

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه دوازدهم

آزمون جامع (مرحله هجدهم)

دانشگاه ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۲۲/ خرداد/ ۱۴۰۵

دفترچه شماره یک

همه‌موم می‌دونیم کنکور توی این چند سال کمی سخت‌تر شده (معمولاً توی کنکور سال‌های اخیر، یک یا دو درس، سخت‌تر از بقیه درس‌ها طراحی می‌شن). درسته که ما توی خیلی سبز استاد شبیه‌سازی سوالات کنکور هستیم، ولی چون این آزمون، اولین آزمون جامع ماست (یه جورایی آزمون جامع شماره صفره)، این آزمون رو نرمال، منطقی، استاندارد و در عین حال کاملاً کنکوری طراحی کردیم.

پایه

دوام	پایه دهم	دوازدهم	مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
دهم	کتاب کل صفحه ۱ تا ۱۵۱	کتاب کل صفحه ۱ تا ۱۴۴	۷۰ دقیقه	۱۸	۱	۱۸	حسابان و ریاضیات پایه
	کتاب کل صفحه ۹ تا ۹۶	کتاب کل صفحه ۹ تا ۸۶		۳۰	۱۹	۱۲	هندسه
	کتاب کل صفحه ۱ تا ۱۳۱	کتاب کل صفحه ۱ تا ۸۴		۴۰	۳۱	۱۰	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
	-		۷۰ دقیقه	۴۰ سؤال			مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: فرشاد حسن‌زاده - عادل حسینی - علی شهربانی - محمد گودرزی سروش موئینی - محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن‌زاده - محمد گودرزی	محمدسجاد نقیه - عادل حسینی
هندسه	طراح: حمید گلزاری کارشناس علمی: سیدعباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری کارشناس علمی: سیدعباس حسینی - سعید قندچی	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سوالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سوالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سوالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.



۱- نمودار تابع خطی f با شیب ۳، محور x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x^2) - 3f(x^2)$ بر $x - 3$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲۱ (۳) ۶ (۴) ۱۲

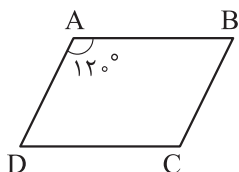
۲- هیچ کدام از توابع $f(x) = x^2 + mx$ و $g(x) = 4x - mx^2$ روی بازه $(-2, 3)$ یکنوا نیستند. مجموعه مقادیر قابل قبول برای m شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

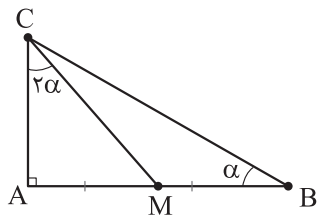
۳- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد، حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱۵

۴- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، اندازه‌های محیط و مساحت به ترتیب برابر 10° و $\sqrt{3}$ است. اختلاف طول‌های دو ضلع AB و BC کدام است؟



- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) $\sqrt{7}$
(۳) $\sqrt{17}$
(۴) $\sqrt{33}$



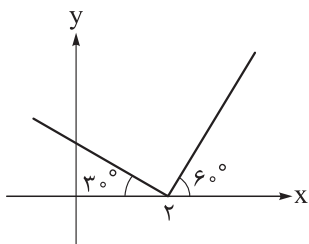
۵- در شکل مقابل، M وسط AB است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
(۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

۶- معادله $\sin x = \frac{1}{3}(\cos 2x - 2)$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷- شکل زیر، نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. اختلاف حدهای راست و چپ تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{x^2 + f(x) - 2x}{x^2 - 4}$ در $x = 2$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

محل انجام محاسبات



۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 6x \cos(\frac{\pi}{4} + x)}{\pi - 4x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۹- نقاط تقاطع خطوط مجانب نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{4x^2 + 2}{x^2 - 4}$ به همراه مبدأ مختصات، رأس‌های یک چندضلعی محذب هستند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۱۰- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + x$ در $x = 1$ ، چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 3]$ است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۱- خط غیرافقی Δ از مبدأ مختصات می‌گذرد و در نقطه T بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - x^2$ مماس است. طول نقطه T کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۲- اختلاف مقادیر اکستریم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۳- مستطیلی با بیشترین مساحت، درون یک نیم‌دایره محاط شده است. نسبت مساحت نیم‌دایره به مساحت مستطیل، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۱۴- مجموع ده جمله اول دنباله هندسی غیرصعودی $\dots, x^3, 2, \frac{1}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4^{\circ} + 1}{10}$ (۲) $\frac{4^{\circ} - 1}{10}$ (۳) $\frac{4^{\circ} + 1}{5}$ (۴) $\frac{4^{\circ} - 1}{5}$

۱۵- اگر $\frac{3}{4} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}$ باشد، حاصل $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

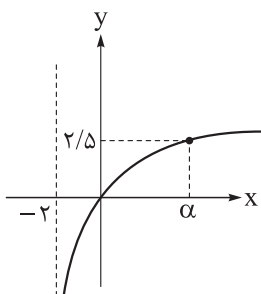
۱۶- اگر $f(x) = x^2 - x - 1$ باشد، حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(2x^2 - 5) = f(2x + 3)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۶ (۴) -۶

محل انجام محاسبات



۱۷- شکل زیر، نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \log_p(ax + b)$ را نمایش می‌دهد. جزء صحیح α کدام است؟



(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

۱۸- از میان خط‌های به معادله $ax + 4y = 1$ که فاصله آن‌ها از نقطه $(1, 2)$ برابر ۲ است، خطی را که فاصله بیشتری از مبدأ مختصات دارد، در نظر می‌گیریم. طول از مبدأ این خط کدام است؟

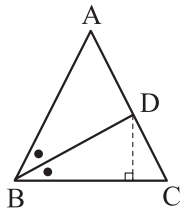
(۲) $\frac{3}{5}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

(۳) ۳

محل انجام محاسبات



۱۹- در شکل زیر $AB = AC = ۳$ ، $BC = ۲$. اگر BD نیمساز زاویه ABC باشد، فاصله D از BC کدام است؟



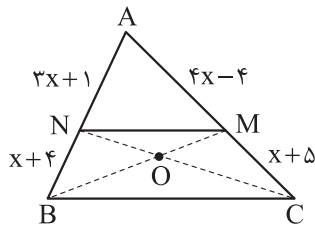
(۱) $1/25$

(۲) $1/4$

(۳) $0.75\sqrt{2}$

(۴) $0.1\sqrt{2}$

۲۰- در شکل زیر، چهارضلعی $BCMN$ دوزنقه است. نسبت مساحت مثلث OBC به مساحت مثلث OMN کدام است؟



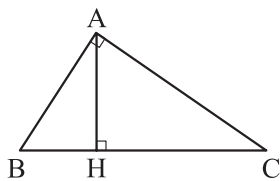
(۱) $1/44$

(۲) $1/69$

(۳) $1/96$

(۴) $2/25$

۲۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر است. اگر $\frac{BC}{AH} = \sqrt{5}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{CH}{BH}$ کدام است؟



(۱) $\frac{5}{2}$

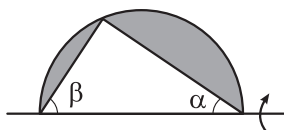
(۲) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

(۳) $\sqrt{5}$

(۴) $2(\sqrt{5} - 1)$

۲۲- مطابق شکل، از نیم‌دایره‌ای به شعاع R ، یک مثلث جدا کرده و قسمت باقی‌مانده را حول قطر نیم‌دایره دوران می‌دهیم.

اگر $\beta = 2\alpha$ ، آن‌گاه حجم شکل حاصل از دوران، چند برابر πR^3 است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

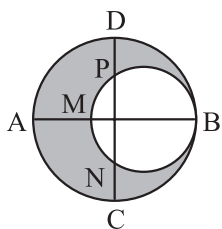
(۱) $\frac{7}{6}$

(۴) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{3}{4}$

محل انجام محاسبات

۲۳- در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر بر هم عمودند. اگر $AM = 3$ و $CN = 2$ باشد، آن گاه مساحت ناحیه بین دو دایره، چند برابر π است؟



۸ / ۷۵ (۱)

۹ / ۷۵ (۲)

۸ / ۲۵ (۳)

۹ / ۲۵ (۴)

۲۴- نسبت طول ضلع مربع محاط در یک دایره به طول ضلع هشت ضلعی منتظم محیط بر همان دایره کدام است؟

$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۲(۲ - $\sqrt{2}$) (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ (۱)

۲۵- سه نقطه $A(1, 1)$ ، $B(\beta, 0)$ و $C(3, 4)$ را در نظر بگیرید. در حالتی که محیط مثلث ABC کمترین مقدار ممکن را دارد، مساحت آن کدام است؟

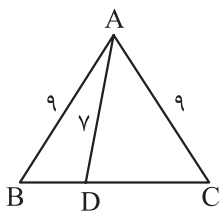
۲ (۴)

۱ / ۸ (۳)

۱ / ۴ (۲)

۱ / ۶ (۱)

۲۶- در شکل زیر، اگر $CD = 2BD$ ، آن گاه مساحت مثلث ABD کدام است؟



۱۴ (۱)

۱۵ (۲)

$5\sqrt{5}$ (۳)

$6\sqrt{5}$ (۴)

۲۷- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $|i - j| = 1$ ؛ 0 ؛ 1 ؛ $|i - j| < 1$ ؛ -1 ؛ $|i - j| > 1$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{3}A + I$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۸- کوچکترین دایره گذرنده از نقطه $(-1, 3)$ و مماس بر نیمساز ربع اول و سوم، محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. حاصل ضرب طولهای این دو نقطه کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۲۹- در یک بیضی با خروج از مرکز $6/0$ ، فاصله هر کانون تا دورترین رأس برابر با ۱۶ است. طول کوتاهترین قطر این بیضی کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۱۴ (۱)

۳۰- بردارهای $\vec{a} = (1, m - 1, 3)$ و $\vec{b} = (m, 1, -3)$ و $\vec{c} = (1, m, -1)$ مفروضاند. اگر اندازه بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر باشند، حجم متوازی السطوح بنا شده، بر بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} کدام است؟

۹۴ (۴)

۹۶ (۳)

۹۲ (۲)

۹۰ (۱)

محل انجام محاسبات

۳۱- می‌خواهیم ۵ کتاب در موضوعات مختلف را در یک قفسه قرار دهیم. در چند حالت دو کتاب ریاضی و فیزیک کنار هم هستند؟

۲۴ (۱) ۴۸ (۲) ۹۶ (۳) ۱۲۰ (۴)

۳۲- چند نقطه با مختصات صحیح و در ربع اول روی منحنی $y = \frac{۸۵۹ - ۷۹x}{۱۷}$ وجود دارد؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۳- باقی‌مانده تقسیم عدد $(۳^{۲۰} + ۴^{۲۰})$ بر ۸۴ کدام است؟

۱ (۱) ۴ (۲) ۲۵ (۳) ۶۱ (۴)

۳۴- گراف G به صورت مقابل است. $\gamma(G)$ برابر با کدام است؟



$\Delta(G)$ (۱) $q(G)$ (۲)

$p(G)$ (۳) $\delta(G)$ (۴)

۳۵- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۱۰$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۸۴ (۱) ۱۶۸ (۲) ۱۴۳ (۳) ۲۸۶ (۴)

۳۶- ۳ جایزه مختلف را می‌خواهیم بین ۵ نفر توزیع کنیم؛ به طوری که تعداد افرادی که جایزه گرفته‌اند فرد باشد. این کار به چند حالت امکان‌پذیر است؟

۱۵ (۱) ۶۰ (۲) ۶۵ (۳) ۷۵ (۴)

۳۷- گزاره $(p \Leftrightarrow q) \vee \sim (p \wedge \sim q)$ هم‌ارز کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (۱) $\sim p \Leftrightarrow q$ (۲)

$\sim (p \Rightarrow q) \vee p$ (۳) $\sim p \Rightarrow q$ (۴)

۳۸- تعداد زیرمجموعه‌های دو عضو مجموعه $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضو

مجموعه $B \cap (A \cup B)$ برابر است. اگر $a, b \in B$ ، مجموعه B چند زیرمجموعه دارد که a حتماً عضو آن باشد، ولی b

عضو آن نباشد؟

۱۶ (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۸ (۴)

۳۹- اگر حاصل ضرب ارقام یک عدد سه‌رقمی زوج باشد، به چه احتمالی عدد فرد است؟

$\frac{۱۱}{۶۲}$ (۱) $\frac{۱۳}{۶۲}$ (۲) $\frac{۱۱}{۳۱}$ (۳) $\frac{۱۳}{۳۱}$ (۴)

۴۰- میانگین ۵ عدد طبیعی متمایز برابر ۵ و انحراف از میانگین این داده‌ها ۰، ۱، c ، b و a است. حداکثر واریانس این

داده‌ها کدام است؟

۱۲/۱ (۱) ۱۲/۲ (۲) ۱۲/۳ (۳) ۱۲/۴ (۴)

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سوالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه دوازدهم

آزمون جامع (مرحله هجدهم)

دانشگاه ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۲۲/ خرداد/ ۱۴۰۵

دفترچه شماره دو

همه‌موم می‌دونیم کنکور توی این چند سال کمی سخت‌تر شده (معمولاً توی کنکور سال‌های اخیر، یک یا دو درس، سخت‌تر از بقیه درس‌ها طراحی می‌شن). درسته که ما توی خیلی سبز استاد شبیه‌سازی سوالات کنکور هستیم، ولی چون این آزمون، اولین آزمون جامع ماست (به‌جورایی آزمون جامع شماره صفره)، این آزمون رو نرمال، منطقی، استاندارد و در عین حال کاملاً کنکوری طراحی کردیم.

پایه

دوماد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۵۶	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۰	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۴۹
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۳	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۳	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۲
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه		-	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - امین امینی کارشناسان علمی: سعید محبی - هادی نجفی	نوید شاهی - علیرضا جعفری آثار
شیمی	طراحان: فرشید ابراهیمی - مهدی براتی - ایمان خواجوی مجد - علی رفیعی هادی عبادی - یاسر عبداللهی - محمد عظیمیان زواره - امیر قاسمی پور کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده - یاشار ذریه - محمدمهدی کریمیان	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانیور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سوالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سوالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.



۴۱- یک مکعب توپر به جرم $2/5 \text{ kg}$ از ماده‌ای به چگالی 20 g/cm^3 ساخته شده است. طول ضلع این مکعب چند سانتی متر است؟

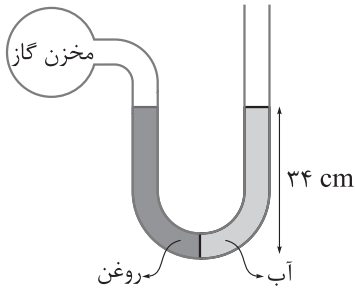
۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

۴۲- مطابق شکل زیر درون لوله U شکلی که به یک مخزن گاز متصل است، حجم مساوی از آب و روغن قرار دارد. فشار پیمانه‌ای مخزن گاز چند میلی‌متر جیوه است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{روغن}} = 0/8 \text{ g/cm}^3$ و $g = 10 \text{ m/s}^2$)



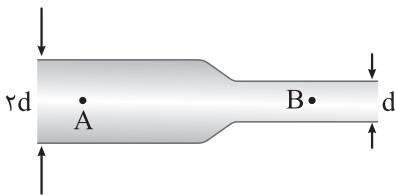
۱ (۱)

۵ (۲)

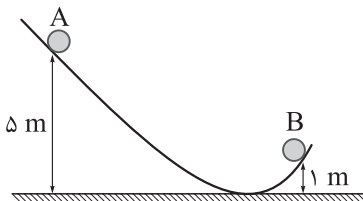
۱۰ (۳)

صفر (۴)

۴۳- در شکل زیر تندی جریان آب در نقطه A برابر 2 m/s و فشار آن P_A است. اگر تندی جریان آب در نقطه B، v_B و فشار در این نقطه P_B باشد؛ به ترتیب از راست به چپ، v_B چند متر بر ثانیه است و چه رابطه‌ای بین P_A و P_B وجود دارد؟

 $P_A > P_B$ و ۸ (۱) $P_A < P_B$ و ۴ (۲) $P_A < P_B$ و ۸ (۳) $P_A > P_B$ و ۴ (۴)

۴۴- در شکل زیر، از نقطه A، جسمی به جرم 1 kg رها شده است تا بر روی سطح به طرف پایین بلغزد. اگر تندی جسم در نقطه B برابر 4 m/s باشد، کار نیروی اصطکاک در جابه‌جایی جسم از نقطه A تا نقطه B چند ژول است؟

 $(g = 10 \text{ m/s}^2)$ 

-۳۲ (۱)

-۴۲ (۲)

۳۲ (۳)

۴۲ (۴)

محل انجام محاسبات



۴۵- برای تبدیل یخی به جرم ۲۰۰ g با دمای 10°C به آب با دمای 15°C ، چند کیلوژول گرما لازم است؟

$$(c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}} \text{ و } c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}, L_f = 336 \text{ kJ/kg})$$

$$42/6 \text{ (۴)}$$

$$67/2 \text{ (۳)}$$

$$50/4 \text{ (۲)}$$

$$84 \text{ (۱)}$$

۴۶- کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) هر چه در خشکی از ساحل دریا دور شویم، آهنگ تبخیر سطحی کاهش می‌یابد.

(ب) با افزایش سطح آزاد مایع، آهنگ تبخیر سطحی آن نیز افزایش می‌یابد.

(پ) با افزایش فشار هوا، آهنگ تبخیر سطحی افزایش می‌یابد.

(ت) با افزایش دما، آهنگ تبخیر سطحی افزایش می‌یابد.

$$(۴) \text{ الف و ب}$$

$$(۳) \text{ الف و پ}$$

$$(۲) \text{ پ و ت}$$

$$(۱) \text{ ب و ت}$$

۴۷- اگر حجم مقدار معینی گاز کامل را ۲۵ درصد افزایش و دمای مطلق آن را ۱۰ درصد کاهش دهیم، فشار گاز چند برابر می‌شود؟

$$\frac{25}{9} \text{ (۴)}$$

$$\frac{9}{25} \text{ (۳)}$$

$$\frac{25}{18} \text{ (۲)}$$

$$\frac{18}{25} \text{ (۱)}$$

۴۸- کدام گزاره قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی است؟

(۱) ممکن نیست دستگاه، چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دما بالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.

(۲) ممکن نیست دستگاه، فرایندی را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع گرما جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.

(۳) ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای بالاتر به جسم با دمای پایین‌تر منتقل شود.

(۴) ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

۴۹- اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $5 \mu\text{F}$ ، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. اگر انرژی ذخیره‌شده در این

خازن $90 \mu\text{J}$ تغییر کند، بار الکتریکی آن چند میکروکولن تغییر می‌کند؟

$$10 \text{ (۲)}$$

$$4 \text{ (۱)}$$

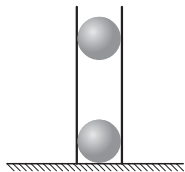
$$100 \text{ (۴)}$$

$$40 \text{ (۳)}$$

محل انجام محاسبات

۵۰- در شکل زیر دو گوی کوچک مشابه، هر یک به جرم 9 g و بار الکتریکی یکسان 90 nC در فاصله ثابتی از یکدیگر قرار دارند. اگر گوی بالایی در حالت معلق باشد، فاصله بین دو گوی چند سانتی متر است؟

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ و } g = 10 \text{ N/kg})$$



۳ (۱)

۶ (۲)

۹ (۳)

۱۲ (۴)

۵۱- بزرگی میدان الکتریکی در فاصله 2 m از مرکز کلاهک یک واندوگراف برابر با $2 / 25 \times 10^3 \text{ N/C}$ است. اندازه بار

$$\text{الکتریکی کلاهک چند میکروکولن است؟ } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

۲ / ۵ (۴)

۲ (۳)

۱ / ۵ (۲)

۱ (۱)

۵۲- با روشن ماندن یک لامپ، در مدت یک ساعت، $2 / 25 \times 10^{20}$ الکترون از آن می‌گذرد. جریان الکتریکی گذرنده از لامپ چند میلی‌آمپر است؟ ($e = 1 / 6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

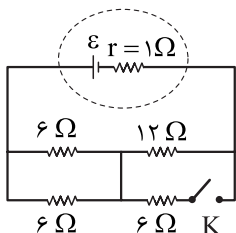
۱۰۰ (۴)

۱۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۲۰ (۱)

۵۳- در مدار شکل زیر، اگر کلید K را وصل کنیم، توان خروجی باتری چند برابر می‌شود؟

 $\frac{7}{15}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{28}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$ (۳)

۵۴- یک بخاری برقی به اختلاف پتانسیل 220 V متصل است. اگر این بخاری برقی به مدت 8 h در شبانه‌روز کار کند، هزینه یک ماه (۳۰ شبانه‌روز) برق مصرفی این بخاری 39600 تومان می‌شود. جریان عبوری از بخاری در حالت روشن چند آمپر است؟ (قیمت هر کیلووات ساعت برق مصرفی، 75 تومان است.)

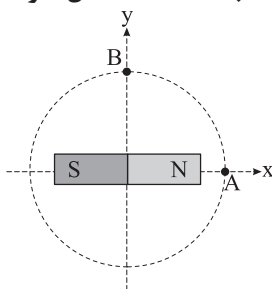
۱۰ (۴)

۷ / ۵ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۵۵- در شکل زیر، اگر یک عقربه مغناطیسی روی محیط دایره‌ای در جهت پادساعتگرد از نقطه A به نقطه B منتقل شود، عقربه چند درجه و در چه جهتی می‌چرخد؟



۹۰، ساعتگرد (۱)

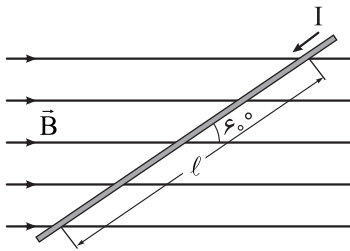
۹۰، پادساعتگرد (۲)

۱۸۰، ساعتگرد (۳)

۱۸۰، پادساعتگرد (۴)

محل انجام محاسبات

۵۶- در شکل زیر، سیم راست حامل جریان $I = 4\text{ A}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 30\text{ G}$ قرار دارد. اگر $\ell = 1\text{ m}$



باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟

- (۱) 6×10^{-3} و \otimes
 (۲) 6×10^{-3} و \odot
 (۳) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$ و \otimes
 (۴) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$ و \odot

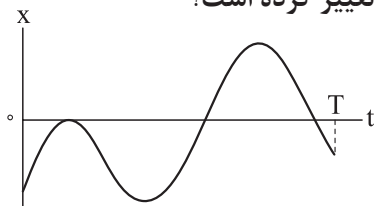
۵۷- جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر فرضی، 300 A و انرژی ذخیره شده در آن یک کیلووات ساعت است. ضریب

القاوری این القاگر چند هانری است؟

- (۱) ۸
 (۲) ۳۶
 (۳) ۸۰
 (۴) ۳۶۰

۵۸- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا T ،

جهت حرکت متحرک و جهت بردار مکان آن به ترتیب از راست به چپ چند مرتبه تغییر کرده است؟

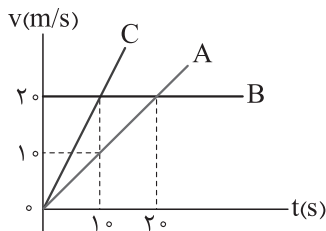


- (۱) ۲، ۳
 (۲) ۳، ۳
 (۳) ۲، ۲
 (۴) ۳، ۲

۵۹- نمودار سرعت - زمان سه متحرک A ، B و C که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است، اگر در مبدأ

زمان هر سه متحرک در یک مکان قرار داشته باشند، در لحظه ای که دو متحرک A و B به هم می رسند، فاصله آن ها از

متحرک C چند متر است؟



- (۱) ۸۰۰
 (۲) ۱۶۰۰
 (۳) ۲۴۰۰
 (۴) ۳۲۰۰

۶۰- متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. اگر تندی متحرک در مکان $x_1 = 28\text{ m}$ برابر 4 m/s

و در مکان $x_2 = 19\text{ m}$ برابر 5 m/s باشد، شتاب متحرک بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

- (۱) \vec{i}
 (۲) $5\vec{i}$
 (۳) $-\vec{i}$
 (۴) $-5\vec{i}$

۶۱- در شرایط خلأ، گلوله ای از یک بلندی رها می شود. اندازه جابه جایی گلوله در $5/0$ ثانیه چهارم چند برابر اندازه

جابه جایی آن در $5/0$ ثانیه دوم است؟

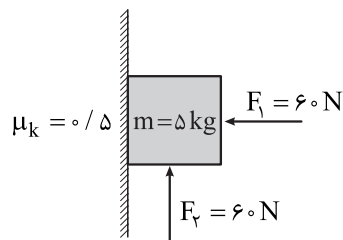
- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) $\frac{7}{3}$
 (۴) $\frac{5}{3}$

محل انجام محاسبات

۶۲- می‌خواهیم به جسمی که جرم آن 2 kg است، شتابی به بزرگی 3 m/s^2 بدهیم تا در راستای قائم رو به پایین شروع به حرکت کند. نیرویی که باید به جسم وارد کنیم، چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است).

