی اتن سنگین

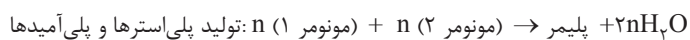
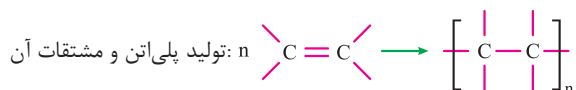
(۴) پلی وینیل کلرید

(۳) کولار

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در فرایند تولید پلی اتن و مشتقات آن، تنها پلیمر تولید می‌شود؛ اما در فرایند تولید پلی استرها و پلی آمیدها، علاوه بر پلیمر، یک مولکول کوچک مانند آب نیز تولید می‌شود.



کولار، نوعی پلی آمید ساختگی است.

فورمیک اسید

(۱) بین مولکول‌های بنزآلدهید برخلاف مولکول‌های ویتامین کا، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

(۲) متیل متانوات، ساده‌ترین استر است که با کربوکسیلیک اسیدی که در مورچه سرخ وجود دارد، ایزومر است.

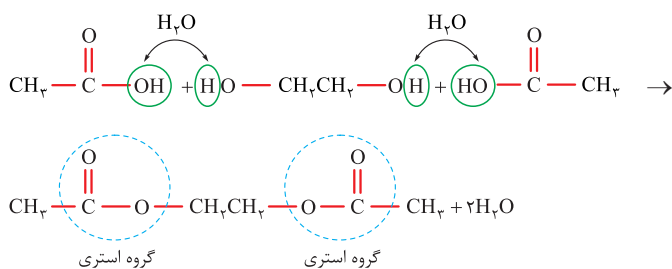
(۳) بر اثر واکنش کربوکسیلیک اسیدی مانند استیک اسید و آمینی مانند تری‌متیل آمین، آب و یک آمید ایجاد می‌شود.

(۴) هر مول اتیلن گلیکول می‌تواند با دو مول استیک اسید واکنش دهد و یک مول دی‌استر تولید کند.

پاسخ: گزینه ۴

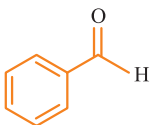
پاسخ خیلی تشریحی ✓

اتیلن گلیکول یک الکل دو عاملی با فرمول $\text{OH}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{OH}$ می‌باشد، بنابراین واکنش هر مول از آن با ۲ مول از یک اسید تک‌عاملی، منجر به تولید یک دی‌استر می‌شود:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): بین مولکول‌های بنزآلدهید پیوند هیدروژنی برقرار نمی‌شود، زیرا در ساختار آن پیوند $\text{N}-\text{H}$ یا $\text{H}-\text{F}$ ، $\text{O}-\text{H}$ وجود ندارد.



گزینه (۲): متیل متانوات یک استر دو کربنه با ساختار $\text{H}-\text{C}(=\text{O})-\text{O}-\text{CH}_3$ و فرمول مولکولی $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$ است.

کربوکسیلیک اسیدی که در ساختار مورچه وجود دارد، متانوئیک اسید است و دارای ساختار $\text{H}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH}$ و فرمول مولکولی CH_2O_2 می‌باشد. این دو ترکیب، فرمول مولکولی یکسانی ندارند و ایزومر هم نیستند.

گزینه (۳): ترکیب تری‌متیل آمین با ساختار $\text{CH}_3-\text{N}(\text{CH}_3)_2$ ، به دلیل نداشتن اتم هیدروژن متصل به N، نمی‌تواند در

واکنش آمیدی شرکت کند.