- (۱) 14 ، به سمت بالا
(۲) 14 ، به سمت پایین
(۳) 26 ، به سمت بالا
(۴) 26 ، به سمت پایین

۶۳- در شکل زیر، به جسم نیروی افقی \vec{F}_1 و نیروی قائم \vec{F}_2 وارد می‌شود. اگر جسم در حال حرکت به سمت بالا باشد، شتاب آن چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) 4 ، به سمت بالا
(۲) 4 ، به سمت پایین
(۳) 8 ، به سمت بالا
(۴) 8 ، به سمت پایین

۶۴- اگر جرم گلوله‌ای برابر 20 g و اندازه تکانه آن برابر $800 \frac{\text{g}\cdot\text{m}}{\text{s}}$ باشد، انرژی جنبشی گلوله چند ژول است؟

- (۱) 32 (۲) 16 (۳) $3/2$ (۴) $1/6$

۶۵- پره یک بالگرد با دوره 0.08 s به طور یکنواخت می‌چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پره بالگرد چه قدر است؟

- (۱) 750 (۲) 1500 (۳) 2250 (۴) 3000

۶۶- دامنه نوسان یک نوسانگر جرم - فنر در حرکت هماهنگ ساده 5 cm و ثابت فنر آن 2 N/cm است. انرژی مکانیکی نوسانگر هنگام نوسان روی یک سطح افقی بدون اصطکاک چند ژول است؟

- (۱) 0.25 (۲) 0.25 (۳) $2/5$ (۴) 25

۶۷- معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر در SI به صورت $x = 0.4 \cos 10\pi t$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر 3 برابر انرژی جنبشی آن است، تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $\sqrt{2}\pi$ (۲) $2\sqrt{2}\pi$ (۳) π (۴) 2π

۶۸- سیمی با چگالی $7/8 \text{ g/cm}^3$ و سطح مقطع 5 mm^2 بین دو نقطه کشیده شده است. در این سیم موجی با طول موج 20 cm تشکیل می‌شود. اگر بسامد موج 1000 Hz باشد، نیروی کشش سیم، چند نیوتون است؟

- (۱) $3/9$ (۲) $15/6$ (۳) 39 (۴) 156

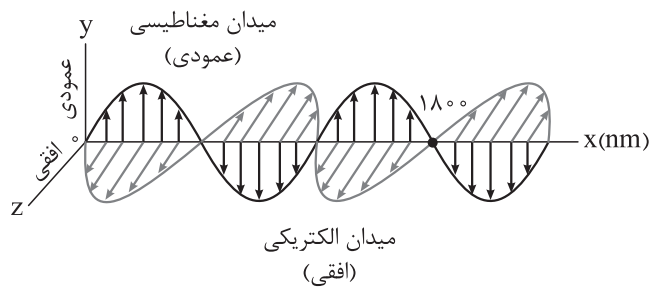
محل انجام محاسبات

۶۹- اگر فاصله شخص تا چشمه صوتی 60 m کاهش یابد، تراز شدت صوتی که دریافت می کند، 14 dB افزایش می یابد. فاصله اولیه شخص تا چشمه صوت چند متر بوده است؟ ($\log 2 = 0.3$) و از جذب انرژی صوتی توسط محیط صرف نظر شود.

- (۱) $62/5$ (۲) 75 (۳) 125 (۴) 150

۷۰- تصویر لحظه ای یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر شده، در لحظه ای به شکل زیر است. به ترتیب، جهت

انتشار موج و بسامد آن بر حسب تراهرتز، کدام است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)



(۱) $250, +X$

(۲) $250, -X$

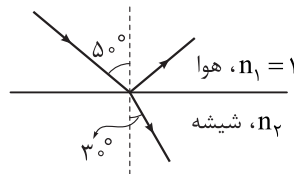
(۳) $750, +X$

(۴) $750, -X$

۷۱- در شکل زیر، نور فرودی از هوا به شیشه می تابد. بخشی از موج در سطح جدایی دو محیط بازمی تابد و بخشی دیگر

شکست می یابد و وارد شیشه می شود. به ترتیب، زاویه بین پرتو شکست و پرتو بازتابش چند درجه و ضریب شکست

شیشه کدام است؟ ($\sin 5^\circ = 0.087$)



(۲) $3/2, 1.80$

(۴) $3/2, 1.00$

(۱) $4/3, 1.80$

(۳) $4/3, 1.00$

۷۲- در یک تار دو سر بسته، بسامد دو هماهنگ متوالی 240 Hz و 300 Hz است. اگر تندی انتشار موج عرضی در تار 90 m/s

باشد، طول تار چند متر است؟

- (۱) $0/75$ (۲) $1/5$ (۳) $2/25$ (۴) 3

۷۳- توان یک لامپ رشته ای 100 W ، بازده آن 5% درصد و 1% درصد از نور تابشی آن دارای طول موج 600 nm است. در هر

دقیقه چه تعداد فوتون با این طول موج از لامپ گسیل می شود؟ ($h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ و $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)

(۱) 10^{19} (۲) 10^{21}

(۳) 2×10^{19} (۴) 2×10^{21}

محل انجام محاسبات

۷۴- نپتونیم ${}^{237}\text{Np}$ ناپایدار است و واپاشی آن از طریق گسیل ذرات α ، β^- ، α و α صورت می‌گیرد. پس از وقوع تمام این واپاشی‌ها، تعداد نوترون‌های هسته نهایی کدام است؟

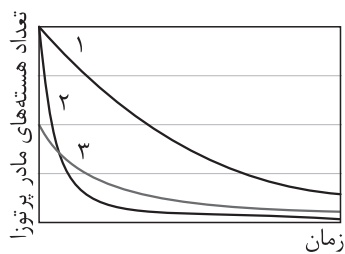
۱۳۹ (۴)

۱۳۷ (۳)

۸۷ (۲)

۸۶ (۱)

۷۵- نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه (۱)، (۲) و (۳) برحسب زمان به شکل زیر است. کدام مقایسه درباره نیمه‌عمر این سه نمونه (T) درست است؟



$$T_2 > T_1 > T_3 \quad (۱)$$

$$T_1 > T_2 > T_3 \quad (۲)$$

$$T_2 > T_3 > T_1 \quad (۳)$$

$$T_1 > T_3 > T_2 \quad (۴)$$

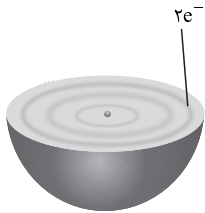
محل انجام محاسبات



۷۶- کدام مورد از نتایج واکنش‌های هسته‌ای نیست؟

- (۱) تبدیل عناصر سبک به سنگین در ستاره‌ها
 (۲) تولید هلیوم در اعماق زمین
 (۳) غنی‌سازی ایزوتوپی اورانیم - ۲۳۵
 (۴) تولید انرژی گرمایی در خورشید

۷۷- اگر شمار نوترون‌ها در هسته اتم زیر، ۲ واحد بیشتر از شمار پروتون‌های آن باشد، عدد جرمی این اتم کدام است؟



- (۱) ۲۴
 (۲) ۲۵
 (۳) ۲۶
 (۴) ۲۸

۷۸- رنگ فلز مس به صورت خالص، رنگ محلول سولفات فلز مس با بیشترین عدد اکسایش در آب و رنگ شعله

نمک‌های مس، به ترتیب کدام است؟

- (۱) سرخ - آبی - آبی
 (۲) سرخ - سبز - آبی
 (۳) سرخ - آبی - سبز
 (۴) سبز - آبی - سبز

۷۹- اگر اعداد داده‌شده در هر گزینه مربوط به عدد اتمی سه عنصر باشد، در کدام گزینه، عدد اتمی بیشتر، مربوط به

عنصری با بزرگ‌ترین شعاع اتمی است؟

- (۱) ۱۱، ۱۳، ۱۴
 (۲) ۱۲، ۳۷، ۳۸
 (۳) ۹، ۱۱، ۱۷
 (۴) ۸، ۹، ۱۶

۸۰- اگر شمار الکترون‌های با $n = 4$ و $l = 1$ در اتم عنصر A با شمار الکترون‌های با $n = 3$ و $l = 2$ در اتم عنصر B برابر

باشد، کدام مطلب درست است؟

- (۱) اگر A بُرم باشد، عنصر B می‌تواند یکی از عناصر هم‌گروه با نخستین عنصر ساختگی در واکنش‌گاه هسته‌ای باشد.
 (۲) اگر B نخستین فلز واسطه باشد، A فلزی است که با از دست دادن سه الکترون به آرایش گاز نجیب پیش از خود می‌رسد.
 (۳) اگر A هم‌گروه با کربن باشد، در آرایش الکترونی کاتیون در BCO_3 ، هشت الکترون با $n = 3$ وجود دارد.
 (۴) اگر B آهن باشد، تمام لایه‌ها و زیرلایه‌های اشغال‌شده اتم A از الکترون پر هستند.

محل انجام محاسبات

۸۱- در فرمول شیمیایی کدام ترکیب، شمار یون‌های فلزی با شمار اتم‌های اکسیژن برابر است؟

- (۱) پتاسیم اکسید
(۲) سدیم سیلیکات
(۳) لیتیم نیترات
(۴) منیزیم هیدروژن کربنات

۸۲- در کدام موارد زیر، کاربرد ماده مورد نظر، درست بیان شده است؟

- (الف) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره: کپسول غواصی
(ب) فراورده واکنش اتن با هیدروژن کلرید: حلال چسب
(پ) جامد کووالانسی حاصل از دو عنصر اول گروه ۱۴: تهیه سنباده
(ت) فراورده قطب منفی سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب: تهیه آلیاژها و شربت معده

- (۱) پ و ت
(۲) الف و ب
(۳) الف، پ و ت
(۴) ب و ت

۸۳- اگر هر میلی‌لیتر کربن دی‌سولفید (مایع)، $1/25$ گرم جرم داشته باشد، از سوختن چند میلی‌لیتر از آن مطابق واکنش زیر، $6/72$ لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید در شرایط STP تولید می‌شود؟ ($C = 12, O = 16, S = 32 : g.mol^{-1}$)
گوگرد دی‌اکسید + کربن دی‌اکسید \rightarrow گاز اکسیژن + کربن دی‌سولفید مایع

- (۱) $2/19$
(۲) $4/56$
(۳) $5/46$
(۴) $9/12$

۸۴- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) SO_2 مانند H_2O ، مولکولی قطبی و با ساختار خمیده است، اما اتم مرکزی آن در میدان الکتریکی برخلاف اتم مرکزی H_2O ، به سمت قطب منفی جهت‌گیری می‌کند.
(ب) اگر در مولکول CF_4 به جای دو اتم فلوئور، اتم‌های کلر جایگزین کنیم، گشتاور دوقطبی مولکول افزایش، اما نقطه جوش مولکول کاهش می‌یابد.
(پ) در دما و فشار یکسان، انحلال‌پذیری گاز O_2 از N_2 بیشتر است و با افزودن مقداری نقره نیترات به محلول آن‌ها، انحلال‌پذیری دو گاز کاهش می‌یابد.
(ت) هگزان برخلاف آب، ید (I_2) را در خود حل می‌کند و 10 mL هگزان در مقایسه با 10 mL آب، جرم بیشتری دارد.

- (۱) ب، پ
(۲) الف، ت
(۳) ب، ت
(۴) الف، پ

محل انجام محاسبات



۸۵- اگر انحلال پذیری نمک A در دمای 5°C برابر 2° و درصد جرمی محلول سیرشده این نمک در دمای 45°C برابر 50% باشد، کدام گزینه درست است؟ (رابطه انحلال پذیری و دما برای این نمک، خطی است).

(۱) معادله انحلال پذیری این نمک بر حسب دما به صورت $S = 3\theta + 2^{\circ}$ است.

(۲) در دمای 30°C درصد جرمی محلول سیرشده این نمک در آب به تقریب برابر 70% است.

(۳) اگر 95 گرم محلول سیرشده این نمک از دمای 40°C تا 10°C سرد شود، 30 گرم نمک رسوب می کند.

(۴) انحلال پذیری این نمک همانند سولفات فلز قلیایی دوره دوم، در آب گرماگیر است.

۸۶- گاز حاصل از تخمیر بی هوازی یک تن گلوکز با بازده 90% درصد را از سوختن کامل چند کیلوگرم بنزن می توان به دست آورد؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) 117

(۲) 130

(۴) 180

(۳) 145

۸۷- کدام موارد زیر درست است؟

(الف) در ساختار آلکان ها، هر اتم کربن با ۴ پیوند اشتراکی به ۴ اتم هیدروژن متصل است.

(ب) در آلکان های راست زنجیر، با افزایش جرم مولی، نقطه جوش افزایش، ولی تفاوت جرم مولی دو آلکان متوالی کاهش می یابد.

(پ) مولکول سبک ترین هیدروکربن سیر نشده، دارای ۵ پیوند اشتراکی است.

(ت) در ساختار دومین عضو خانواده آلکن ها، تفاوت شمار پیوندهای $\text{C}-\text{H}$ و $\text{C}-\text{C}$ برابر ۵ است.

(۱) الف - ب

(۲) ب - پ

(۳) پ - ت

(۴) الف - ت

۸۸- در کدام ترکیب اگر به جای یکی از اتم های هیدروژن، گروه اتیل قرار گیرد، درصد جرمی کربن تغییر نمی کند؟

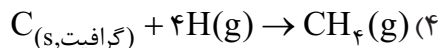
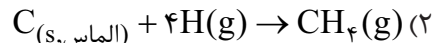
(۱) پروپان

(۲) اتیلن

(۳) پارازیلن

(۴) بنزن

۸۹- در شرایط یکسان، مقدار گرمای آزاد شده در اثر تشکیل یک مول متان در کدام واکنش زیر بیشتر است؟



محل انجام محاسبات

۹۰- تفاوت جرم مولی اولین عضو خانواده اسیدهای آروماتیک با چهارمین عضو خانواده اسیدهای آلی زنجیره‌ای سیر شده،

چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

۳۴ (۱) ۳۶ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴)

۹۱- اگر گرمای سوختن ۱ مول اتان، ۲۶۱ کیلوژول بیشتر از گرمای سوختن ۱ مول اتین و ارزش سوختی هیدروژن،

۱۲۱ کیلوژول بر گرم باشد، ΔH واکنش $C_2H_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$ ، چند کیلوژول است؟ ($H = 1 g.mol^{-1}$)

-۱۹ (۱) -۲۲۳ (۲) +۲۲۳ (۳) -۷۴۵ (۴)

۹۲- اگر سرعت متوسط مصرف جوش شیرین در واکنش زیر برابر $0.3 mol.min^{-1}$ باشد، سرعت کاهش جرم مخلوط

واکنش، چند گرم بر ثانیه است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

(معادله موازنه شود.) $NaHCO_3(s) \rightarrow Na_2CO_3(s) + CO_2(g) + H_2O(g)$

۰/۰۰۱ (۱) ۰/۰۱۵۵ (۲) ۰/۰۳۱ (۳) ۰/۰۹۳ (۴)

۹۳- کدام گزینه در مورد «پلی اتن» و «تفلون» درست است؟ ($H = 1, C = 12, F = 19 : g.mol^{-1}$)

(۱) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در مونومر سازنده تفلون، دو برابر شمار الکترون‌های پیوندی در مونومر سازنده پلی اتن است.

(۲) نقطه جوش مونومر سازنده تفلون از نقطه جوش مونومر سازنده پلی اتن، کم‌تر است.

(۳) نسبت درصد جرمی فلوئور در تفلون به درصد جرمی هیدروژن در پلی اتن، به تقریب برابر ۵/۳ است.

(۴) مونومر سازنده تفلون برخلاف مونومر سازنده پلی اتن، در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

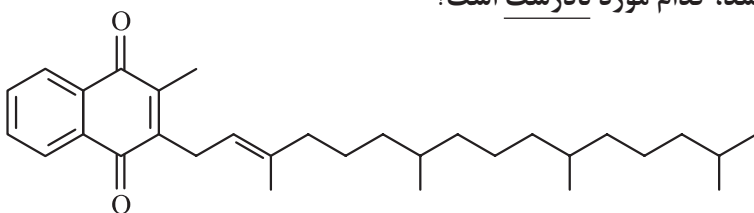
۹۴- اگر جدول زیر مربوط به آبکافت متیل فورمات در ظرفی به حجم ۲ لیتر باشد، در بازه ۳۰ تا ۹۰ ثانیه، چند گرم الکل

تولید شده است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

[استر]	۰/۵۵	۰/۴۲	۰/۳۱	۰/۲۳	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۰۸
زمان (s)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰

۶/۹ (۱) ۷/۳۶ (۲) ۱۳/۸ (۳) ۱۴/۷۲ (۴)

۹۵- اگر شکل زیر مربوط به ویتامین کا (K) باشد، کدام مورد نادرست است؟



(۱) شمار گروه‌های CH_3 در ساختار آن با شمار این گروه‌ها در ۴-اتیل - ۴،۲،۲ - تری‌متیل هگزان برابر است.

(۲) همانند ویتامین آ (A) در آب نامحلول است.

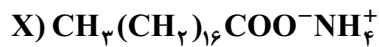
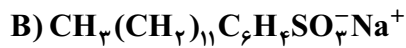
(۳) در ساختار آن مانند ساختار پاک‌کننده‌های صابونی جامد، ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(۴) مانند ۲-هیپتانول، دارای گروه عاملی کربونیل است.

محل انجام محاسبات



۹۶- در مورد ترکیب‌های A، B، X و D، کدام گزینه نادرست است؟



- (۱) از اجزای سازنده چربی است که مخلوط آن با آب و X، یک مخلوط ناهمگن پایدار است.
 (۲) بر اثر واکنش ترکیب X با کلسیم کلرید، رسوبی ایجاد می‌شود که نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها در فرمول آن برابر $27/75$ است.
 (۳) A در دمای اتاق، مایع بوده و از آن می‌توان جهت شوینده صنعتی استفاده کرد.
 (۴) ترکیب B از مواد پتروشیمی در صنعت تولید می‌شود و افزودن یون فسفات به آن، باعث افزایش چشمگیری در قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت نخواهد شد.

۹۷- فرایند یونش کدام اسید در آب، تعادلی نیست؟

(۲) هیدروسیانیک اسید

(۱) نیترو اسید

(۴) متانوئیک اسید

(۳) هیدروبرمیک اسید

۹۸- اگر حجم ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار هیدروکلریک اسید با افزودن آب مقطر دو برابر شود، pH محلول

(۲) دو برابر می‌شود

(۱) ۰/۵ واحد افزایش می‌یابد

(۴) تغییری نمی‌کند

(۳) ۰/۳ واحد کاهش می‌یابد

۹۹- کدام گزینه، جمله زیر را به نادرستی تکمیل می‌کند؟

«اگر در سلول گالوانی دارای نیم‌سلول‌های A و B، جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت تیغه A باشد، قطعاً می‌توان گفت»

(۱) A^{n+} نسبت به B^{m+} ، اکسندۀ قوی‌تری است

(۲) با گذشت زمان، از جرم الکتروود A کاسته و به جرم الکتروود B افزوده می‌شود

(۳) واکنش $A + B^{m+} \rightarrow$ به طور خودبه‌خودی انجام نمی‌شود

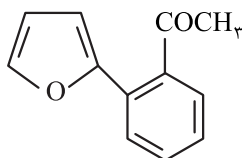
(۴) نیم‌واکنش اکسایش در نیم‌سلول B و نیم‌واکنش کاهش در نیم‌سلول A انجام می‌شود

محل انجام محاسبات

۱۰۰- کدام مورد درباره سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن (I) و سلول هال (II)، درست است؟

- (۱) هر دو، از نوع الکترولیتی هستند ولی تنها در یکی از آنها، گاز تولید می‌شود.
- (۲) براساس معادله موازنه شده کلی، شمار الکترون‌های مبادله شده در سلول (II)، ۳ برابر سلول (I) است.
- (۳) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی هر دو سلول، از قطب منفی به قطب مثبت است.
- (۴) واکنش کلی سلول (I) مانند واکنش کلی برقکافت آب است.

۱۰۱- اگر در ساختار زیر، شمار اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند را a و شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش صفر را b بنامیم، کدام رابطه درست است؟



$$a = b \quad (۱)$$

$$b = ۱/۵a \quad (۲)$$

$$a = b + ۱ \quad (۳)$$

$$b = a + ۱ \quad (۴)$$

۱۰۲- با توجه به جدول زیر که مربوط به نقطه جوش پروپان، دی‌متیل اتر و اتانول است، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

ماده	نقطه جوش (°C)
A	۷۸
B	-۴۲
X	-۲۴

- (الف) دی‌متیل اتر برخلاف پروپان، در دمای اتاق به حالت مایع است.
- (ب) ماده A همان اتانول است و برخلاف دو ماده دیگر، در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.
- (پ) مواد A و X، ایزومر یکدیگرند و مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در آنها برابر است.
- (ت) در اثر سوختن کامل هر مول B، ۷ مول فراورده تولید می‌شود.
- (۱) پ و ت (۲) الف و ب (۳) الف و پ (۴) ب و ت

۱۰۳- اگر حجم سامانه در حال تعادل $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g)$ در دمای ثابت، دو برابر شود،

- (۱) به دلیل ثابت بودن دما، نه تعادل جابه‌جا می‌شود و نه مقدار ثابت تعادل تغییر می‌کند
- (۲) به دلیل کم‌شدن غلظت مواد، مقدار ثابت تعادل تغییر می‌کند و تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود
- (۳) تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود، اما مقدار ثابت تعادل تغییر نمی‌کند
- (۴) غلظت‌های تعادلی مواد و مقدار ثابت تعادل، کاهش می‌یابد

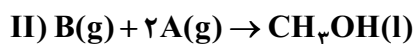
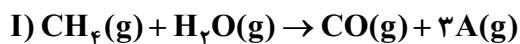
محل انجام محاسبات



۱۰۴- با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام ماده فقط از یک نوع واکنش دهنده تهیه می‌شود؟

- (۱) پلی‌اتیلن ترفتالات
 (۲) اتیل استات
 (۳) پلی‌لاکتیک اسید
 (۴) ترفتالیک اسید

۱۰۵- با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)



- (۱) گاز A یکی از فراورده‌های واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب است.
 (۲) درصد جرمی کربن در ماده‌آلی موجود در واکنش (II)، دو برابر آن در ماده‌آلی واکنش (I) است.
 (۳) تغییر عدد اکسایش اتم کربن در واکنش (I)، برابر ۲ بوده و متان در آن نقش کاهنده دارد.
 (۴) میل ترکیبی گاز B با اکسیژن هوا، بیش از ۲۰۰ برابر هموگلوبین خون بوده و این گاز بسیار سمی است.

محل انجام محاسبات

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



آزمون جامع (مرحله هجدهم)

پایه دوازدهم

۲۲/ خرداد/ ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - علی شهرابی - محمد گودرزی - سروش موئینی - محمدسجاد نقیه
هندسه	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری
فیزیک	یاشار انگوتی - امین امینی
شیمی	فرشید ابراهیمی - مهدی براتی - پیمان خواجوی مجد - علی رفیعی - هادی عبادی - یاسر عبداللهی محمد عظیمیان زواره - امیر قاسمی پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده محمد گودرزی	سهیل تقی زاده منصور زرکش اصفهانی سهند محمد کریم نژاد
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	سید عباس حسینی	ماهان فنی فر ابوالفضل ناصر مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سید عباس حسینی سعید قندچی	امیرحسین ابومحبوب ماهان فنی فر مریم نظری
فیزیک	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار	علیرضا جعفری آثار	سعید محبی هادی نجفی	علیرضا جعفری آیدین طهماسبلی زاده امیر محمودی انزلی سعید محبی محمد رضا یاری
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده یاشار ذریه محمد مهدی کریمیان	عادی عبادی آرمین عظیمی محمد نوروزی مال

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور



آزمون آزمایشی خمیلی سبز

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی

تیم اجرایی و تألیف آزمون

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد نادره ناز آوری - ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی



نمودار تابع خطی f با شیب ۳، محور x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x^3) - 3f(x^2)$

بر $x - 3$ کدام است؟

$$f(x) = 3x + h$$

۲۱ (۲)

(۱) صفر

۱۲ (۴)

(۳) ۶

پاسخ: گزینه ۴

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $x - a$ برابر $p(a)$ است.

درسی Box

گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = mx + h \xrightarrow{\text{شیب برابر ۳ است}} f(x) = 3x + h \xrightarrow{f(2)=0} h = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = 3(x - 2)$$

گام دوم: چندجمله‌ای $f(x^3) - 3f(x^2)$ را چندجمله‌ای $p(x)$ در نظر می‌گیریم. طبق درس باکس، باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 3$ برابر $p(3)$ است:

$$p(3) = f(27) - 3f(9)$$

$$\begin{cases} f(27) = 3(27 - 2) = 75 \\ f(9) = 3(9 - 2) = 21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(3) = 75 - 63 = 12$$

هیچ کدام از توابع $f(x) = x^2 + mx$ و $g(x) = 4x - mx^2$ روی بازه $(-2, 3)$ یکنوا نیستند. مجموعه مقادیر قابل قبول

۲

برای m شامل چند عدد صحیح است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ روی بازه (x_1, x_2) غیریکنواست، اگر $x_S = -\frac{b}{2a}$ عضو این بازه باشد.



گام اول: طول رأس نمودار تابع درجه دوم f ، $x_S = -\frac{m}{4}$ و طول رأس نمودار تابع درجه دوم g ، $x_{S'} = \frac{2}{m}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: طبق درس باکس، بازه $(-2, 3)$ باید شامل هر دو مورد باشد:

$$-2 < -\frac{m}{4} < 3 \Rightarrow -6 < m < 4$$

$$-2 < \frac{2}{m} < 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow m < -1 \\ \text{و} \\ \frac{m}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow m > \frac{2}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -6 < m < -1 \text{ یا } \frac{2}{3} < m < 4$$

مجموعه $(-6, -1) \cup (\frac{2}{3}, 4)$ شامل ۷ عدد صحیح $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ و ۳ است.



۳ اگر $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+10}$ باشد، حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ کدام است؟ $g^{-1}(f^{-1}(2))$

۱۵ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر $f(\alpha) = \beta$ باشد، آن گاه $f^{-1}(\beta) = \alpha$ است و برعکس.



گام اول: هدف، محاسبه مقدار $g^{-1}(f^{-1}(2))$ است. این مقدار را α در نظر می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$g^{-1}(f^{-1}(2)) = \alpha$$

برای محاسبه آن، ابتدا باید مقدار $f^{-1}(2)$ را حساب کنیم؛ آن را β می‌نامیم:

$$f^{-1}(2) = \beta \xrightarrow{\text{نکته}} f(\beta) = 2 \Rightarrow \frac{\beta-1}{\beta-2} = 2 \Rightarrow \beta = 3$$

گام دوم: حالا می‌توانیم مقدار α را حساب کنیم:

$$g^{-1}(3) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = 3 \Rightarrow \sqrt{\alpha+10} = 3 \Rightarrow \alpha = -1$$



۴

در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، اندازه‌های محیط و مساحت به ترتیب برابر 10 و $\sqrt{3}$ است. اختلاف طول‌های دو ضلع AB

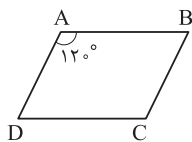
و BC کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{7}$

(۳) $\sqrt{17}$

(۴) $\sqrt{33}$

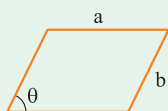


پاسخ: گزینه ۳

نکته

• مساحت متوازی‌الاضلاعی به طول اضلاع a و b که یکی از زوایای آن θ است، برابر است با:

$$S = ab \sin \theta$$

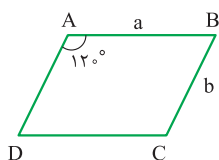


$$|x_2 - x_1| = \sqrt{S^2 - 4P}$$

• اختلاف جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ برابر است با:

گام اول: طول اضلاع متوازی‌الاضلاع را a و b در نظر می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\Rightarrow \text{محیط} = 2(a + b) = 10 \Rightarrow a + b = 5$$

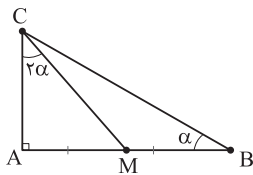
$$\xrightarrow{\text{دربیناکس}} \text{مساحت} = ab \sin 120^\circ = ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow ab = 2$$

گام دوم: در نتیجه a و b جواب‌های معادله درجه‌دومی هستند که مجموع آن‌ها برابر 5 و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر 2 است؛ یعنی

$$\text{معادله } x^2 - 5x + 2 = 0.$$

$$|a - b| = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

اختلاف جواب‌های این معادله برابر است با:



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

در شکل مقابل، M وسط AB است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

۵

پاسخ: گزینه ۴

● اتحاد تانژانت مجموع و تفاضل کمان:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) = \frac{1 \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \theta}$$

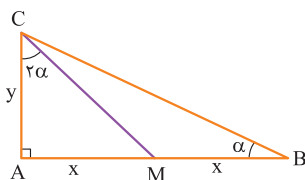
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

● اتحاد تانژانت دو برابر کمان:

درس Box

گام اول: ابتدا اندازه‌ها را روی شکل نام‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\tan \alpha = \frac{y}{2x}, \quad \tan 2\alpha = \frac{x}{y}$$

و داریم:

$$\tan \alpha \times \tan 2\alpha = \frac{1}{2}$$

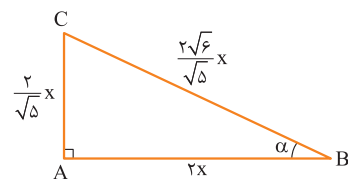
و از این روابط برداشت می‌شود که:

گام دوم: حالا از اتحاد تانژانت دو برابر کمان استفاده می‌کنیم:

$$\tan \alpha \times \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \tan^2 \alpha = 1 - \tan^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha > 0} \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

گام سوم: این یعنی $\frac{y}{2x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و در نتیجه $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x$ است:



دقت کنید که طول وتر BC از قضیه فیثاغورس به دست آمده است:

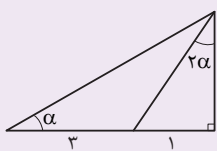
$$BC = \sqrt{(2x)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2} = \sqrt{\frac{24x^2}{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}x$$

گام چهارم: حالا می‌توانیم $\sin \alpha$ را حساب کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}x}{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}x} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(سؤال ۱۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟



$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

معادله $\sin x = \frac{1}{3}(\cos 2x - 2)$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ ۶

یک دور دایره مثلثاتی ۴ (۱)
۳ (۲)
۲ (۳)
۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint رو برحسب $\sin x$ بنویس و با تغییر متغیر به معادله درجه ۲ حل کن.

درسی Box اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

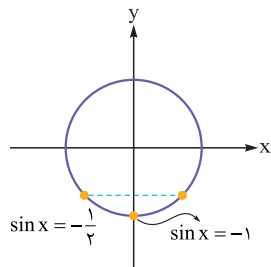
گام اول: ابتدا به جای $\cos 2x$ عبارت $1 - 2 \sin^2 x$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin x = \frac{1}{3}(1 - 2 \sin^2 x - 2) \Rightarrow 3 \sin x = -2 \sin^2 x - 1 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

گام دوم: $\sin x$ را متغیر جدید t می‌گیریم:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

گام سوم: روی دایره مثلثاتی می‌توانیم تعداد جواب‌ها را پیدا کنیم:



بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۳ جواب است.

اختلاف جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x = 3 \sin x - 1$ که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارند، کدام است؟

(سؤال ۱۲۰ نکلور، تهری ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

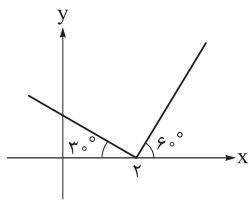
$$\frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5\pi}{6} \quad (۱)$$

شکل زیر، نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. اختلاف حدهای راست و چپ تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{x^2 + f(x) - 2x}{x^2 - 4}$ در $x = 2$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۷



$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (4)$$

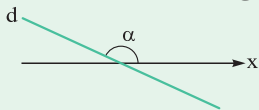
$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور x می‌سازد، برابر α باشد، شیب آن $m = \tan \alpha$ است:

نکته



گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x < 2: m = \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x > 2: m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) & ; x < 2 \\ \sqrt{3}(x-2) & ; x \geq 2 \end{cases}$$

گام دوم: حالا ضابطه تابع g را می‌سازیم:

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + f(x)}{x^2 - 4} = \frac{x(x-2) + f(x)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{x+2} & ; x < 2 \\ \frac{x + \sqrt{3}}{x+2} & ; x > 2 \end{cases}$$

گام سوم: حدهای چپ و راست تابع g را در $x = 2$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{x+2} = \frac{2 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + \sqrt{3}}{x+2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

که اختلاف آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

تابع $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ در $x = 2$ حد دارد، پس اختلاف حدهای چپ و راست تابع g در $x = 2$ ، اختلاف حدهای چپ و راست

تابع $h(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 4}$ است:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{4} f'_-(2) = \frac{1}{4} (-\tan 3^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{4} f'_+(2) = \frac{1}{4} \tan 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 6x \cos(\frac{\pi}{4} + x)}{\pi - 4x}$ کدام است؟

حد این عبارت برابر ۱- است.

(۱) $0/25$

(۲) $0/25$

(۳) $-1/5$

(۴) $1/5$

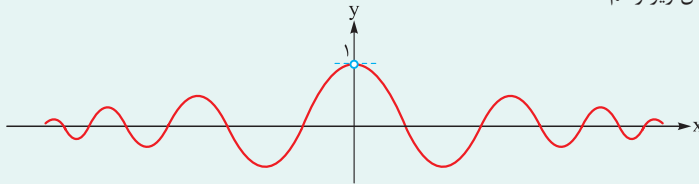
مشاوره در حدهای صفر صفر، فقط عبارت‌هایی برایمان مهم است که حد آن‌ها صفر باشد، پس اگر در صورت یا مخرج (در حالت ضربی) عبارت‌هایی هستند که حد آن‌ها صفر نمی‌شود، به جای آن عبارت‌ها، حدشان را قرار دهید. به عنوان مثال در این سؤال حد $\sin 6x$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ برابر ۱- است، پس به جای آن ۱- قرار می‌دهیم.

پاسخ: گزینه ۱

رو متغیر جدید t بگیر.

Hint

تابع $y = \frac{\sin x}{x}$: نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است:



همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

تابع در $x = 0$ حدی برابر ۱ دارد.

از حد این تابع در $x = 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی عددی خیلی خیلی به صفر نزدیک می‌شود، سینوس آن عدد تقریباً با خود عدد برابر است:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \sim x$$

در حالت کلی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

گام اول: طبق آن چیزی که در مشاوره گفتیم، حاصل حد زیر را حساب می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos(\frac{\pi}{4} + x)}{\pi - 4x}$$

گام دوم: حالا $x = \frac{\pi}{4}$ را t می‌گیریم، پس اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0$ داریم:

$$\xrightarrow{x=t+\frac{\pi}{4}} L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + t)}{\pi - 4(t + \frac{\pi}{4})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} + t)}{-4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-4t} = -\frac{1}{4}$$

از هویتال استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos(\frac{\pi}{4} + x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + x)}{-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

یه جور دیگه

نقاط تقاطع خطوط مجانب نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{4x^2 + 2}{x^2 - 4}$ به همراه مبدأ مختصات، رأس‌های یک چندضلعی

محدب هستند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۰ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مجانِب قائم: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ (یا حتی یکی از حدهای چپ و راست در $x = x_0$ بی‌نهایت) باشد، می‌گوییم خط $x = x_0$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

در توابع کسری، مجانب قائم غالباً از بین ریشه‌های مخرج انتخاب می‌شود؛ اگر ریشه‌های مخرج، ریشه صورت نباشند، آن ریشه معادله خط مجانب قائم نمودار تابع است.

مجانِب افقی: اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$ باشد، خط $y = y_0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

گام اول: خط $y = 4$ مجانب افقی نمودار تابع f است؛ زیرا:

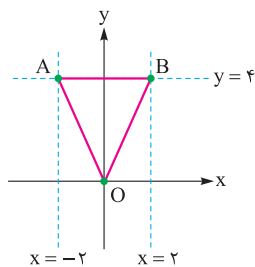
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

گام دوم: ریشه‌های مخرج نیز $x = -2$ و $x = 2$ هستند:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

پس $x = -2$ و $x = 2$ خطوط مجانب قائم نمودار تابع f هستند.

گام سوم: مطابق شکل، نقاط $A(-2, 4)$ و $B(2, 4)$ نقاط برخورد خط‌های مجانب هستند:



$$\frac{4 \times 4}{2} = 8$$

مثلث AOB ، مثلث مورد نظر سؤال است که مساحت آن برابر است با:

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

۱۰. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + x$ در $x = 1$ ، چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 3]$ است؟

همان مشتق است.

$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$0/4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$0/3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشتق تابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\Rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

گام اول: ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازه $[0, 3]$ به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{27 + 3 - 0}{3} = 10$$

گام دوم: حالا آهنگ تغییر لحظه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(1) = 4$$

خواسته سؤال نسبت آهنگ تغییر لحظه‌ای به آهنگ تغییر متوسط است که برابر می‌شود با $0/4$.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

خط غیرافقی Δ از مبدأ مختصات می‌گذرد و در نقطه T بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - x^2$ مماس است.

طول نقطه T کدام است؟ ← معادله خط Δ ، $y = mx$ است با $m \neq 0$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته

اگر خطی بر نمودار تابع f در نقطه $(\alpha, f(\alpha))$ واقع بر آن مماس باشد، این نقطه روی خط نیز قرار دارد و هم‌چنین شیب خط برابر $f'(\alpha)$ است.

گام اول: مختصات نقطه T را $T(\alpha, \alpha^3 - \alpha^2)$ در نظر می‌گیریم، مطابق فرض، خط Δ که معادله آن $y = mx$ است، از نقطه T می‌گذرد:

$$\Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 = m\alpha \xrightarrow{\alpha \neq 0} \alpha^2 - \alpha = m$$

هم‌چنین در نقطه تماس، شیب خط Δ یعنی m برابر مشتق تابع f است:

$$\Rightarrow m = f'(\alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha$$

گام دوم: حالا دو رابطه به‌دست آمده برای m را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$3\alpha^2 - 2\alpha = \alpha^2 - \alpha \Rightarrow 2\alpha^2 - \alpha = \alpha(2\alpha - 1) = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \alpha = \frac{1}{2}$$

طول نقطه T ، $\frac{1}{2}$ است.

یه‌جور دیگه

معادله حاصل از تقاطع خط و نمودار تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\Delta: y=mx} x^3 - x^2 = mx \Rightarrow x(x^2 - x - m) = 0$$

معادله $x^2 - x - m = 0$ باید یک جواب داشته باشد؛ بنابراین دلتای آن باید صفر باشد، در این صورت این جواب $x = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ است.

۱۲ اختلاف مقادیر اکسترمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ کدام است؟

عرض نقاط اکسترمم	۸ (۲)	۴ (۱)
	۱۲ (۴)	۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: تابع گویای h با ضابطه $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را مفروض بگیرید که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای هستند. برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی تابع h ، کافی است معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{h(x) = h_{\text{HOP}}(x)}{\rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

گام اول: ابتدا طول نقاط بحرانی نمودار تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{\text{نکته}} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \frac{2x}{1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3, 1$$

گام دوم: تابع f روی $\mathbb{R} - \{-1\}$ مشتق‌پذیر است و از آن‌جا که $x = -3$ و 1 جواب‌های ساده معادله بوده‌اند، نقاط بحرانی به دست آمده برای تابع نمودار f ، نقاط اکسترمم نسبی آن نیز هستند و نیازی به آزمون مشتق اول نیست.

حالا مقادیر اکسترمم نسبی تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(-3) = \frac{9 + 3}{-3 + 1} = -6, \quad f(1) = \frac{1 + 3}{1 + 1} = 2$$

خواسته سؤال، اختلاف عرض نقاط اکسترمم نسبی و برابر $|-6 - 2| = 8$ است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

مستطیلی با بیشترین مساحت، درون یک نیم‌دایره محاط شده است. نسبت مساحت نیم‌دایره به مساحت مستطیل، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) ۲

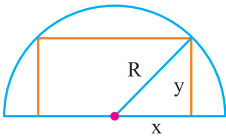
(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۴) π

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



R شعاع نیم‌دایره، $2x$ طول مستطیل و y عرض آن است. مساحت مستطیل برابر است با $2xy$.

حالا چون در مثلث قائم‌الزاویه شکل، رابطه $x^2 + y^2 = R^2$ برقرار است، در رابطه مساحت مستطیل، به جای y عبارت $\sqrt{R^2 - x^2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{یا} \quad S(x) = 2\sqrt{R^2 x^2 - x^4}; \quad 0 < x < R$$

گام دوم: بیشترین مقدار $S(x)$ جایی رخ می‌دهد که عبارت $R^2 x^2 - x^4$ به بیشترین مقدار خود برسد، این عبارت نیز قطعاً در نقطه بحرانی‌اش بیشترین مقدار را دارد:

$$\frac{(R^2 x^2 - x^4)'}{=} \rightarrow 2R^2 x - 4x^3 = 2x(R^2 - 2x^2) = 0 \xrightarrow{0 < x < R} x = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

گام سوم: در این شرایط، بیشترین مقدار مساحت مستطیل $S = 2 \times \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = R^2$ است.

مساحت نیم‌دایره که $\frac{\pi}{4} R^2$ است؛ بنابراین نسبت مساحت نیم‌دایره به مساحت بزرگ‌ترین مستطیل محاط‌شده، برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{x}, 2, x^3, \dots$ کدام است؟ ← قدرنسبت کوچکتر از ۱ است.

$$\frac{4^{10} - 1}{10} \quad (2)$$

$$\frac{4^{10} + 1}{10} \quad (1)$$

$$\frac{4^{10} - 1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{4^{10} + 1}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

اول کار با ویژگی مهم جملات دنباله هندسی، مقدار x رو حساب کن.

 Hint

 درسی Box

دنباله هندسی:

• ویژگی مهم جملات متوالی: اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، $b^2 = ac$ است.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

• مجموع n جمله اول دنباله هندسی a_n با قدرنسبت q برابر است با:

گام اول: ابتدا مقدار x را حساب می‌کنیم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\xrightarrow{\text{ویژگی جملات متوالی}} \frac{1}{x} \times x^3 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

اما اگر $x = 2$ باشد، دنباله به صورت $\frac{1}{2}, 2, 8, \dots$ و صعودی خواهد بود که خلاف فرض سؤال است؛ بنابراین $x = -2$ قابل قبول است.

گام دوم: جمله اول دنباله $-\frac{1}{2}$ و قدرنسبت آن -4 است؛ بنابراین مجموع ده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{10} = \frac{-\frac{1}{2}((-4)^{10} - 1)}{-4 - 1} = \frac{4^{10} - 1}{10}$$

۱۵ اگر $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}$ کدام است؟

$$-\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

اون دو عبارت مزدوج هممن، در هم ضربشون کن.

Hint

دو عبارت $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}$ و $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}$ مزدوج یکدیگرند، پس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}) = (2x-1) - (2x+1) = -2$$

اما طبق فرض، مقدار عبارت $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}$ برابر $\frac{3}{2}$ است:

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}) = -2 \Rightarrow \sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1} = -\frac{4}{3}$$

اگر $f(x) = x^2 - x - 1$ باشد، حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(2x^2 - 5) = f(2x + 3)$ کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درسی Box

تابع درجه دوم f با ضابطه $f(x) = x^2 - ax + b$ مفروض است. جواب‌های معادله $f(g(x)) = f(h(x))$ در دو حالت زیر

به دست می‌آید:

$$\begin{cases} g(x) = h(x) \\ \text{یا} \\ g(x) + h(x) = a \end{cases}$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ برابر b است.

سؤال حاضر دقیقاً شرایط درس‌بکس را دارد؛ بنابراین داریم:

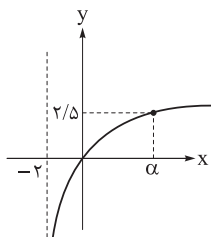
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{aligned} \xrightarrow{f(2x^2-5)=f(2x+3)} & \begin{cases} 2x^2 - 5 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -4 \\ \text{یا} \\ 2x^2 - 5 + 2x + 3 = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_3 x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = (-4) \left(-\frac{3}{2}\right) = 6$$

در نتیجه، حاصل ضرب هر ۴ جواب معادله برابر است با:

شکل زیر، نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \log_r(ax + b)$ را نمایش می‌دهد. جزء صحیح α کدام است؟



۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: نمودار تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد:

$$\xrightarrow{f(0)=0} \log_r b = 0 \Rightarrow b = r^0 = 1$$

گام دوم: حالا دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{b=1} ax + 1 > 0 \Rightarrow ax > -1 \xrightarrow{a>0} x > -\frac{1}{a} \Rightarrow D_f = \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$$

اما از روی نمودار، دامنه تابع بازه $(-2, +\infty)$ است؛ پس داریم:

$$-\frac{1}{a} = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گام سوم: این یعنی $f(x) = \log_r\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ است و داریم:

$$\xrightarrow{f(\alpha)=2/5} 2/5 = \log_r\left(\frac{1}{2}\alpha + 1\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha + 1 = r^{2/5} \Rightarrow \alpha = 2^{3/5} - 2$$

گام چهارم: α را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

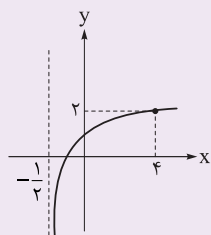
$$\alpha = 2^{3/5} - 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt[5]{128} - 2$$

بنابراین داریم:

$$121 < 128 < 144 \Rightarrow 11 < \sqrt[5]{128} < 12 \Rightarrow 9 < \alpha < 10 \Rightarrow [\alpha] = 9$$

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_r(ax + b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟

(سؤال الکتور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



$$-\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$-\frac{7}{18} \quad (4)$$

$$-\frac{5}{18} \quad (3)$$

از میان خط‌های به معادله $ax + 4y = 1$ که فاصله آن‌ها از نقطه $(1, 2)$ برابر ۲ است، خطی را که فاصله بیشتری از مبدأ مختصات دارد، در نظر می‌گیریم. طول از مبدأ این خط کدام است؟

طول نقطه برخورد با محور x	$\frac{3}{5}$ (۲)	$\frac{1}{3}$ (۱)
	$\frac{5}{3}$ (۴)	۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

درسی Box

فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله مبدأ مختصات از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

گام اول: ابتدا فاصله نقطه $(1, 2)$ را از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$d = \frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

گام دوم: برای حل معادله بالا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64 \Rightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روش روسی}} t^2 - 14t + 45 = (t-9)(t-5) = 0 \Rightarrow t = 9 \text{ و } 5$$

$$\xrightarrow{\text{معادله اصلی}} a = 3, \frac{5}{3}$$

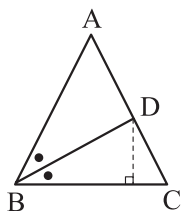
گام سوم: فاصله مبدأ مختصات از خط $ax + 4y = 1$ برابر است با $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 16}}$ ؛ بنابراین هر چه a کمتر باشد، این خط فاصله

بیشتری از مبدأ مختصات دارد، در نتیجه $a = \frac{5}{3}$ قابل قبول است:

$$\xrightarrow{a = \frac{5}{3}} \frac{5}{3}x + 4y = 1 \xrightarrow{\text{طول از مبدأ } y=0} x_0 = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر $AB = AC = ۳$ ، $BC = ۲$. اگر BD نیمساز زاویه ABC باشد، فاصله D از BC کدام است؟



$$۱/۲۵ \quad (۱)$$

$$۱/۴ \quad (۲)$$

$$۰/۷۵\sqrt{۲} \quad (۳)$$

$$۰/۸\sqrt{۲} \quad (۴)$$

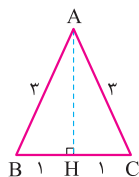
پاسخ: گزینه ۴

هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

Hint

گام اول: ابتدا ارتفاع بزرگ تر مثلث متساوی الساقین ABC را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

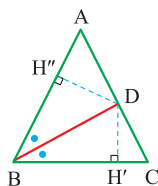


$$AH^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}$$

گام دوم: مساحت مثلث ABC عبارت است از:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

گام سوم: مطابق شکل از آن جا که D نقطه ای واقع بر نیمساز زاویه A است، داریم $DH' = DH''$ و می توان نوشت:

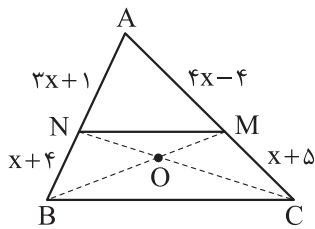


$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} DH'' \cdot AB + \frac{1}{2} DH' \cdot BC$$

$$\xrightarrow{DH''=DH'} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} DH' \times 3 + \frac{1}{2} DH' \times 2 \Rightarrow 4\sqrt{2} = 5DH'$$

$$\Rightarrow DH' = \frac{4\sqrt{2}}{5} = ۰/۸\sqrt{2}$$

۲۰ در شکل زیر، چهارضلعی BCMN دوزنقه است. نسبت مساحت مثلث OBC به مساحت مثلث OMN کدام است؟



$$1/44 \quad (1)$$

$$1/69 \quad (2)$$

$$1/96 \quad (3)$$

$$2/25 \quad (4)$$

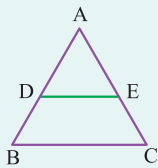
پاسخ: گزینه ۴

نسبت مساحت دو مثلث متشابه با مجذور نسبت تشابه آن‌ها برابر است.

Hint

درسی Box

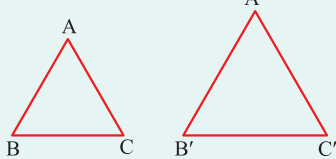
(۱) اگر در شکل روبه‌رو $DE \parallel BC$ باشد:



$$\text{تالس} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{تعمیم تالس} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

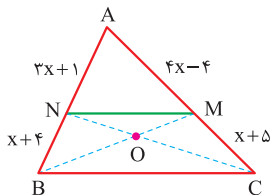
(۲) اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر با هم برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند:



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

(۳) اگر دو مثلث با هم متشابه با نسبت تشابه k باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر k^2 خواهد بود.

گام اول: چهارضلعی NMCB دوزنقه است؛ بنابراین $MN \parallel BC$ می‌باشد و می‌توان رابطه تالس را به صورت زیر نوشت:

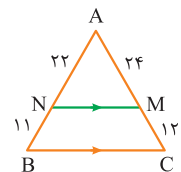


$$\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{3x+1}{x+4} = \frac{4x-4}{x+5}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 15x + x + 5 = 4x^2 - 4x + 16x - 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ غق ق} \\ x = 7 \end{cases}$$

گام دوم: ابعاد مثلث‌های AMN و ABC به صورت زیر است و بنابراین:



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{22}{33} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{2}{3}$$

گام سوم: مثلث‌های OMN و OBC متشابه هستند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC, \text{مورب} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1 \\ MN \parallel BC, \text{مورب} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{C}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle OBC \sim \triangle OMN$$

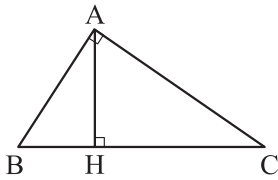
نسبت تشابه عبارت است از:

$$k = \frac{BC}{MN} = \frac{3}{2}$$

پس نسبت مساحت دو مثلث با مجذور نسبت تشابه برابر است؛ یعنی:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{OMN}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{OBC}}{S_{OMN}} = \frac{9}{4} = 2/25$$

۲۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر است. اگر $\frac{BC}{AH} = \sqrt{5}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{CH}{BH}$ کدام است؟



$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

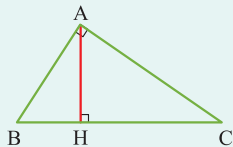
$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$2(\sqrt{5} - 1) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

روابط طولی ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه عبارتند از:



$$AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

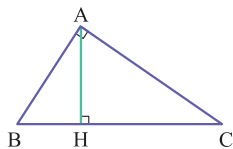
$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

گام اول: رابطه موجود در مسئله را به توان دو می‌رسانیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{BC}{AH} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{BC^2}{AH^2} = 5$$

گام دوم: روابط $BC = BH + HC$ و $AH^2 = BH \cdot HC$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{(BH + HC)^2}{BH \cdot HC} = 5 \Rightarrow \frac{BH^2 + HC^2 + 2BH \cdot HC}{BH \cdot HC} = 5$$

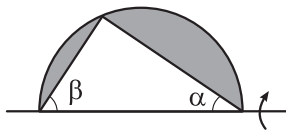
$$\Rightarrow \frac{BH}{HC} + \frac{HC}{BH} + 2 = 5$$

گام سوم: فرض می‌کنیم $\frac{CH}{BH} = t$ ، پس:

$$\frac{1}{t} + t = 3 \Rightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{CH > BH} \frac{CH}{BH} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

مطابق شکل، از نیم‌دایره‌ای به شعاع R ، یک مثلث جدا کرده و قسمت باقی‌مانده را حول قطر نیم‌دایره دوران می‌دهیم. اگر $\beta = 2\alpha$ ، آن‌گاه حجم شکل حاصل از دوران، چند برابر πR^3 است؟



$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7}{6} \quad (1)$$

$$\frac{5}{6} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

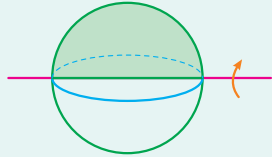
پاسخ: گزینه ۴

مثلث موجود در شکل، قائم‌الزاویه است، به کمک نسبت‌های مثلثاتی، ارتفاع وارد بر وتر را برحسب شعاع دایره به دست آورید.

Hint

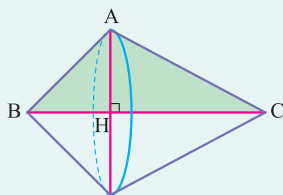
درس‌Box

(۱) از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره به وجود می‌آید.

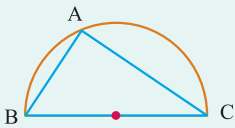


(۲) حجم کره‌ای به شعاع R ، برابر با $\frac{4}{3}\pi R^3$ است.

(۳) حجم شکل حاصل از دوران مثلث ABC ، حول ضلع BC برابر است با: $\frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BC$.

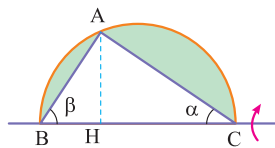


(۴) اگر مثلث ABC مطابق شکل درون نیم‌دایره‌ای محاط شود، آن‌گاه: $\hat{BAC} = 90^\circ$ ، چون زاویه محاطی رو به قطر دایره است.



گام اول (تشخیص شکل حاصل از دوران): شکل حاصل از دوران، کره‌ای به شعاع R است که شکل حاصل از دوران مثلث ABC حول BC از آن جدا شده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم (محاسبه حجم شکل حاصل از دوران مثلث ABC):

با توجه به درس‌باکس $\hat{BAC} = 90^\circ$ ، پس $\alpha + \beta = 90^\circ$ ، از آن‌جا که $\beta = 2\alpha$ ، پس $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ ؛ بنابراین:

$$\triangle ABC: \sin \alpha = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\alpha=30^\circ} \frac{1}{2} = \frac{AB}{2R} \Rightarrow AB = R$$

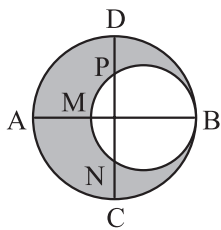
$$\triangle ABH: \sin \beta = \frac{AH}{AB} \xrightarrow[\frac{AB=R}]{\beta=60^\circ} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{R} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 (2R) = \frac{1}{3}\pi R^3$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): حجم کره‌ای که از دوران نیم‌دایره ایجاد می‌شود، برابر با $V' = \frac{4}{3}\pi R^3$ است، در نتیجه حجم حاصل از دوران ناحیه مشخص شده، برابر است با:

$$V' - V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)\pi R^3 = \frac{3}{3}\pi R^3 = \pi R^3$$

در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = 3$ و $CN = 2$ باشد، آن گاه مساحت ناحیه بین دو دایره، چند برابر π است؟



(۱) $8/75$

(۲) $9/75$

(۳) $8/25$

(۴) $9/25$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۳ کتاب درسی طراحی شده است.

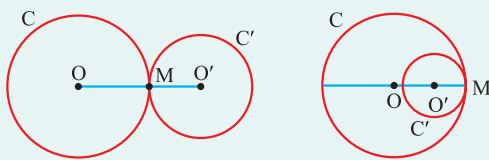
پاسخ: گزینه ۲

دقت کنید که BM قطر دایره کوچکتر است.

Hint

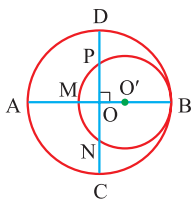
درس Box

هرگاه دو دایره مماس خارج یا مماس داخل باشند، نقطه تماس دو دایره روی خط‌المركزین دو دایره یا امتداد آن قرار می‌گیرد.



گام اول: فرض کنید شعاع دایره‌های بزرگتر و کوچکتر را به ترتیب با R و r نمایش دهیم. در این صورت داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$BM = AB - AM \Rightarrow 2r = 2R - 3 \Rightarrow r = R - \frac{3}{2}$$

$$OM = OA - AM = R - 3$$

هم‌چنین می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس داریم:

$$OP = ON = OC - CN = R - 2$$

گام دوم: طبق روابط طولی در دایره کوچکتر می‌توان نوشت:

$$OB \times OM = OP \times ON \Rightarrow R(R - 3) = (R - 2)^2 \Rightarrow R^2 - 3R = R^2 - 4R + 4$$

$$\Rightarrow R = 4 \Rightarrow r = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

گام سوم: خواسته سؤال برابر است با:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(4^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$$

$$= \pi\left(16 - \frac{25}{4}\right) = \frac{39}{4}\pi = 9/75\pi$$

نسبت طول ضلع مربع محاط در یک دایره به طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم محیط بر همان دایره کدام است؟ **۲۴**

$$۲ \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{2} \quad (۱)$$

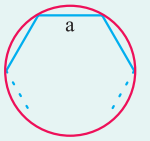
$$۱ + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$۲(۲ - \sqrt{2}) \quad (۳)$$

مشاوره این سؤال براساس روابط بیان شده در تمرین ۷ صفحه ۳۰ کتاب هندسه یازدهم به صورت ترکیبی با مثلثات طراحی شده است.

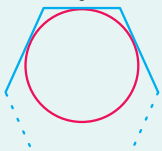
پاسخ: گزینه ۴

(۱) اندازه هر ضلع یک n ضلعی منتظم محاط درون دایره‌ای به شعاع R برابر است با:



$$a = 2R \sin \frac{18^\circ}{n}$$

(۲) اندازه هر ضلع یک n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R برابر است با:



$$b = 2R \tan \frac{18^\circ}{n}$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (۳)$$

گام اول: فرض کنید طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم محیط بر دایره را با b و طول ضلع مربع محاط در همان دایره را با a نمایش دهیم. مطابق درس پاکس داریم:

$$a = 2R \sin \frac{18^\circ}{4} = 2R \sin 4.5^\circ$$

$$b = 2R \tan \frac{18^\circ}{8} = 2R \tan 2.25^\circ$$

گام دوم: با توجه به نتایج به دست آمده از گام اول، نسبت خواسته شده در صورت سؤال برابر است با:

$$\frac{a}{b} = \frac{2R \sin 4.5^\circ}{2R \tan 2.25^\circ} = \frac{\sin 4.5^\circ}{\tan 2.25^\circ} = \frac{2 \sin 2.25^\circ \cos 2.25^\circ}{\frac{\sin 2.25^\circ}{\cos 2.25^\circ}} = 2 \cos^2 2.25^\circ = 1 + \cos 4.5^\circ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درس Box

سه نقطه $A(1,1)$ ، $B(\beta, 0)$ و $C(3, 4)$ را در نظر بگیرید. در حالتی که محیط مثلث ABC ، کم‌ترین مقدار ممکن را دارد، مساحت آن کدام است؟

۲ (۴)

۱/۸ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۶ (۱)

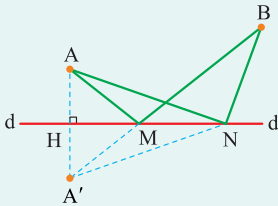
پاسخ: گزینه ۱

از نتایج مسئله هرون استفاده کنید.

Hint

درسی Box

مسئله هرون:

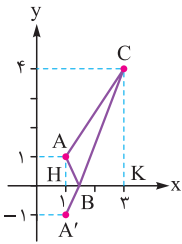


فرض کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط d باشند، و بخواهیم از A به نقطه‌ای مانند M روی خط d رفته و از آنجا به B برویم. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول ممکن برای خط شکسته AMB ، کافی است بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا کنیم (نقطه A') و سپس از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. نقطه M جواب مسئله است.

برای اثبات این ادعا نقطه‌ای مانند N روی خط d در نظر می‌گیریم. طبق نامساوی مثلثی در مثلث $A'NB$ داریم:

$$A'B < A'N + NB \Rightarrow A'M + MB < A'N + NB \xrightarrow[A'N=AN]{A'M=AM} AM + MB < AN + NB$$

گام اول: از آنجا که طول ضلع AC ثابت است، کافی است نقطه $B(\beta, 0)$ را به گونه‌ای روی محور x پیدا کنیم که مجموع طول دو ضلع AB و BC کم‌ترین مقدار ممکن باشد.



گام دوم: طبق مسئله هرون، بازتاب نقطه A را نسبت به محور x پیدا می‌کنیم که نقطه $A'(1, -1)$ است. محل برخورد پاره خط $A'C$ با محور x همان نقطه B است.

$$m_{A'C} = \frac{4 - (-1)}{3 - 1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{معادله خط } A'C: y - 4 = \frac{5}{2}(x - 3)$$

گام سوم: در معادله خط $A'C$ ، y را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا مقدار β (طول نقطه B) به دست آید:

$$0 - 4 = \frac{5}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 3 = -\frac{8}{5} \Rightarrow x = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

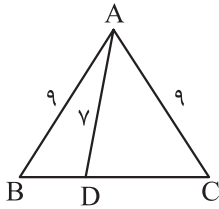
گام چهارم: برای محاسبه مساحت مثلث ABC ، با توجه به شکل بالا، داریم:

$$S_{ABC} = S_{A'HKC} - S_{A'HB} - S_{BKC} = \frac{(1+4) \times 2}{2} - \frac{1 \times 0/4}{2} - \frac{4 \times 1/6}{2} = 5 - 0 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، اگر $CD = 2BD$ ، آن گاه مساحت مثلث ABD کدام است؟

۲۶



۱۴ (۱)

۱۵ (۲)

 $5\sqrt{5}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴)

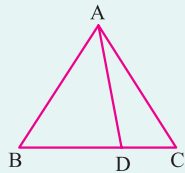
پاسخ: گزینه ۴

از قضیه استوارت استفاده کنید.

Hint

درس Box

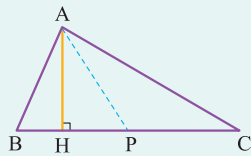
(۱) اگر D نقطه‌ای روی ضلع BC از مثلث ABC باشد، آن گاه داریم:



$$BD \times AC^2 + DC \times AB^2 = BC(AD^2 + BD \times DC)$$

(۲) اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک.

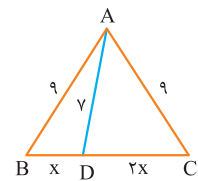
مثلاً در شکل مقابل داریم:



$$\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{BP}{BC}$$

گام اول: ابتدا به کمک قضیه استوارت x را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

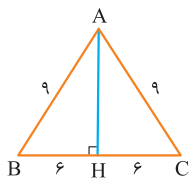


$$x \times 9^2 + 2x \times 9^2 = 3x(y^2 + x \times 2x)$$

$$81 \times 3x = (49 + 2x^2) \times 3x$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow BC = 3x = 12$$

گام دوم: برای محاسبه مساحت مثلث ABC، ارتفاع وارد بر BC را رسم می‌کنیم:



$$\Delta ABH: AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 12 = 18\sqrt{5}$$

گام سوم: بنا به مورد (۲) درس باکس، داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{18\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{ABD} = 6\sqrt{5}$$

بعد از محاسبه طول BD، برای محاسبه مساحت مثلث ABD می‌توانستید از قضیه هرون هم استفاده کنید.

یه جور دیگه

$$27 \quad \text{اگر } A = [a_{ij}]_{3 \times 3} \text{ که در آن } \begin{cases} -1 & ; |i-j| > 1 \\ 0 & ; |i-j| = 1 \\ 1 & ; |i-j| < 1 \end{cases} \text{، آن گاه دترمینان ماتریس } \frac{1}{4} A + I \text{ کدام است؟}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

(۱) نمایش ماتریس‌ها:

در حالت کلی اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و می‌خوانیم که ماتریس، یک ماتریس $m \times n$ (در m) n است.

اعداد داخل هر ماتریس، درایه‌های ماتریس نام دارند. به منظور مشخص کردن جایگاه هر درایه در ماتریس، از دو «اندیس» استفاده می‌کنیم. اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون درایه را نشان می‌دهد.

در هر ماتریس، عدد جای گرفته در محل سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نمایش می‌دهند و به آن درایه سطر i ام و ستون j ام می‌گویند:

$$\begin{matrix} \text{ستون } j\text{ام} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{سطر } i\text{ام} \rightarrow & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \end{matrix}$$

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و a_{ij} درایه‌ای از این ماتریس باشد، مسلم است که i و j در محدوده زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

(۲) محاسبه دترمینان 3×3 :

برای محاسبه دترمینان هر ماتریس 3×3 ، می‌توان آن را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود. مثلاً اگر بخواهیم دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه کنیم، داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مجموع شماره سطر و ستون a_{11}
دترمینان حاصل از حذف سطر و ستونی که a_{11} در آن قرار دارد.

گام اول (یافتن ماتریس A): طبق روابطی که برای درایه‌های ماتریس A در صورت سؤال گفته شد، ماتریس A را می‌نویسیم.

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای سه سطر و سه ستون است و نمایش آن به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

طبق الگویی که برای تعریف هر درایه ماتریس معین شده، ماتریس A به صورت زیر است:

درس‌Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم (تشکیل ماتریس $\frac{1}{4}A + I$): با توجه به گام قبل، داریم:

$$\frac{1}{4}A + I = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه دترمینان ماتریس $\frac{1}{4}A + I$): دترمینان را بر حسب سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$|\frac{1}{4}A + I| = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = \frac{5}{4} \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{4} \left(\frac{25}{16} - \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{25}{16} \right) = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

کوچک‌ترین دایره گذرنده از نقطه $(3, -1)$ و مماس بر نیمساز ربع اول و سوم، محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. حاصل ضرب طول‌های این دو نقطه کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

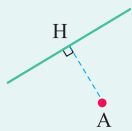
پاسخ: گزینه ۲

کوچک‌ترین دایره گذرا از یک نقطه و مماس بر یک خط زمانی است که فاصله نقطه تا خط برابر قطر باشد.

Hint

درسی Box

(۱) فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ عبارت است از:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(۲) معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R عبارت است از:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

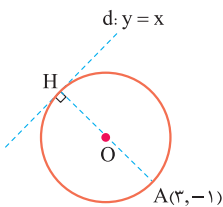
(۳) طول نقطه یا نقاط برخورد یک منحنی با محور x ها زمانی به دست می‌آید که $y = 0$ را در معادله آن قرار دهیم و جواب‌های معادله‌ای را که بر حسب x حاصل می‌شود به دست آوریم.

(۴) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\begin{cases} S = \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} \\ P = \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: کوچک‌ترین دایره گذرنده از نقطه $A(3, -1)$ و مماس بر خط $d: y = x$ زمانی ایجاد می‌شود که نقطه A دورترین نقطه دایره از خط d باشد؛ بنابراین:



$$AH = 2R \Rightarrow 2R = \frac{|y_A - x_A|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|3+1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

گام دوم: مرکز دایره وسط پاره‌خط AH است. برای تعیین مختصات نقطه H معادله خط AH را نوشته و با $y = x$ تلافی می‌دهیم:

$$m_d = 1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m_d} = -1$$

$$AH: y - y_0 = m'(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 2$$

گام سوم: مختصات نقطه H عبارت است از:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = -x + 2 \Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow H(1, 1)$$

پس مرکز دایره برابر است با:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_H}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \\ y_O = \frac{y_A + y_H}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow O(2, 0)$$

گام چهارم: معادله دایره به مرکز $O(2, 0)$ و شعاع $R = \sqrt{2}$ عبارت است از:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2$$

نقاط تلاقی دایره با محور x زمانی به دست می‌آید که $y = 0$ ، پس:

$$(x - 2)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 2$$

در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{5}{6}$ ، فاصله هر کانون تا دورترین رأس برابر با ۱۶ است. طول کوتاه‌ترین قطر این بیضی کدام است؟

۱۶ (۴)

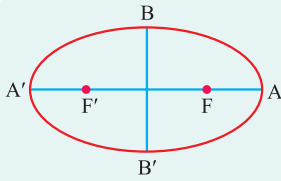
۱۰ (۳)

۸ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

بیضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$e = \frac{c}{a}$$

الف) خروج از مرکز بیضی عبارت است از:

ب) فاصله کانون از رأس کانونی نزدیک‌تر برابر است با:

$$AF = A'F' = a - c$$

و فاصله کانون از رأس کانونی دورتر عبارت است از:

$$AF' = A'F = a + c$$

$$AA' = 2a$$

ج) طول قطر بزرگ بیضی (بزرگ‌ترین قطر):

$$BB' = 2b$$

طول قطر کوچک بیضی (کوتاه‌ترین قطر):

$$FF' = 2c$$

فاصله کانونی بیضی:

د) رابطه بین پارامترهای a ، b و c عبارت است از:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

گام اول: خروج از مرکز بیضی $\frac{5}{6}$ است، پس:

$$e = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \Rightarrow c = \frac{5}{6}a$$

گام دوم: فاصله کانون تا رأس دورتر برابر ۱۶ می‌باشد، یعنی:

$$a + c = 16 \Rightarrow a + \frac{5}{6}a = 16 \Rightarrow \frac{11a}{6} = 16 \Rightarrow a = \frac{96}{11}$$

و بنابراین:

$$c = \frac{5}{6}a \Rightarrow c = \frac{5}{6} \times \frac{96}{11} = \frac{80}{11}$$

گام سوم: برای محاسبه b از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{96}{11}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{80}{11}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{96^2 - 80^2}{11^2} \Rightarrow b = 8$$

کوتاه‌ترین قطر بیضی همان BB' است که:

$$BB' = 2b = 16$$

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۰ بردارهای $\vec{a} = (1, m-1, 3)$ و $\vec{b} = (m, 1, -3)$ و $\vec{c} = (1, m, -1)$ مفروض اند. اگر اندازه بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر باشند، حجم متوازی السطوح بنا شده، بر بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} کدام است؟

۹۴ (۴) ۹۶ (۳) ۹۲ (۲) ۹۰ (۱)

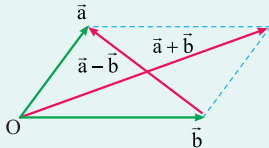
پاسخ: گزینه ۴

اگر دو بردار بر هم عمود باشند، حاصل ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

Hint

درس‌Box

(۱) بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاع هستند که روی بردارهای \vec{a} و \vec{b} ساخته می‌شود:



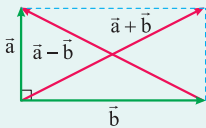
(۲) اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشد، ضرب داخلی آن‌ها همواره برابر صفر است:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(۳) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} ساخته می‌شود، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاع هستند که روی بردارهای \vec{a} و \vec{b} ساخته می‌شوند؛ بنابراین اگر اندازه بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر باشند، متوازی‌الاضلاع به مستطیل تبدیل شده و در نتیجه بردارهای \vec{a} و \vec{b} بر هم عمودند.



$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

گام اول: (محاسبه مختصات بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c}): با توجه به نکته فوق، بردارهای \vec{a} و \vec{b} بر هم عمودند؛ پس طبق مورد (۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درس‌باکس داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (1, m-1, 3) \cdot (m, 1, -3) = 0 \Rightarrow m + m - 1 - 9 = 0 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

گام دوم: بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\vec{a} = (1, 4, 3), \vec{b} = (5, 1, -3), \vec{c} = (1, 5, -1)$$

گام سوم: (محاسبه حجم متوازی‌السطوح): طبق مورد (۳) درس‌باکس، حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} ساخته می‌شود، برابر است با:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = |14 + 8 + 72| = 94$$

۳۱ می خواهیم ۵ کتاب در موضوعات مختلف را در یک قفسه قرار دهیم. در چند حالت دو کتاب ریاضی و فیزیک کنار هم هستند؟

- ۲۴ (۱) ۴۸ (۲)
۹۶ (۳) ۱۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint دو کتاب ریاضی و فیزیک رو در یک بسته قرار بده.



درسی Box

جمع بندی جایگشت ها:

توضیح فارسی	تعداد	انواع جایگشت
جایگاه اول n حالت، جایگاه بعدی $n-1$ حالت و ...	$n!$	n شیء متمایز
آن اشیاء را در یک دسته قرار داده و یک شیء فرض می کنیم. جایگشت دسته به همراه بقیه اشیاء را در جایگشت اعضای دسته بین خودشان ضرب می کنیم.	-	تعدادی شیء خاص کنار هم باشند.
با اشیاء B باید شروع کنیم $\underline{B} \times \underline{A} \times \underline{B} \times \dots \times \underline{B}$ با اشیاء B جایگشت اشیاء گروه B بین خودشان و $n!$ جایگشت گروه A بین خودشان	n شیء متمایز دسته A و $n+1$ شیء متمایز دسته B $n! \times (n+1)! =$	یک درمیان
می توانیم با گروه A یا گروه B شروع کنیم.	دو گروه n تایی از اشیاء متمایز $2! \times n! \times n! =$	
n شیء داریم، ولی جایگشت r تایی از آن ها را می خواهیم (ترتیب هم مهم است).	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	r تایی از n شیء

گام اول: کتاب ها را به صورت F, R, A_1, A_2, A_3 در نظر می گیریم.
گام دوم: دو کتاب F و R را به هم بسته و یک شیء در نظر می گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$(FR), A_1, A_2, A_3 \Rightarrow \text{تعداد جایگشت ۴ شیء} = 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

↓
جابه جایی R و F

چند نقطه با مختصات صحیح و در ربع اول روی منحنی $y = \frac{۸۵۹ - ۷۹x}{۱۷}$ وجود دارد؟ **۳۲**

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

مشاوره معادله هم‌نهشتی از مهم‌ترین موضوعات هم‌نهشتی است که از آن هم در امتحانات نهایی و هم در کنکور سؤال می‌آید. حواستان باشد معادله هم‌نهشتی معمولاً با سایر موضوعات ترکیب می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

مخرج باید صورت رو عاد کنه بعد اون رو به زبان معادله هم‌نهشتی بنویس.

Hint

درسی Box

معادله هم‌نهشتی:

برای حل معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه m را قرار می‌دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

(۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

$$ac \equiv bc \xrightarrow{\div c} a \equiv b$$

ساده کردن دو طرف هم‌نهشتی:

$$۱۷ \mid ۸۵۹ - ۷۹x$$

گام اول: y عددی صحیح است؛ پس صورت باید بر مخرج بخش‌پذیر باشد:

گام دوم: به زبان معادله هم‌نهشتی داریم:

$$۸۵۹ - ۷۹x \equiv 0 \Rightarrow ۷۹x \equiv ۸۵۹ \xrightarrow{\substack{۱۷ \\ ۷۹ \equiv -۶ \\ ۸۵۹ \equiv ۹}} -۶x \equiv ۹ \xrightarrow{\substack{۱۷ \\ (۳,۱۷) \equiv ۱}} -۲x \equiv ۳$$

$$\Rightarrow ۲x \equiv -۳ \equiv ۱۴ \xrightarrow{\substack{۱۷ \\ (۲,۱۷) \equiv ۱}} x \equiv ۷ \Rightarrow x = ۱۷k + ۷$$

گام سوم: در ربع اول x و y هر دو مثبت هستند، پس:

$$\begin{cases} x > 0 \\ ۸۵۹ - ۷۹x > 0 \Rightarrow x < \frac{۸۵۹}{۷۹} \approx ۱۱ \end{cases}$$

گام چهارم: در بین اعداد $x = ۱۷k + ۷$ فقط به ازای $k = 0$ عدد $x = ۷$ قابل قبول است که از ۱۱ کم‌تر باشد.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

(سؤال ۷ - امتحان نوبتی دی ۱۴۰۴)

جواب‌های عمومی معادله هم‌نهشتی $۳۵x \equiv ۵۰ - ۲x$ را به دست آورید.

باقی مانده تقسیم عدد $(3^2 + 4^2)$ بر ۸۴ کدام است؟ **۳۳**

- (۱) ۱
(۲) ۴
(۳) ۲۵
(۴) ۶۱

مشاوره در حل سؤالهای باقی مانده هر زمان پیمانهها بزرگ بود آن را به صورت ضرب دو عدد نسبت به هم اول تجزیه کنید و از قضیه ک.م.م پیمانهها استفاده کنید.

پاسخ: گزینه ۲

باقی مانده عدد رو به ۱۲ و ۷ به دست بیار، بعد سمت راست دو هم‌نهشتی را با اضافه یا کم کردن پیمانه یکسان کن.

Hint

کارتی Box

پیدا کردن باقی مانده اعداد توان دار با هم‌نهشتی:

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم a^n بر m داریم:

(۱) اگر a بزرگ باشد، به جای a یک هم‌نهشتی مناسب کوچک (عددی که با a در پیمانه m هم‌نهشت باشد، حالا مثبت یا منفی) قرار می‌دهیم.

(۲) توانی از a پیدا می‌کنیم که هم‌نهشت ۱ یا -1 به پیمانه m باشد. (اگر نشد سعی می‌کنیم توانی از a که هم‌نهشت عددی کوچک به پیمانه m باشد، پیدا کنیم.)

(۳) با توان رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب a^n را می‌سازیم.

قضیه فرما: اگر p اول باشد به شرطی که $p \nmid a$ ، آن‌گاه $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

اگر پیمانه اول باشد، با قضیه فرما هم می‌توانیم رابطه هم‌نهشتی اولیه را بنویسیم.

اتحادهای مهم هم‌نهشتی:

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{n} \quad (1)$$

$$\text{زوج } n: (a - b)^n \equiv (a + (-b))^n \equiv a^n + (-b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{n} \quad (2)$$

$$\text{فرد } n: (a - b)^n \equiv (a + (-b))^n \equiv a^n + (-b)^n \equiv a^n - b^n \pmod{n} \quad (3)$$

قضیه ک.م.م پیمانهها:

$$\begin{aligned} a &\equiv b \pmod{m} \\ a &\equiv b \pmod{n} \\ \Rightarrow a &\equiv b \pmod{[m,n]} \end{aligned}$$

گام اول: $84 = 12 \times 7$ می‌نویسیم، باقی مانده عدد داده شده را یک بار بر ۱۲ و بار دیگر بر ۷ به دست می‌آوریم.

گام دوم: طبق نتیجه قضیه خیام در هم‌نهشتی داریم:

$$a^n + b^n \equiv (a + b)^n \xrightarrow{\substack{a=3 \\ b=4}} 3^{12} + 4^{12} \equiv 7^{12}$$

$$7^{12} \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 1} 7^{12} \equiv 1$$

گام سوم:

$$3^{12} + 4^{12} \equiv 3^{12} + (-3)^{12} = 2 \times 3^{12} \equiv 2 \times (3^3)^4 \times 3^2 \equiv 2(-1)^4 \times 3^2 \equiv 4$$

گام چهارم: عدد داده شده را A در نظر می‌گیریم.

با اضافه کردن پیمانه سعی می‌کنیم سمت راست دو طرف را یکسان کنیم:

$$A \equiv 1 + 2 \times 12 = 25$$

$$A \equiv 4 + 3 \times 7 = 25$$

$$\xrightarrow{[12,7]=84} A \equiv 25 \pmod{84}$$

پاسخ خیلی تشریحی

باقی مانده تقسیم عدد $9 \times (24^{23} - 21^{22})$ بر عدد ۵۶ چه قدر است؟

(سوال ۳۷۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

۱ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)



$q(G) = 5$

$\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 2$

$p(G) = 4$

۳۴

گراف G به صورت مقابل است. $\gamma(G)$ برابر با کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱

p تعداد رأس‌ها، q تعداد یال‌ها، Δ ماکزیمم درجه و δ مینیمم درجه است.

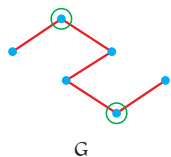
Hint

کارتی Box

تعریف مجموعه احاطه‌گر: زیر مجموعه D از رأس‌های گراف را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم؛ هرگاه هر رأس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از رأس‌های D وصل باشد.

تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیمم: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه (یا مجموعه‌هایی) که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک γ -مجموعه هم می‌گوییم.

نماد	اسم	توضیح	نکته
$V(G)$	مجموعه رأس‌های گراف	-	رأس‌ها را معمولاً با v_1 و v_2 و ... نمایش می‌دهیم.
$E(G)$	مجموعه یال‌های گراف	-	یال مقابل را معمولاً با a و b به صورت ab نمایش می‌دهیم.
p	مرتبه گراف	تعداد رأس‌های گراف ($p > 0$)	$ V(G) = p$
q	اندازه گراف	تعداد یال‌های گراف ($q \geq 0$)	$ E(G) = q$
$\deg_G(v)$	درجه رأس v	تعداد یال‌هایی که به رأس v متصل است (در گراف G).	درجه رأس v را با نماد $d(v)$ هم نمایش می‌دهیم. $0 \leq d(v) \leq p-1$
Δ	ماکزیمم درجه	بزرگ‌ترین درجه در بین کل درجه رأس‌ها	$\Delta \leq p-1$
δ	مینیمم درجه	کوچک‌ترین درجه در بین کل درجه رأس‌ها	$0 \leq \delta \leq \Delta$
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند (در گراف G).	$N_G(a)$ به تعداد $d(a)$ عضو دارد.
$N_G[a]$	همسایگی بسته رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند، به علاوه خود a (در گراف G).	$N_G[a]$ به تعداد $d(a) + 1$ عضو دارد.
\bar{K}_p	گراف تهی	گرافی که یال ندارد (همه رأس‌ها ایزوله هستند).	تعدادی نقطه



$p = 6 = \text{تعداد رأس‌ها}$

$q = 5 = \text{تعداد یال‌ها}$

$\Delta = 2 = \text{ماکزیمم درجه}$

$\delta = 1 = \text{مینیمم درجه}$

$\gamma(G) = \Delta(G)$

گام اول: عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر ۲ است؛ پس: $\gamma(G) = 2$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم:

پس:

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟ **۳۵**

۲۸۶ (۴)

۱۴۳ (۳)

۱۶۸ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

از فرمول $\binom{n+k-1}{k-1}$ استفاده کنید.

Hint

درسی Box

تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی در حالت‌های مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ k تا متغیر	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \geq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب‌های طبیعی معادله
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \leq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1}{k-1} - \binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_1 \geq a+1$ کم می‌کنیم.
$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ گردد.
$\begin{cases} ax_1 + \dots + x_k = n \\ x_1^n + \dots + x_k = n \\ \sqrt{x_1} + \dots + x_k = n \end{cases}$	-	متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و ... را حالت‌بندی می‌کنیم.

تعداد جواب‌ها برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \xrightarrow[k=4]{n=10} \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 13 \times 2 \times 11 = 286$$

۳ جایزهٔ مختلف را می‌خواهیم بین ۵ نفر توزیع کنیم؛ به طوری که تعداد افرادی که جایزه گرفته‌اند، فرد باشد. این کار به چند حالت امکان‌پذیر است؟

۷۵ (۴)

۶۵ (۳)

۶۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۳

بین چند تابع $\{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$: f وجود دارد که برد تابع دارای تعداد فردی عضو (۱ عضو یا ۳ عضو) باشد.

Hint

درس‌Box

انواع تابع‌ها:

شرط وجود	مثال	تعریف	
-		هر عضو A فقط به یکی از عضوهای B نظیر می‌شود.	تابع
$ A \leq B $		هر عضو A دقیقاً به یک عضو منحصر به فرد از B نظیر شود (به هیچ عضو B دو تا فلش وارد نشود).	تابع یک‌به‌یک
$ A \geq B $		به همهٔ عضوهای B فلش وارد شود (برد تابع B باشد).	تابع پوشا

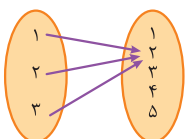
توزیع n شیء بین k نفر:

$\binom{n+k-1}{k-1}$ تعداد کل حالت توزیع (جواب‌های صحیح نامنفی)	جواب‌های معادلهٔ $x_1 + \dots + x_k = n$	اشیای یکسان
$\binom{n-1}{k-1}$ به هر نفر حداقل یک شیء برسد (جواب‌های طبیعی)		
کل حالت‌ها (کل تابع‌ها) $k^n =$ (دومی به توان اولی) $P(k, n) = \frac{k!}{(k-n)!}$ به هر نفر حداکثر یک شیء برسد (تابع‌های یک‌به‌یک) $(k \geq n)$	تعداد تابع‌ها از مجموعهٔ n عضوی اشیا به مجموعهٔ k عضوی افراد	اشیای متمایز
از n عضوی به دو عضوی: $2^n - 2$	به هر نفر حداقل یک شیء برسد. (تابع‌های پوشا) $(k \leq n)$	
از n عضوی به ۳ عضوی: $3^n - 3 \times 2^n + 3$		

گام اول: ۳ جایزهٔ مختلف را ۱، ۲ و ۳ و افراد را با اعداد ۱ تا ۵ نمایش می‌دهیم. کافی است تعداد تابع‌های $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 5\}$: f را به دست آوریم که برد تابع ۱ عضو یا ۳ عضو داشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مثال



گام دوم:

$$\text{تعداد تابع‌ها با برد تک‌عضوی} = \binom{5}{1} = 5$$

کافی است، یک عضو از مجموعه دوم انتخاب و همه عضوهای دامنه به آن بروند.

گام سوم:

$$\text{تعداد تابع‌ها با برد ۳ عضوی} = \binom{5}{3} \times 3!$$

$60 = 10 \times 6 = 60$ توزیع ۳ جایزه انتخاب ۳ نفر که بین ۳ نفر به آن‌ها جایزه برسد.

گام چهارم:

$$\text{تعداد کل تابع‌ها} = 5 + 60 = 65$$

چند تابع $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

(سوال ۳۹ کنکور ریاضی ۱۳۰۴ - نوبت اول)

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۴۰ (۲)

۴۱ (۱)

ریاضیات

۳۷ گزاره $(p \Leftrightarrow q) \vee \sim (p \wedge \sim q)$ هم‌ارز کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

$$\sim p \Leftrightarrow q \quad (۲)$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad (۱)$$

$$\sim p \Rightarrow q \quad (۴)$$

$$\sim (p \Rightarrow q) \vee p \quad (۳)$$

مشاوره در سال‌های گذشته معمولاً یک سؤال این‌جوری از منطق در کنکور آمده است.

پاسخ: گزینه ۲

جدول ارزش گزاره داده‌شده را رسم کنید و به گزینه‌ها توجه کنید.

Hint

دکتر Box

ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب گزاره‌ها	ریاضی	فارسی	ارزش
ترکیب فصلی	$p \vee q$	q یا p	وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد.
ترکیب عطفی	$p \wedge q$	q و p	وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.
ترکیب شرطی	$p \Rightarrow q$	اگر p آن‌گاه q	فقط در حالت «ن \Rightarrow د» نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست است.
ترکیب دوشروطی	$p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q	وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.
نقیض	$\sim p$	نقیض p	ارزش آن برعکس p است.

جدول نقیض:

گزاره	p	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\exists x ; P(x)$	$\forall x ; P(x)$
نقیض	$\sim p$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$\forall x ; \sim P(x)$	$\exists x ; \sim P(x)$

گام اول:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$(p \wedge \sim q) \vee \sim (p \Leftrightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن	ن

یکسان

گام دوم: گزاره داده‌شده هم‌ارز $\sim (p \Leftrightarrow q)$ است. از طرفی برای نقیض کردن ترکیب دوشروطی کافی است یکی از p یا q را نقیض کنیم؛ یعنی $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$.

(سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

گزاره $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \quad (۱)$$

$$\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \quad (۲)$$

$$(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \quad (۳)$$

$$\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)] \quad (۴)$$

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضو مجموعه $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضو مجموعه $B \cap (A \cup B)$ برابر است. اگر $a, b \in B$ ، مجموعه B چند زیرمجموعه دارد که حتماً عضو آن باشد، ولی b عضو آن نباشد؟

۸ (۴)

۶۴ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

دو مجموعه داده شده رو ساده کن و از رابطه $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ حدس بزن اون مجموعه چندتا عضو داشته.

Hint

جبر مجموعه‌ها:

درس Box

اسم قانون	مجموعه	گزاره
قوانین شرکت پذیری	$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases}$	$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge r \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee r \end{aligned}$
قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری)	$\begin{cases} \overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)} \\ \overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">فاکتور</p>	$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}$
قوانین زیرمجموعه	$\begin{aligned} A \cup B &= B \\ A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ A - B &= \emptyset \end{aligned}$ <p>(تمامی روابط دوطرفه هستند.)</p>	-
قوانین دمورگان	$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$	$\begin{aligned} \sim (p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \end{aligned}$
قانون تبدیل تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$	-
قوانین جذب	$\begin{cases} \overline{A \cup (A \cap B)} = A & (\text{چون } A \cap B \subseteq A) \\ \overline{A \cap (A \cup B)} = A & (\text{چون } A \subseteq A \cup B) \end{cases}$	$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &\equiv p \\ p \wedge (p \vee q) &\equiv p \end{aligned}$
ترکیب شرطی	-	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
مقدماتی	$\begin{aligned} A \cup A' &= U, A \cup U = U, A \cup \emptyset = A \\ A \cap A' &= \emptyset, A \cap U = A, A \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$	$\begin{aligned} p \vee \sim p &\equiv T, p \vee T \equiv T, p \vee F \equiv p \\ p \wedge \sim p &\equiv F, p \wedge T \equiv p, p \wedge F \equiv F \end{aligned}$

تعداد زیرمجموعه‌ها:

فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط خاص از روابط زیر به دست می‌آید:

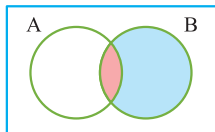
تعداد کل زیرمجموعه‌ها	زیرمجموعه‌های ناتهی	زیرمجموعه‌های غیرخودش (شره)	زیرمجموعه‌های شامل k عضو خاص (فاقد k عضو خاص)	زیرمجموعه‌های عضوی k
2^n	$2^n - 1$	$2^n - 1$	2^{n-k}	$\binom{n}{k}$

زیرمجموعه‌های k عضوی فاقد x عضو خاص	زیرمجموعه‌های k عضوی شامل x عضو خاص
$\binom{n-x}{k}$	$\binom{n-x}{k-x}$

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n-k$ عضوی برابر است؛ یعنی:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

گام اول: حاصل دو مجموعه داده شده را با استفاده از جبر مجموعه‌ها و نمودار ون به دست می‌آوریم:



$$(A' \cap B) \cup \underbrace{[(\underbrace{(B \cap A) - B'}_{B \cap A \cap B}) \cap (B \cup A)]}_{A \cap B} = (B - A) \cup (A \cap B) = B$$

گام دوم: طبق قانون جذب نیز داریم:

$$B \cap (A \cup B) = B$$

گام سوم: فرض کنیم مجموعه B دارای n عضو باشد، پس داریم:

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{4} \Rightarrow \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \Rightarrow n-2=4 \Rightarrow n=6$$

گام چهارم: هر عضو B ممکن است عضو زیرمجموعه باشد یا نباشد؛ یعنی ۲ حالت دارد، اما a و b هر کدام ۱ حالت دارند (a هست و b نیست). ولی ۴ عضو دیگر B هر کدام ۲ حالت دارند؛ پس ۲^۴ زیرمجموعه وجود دارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۹ اگر حاصل ضرب ارقام یک عدد سه رقمی زوج باشد، به چه احتمالی عدد فرد است؟

$$\frac{13}{31} \text{ (۴)}$$

$$\frac{11}{31} \text{ (۳)}$$

$$\frac{13}{62} \text{ (۲)}$$

$$\frac{11}{62} \text{ (۱)}$$

مشاوره دو سؤال از احتمال در کنکور می‌آید. کتاب درسی در موضوع احتمال تمرین‌های مهمی دارد. حتماً آن‌ها را بررسی کنید.

پاسخ: گزینه ۴

احتمال شرطی و روش کاهش فضای نمونه:

در فضای هم‌شانس برای محاسبه $P(B|A)$ ، ابتدا تعداد حالت‌های A را می‌نویسیم (مخرج کسر) و حالت‌های B را از بین آن‌ها (صورت کسر) جدا می‌کنیم. به عبارت دیگر وقتی می‌دانیم A رخ داده، فضای نمونه به A کاهش پیدا می‌کند. حالا پیشامد مطلوب B را از A جدا می‌کنیم.

فرمول احتمال شرطی:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

اگر فضا هم‌شانس باشد داریم:

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{A \cap B \text{ تعداد عضوهای } A}{A \text{ تعداد عضوهای } A}$$

گام اول: حاصل ضرب چند عدد وقتی زوج می‌شود که حداقل یکی از آن‌ها زوج باشد. بهتر است از اصل متمم استفاده کنیم. فضای نمونه کاهش یافته برابر اعداد سه رقمی است که ضرب ارقام زوج می‌شود. داریم:

$$A: 9 \times 10 \times 10 - \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{\text{همگی فرد}} = 775$$

گام دوم: اعداد سه رقمی فرد را B در نظر می‌گیریم:

گام سوم: برای محاسبه اعداد مطلوب باید اعداد سه رقمی را محاسبه کنیم که ضرب ارقام آن‌ها زوج و خود عدد فرد $(B \cap A)$ باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{4/6/8} \\ \uparrow \\ 5 \times 5 \times 5 = 125 \\ \text{فرد زوج فرد} \\ \\ \frac{2}{4/6/8} \\ \uparrow \\ 4 \times 5 \times 5 = 100 \\ \text{فرد فرد زوج} \\ \\ 4 \times 5 \times 5 = 100 \\ \text{فرد زوج زوج} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 325$$

گام چهارم:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{325}{775} = \frac{65}{155} = \frac{13}{31}$$

ضرب سه رقم زوج عدد فرد

حواست باشد: در گام دوم می‌توانستیم از اصل متمم استفاده کنیم. در بین کل ۷۷۵ عدد فقط اعداد سه رقمی زیر نامطلوب هستند:

$$9 \times 10 \times 5 \Rightarrow \text{مطلوب} = 775 - 450 = 325$$

زوج هر چی هر چی نامطلوب

کرتی Box

پاسخ خیلی تشریحی

۴۰. میانگین ۵ عدد طبیعی متمایز برابر ۵ و انحراف از میانگین این داده‌ها ۰، ۱، c، b و a است. حداکثر واریانس این

داده‌ها کدام است؟

$$(۲) \quad ۱۲/۲$$

$$(۱) \quad ۱۲/۱$$

$$(۴) \quad ۱۲/۴$$

$$(۳) \quad ۱۲/۳$$

مشاوره در سال‌های گذشته یک سؤال از کل آمار در کنکور آمده است. در بین همه موضوعات، شاخص‌های پراکندگی بهتر از بقیه هستند و بیشتر از آن سؤال آمده است.

پاسخ: گزینه ۴

دوتا از داده‌های ۵ و ۶ هستند.



درس‌Box

شاخص‌های پراکندگی:

توضیح فارسی	فرمول	شاخص
هر داده را منهای میانگین کرده به توان ۲ می‌رسانیم. سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می‌کنیم. به زبان دیگر واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین‌هاست.	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$	واریانس
جذر واریانس است.	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	انحراف معیار
$\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	ضریب تغییرات
-	۲	واریانس ۵ عدد متوالی
اگر اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند. این فرمول راحت‌تر از تعریف واریانس است.	$\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12}\right)d^2$	واریانس n عدد حسابی با قدرنسبت d

اگر انحراف معیار یا واریانس مجموعه داده‌ها عدد کوچکی باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان کم و در نتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌تر است و اگر انحراف معیار یا واریانس مجموعه داده‌ها عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان زیاد و در نتیجه داده‌ها از هم دورتر است.



گام اول: انحراف از میانگین داده $x_i - \bar{x}$ برابر x_i است، پس وقتی انحراف از میانگین داده x_1 برابر صفر است، آن داده مساوی میانگین (یعنی ۵) بوده است، پس:

$$x_1 = 5$$

گام دوم: شبیه بالا:

$$x_2 - \bar{x} = 1 \Rightarrow x_2 = 6$$

گام سوم: بقیه داده‌ها را x_3 ، x_4 و x_5 در نظر می‌گیریم که سه عدد متفاوت هستند. داریم:

$$\bar{x} = 5 \Rightarrow \frac{5 + 6 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 5 \Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = 14$$

گام چهارم: هر چه پراکندگی داده‌ها بیشتر باشد (داده‌ها دورتر از میانگین باشند)، واریانس بیشتر می‌شود.

پس برای به دست آوردن حداکثر واریانس x_3 ، x_4 و x_5 را به صورت ۱، ۲ و ۱۱ در نظر می‌گیریم (داده‌ها متمایز و جمع اون‌ها باید ۱۴ باشد).

گام پنجم: واریانس داده‌های ۵، ۶، ۱۱، ۲ و ۱ برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 + (2-5)^2 + (11-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2}{5} = \frac{62}{5} = 12.4$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۱

یک مکعب توپر به جرم $2/5 \text{ kg}$ از ماده‌ای به چگالی 20 g/cm^3 ساخته شده است. طول ضلع این مکعب چند سانتی‌متر است؟

۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

به جای گذاری ساده فقط با توجه به یکا، در انتظارتها!

Hint

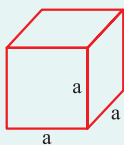
به نسبت جرم جسم به حجم جسم، چگالی می‌گوییم:

درس‌Box

چگالی (kg/m^3)

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \begin{array}{l} \text{جرم (kg)} \\ \text{حجم (m}^3\text{)} \end{array}$$

حجم مکعبی به طول ضلع a ، برابر a^3 است.



$$V_{\text{مکعب}} = a \times a \times a = a^3$$

ارتفاع عرض طول

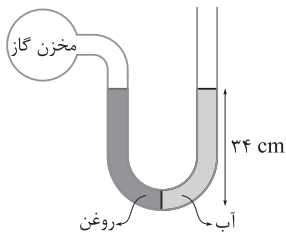
ابتدا جرم برحسب کیلوگرم را به گرم تبدیل می‌کنیم و سپس در فرمول چگالی جای‌گذاری می‌کنیم و حجم را به دست می‌آوریم و مطابق فرمول حجم مکعب، طول ضلع را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\rho=20 \text{ g/cm}^3, m=2500 \text{ g}} V = \frac{m}{\rho} = \frac{2500}{20} = 125 \text{ cm}^3$$

$$V = a^3 \Rightarrow 125 = a^3 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

مطابق شکل زیر درون لوله U شکلی که به یک مخزن گاز متصل است، حجم مساوی از آب و روغن قرار دارد. فشار پیمانه‌ای مخزن گاز چند میلی‌متر جیوه است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 0/8 \text{ g/cm}^3$)
($g = 10 \text{ m/s}^2$)



۱ (۱)

۵ (۲)

۱۰ (۳)

صفر (۴)

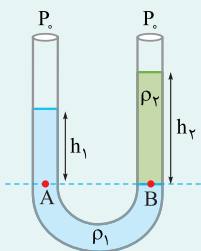
پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

● برای محاسبه فشار ستونی از مایع برحسب سانتی‌متر یا میلی‌متر جیوه داریم:

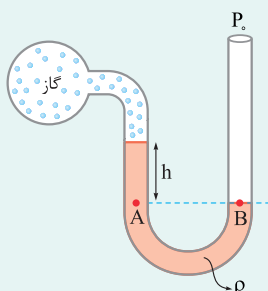
$$P_{\text{مایع}} = \frac{\rho_{\text{مایع}} h}{\rho_{\text{جیوه}}}$$

● در لوله‌های U شکلی، مطابق شکل زیر، در نقاط هم‌تراز که در یک مایع قرار دارند، فشار برابر است:



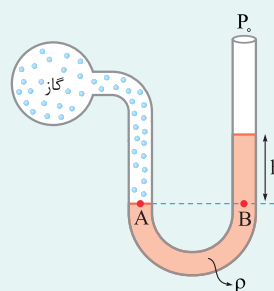
$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

● وسیله اندازه‌گیری فشار گاز (مانومتر):



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho g h = P_0$$

$$(P_{\text{گاز}} - P_0 = -\rho g h) \text{ (فشار پیمانه‌ای)}$$



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho g h + P_0$$

$$(P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho g h) \text{ (فشار پیمانه‌ای)}$$

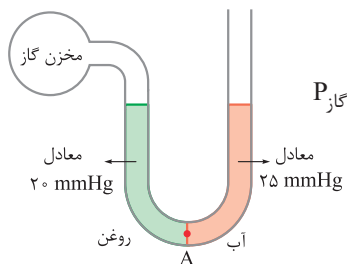
گام اول: از آنجا که فشار برحسب میلی‌متر جیوه خواسته شده، ابتدا فشار ناشی از روغن و آب را برحسب میلی‌متر جیوه محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{آب}} (\text{mmHg}) = \frac{1 \times 340}{13/6} = 25 \text{ mmHg}$$

$$P_{\text{روغن}} (\text{mmHg}) = \frac{0/8 \times 340}{13/6} = 20 \text{ mmHg}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: حالا رابطه فشار را برای شاخه سمت راست و چپ نقطه A می‌نویسیم:



$$P_{\text{گاز}} + P_{\text{روغن}} = P_0 + P_{\text{آب}} \Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_0}_{(P_g \text{ فشار پیمانه‌ای})} = P_{\text{آب}} - P_{\text{روغن}} = 25 - 20 = 5 \text{ mmHg}$$

در واقع اختلاف فشار مایع لوله سمت راست و چپ، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد.

۴۳ در شکل زیر تندی جریان آب در نقطه A برابر 2 m/s و فشار آن P_A است. اگر تندی جریان آب در نقطه B، v_B و فشار در این نقطه P_B باشد؛ به ترتیب از راست به چپ، v_B چند متر بر ثانیه است و چه رابطه‌ای بین P_A و P_B وجود دارد؟



$$P_A > P_B \text{ و } 8 \quad (1)$$

$$P_A < P_B \text{ و } 4 \quad (2)$$

$$P_A < P_B \text{ و } 8 \quad (3)$$

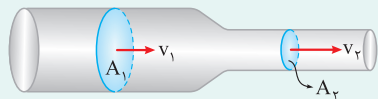
$$P_A > P_B \text{ و } 4 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

تعریف ساده اصل برنولی و معادله پیوستگی، توی این تست به دردت می‌خوره!

Hint

معادله پیوستگی: همانند شکل زیر، اگر شاره تراکم‌ناپذیری درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است:



$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

تندی هنگام عبور از تندی هنگام عبور از
 مساحت A_2 (m/s) مساحت A_1 (m/s)

اصل برنولی: برای شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره و با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.

$$A_2 < A_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow P_2 < P_1$$

گام اول: ابتدا با استفاده از معادله پیوستگی، تندی در نقطه B را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow A_A v_A = A_B v_B \xrightarrow{A_A = d^2 \pi, A_B = \frac{d^2}{4} \pi, v_A = 2 \text{ m/s}} 2 \times d^2 \pi = v_B \times \frac{d^2}{4} \pi \Rightarrow v_B = 8 \text{ m/s}$$

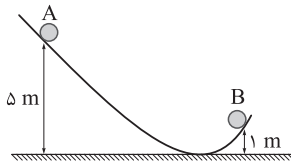
گام دوم: تندی آب در نقطه B بیشتر از تندی آب در نقطه A است، پس فشار آب در نقطه B کم‌تر از فشار آب در نقطه A است.

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۴ در شکل زیر، از نقطه A، جسمی به جرم ۱ kg رها شده است تا بر روی سطح به طرف پایین بلغزد. اگر تندی جسم در نقطه B برابر ۴ m/s باشد، کار نیروی اصطکاک در جابه‌جایی جسم از نقطه A تا نقطه B چند ژول است؟

$$(g = 10 \text{ m/s}^2)$$



-۳۲ (۱)

-۴۲ (۲)

۳۲ (۳)

۴۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

درسی Box

(۱) کار کل انجام‌شده روی یک جسم از جمع جبری تمامی کارهای انجام‌شده روی آن به دست می‌آید:

$$W_t = W_1 + W_2 + \dots$$

(۲) قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_2 - K_1$$

تمام کارهایی که در این مسیر روی جسم انجام می‌شوند را می‌نویسیم و با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی خواسته مسئله را به دست می‌آوریم:

$$W_{mg} + W_{f_k} = K_B - K_A$$

$$\xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{m=1 \text{ kg}, v_B=4 \text{ m/s}} 1 \times 10 \times 4 + W_{f_k} = \frac{1}{2} \times 1 \times 16 \Rightarrow W_{f_k} = -32 \text{ J}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یه جور دیگه

$$W_{f_k} = E_B - E_A$$

$$= mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - (mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2)$$

$$= mg(h_B - h_A) + \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

$$= 1 \times 10 \times (-4) + \frac{1}{2} \times 1 \times 4^2$$

$$= -40 + 8 = -32 \text{ J}$$

حواست باشه که اگر ارتفاع رو درست ننویسی تو دام گزینه (۲) می‌افتی!

گول نخوری ✗

۴۵ برای تبدیل یخی به جرم ۲۰۰ g با دمای 10°C به آب با دمای 15°C ، چند کیلوژول گرما لازم است؟

$$(c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}} \text{ و } c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}, L_f = 336 \text{ kJ/kg})$$

$$42/6 (4)$$

$$67/2 (3)$$

$$50/4 (2)$$

$$84 (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

اول باید به گرمایی بدیم تا یخ 10°C به یخ 0°C تبدیل بشه بعد باید گرمای مورد نیاز تغییر حالت رو بهش بدیم و سپس گرمای تبدیل آب 0°C به آب 15°C رو به دست بیاریم و با جمع این گرماها، گرمای کل را به دست بیاریم.

Hint

(۱) برای جسمی که بدون تغییر حالت در اثر تبادل گرمایی، فقط دمای آن تغییر کند، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = \text{گرما (J)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$c = \text{گرمای ویژه } \left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right)$$

$$\Delta T = \Delta\theta = (^{\circ}\text{C}) \text{ یا (K)} \text{ تغییر دما}$$

(۲) وقتی در اثر گرما فقط تغییر حالت رخ می‌دهد، داریم:

$$Q = \pm mL_f$$

ذوب
↑
↓
انجماد

$$Q = \text{گرما (J)}$$

$$m = \text{جرم (kg)}$$

$$L_f = \text{گرمای ذوب (J/kg)}$$

گام اول: ابتدا گرمای مورد نیاز برای تبدیل یخ 15°C به یخ 0°C را به دست آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\boxed{-10^{\circ}\text{C}} \xrightarrow{Q_1} \boxed{0^{\circ}\text{C}}$$

$$Q_1 = mc_{\text{یخ}} \Delta\theta_{\text{یخ}} \xrightarrow{m=200\text{g}=0.2\text{kg}, \Delta\theta_{\text{یخ}}=10^{\circ}\text{C}, c_{\text{یخ}}=2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}} Q_1 = 0.2 \times 2100 \times 10 = 4200 \text{ J} = 4/2 \text{ kJ}$$

گام دوم: حالا گرمای مورد نیاز برای تغییر حالت یخ 0°C به آب 0°C را می‌نویسیم:

$$\boxed{0^{\circ}\text{C}} \xrightarrow{Q_2} \boxed{0^{\circ}\text{C}}$$

$$Q_2 = +mL_f \xrightarrow{m=200\text{g}=0.2\text{kg}, L_f=336 \text{ kJ/kg}} Q_2 = 0.2 \times 336 = 67/2 \text{ kJ}$$

گام سوم: در انتها گرمای مورد نیاز برای تبدیل آب 0°C به آب 15°C را می‌نویسیم و هر سه گرما را با هم جمع می‌کنیم:

$$\boxed{0^{\circ}\text{C}} \xrightarrow{Q_3} \boxed{15^{\circ}\text{C}}$$

$$Q_3 = mc_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}} \xrightarrow{m=200\text{g}=0.2\text{kg}, \Delta\theta_{\text{آب}}=15^{\circ}\text{C}, c_{\text{آب}}=4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}} Q_3 = 0.2 \times 4200 \times 15 = 12600 \text{ J} = 12/6 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q_{\text{کل}} = 4/2 + 67/2 + 12/6 = 84 \text{ kJ}$$

۴۶ کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

- الف) هر چه در خشکی از ساحل دریا دور شویم، آهنگ تبخیر سطحی کاهش می‌یابد.
 ب) با افزایش سطح آزاد مایع، آهنگ تبخیر سطحی آن نیز افزایش می‌یابد.
 پ) با افزایش فشار هوا، آهنگ تبخیر سطحی افزایش می‌یابد.
 ت) با افزایش دما، آهنگ تبخیر سطحی افزایش می‌یابد.

(۴) الف و ب

(۳) الف و پ

(۲) پ و ت

(۱) ب و ت

پاسخ: گزینه ۱

عواملی مانند افزایش دمای مایع، افزایش سطح آزاد آن، کاهش رطوبت هوا و کاهش فشار هوا، سبب افزایش سرعت تبخیر سطحی می‌شوند.

بررسی عبارت‌ها:

- الف) نادرست؛ زیرا با دور شدن از ساحل، رطوبت هوا کم شده و تبخیر سطحی افزایش می‌یابد. حذف گزینه‌های (۳) و (۴)
 ب) درست؛ زیرا مساحت سطح مایع و تبخیر سطحی آن رابطه مستقیم دارند. حذف گزینه (۲)؛ همین‌ها جواب درآورده!
 پ) نادرست؛ زیرا افزایش فشار هوا باعث کاهش تبخیر سطحی می‌شود.
 ت) درست؛ زیرا افزایش دما باعث افزایش تبخیر سطحی می‌شود.

کرتی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۴۷ اگر حجم مقدار معینی گاز کامل را ۲۵ درصد افزایش و دمای مطلق آن را ۱۰ درصد کاهش دهیم، فشار گاز چند برابر می شود؟

$$\frac{25}{9} \text{ (۴)}$$

$$\frac{9}{25} \text{ (۳)}$$

$$\frac{25}{18} \text{ (۲)}$$

$$\frac{18}{25} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱

رابطه مقایسه‌ای معادله حالت:

درس Box

$$\begin{aligned} &\text{فشار گاز در حالت دوم (Pa)} \quad \text{حجم گاز در حالت اول (m}^3\text{)} \\ &\text{حجم گاز در حالت دوم (m}^3\text{)} \rightarrow \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2} = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \leftarrow \text{فشار گاز در حالت اول (Pa)} \\ &\text{دمای گاز در حالت دوم (K)} \rightarrow T_2 \quad \text{دمای گاز در حالت اول (K)} \leftarrow T_1 \end{aligned}$$

حجم گاز ۲۵ درصد زیاد شده است، پس $V_2 = \frac{125}{100} V_1$ و دمای مطلق ۱۰ درصد کم شده و $T_2 = \frac{90}{100} T_1$ است، پس با استفاده

پاسخ خیلی تشریحی ✓

از رابطه مقایسه‌ای معادله حالت برای گازهای کامل، می توان نوشت:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \rightarrow \frac{V_2 = \frac{125}{100} V_1}{T_2 = \frac{90}{100} T_1} \rightarrow \frac{P_1 \cancel{V_1}}{\cancel{T_1}} = \frac{P_2 \frac{125}{100} \cancel{V_1}}{\frac{90}{100} \cancel{T_1}} \Rightarrow P_1 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{10}} P_2 \Rightarrow P_1 = \frac{25}{18} P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{18}{25} P_1$$

کدام گزاره قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی است؟

- ۱) ممکن نیست دستگاه، چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دما بالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.
- ۲) ممکن نیست دستگاه، فرایندی را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع گرما جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.
- ۳) ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای بالاتر به جسم با دمای پایین‌تر منتقل شود.
- ۴) ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

گرما همواره از جسمی با دمای بالاتر به جسمی با دمای پایین‌تر منتقل می‌شود، ولی عکس این عمل به طور خودبه‌خود رخ نمی‌دهد. به عبارت دیگر ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود، به این گزاره قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی می‌گویند.

مطابق درس‌باکس، بیان یخچالی قانون دوم ترمودینامیک به صورت «ممکن نیست گرما به طور خودبه‌خودی از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.» است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $5 \mu\text{F}$ ، 25% درصد افزایش می‌یابد. اگر انرژی ذخیره شده در این

خازن $90 \mu\text{J}$ تغییر کند، بار الکتریکی آن چند میکروکولن تغییر می‌کند؟

۱۰۰ (۴)

۴۰ (۳)

۱۰ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

انرژی خازن از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

U : انرژی خازن (J)

C : ظرفیت خازن (F)

V : اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V)

Q : بار الکتریکی ذخیره شده در خازن (C)

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV$$

اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن از V_1 به V_2 رسیده باشد، داریم:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} \Rightarrow V_2 = \frac{5}{4} V_1$$

حالا با توجه به رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ ، رابطه‌ای برای تغییرات انرژی می‌نویسیم:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} CV_2^2 - \frac{1}{2} CV_1^2 = \frac{1}{2} C(V_2^2 - V_1^2)$$

با جای‌گذاری مقادیر داده شده در این رابطه، داریم:

$$90 = \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\left(\frac{5}{4} V_1 \right)^2 - V_1^2 \right) \Rightarrow 90 = \frac{5}{2} \times \left(\frac{25}{16} V_1^2 - V_1^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 = \frac{5}{2} \times \frac{9}{16} V_1^2 \Rightarrow V_1^2 = \frac{90 \times 2 \times 16}{5 \times 9} = 64 \Rightarrow V_1 = 8 \text{ V}, V_2 = \frac{5}{4} \times 8 = 10 \text{ V}$$

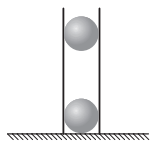
در پایان:

$$Q = CV \xrightarrow{\text{ثابت } C} \Delta Q = C \Delta V \Rightarrow \Delta Q = 5 \times (10 - 8) = 10 \mu\text{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۰ در شکل زیر دو گوی کوچک مشابه، هر یک به جرم $9/10 \text{ g}$ و بار الکتریکی یکسان 90 nC در فاصله ثابتی از یکدیگر قرار دارند. اگر گوی بالایی در حالت معلق باشد، فاصله بین دو گوی چند سانتی متر است؟

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \text{ و } g = 10 \text{ N / kg})$$



(۱) ۳

(۲) ۶

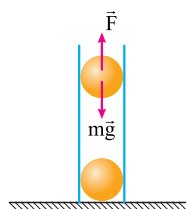
(۳) ۹

(۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

Hint

کافی است نیروی الکتریکی دو بار که در درس باکس قبلی با آن آشنا شدیم را با نیروی وزن گلوله برابر قرار دهید تا r را به دست آورید. مطابق شکل، برای آن که گوی بالایی به حالت معلق بماند، باید اندازه نیروی وزن آن با اندازه نیروی الکتریکی که از طرف گوی پایینی به آن وارد می شود، با هم برابر باشد:



$$F = mg \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} = mg \Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times 90 \times 10^{-9} \times 90 \times 10^{-9}}{r^2} = 9/10 \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow \frac{81 \times 10^{-7}}{r^2} = 10^{-2} \Rightarrow r^2 = 81 \times 10^{-4} \Rightarrow r = 9 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow r = 9 \text{ cm}$$

فیزیک

۵۱ بزرگی میدان الکتریکی در فاصله ۲ m از مرکز کلاهک یک واندوگراف برابر با $2/25 \times 10^3 \text{ N/C}$ است. اندازه بار

الکتریکی کلاهک چند میکروکولن است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

یه جای گذاری ساده تو رابطه میدان حاصل از بار q در فاصله r!

 Hint

بزرگی میدان الکتریکی بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر به دست می آید:

 درس Box

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} k: \text{ثابت کولن } (9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}) \\ q: \text{بار الکتریکی C} \\ r: \text{فاصله بار تا نقطه مورد نظر (m)} \end{cases}$$

کافی است داده‌ها را جای گذاری کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow 2/25 \times 10^3 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{2^2} \Rightarrow$$

$$|q| = \frac{4 \times 2/25 \times 10^3}{9 \times 10^9} = \frac{9 \times 10^3}{9 \times 10^9} = 10^{-6} \text{ C} = 1 \mu\text{C}$$

فیزیک

۵۲

با روشن ماندن یک لامپ، در مدت یک ساعت، $2/25 \times 10^{20}$ الکترون از آن می‌گذرد. جریان الکتریکی گذرنده از

لامپ چند میلی‌آمپر است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

۱۰۰ (۴)

۱۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از رابطه $\Delta q = ne$ ، بار الکتریکی شارش شده در لامپ را محاسبه کنید، سپس با جای گذاری داده‌ها برحسب واحدهای SI

در رابطه $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ ، جریان الکتریکی را به دست آورید.

Hint

جریان الکتریکی ناشی از شارش خالص بار از یک سطح مقطع معین است. اگر بار خالص Δq در بازه زمانی Δt از مقطعی از رسانا بگذرد، نسبت $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ را جریان الکتریکی متوسط می‌گویند.

درس‌Box

بار الکتریکی (C)

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \leftarrow \text{جریان الکتریکی (A)}$$

مدت زمان (s)

گام اول: بار هر الکترون $1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ است، از رابطه $\Delta q = ne$ ، بار الکتریکی شارش شده را به دست می‌آوریم:

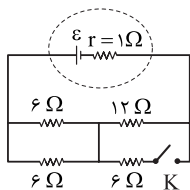
$$\Delta q = 2/25 \times 10^{20} \times 1/6 \times 10^{-19} = 36 \text{ C}$$

گام دوم: جریان الکتریکی را که از لامپ در مدت یک ساعت گذر کرده، محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{36}{1 \times 3600} = 10^{-2} \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، اگر کلید K را وصل کنیم، توان خروجی باتری چند برابر می‌شود؟ **۵۳**



$$\frac{7}{15} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

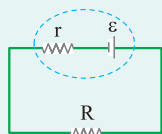
$$\frac{28}{15} \quad (4)$$

$$\frac{14}{15} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

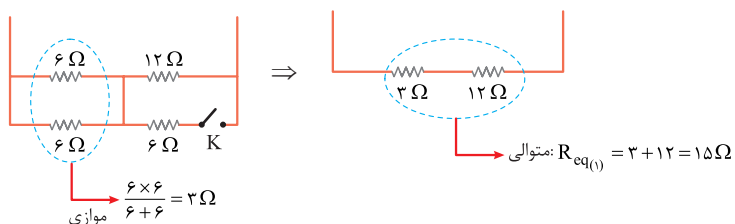
در مدار ساده زیر، توان خروجی باتری برابر با توان مصرفی مقاومت R است و از رابطه زیر به دست می‌آید:



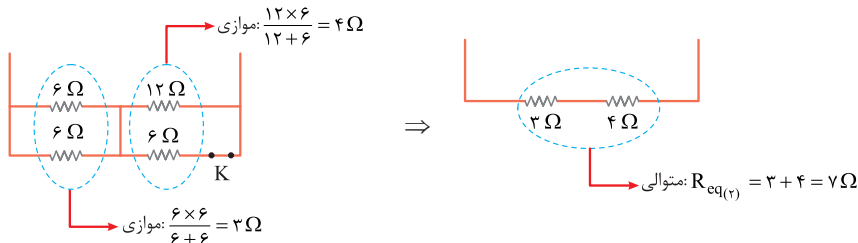
$$P_{\text{خروجی}} = P_R = RI^2 = R \left(\frac{\varepsilon}{r+R} \right)^2$$

گام اول: ابتدا مقاومت معادل را در هر دو حالت حساب می‌کنیم:

حالت اول: وقتی کلید K باز است.



حالت دوم: وقتی کلید K بسته است.



گام دوم: حالا با توجه رابطه نوشته شده در درس باکس، داریم:

$$P_{\text{خروجی باتری}} = R_{\text{eq}} \left(\frac{\varepsilon}{r + R_{\text{eq}}} \right)^2 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 15 \times \left(\frac{\varepsilon}{1+15} \right)^2 = \frac{15}{16 \times 16} \varepsilon^2 \\ P_2 = 7 \times \left(\frac{\varepsilon}{1+7} \right)^2 = \frac{7}{8 \times 8} \varepsilon^2 \end{cases}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{7}{8 \times 8}}{\frac{15}{16 \times 16}} = \frac{28}{15}$$

۵۴

یک بخاری برقی به اختلاف پتانسیل 220 V متصل است. اگر این بخاری برقی به مدت 8 h در شبانه‌روز کار کند، هزینه یک ماه (30 شبانه‌روز) برق مصرفی این بخاری 39600 تومان می‌شود. جریان عبوری از بخاری در حالت روشن چند آمپر است؟ (قیمت هر کیلووات ساعت برق مصرفی، 75 تومان است.)

۱۰ (۴)

۷ / ۵ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با تقسیم هزینه یک ماه بر قیمت هر کیلووات ساعت برق مصرفی، انرژی الکتریکی مصرف‌شده را به دست آورید و سپس با قراردادن آن در رابطه $U = Pt = VIt$ جریان عبوری از بخاری را به دست آورید.

Hint

درس‌Box

توان و انرژی در مدار:

همان‌طور که می‌دانید مقاومت، انرژی مصرف می‌کند. به نسبت انرژی مصرفی مقاومت در واحد زمان توان می‌گوییم؛ یعنی:

$$P = \frac{U}{t}$$

برای توان مصرفی مقاومت، سه رابطه زیر را باید بلد باشید:

$$P = VI, P = RI^2, P = \frac{V^2}{R}$$

برای محاسبه انرژی برحسب کیلووات ساعت (kWh) در رابطه $P = \frac{U}{t}$ ، توان را برحسب کیلووات و زمان را برحسب ساعت جای‌گذاری کنید.

گام اول: انرژی الکتریکی مصرفی برحسب kWh برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هزینه یک ماه

$$U = \frac{39600}{75} = 528 \text{ kW.h}$$

↑
هزینه یک ماه
↓
قیمت هر kW.h

گام دوم: حالا توان مصرفی بخاری را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{U}{t} \xrightarrow{t=8 \times 30 = 240 \text{ h}} P = \frac{528}{240} = 2/2 \text{ kW} = 2200 \text{ W}$$

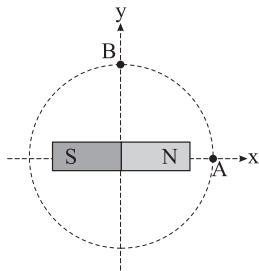
گام سوم: در پایان داریم:

$$P = VI \Rightarrow 2200 = 220 \times I \Rightarrow I = 10 \text{ A}$$

در شکل زیر، اگر یک عقربه مغناطیسی روی محیط دایره‌ای در جهت پادساعتگرد از نقطه A به نقطه B منتقل شود،

۵۵

عقربه چند درجه و در چه جهتی می‌چرخد؟



(۱) ۹۰°، ساعتگرد

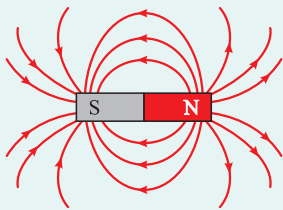
(۲) ۹۰°، پادساعتگرد

(۳) ۱۸۰°، ساعتگرد

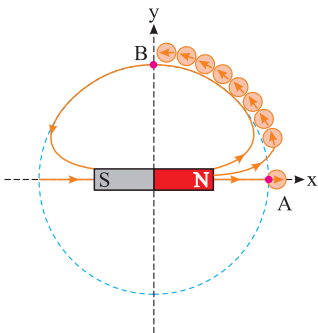
(۴) ۱۸۰°، پادساعتگرد

پاسخ: گزینه ۴

خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربای میله‌ای به شکل زیر است. این خطوط از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.



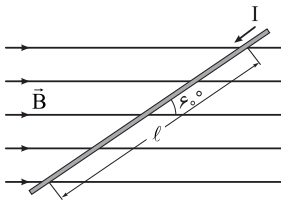
مطابق شکل زیر، بخشی از خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربای میله‌ای را رسم می‌کنیم. در مسیر مورد نظر از نقطه A تا نقطه B، جهت عقربه مغناطیسی نیز به شکل زیر است. واضح است که عقربه مغناطیسی ۱۸۰° درجه در جهت پادساعتگرد می‌چرخد.



درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۶ در شکل زیر، سیم راست حامل جریان $I = 4\text{ A}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 30\text{ G}$ قرار دارد. اگر $\ell = 1\text{ m}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟



- (۱) 6×10^{-3} و \otimes
 (۲) 6×10^{-3} و \odot
 (۳) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$ و \otimes
 (۴) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$ و \odot

پاسخ: گزینه ۴

به کمک قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی و به کمک رابطه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان، اندازه این نیرو را به دست آورید.

Hint

درسی Box

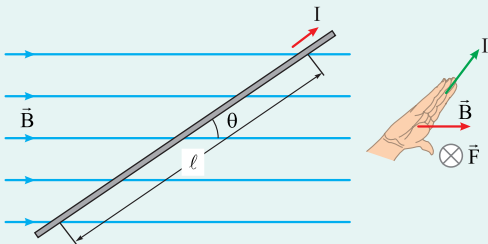
اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت (F):

زاویه بین جهت جریان عبوری از سیم و
 طول بخشی از سیم که
 در میدان مغناطیسی قرار دارد.

$$F = I \ell B \sin \theta$$

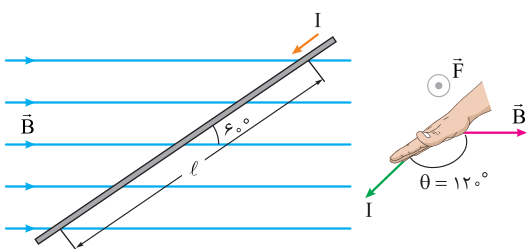
بزرگی میدان مغناطیسی جریان عبوری از سیم

جهت این نیرو به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت جریان الکتریکی عبوری از سیم قرار دهیم که میدان مغناطیسی از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.



گام اول: براساس شکل زیر و به کمک قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را تعیین می‌کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، این نیرو برون‌سو است.

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: اندازه این نیرو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = I \ell B \sin \theta \xrightarrow[\ell=1\text{ m}, I=4\text{ A}, \theta=120^\circ]{B=30\text{ G}=30 \times 10^{-4}\text{ T}} F = 4 \times 1 \times 30 \times 10^{-4} \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3} \times 10^{-3}\text{ N}$$

فیزیک

۵۷ جریان الكتریکی عبوری از یک القاگر فرضی، 300 A و انرژی ذخیره شده در آن یک کیلووات ساعت است. ضریب القاوری این القاگر چند هانری است؟

۳۶۰ (۴)

۸۰ (۳)

۳۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ضریب القاوری سیملوله

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

جریان عبوری از سیملوله

انرژی ذخیره شده در سیملوله (U): **Hint**

گام اول: انرژی ذخیره شده در سیملوله را بر حسب ژول به دست می آوریم:

$$U = 1 \text{ kW} \cdot \text{h} \times \frac{10^3 \text{ W}}{1 \text{ kW}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 36 \times 10^5 \text{ W} \cdot \text{s} = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

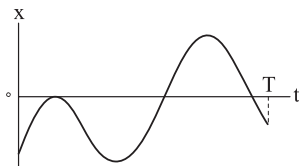
گام دوم: ضریب القاوری سیملوله به صورت زیر حساب می شود:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 36 \times 10^5 = \frac{1}{2} L \times (300)^2 \Rightarrow L = \frac{2 \times 36 \times 10^5}{9 \times 10^4} = 80 \text{ H}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

متخصصان صنعت برق، علاقه مندند راه های مؤثری را برای ذخیره انرژی الکتریکی تولیدی در ساعات های کم مصرف (کم باری) بیابند تا با استفاده از آن، نیاز مشترکان را در ساعات های پر مصرف (اوج بار) تأمین کنند. یک ایده فرضی، استفاده از یک القاگر بزرگ است. ضریب القاوری این القاگر چه قدر باشد تا بتواند 10 kWh انرژی الکتریکی را در پیچۀ حامل جریان 200 A ذخیره کند؟
(فیزیک (۲) - مثال ۴ - ۶ صفحه ۱۲۱ کتاب درسی)

نمودار مکان- زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا T ، جهت حرکت متحرک و جهت بردار مکان آن به ترتیب از راست به چپ چند مرتبه تغییر کرده است؟



(۱) ۲، ۳

(۲) ۳، ۳

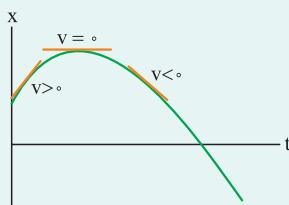
(۳) ۲، ۲

(۴) ۳، ۲

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

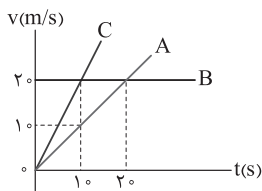
شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان بیانگر سرعت متحرک است و شرط تغییر جهت متحرک، صفر شدن سرعت متحرک ($v = 0$) و تغییر علامت آن است و این اتفاق در قله‌ها و دره‌های نمودار $x-t$ رخ می‌دهد. از طرفی، بردار مکان متحرک هنگام عبور از محور زمان نمودار $(x-t)$ تغییر جهت می‌دهد.



گام اول: در قله‌ها و دره‌های نمودار $x-t$ ، سرعت متحرک صفر می‌شود و سپس تغییر جهت می‌دهد. نمودار دو قله و یک دره دارد، پس متحرک سه بار تغییر جهت داده است.
گام دوم: با عبور نمودار از محور زمان، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، دو مرتبه نمودار از محور زمان عبور کرده است، پس بردار مکان دو بار تغییر جهت داده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار سرعت - زمان سه متحرک A، B و C که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است، اگر در مبدأ زمان هر سه متحرک در یک مکان قرار داشته باشند، در لحظه ای که دو متحرک A و B به هم می رسند، فاصله آن ها از



متحرک C چند متر است؟

- (۱) ۸۰۰
(۲) ۱۶۰۰
(۳) ۲۴۰۰
(۴) ۳۲۰۰

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: متحرک B با سرعت ثابت 20 m/s حرکت می کند، اما حرکت دو متحرک A و C شتاب دار است. ابتدا شتاب این دو متحرک را به دست می آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(0, 10 \text{ s})} a_C = \frac{20}{10} = 2 \text{ m/s}^2 \\ \xrightarrow{(0, 20 \text{ s})} a_A = \frac{20}{20} = 1 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

گام دوم: حالا معادله مکان - زمان سه متحرک را می نویسیم، فرض می کنیم مکان اولیه هر سه برابر x_0 است.

$$x_B = vt + x_0 \Rightarrow x_B = 20t + x_0$$

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_0 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2}t^2 + x_0$$

$$x_C = \frac{1}{2}a_C t^2 + v_{0C}t + x_0 \Rightarrow x_C = t^2 + x_0$$

گام سوم: در ادامه، لحظه ای که دو متحرک A و B به هم می رسند را مشخص می کنیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 20t + x_0 = \frac{1}{2}t^2 + x_0 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 - 20t = 0 \Rightarrow t^2 - 40t = 0 \Rightarrow t(t - 40) = 0 \Rightarrow t = 40 \text{ s}$$

و در پایان فاصله دو متحرک B و C را در لحظه $t = 40 \text{ s}$ به دست می آوریم:

$$t = 40 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 20 \times 40 + x_0 = 800 + x_0 \\ x_C = (40)^2 + x_0 = 1600 + x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله C و B} = 800 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۶۰. متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. اگر تندی متحرک در مکان $x_1 = 28 \text{ m}$ برابر 4 m/s و در مکان $x_2 = 19 \text{ m}$ برابر 5 m/s باشد، شتاب متحرک برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

$$\vec{1} \quad (1)$$

$$-\vec{1} \quad (3)$$

$$0 / 5 \vec{1} \quad (2)$$

$$-0 / 5 \vec{1} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

کافیہ رابطہ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت رو بنویسی و شتاب رو به دست بیاری!

Hint

درسی Box

معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$$

$$v_1 = \text{سرعت متحرک در مکان } x_1 \text{ (m/s)}$$

$$v_2 = \text{سرعت متحرک در مکان } x_2 \text{ (m/s)}$$

$$a = \text{شتاب (m/s}^2\text{)}$$

$$\Delta x = \text{جابه‌جایی (m)}$$

معادله سرعت - جابه‌جایی (رابطه مستقل از زمان) در حرکت شتاب ثابت را بین دو مکان x_1 و x_2 می‌نویسیم و شتاب حرکت آن را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[v_2=5 \text{ m/s}]{v_1=4 \text{ m/s}, \Delta x=x_2-x_1=19-28=-9 \text{ m}} 5^2 - 4^2 = 2a(-9) \Rightarrow 25 - 16 = 2a(-9)$$

$$\Rightarrow 9 = -18a \Rightarrow a = (-0.5 \text{ m/s}^2)\vec{1}$$

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها می‌شود. اندازه جابه‌جایی گلوله در 0.5 ثانیه چهارم چند برابر اندازه جابه‌جایی آن در 0.5 ثانیه دوم است؟

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

درس‌Box

(۱) در هنگام سقوط آزاد، تنها نیروی مؤثر وارد بر یک جسم، وزن آن است؛ یعنی اثر مقاومت هوا بر آن ناچیز فرض می‌شود و اصطلاحاً می‌گوییم، جسم در شرایط خلأ سقوط می‌کند.

(۲) وقتی جسمی با شتاب ثابت g سقوط آزاد انجام می‌دهد، مسافت طی‌شده در T ثانیه n م حرکت برابر است با:

$$\Delta x_n = (n - 0.5) g T^2$$

↓
شتاب گرانشی $= 10 \text{ m/s}^2$

اندازه جابه‌جایی گلوله یا همان مسافت طی‌شده در 0.5 ثانیه دوم و 0.5 ثانیه چهارم را به ترتیب با l_2 و l_4 نشان می‌دهیم:

$$\frac{l_4}{l_2} = \frac{(4 - 0.5)g(0.5)^2}{(2 - 0.5)g(0.5)^2} = \frac{3/5}{1/5} = \frac{7}{3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۲

می‌خواهیم به جسمی که جرم آن 2 kg است، شتابی به بزرگی 3 m/s^2 بدهیم تا در راستای قائم رو به پایین شروع به حرکت کند. نیرویی که باید به جسم وارد کنیم، چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

(۱) 14 ، به سمت بالا(۲) 14 ، به سمت بالا(۳) 26 ، به سمت بالا(۴) 26 ، به سمت پایین

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

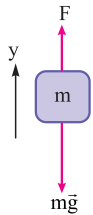
هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

جرم (kg) شتاب (m/s^2)
نیروی خالص (N)

گام اول: با توجه به شکل زیر، از آنجا که شتاب جسم رو به پایین است، علامت شتاب منفی و $a = -3 \text{ m/s}^2$ است.
گام دوم: با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



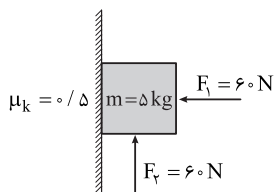
$$F_{\text{net}} = ma$$

$$\Rightarrow F - mg = ma \Rightarrow F = m(g + a) \xrightarrow{m=2 \text{ kg}, g=10 \text{ m/s}^2, a=-3 \text{ m/s}^2} F = 2(10 - 3) = 14 \text{ N}$$

گام سوم: از آنجا که $F > 0$ است، جهت این نیرو به سمت بالا است و گزینه (۱) درست است.

۶۳ در شکل زیر، به جسم نیروی افقی \vec{F}_1 و نیروی قائم \vec{F}_2 وارد می‌شود. اگر جسم در حال حرکت به سمت بالا باشد،

شتاب آن چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) ۴، به سمت بالا

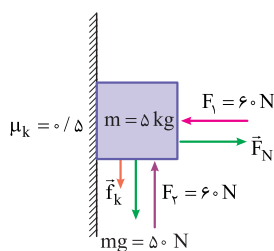
(۲) ۴، به سمت پایین

(۳) ۸، به سمت بالا

(۴) ۸، به سمت پایین

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: ابتدا نیروهای وارد بر جسم را در شکل زیر مشخص می‌کنیم. از آنجایی که جسم در حال حرکت به طرف بالاست، نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی و به سمت پایین است. در این شکل داریم:



$$F_N = F_1 \Rightarrow F_N = 60 \text{ N}$$

$$f_k = F_N \cdot \mu_k = 60 \times 0.5 = 30 \text{ N}$$

گام دوم: در شکل بالا، از آنجایی که $f_k + mg > F_2$ است، نیروی خالص وارد بر جسم، رو به پایین و اندازه آن برابر است با:

$$F_{\text{net}} = mg + f_k - F_2 = 50 + 30 - 60 = 20 \text{ N} \text{ (به سمت پایین)}$$

پس تکلیف شتاب جسم هم به راحتی مشخص می‌شود:

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{20}{5} = 4 \text{ m/s}^2 \text{ (به سمت پایین)}$$

بد نیست بدانید که، چون حرکت جسم به سمت بالا و شتاب جسم به سمت پایین است، بدون شک حرکت جسم کندشونده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۴ اگر جرم گلوله‌ای برابر ۲۰ g و اندازهٔ تکانهٔ آن برابر $۸۰۰ \frac{\text{g.m}}{\text{s}}$ باشد، انرژی جنبشی گلوله چند ژول است؟

۱/۶ (۴)

۳/۲ (۳)

۱۶ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۲

درسی Box

با توجه به روابط تکانه و انرژی جنبشی داریم:

$$p = mv \Rightarrow \begin{cases} p: \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \text{ بزرگی تکانه} \\ m: (\text{kg}) \text{ جرم} \\ v: (\text{m/s}) \text{ تندى} \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \begin{cases} k: (\text{J}) \text{ انرژی جنبشی} \\ m: (\text{kg}) \text{ جرم} \\ v: (\text{m/s}) \text{ تندى} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}$$

با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال و رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} m = 20 \text{ g} = 20 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ p = 800 \frac{\text{g.m}}{\text{s}} = 800 \times 10^{-3} \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \\ K = ? (\text{J}) \end{cases}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(800 \times 10^{-3})^2}{2 \times 20 \times 10^{-3}} = 16 \text{ J}$$

فیزیک

۶۵ پره یک بالگرد با دوره 0.08 s به طور یکنواخت می چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پره بالگرد چه قدر است؟

۳۰۰۰ (۴)

۲۲۵۰ (۳)

۱۵۰۰ (۲)

۷۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

می‌توانیم با استفاده از دوره T ، تعداد دور بر دقیقه (rpm) را به دست آوریم:

$$\text{rpm} = \frac{60}{T}$$

↓
(s) دوره تناوب

تعداد دور بر دقیقه پره بالگرد برابر است با:

$$\text{rpm} = \frac{60}{T} = \frac{60}{0.08} = 750 \frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۶ دامنه نوسان یک نوسانگر جرم - فنر در حرکت هماهنگ ساده 5 cm و ثابت فنر آن 2 N/cm است. انرژی مکانیکی نوسانگر هنگام نوسان روی یک سطح افقی بدون اصطکاک چند ژول است؟

۲۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۰/۲۵ (۲)

۰/۰۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

انرژی مکانیکی نوسانگر:

با صرف نظر از نیروی اتلافی، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر به یکدیگر تبدیل می‌شوند، اما مجموع آن‌ها، یعنی انرژی مکانیکی، مقداری ثابت است که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

E : انرژی مکانیکی (J)

k : ثابت فنر (N/m)

A : دامنه نوسان (m)

مقادیر k و A را در معادله انرژی مکانیکی جای گذاری می‌کنیم و مقدار E را به دست می‌آوریم.

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow[A=5 \text{ cm}=5 \times 10^{-2} \text{ m}]{k=2 \text{ N/cm}=200 \text{ N/m}} E = \frac{1}{2} \times 200 \times (5 \times 10^{-2})^2 = 0.25 \text{ J}$$

گزینه‌های Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر در SI به صورت $x = 0.4 \cos 10\pi t$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۳ برابر انرژی جنبشی آن است، تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

$2\pi (4)$

$\pi (3)$

$2\sqrt{2}\pi (2)$

$\sqrt{2}\pi (1)$

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

(۱) رابطه بیشینه تندی نوسانگر:

$$v_{\max} = A\omega$$

 v_{\max} : بیشینه تندی نوسانگر (m/s)

A: دامنه حرکت (m)

 ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

(۲) انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن:

$$E = K + U$$

E: انرژی مکانیکی (J)

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل (J)

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

m: جرم نوسانگر (kg)

ابتدا رابطه بین بیشینه تندی و تندی نوسانگر را پیدا می‌کنیم:

$$E = K + U \xrightarrow{U=3K} E = K + 3K = 4K$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 4\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \Rightarrow v_{\max} = 2v$$

سپس بیشینه تندی نوسانگر را به کمک اطلاعات موجود در معادله حرکت هماهنگ ساده به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ x = 0.4 \cos 10\pi t \end{cases} \Rightarrow A = 0.4 \text{ m}, \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow v_{\max} = 0.4 \times 10\pi = 4\pi \text{ m/s}$$

حالا می‌توانیم تندی نوسانگر را بیابیم:

$$v_{\max} = 2v \xrightarrow{v_{\max}=4\pi \text{ m/s}} \cancel{4}\pi = \cancel{2}v \Rightarrow v = 2\pi \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۶۸

سیمی با چگالی $7/8 \text{ g/cm}^3$ و سطح مقطع 5 mm^2 بین دو نقطه کشیده شده است. در این سیم موجی با طول موج 20 cm تشکیل می‌شود. اگر بسامد موج 1000 Hz باشد، نیروی کشش سیم، چند نیوتون است؟

۱۵۶ (۴)

۳۹ (۳)

۱۵/۶ (۲)

۳/۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با استفاده از طول موج و بسامد، تندی انتشار موج در سیم را به دست آورید، سپس به کمک رابطه تندی انتشار موج عرضی در سیم، نیروی کشش سیم را حساب کنید.

Hint

درسی Box

(۱) تندی انتشار موج عرضی در ریسمان (فنر و ...) تحت کشش:

$$v = \sqrt{\frac{\text{نیروی کشش } F}{\rho A \text{ سطح مقطع چگالی}}}$$

(۲) رابطه بین تندی انتشار موج، طول موج و بسامد موج:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

گام اول: تندی انتشار موج برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow v = \lambda f \xrightarrow[\text{f}=1000 \text{ Hz}]{\lambda=20 \text{ cm}=0.2 \text{ m}} v = 0.2 \times 1000 = 200 \text{ m/s}$$

گام دوم: نیروی کشش سیم به صورت زیر حساب می‌شود:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow[\text{A}=5 \text{ mm}^2=5 \times 10^{-6} \text{ m}^2]{\rho=7/8 \text{ g/cm}^3=7/8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} 200 = \sqrt{\frac{F}{7/8 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6}}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}} 4 \times 10^4 = \frac{F}{3/9 \times 10^{-3}} \Rightarrow F = 15/6 \times 10 = 156 \text{ N}$$

اگر فاصله شخص تا چشمه صوتی 60 m کاهش یابد، تراز شدت صوتی که دریافت می‌کند، 14 dB افزایش می‌یابد. فاصله اولیه شخص تا چشمه صوت چند متر بوده است؟ ($\log 2 = 0.3$) و از جذب انرژی صوتی توسط محیط صرف نظر شود.

(۱) $62/5$

(۲) 75

(۳) 125

(۴) 150

مشاوره در حل تست‌های مبحث تراز شدت صوت، مهم‌ترین مهارت، حل رابطه لگاریتمی است. در این تست‌ها اغلب $\log 2 = 0.3$ را می‌دهند و شما باید یاد بگیرید که چگونه عددی که با آن سروکار دارید را به صورت مجموع یا تفاضل یک عدد صحیح و یک عدد بر حسب 0.3 بنویسید. چند نمونه ببینید:

$$5/1 = 6 - (3 \times 0.3)$$

$$5/3 = 5 + 0.3$$

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه خواسته سؤال از رابطه اختلاف تراز شدت صوت بر حسب فاصله از چشمه صوت کمک بگیرید.

اختلاف تراز شدت دو صوت (بر حسب dB) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) = 10 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

برای حل سؤال‌های این مبحث، روابط لگاریتمی زیر به کارتان می‌آید:

$$\log A^n = n \log A, \quad \log(AB) = \log(A) + \log(B), \quad \log\left(\frac{A}{B}\right) = \log(A) - \log(B)$$

اگر فاصله اولیه شخص تا چشمه صوت را بر حسب متر برابر r_1 در نظر بگیریم، فاصله ثانویه آن برابر $r_2 = r_1 - 60 \text{ m}$ خواهد بود. به کمک رابطه تراز شدت صوت داریم:

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow 14 = 20 \log \frac{r_1}{r_1 - 60} \Rightarrow \log \frac{r_1}{r_1 - 60} = 0.7 = 1 - 0.3 = \log 10 - \log 2 = \log \frac{10}{2}$$

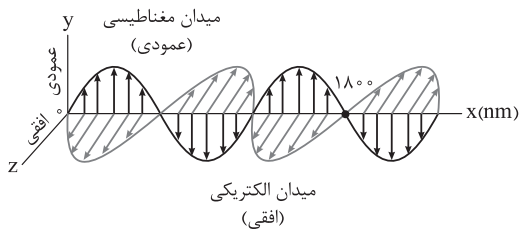
$$\Rightarrow \log \frac{r_1}{r_1 - 60} = \log 5 \Rightarrow \frac{r_1}{r_1 - 60} = 5 \Rightarrow r_1 = 5r_1 - 300 \Rightarrow 4r_1 = 300 \Rightarrow r_1 = \frac{300}{4} = 75 \text{ m}$$

Hint

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی

۷۰ تصویر لحظه‌ای یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر شده، در لحظه‌ای به شکل زیر است. به ترتیب، جهت انتشار موج و بسامد آن بر حسب تراهرتز، کدام است؟ $(c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$



$$250, +X \quad (1)$$

$$250, -X \quad (2)$$

$$750, +X \quad (3)$$

$$750, -X \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

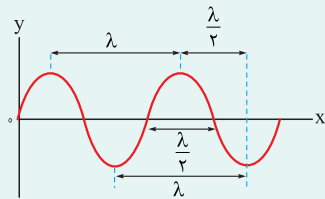
جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را به کمک قاعده دست راست تعیین کنید. از روی نقش موج، طول موج و سپس به کمک رابطه طول موج و بسامد، بسامد موج را حساب کنید.

Hint

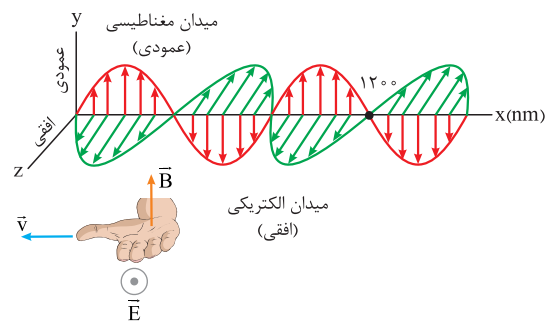
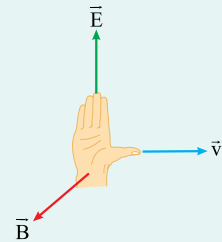
(۱) بین تندی انتشار موج الکترومغناطیسی، بسامد موج و طول موج آن، رابطه مقابل برقرار است:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

(۲) شکل زیر را درباره رابطه فاصله نقاط با طول موج به خاطر بسپارید:



(۳) قاعده دست راست برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی: طبق این قاعده، چهار انگشت دست راست را در جهت میدان الکتریکی (\vec{E}) طوری قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی (\vec{B}) از کف دست خارج شود. در این حالت انگشت شست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی (\vec{v}) را نشان می‌دهد.



پاسخ خیلی تشریحی
گام اول: برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. به این صورت که مطابق شکل مقابل، چهار انگشت دست راست را طوری در جهت میدان الکتریکی در یک نقطه قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی در آن نقطه از کف دستمان خارج شود. در این حالت شست دست جهت انتشار موج را نشان می‌دهد که برای این موج در جهت $-x$ است.

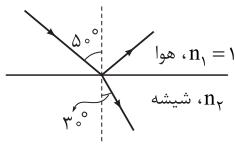
گام دوم: مقدار نشان داده شده روی محور x برابر $\frac{3\lambda}{4}$ است؛ بنابراین:

$$\frac{3\lambda}{4} = 1800 \text{ nm} \Rightarrow \lambda = \frac{3600}{3} = 1200 \text{ nm} \xrightarrow{1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}} \lambda = 12 \times 10^{-7} \text{ m}$$

گام سوم: بسامد موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^{-7}} = 250 \times 10^{12} \text{ Hz} \xrightarrow{10^{12} \text{ Hz} = 1 \text{ THz}} f = 250 \text{ THz}$$

در شکل زیر، نور فرودی از هوا به شیشه می‌تابد. بخشی از موج در سطح جدایی دو محیط بازمی‌تابد و بخشی دیگر شکست می‌یابد و وارد شیشه می‌شود. به ترتیب، زاویهٔ بین پرتو شکست و پرتو بازتابش چند درجه و ضریب شکست شیشه کدام است؟ ($\sin 5^\circ = 0.087$)



$$\frac{3}{2}, 180 \quad (2)$$

$$\frac{4}{3}, 180 \quad (1)$$

$$\frac{3}{2}, 100 \quad (4)$$

$$\frac{4}{3}, 100 \quad (3)$$

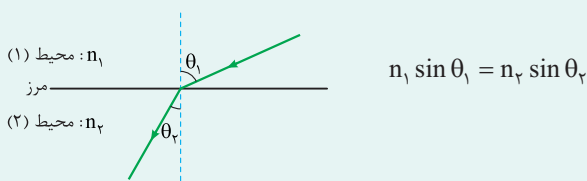
پاسخ: گزینهٔ ۴

به کمک قانون بازتاب عمومی و کمی هندسه، زاویهٔ بین پرتوهای شکست و بازتابش به دست می‌آید. قانون شکست اسنل هم به شما کمک می‌کند تا ضریب شکست شیشه را به دست آورید.



درس‌Box

قانون شکست اسنل: اگر پرتو نوری از محیطی به ضریب شکست n_1 وارد محیطی به ضریب شکست n_2 شود، داریم:



گام اول: در شکل زیر، طبق قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتابش برابر با زاویهٔ تابش است، پس:

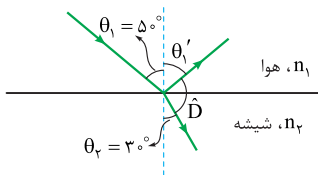
$$\theta'_1 = \theta_1 \Rightarrow \theta'_1 = 5^\circ$$

حالا زاویهٔ بین پرتوی شکست و پرتوی بازتابش را حساب می‌کنیم:

$$\hat{D} = 180^\circ - \theta'_1 - \theta_2 = 180^\circ - 5^\circ - 3^\circ = 172^\circ$$

گام دوم: به کمک قانون شکست اسنل، ضریب شکست شیشه را به دست می‌آوریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 5^\circ = n_2 \times \sin 3^\circ \Rightarrow 1 \times 0.087 = n_2 \times 0.05 \Rightarrow n_2 = \frac{0.087}{0.05} = \frac{3}{2}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۷۲

در یک تار دو سر بسته، بسامد دو هماهنگ متوالی 240 Hz و 300 Hz است. اگر تندی انتشار موج عرضی در تار 90 m/s باشد، طول تار چند متر است؟

۳ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۰/۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

کرتی Box

(۱) در تار مرتعش دو سر بسته، اختلاف دو بسامد تشدید متوالی برابر با بسامد هماهنگ اول (f_1) است:

$$f_{n+1} - f_n = f_1$$

(۲) بسامد تشدید هماهنگ n ام در تار مرتعش دو سر بسته:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow \begin{array}{l} \text{تندی انتشار موج} \\ \text{طول تار} \end{array}$$

گام اول: اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی برابر با بسامد اصلی تار است؛ بنابراین:

$$f_1 = 300 - 240 = 60 \text{ Hz}$$

گام دوم: طول تار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow 60 = \frac{90}{2L} \Rightarrow 12L = 9 \Rightarrow L = 0.75 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

توان یک لامپ رشته‌ای 100 W ، بازده آن 5% درصد و 1% درصد از نور تابشی آن دارای طول موج 600 nm است. در هر دقیقه چه تعداد فوتون با این طول موج از لامپ گسیل می‌شود؟ ($h = 6.6 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ و $c = 3 \times 10^8\text{ m/s}$)

$$10^{21} \quad (2)$$

$$10^{19} \quad (1)$$

$$2 \times 10^{21} \quad (4)$$

$$2 \times 10^{19} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا به کمک رابطه بازده، توان خروجی (تابشی) لامپ را حساب کنید؛ سپس توان تابشی مربوط به فوتون‌هایی با طول موج 600 nm و به کمک آن تعداد فوتون‌های با این طول موج را به دست آورید.

Hint

کارتی Box

(۱) رابطه بین طول موج و بسامد فوتون:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (c = 3 \times 10^8\text{ m/s})$$

(۲) توان تابشی منبع نور (لامپ، لیزر و ...):

$$P_{\text{تابشی}} = \frac{E}{t} = \frac{nE_{\text{فوتون}}}{t} = \frac{n h f}{t}$$

تعداد فوتون‌های تابشی بسامد فوتون
زمان

(۳) بازده: نسبت انرژی یا توان خروجی (تابشی) به انرژی یا توان ورودی (مصرفی) است و از روابط زیر به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}} \times 100 = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 \quad (\text{برحسب درصد})$$

گام اول: به کمک رابطه بازده، توان تابشی (خروجی) لامپ را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{\text{تابشی}}}{P} \times 100 \Rightarrow 5 = \frac{P_{\text{تابشی}}}{100} \times 100 \Rightarrow P_{\text{تابشی}} = 5\text{ W}$$

گام دوم: بخشی از توان تابشی که مربوط به طول موج 600 nm است را به دست می‌آوریم:

$$P'_{\text{تابشی}} = 0.01 \times P_{\text{تابشی}} = 0.01 \times 5 = 0.05\text{ W}$$

گام سوم: تعداد فوتون‌های با طول موج 600 nm برابر است با:

$$P'_{\text{تابشی}} = \frac{E}{\Delta t} = \frac{nhf}{\Delta t} = \frac{nh \frac{c}{\lambda}}{\Delta t} \quad \lambda = 600\text{ nm} = 600 \times 10^{-9}\text{ m} \quad \Delta t = 1\text{ min} = 60\text{ s} \rightarrow 0.05 = \frac{n \times 6.6 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{600 \times 10^{-9}}}{60}$$

$$\Rightarrow 0.05 = n \times 5 \times 10^{-21} \Rightarrow n = \frac{5 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-21}} = 10^{19}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نپتونیم ${}_{93}^{237}\text{Np}$ ناپایدار است و واپاشی آن از طریق گسیل ذرات α ، β^- ، α و α صورت می‌گیرد. پس از وقوع تمام این واپاشی‌ها، تعداد نوترون‌های هسته نهایی کدام است؟

۱۳۹ (۴)

۱۳۷ (۳)

۸۷ (۲)

۸۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پایستگی تعداد نوکلئون و بار الکتریکی را برای اجزای دو طرف فرایند بنویسید تا عدد جرمی و عدد اتمی هسته نهایی به دست آید؛ سپس به کمک این دو، تعداد نوترون‌ها را حساب کنید.

Hint

$$A = Z + N$$

(۱) عدد جرمی: مجموع تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی) و نوترون‌ها (عدد نوترونی)

(۲) در فرایندهای واپاشی دو اصل زیر برقرار است:

● پایستگی تعداد نوکلئون‌ها: مجموع تعداد نوکلئون‌های دو طرف فرایند یکسان است.

● پایستگی بار الکتریکی: مجموع بار الکتریکی دو طرف فرایند یکسان است.

گام اول: ذره α ، هسته اتم هلیم (${}_{2}^{4}\alpha$) و ذره β^- ، الکترون (${}_{-1}^{0}\beta^-$) است.

فرایند این واپاشی به صورت زیر است:



پایستگی تعداد نوکلئون‌ها و پایستگی بار الکتریکی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم:

$$93 = Z + (3 \times 2) + (-1) \Rightarrow Z = 93 - 5 = 88$$

$$237 = A + (3 \times 4) + 0 \Rightarrow A = 237 - 12 = 225$$

گام دوم: تعداد نوترون‌های هسته نهایی برابر با اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی است:

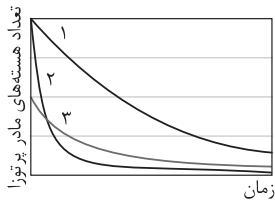
$$N = A - Z = 225 - 88 = 137$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۵

نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه (۱)، (۲) و (۳) بر حسب زمان به شکل زیر است. کدام مقایسه درباره نیمه‌عمر این سه نمونه (T) درست است؟



$$T_2 > T_1 > T_3 \quad (۱)$$

$$T_1 > T_2 > T_3 \quad (۲)$$

$$T_2 > T_3 > T_1 \quad (۳)$$

$$T_1 > T_3 > T_2 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۴

کافی‌ه روی نمودار لحظه نصف‌شدن تعداد هسته‌های هر نمونه رو مشخص کنی!

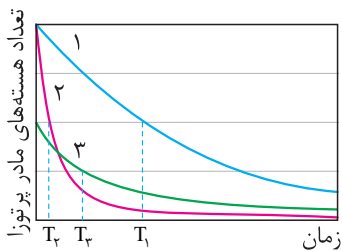
Hint

نیمه‌عمر ($T_{\frac{1}{2}}$): مدت‌زمان لازم برای واپاشی نیمی از تعداد هسته‌های یک نمونه پرتوزا.

کرتس Box

در نمودار زیر، لحظه‌ای که نیمی از هسته‌های نمونه‌های پرتوزا به طور فعال باقی مانده‌اند را مشخص می‌کنیم. واضح است که:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$T_1 > T_2 > T_3$$

کدام مورد از نتایج واکنش‌های هسته‌ای نیست؟

- (۲) تولید هلیوم در اعماق زمین
(۴) تولید انرژی گرمایی در خورشید

- (۱) تبدیل عناصر سبک به سنگین در ستاره‌ها
(۳) غنی‌سازی ایزوتوپی اورانیم - ۲۳۵

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

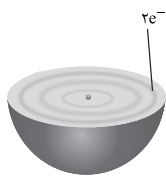
غنی‌سازی ایزوتوپی، یک فرایند فیزیکی است و بر مبنای تفاوت در خواص فیزیکی ایزوتوپ‌ها (مثل استفاده از سانتریفیوژها بر مبنای تفاوت چگالی دو ایزوتوپ) انجام می‌شود. در این فرایند، هیچ واکنش هسته‌ای رخ نمی‌دهد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۴): درون ستاره‌ها همانند خورشید، در فشارها و دماهای بالا، واکنش هسته‌ای انجام می‌شود. طی این واکنش‌ها، عناصر سبک به سنگین تبدیل می‌شوند.

گزینه (۲): در فصل ۲ شیمی دهم می‌خوانیم که هلیوم از طریق واکنش‌های هسته‌ای در ژرفای زمین تولید می‌شود.

اگر شمار نوترون‌ها در هستهٔ اتم زیر، ۲ واحد بیشتر از شمار پروتون‌های آن باشد، عدد جرمی این اتم کدام است؟

۷۷



۲۴ (۱)

۲۵ (۲)

۲۶ (۳)

۲۸ (۴)

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (محاسبهٔ شمار پروتون‌ها): شمار پروتون‌های یک اتم خنثی با شمار الکترون‌های آن برابر است. می‌دانیم که لایه‌های اول و دوم، به ترتیب گنجایش ۲ و ۸ الکترون دارند.

$$۲ + ۸ + ۲ = ۱۲ = \text{شمار پروتون‌ها (عدد اتمی)}$$

↙
↓
↘
 لایهٔ سوم لایهٔ دوم لایهٔ اول

گام دوم: محاسبهٔ عدد جرمی:

$$۲۶ = ۱۲ + (۱۲ + ۲) = \text{شمار نوترون‌ها} + \text{شمار پروتون‌ها} = \text{عدد جرمی}$$

رنگ فلز مس به صورت خالص، رنگ محلول سولفات فلز مس با بیشترین عدد اکسایش در آب و رنگ شعله نمک‌های

مس، به ترتیب کدام است؟

(۲) سرخ - سبز - آبی

(۱) سرخ - آبی - آبی

(۴) سبز - آبی - سبز

(۳) سرخ - آبی - سبز

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

رنگ فلز مس: سرخ

رنگ شعله مس: سبز

رنگ محلول حاوی کاتیون Cu^{2+} : آبی

مس رنگارنگ!

اگر اعداد داده شده در هر گزینه مربوط به عدد اتمی سه عنصر باشد، در کدام گزینه، عدد اتمی بیشتر، مربوط به عنصری با بزرگ‌ترین شعاع اتمی است؟

۱۶، ۹، ۸ (۴)

۱۷، ۱۱، ۹ (۳)

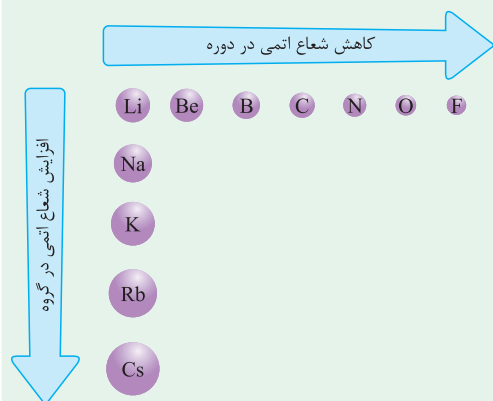
۳۸، ۳۷، ۱۲ (۲)

۱۴، ۱۳، ۱۱ (۱)

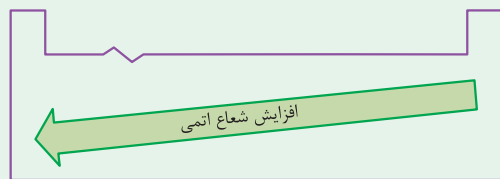
پاسخ: گزینه ۴



در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها، کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.



با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در یک گروه و دوره، هر چه عنصری در جدول دوره‌ای، سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد، شعاع آن بیشتر است و بالعکس! هر چه عنصری، سمت راست‌تر و بالاتر باشد، شعاع آن کم‌تر است.



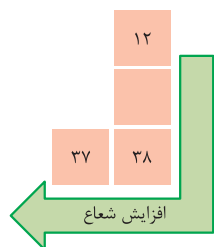
بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۱، ۱۳ و ۱۴ در یک دوره قرار دارند؛ پس خواهیم داشت:

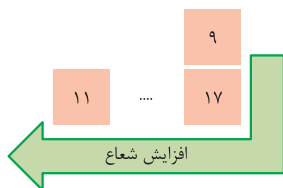
شعاع اتمی: $۱۱ > ۱۳ > ۱۴$

گزینه (۲): عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۲ و ۳۸ در گروه ۲ و عنصری با عدد اتمی ۳۷ در گروه ۱ قرار دارد:



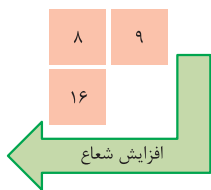
شعاع اتمی: $۳۷ > ۳۸ > ۱۲$

گزینه (۳): عنصرهایی با عددهای اتمی ۹ و ۱۷ در گروه ۱۷ و عنصری با عدد اتمی ۱۱، در گروه ۱ قرار دارد:



شعاع اتمی: $۱۱ > ۱۷ > ۹$

گزینه (۴): عنصرهایی با عددهای اتمی ۸ و ۱۶ در گروه ۱۶ و عنصری با عدد اتمی ۹، در گروه ۱۷ قرار دارد:



شعاع اتمی: $16 > 8 > 9$

اگر شمار الکترون‌های با $n = 4$ و $l = 1$ در اتم عنصر A با شمار الکترون‌های با $n = 3$ و $l = 2$ در اتم عنصر B برابر باشد، کدام مطلب درست است؟

۴p

۳d

تکنسیم (۴۳ Tc)

(۱) اگر A بُرم باشد، عنصر B می‌تواند یکی از عناصر هم‌گروه با نخستین عنصر ساختگی در واکنش گاه هسته‌ای باشد.

(۲) اگر B نخستین فلز واسطه باشد، A فلزی است که با از دست دادن سه الکترون به آرایش گاز نجیب پیش از خود می‌رسد.

اسکاندیم (۲۱ Sc)

(۳) اگر A هم‌گروه با کربن باشد، در آرایش الکترونی کاتیون در BCO_3 ، هشت الکترون با $n = 3$ وجود دارد.

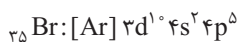
(۴) اگر B آهن باشد، تمام لایه‌ها و زیرلایه‌های اشغال‌شده اتم A از الکترون پر هستند.

پاسخ: گزینه ۱

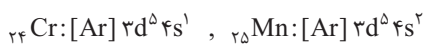
عدهای کوانتومی $n = 4$ و $l = 1$ مربوط به زیرلایه ۴p و عدهای کوانتومی $n = 3$ و $l = 2$ مربوط به زیرلایه ۳d است. بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): عدد اتمی برم، ۳۵ است و در زیرلایه ۴p آن، ۵ الکترون وجود دارد:



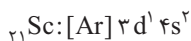
بنابراین در زیرلایه ۳d اتم A نیز باید ۵ الکترون وجود داشته باشد، یعنی A می‌تواند Cr یا Mn باشد:



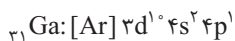
نخستین عنصر ساختگی، تکنسیم (۴۳ Tc) است که مانند منگنز، در گروه ۷ جدول تناوبی قرار دارد، زیرا اختلاف عدد اتمی آن با گاز نجیب قبلی برابر ۷ است:

$$43 - 36 = 7$$

گزینه (۲): نخستین فلز واسطه، اسکاندیم است:



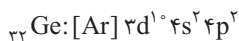
پس در زیرلایه ۴p اتم A باید ۱ الکترون وجود داشته باشد:



یون Ga^{3+} آرایش گاز نجیب ندارد:



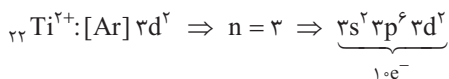
گزینه (۳): عنصر هم‌گروه با کربن که زیرلایه ۴p آن در حال اشغال شدن است، ژرمانیم می‌باشد:



بنابراین در زیرلایه ۳d اتم B باید ۲ الکترون وجود داشته باشد:



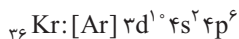
در BCO_3 (TiCO₃)، کاتیون، Ti^{2+} است که دارای ۱۰ الکترون با $n = 3$ می‌باشد:



گزینه (۴): در زیرلایه ۳d آهن، ۶ الکترون وجود دارد:



پس اتم A با ۶ الکترون در زیرلایه ۴p، همان گاز نجیب کریپتون است:



همه زیرلایه‌های اشغال‌شده در کریپتون پر هستند، اما دقت کنید که لایه چهارم در این اتم پر نیست. در لایه چهارم، زیرلایه‌های

۴d و ۴f هم وجود دارند که در این اتم، قالی از سکنه است!

اگر شمار الکترون‌های $3d$ در اتم X ، با شمار الکترون‌های $3p$ در لایه ظرفیت اتم Y برابر باشد، کدام مورد درباره آن‌ها، نادرست است؟

(سؤال ۷۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

- (۱) اگر Y ، نافلز جامد سفیدرنگ باشد، در بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی اتم X ، یک الکترون جای دارد.
- (۲) اگر X ، منگنز باشد، عنصر Y ، در دمای اتاق، به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.
- (۳) اگر Y ، فسفر باشد، بزرگ‌ترین عدد اکسایش اتم X در ترکیب‌هایش برابر $+۵$ است.
- (۴) اگر Y ، گاز نجیب باشد، شمار الکترون‌های لایه سوم اتم X برابر ۱۴ است.

در فرمول شیمیایی کدام ترکیب، شمار یون‌های فلزی با شمار اتم‌های اکسیژن برابر است؟

- (۱) پتاسیم اکسید
(۲) سدیم سیلیکات
(۳) لیتیم نترات
(۴) منیزیم هیدروژن کربنات

پاسخ: گزینه ۲

نماد یون‌های کتاب درسی:



نام	کاتیون	نام	کاتیون	نام	کاتیون	نام	کاتیون
آمونیم	NH_4^+	روی	Zn^{2+}	منیزیم	Mg^{2+}	لیتیم	Li^+
آهن (II)	Fe^{2+}	کادمیم	Cd^{2+}	کلسیم	Ca^{2+}	سدیم	Na^+
آهن (III)	Fe^{3+}						
کروم (II)	Cr^{2+}	نقره	Ag^+	استرانسیم	Sr^{2+}	پتاسیم	K^+
کروم (III)	Cr^{3+}						
وانادیم (II)	V^{2+}	آلومینیم	Al^{3+}	باریم	Ba^{2+}	روبیوم	Rb^+
وانادیم (III)	V^{3+}						
مس (I)	Cu^+	گالیم	Ga^{3+}	اسکاندیم	Sc^{3+}	سزیم	Cs^+
مس (II)	Cu^{2+}						

نام	آنیون	نام	آنیون	نام	آنیون	نام	آنیون
فسفات	PO_4^{3-}	نترات	NO_3^-	اکسید	O^{2-}	فلوئورید	F^-
سیانید	CN^-	هیدروکسید	OH^-	سولفید	S^{2-}	کلرید	Cl^-
پرمنگنات	MnO_4^-	کربنات	CO_3^{2-}	نیتريد	N^{3-}	برمید	Br^-
فورمات (متانوات)	HCOO^-						
استات (اتانوات)	CH_3COO^-	سولفات	SO_4^{2-}	فسفید	P^{3-}	یدید	I^-
بنزوات	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-$						
هیدروژن کربنات	HCO_3^-	سیلیکات	SiO_4^{4-}				

- ۱) $\text{K}^+, \text{O}^{2-} \Rightarrow \text{K}_2\text{O} \Rightarrow \text{O}$ اتم ۱ و K^+ یون ۲
 ۲) $\text{Na}^+, \text{SiO}_4^{4-} \Rightarrow \text{Na}_4\text{SiO}_4 \Rightarrow \text{O}$ اتم ۴ و Na^+ یون ۴
 ۳) $\text{Li}^+, \text{NO}_3^- \Rightarrow \text{LiNO}_3 \Rightarrow \text{O}$ اتم ۳ و Li^+ یون ۱
 ۴) $\text{Mg}^{2+}, \text{HCO}_3^- \Rightarrow \text{Mg}(\text{HCO}_3)_2 \Rightarrow \text{O}$ اتم ۶ و Mg^{2+} یون ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در کدام موارد زیر، کاربرد ماده مورد نظر، درست بیان شده است؟

- الف) فراوان ترین گاز نجیب هواکره: کپسول غواصی
 ب) فرآورده واکنش اتن با هیدروژن کلرید: حلال چسب
 پ) جامد کووالانسی حاصل از دو عنصر اول گروه ۱۴: تهیه سنباده
 ت) فرآورده قطب منفی سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب: تهیه آلیاژها و شربت معده
- ۱) پ و ت
 ۲) الف و ب
 ۳) الف، پ و ت
 ۴) ب و ت
- آرگون
 کلرواتان
 SiC
 کاتد

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



کاربرد مواد:

کاربرد	ماده	کاربرد	ماده
افزودن به خاک جهت افزایش بهره‌وری در کشاورزی کنترل میزان اسیدی بودن آب دریاچه‌ها	کلسیم اکسید یا آهک (CaO)	تصویربرداری از غده تیروئید	تکنسیم ($^{99}_{43}\text{Tc}$)
گندزدایی میوه‌ها و سبزیجات از بین بردن جانداران ذره‌بینی درون آب	اوزون (O_3)	سوخت راکتورهای اتمی	اورانیم ^{235}U
ضد یخ در خودروها	اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$)	تشخیص توده سرطانی	گلوکز نشان‌دار
تهیه گاز کلر، فلز سدیم، سود سوزآور و گاز هیدروژن - تولید سدیم کربنات، فراوری گوشت، ذوب کردن یخ در جاده‌ها، تغذیه جانوران و مصارف خانگی	سدیم کلرید	لامپ بزرگراه‌ها و آزادراه‌ها	بخار سدیم
تهیه آلیاژها و شربت معده	منیزیم	ایجاد نوشته‌های نورانی سرخ‌فام در تابلوهای تبلیغاتی	لامپ نئون
رقیق کننده رنگ (تینر) حلال مواد ناقطبی	هگزان (C_6H_{14})	رنگ‌بری و گندزدایی	کلر
حلال صنعتی - ضد عفونی کننده، تهیه مواد دارویی، آرایشی و بهداشتی	اتانول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$)	پر کردن تایر خودروها، در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی، نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی، تهیه آمونیاک	نیتروژن
حلال برخی از چربی‌ها، رنگ‌ها و لاک‌ها	استون ($\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$)	جوشکاری - ساخت لامپ‌های رشته‌ای	آرگون
تنظیم عملکرد دستگاه عصبی	یون پتاسیم (K^+)	پرکردن بالن‌های هواشناسی، تفریحی و تبلیغاتی - جوشکاری - کپسول غواصی - خنک کردن دستگاه‌های تصویربرداری MRI مانند	هلیوم
ظرف‌های پلاستیکی یکبار مصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله، کیسه پلاستیکی	پلی‌لاکتیک اسید	الکترونود - مغز مداد	گرافیت

کاربرد	ماده	کاربرد	ماده
افزافه کردن به شوینده‌ها جهت افزایش قدرت پاک‌کنندگی - داروهای ضداسید	جوش شیرین (NaHCO_3)	ساخت مته‌ها و ابزار برش شیشه	الماس
نخ‌دندان - کفی اتو - ظروف نجسب	تفلون	ساخت سلول‌های خورشیدی	سیلیسیم
تهیه تابر اتومبیل - قایق بادبانی - لباس‌های مخصوص موتورسواری - جلیقه ضدگلوله	کولار	رنگ قرمز در نقاشی	آهن (III) اکسید (Fe_2O_3)
ساخت منشور	سیلیس (SiO_2)	جوش کاری	اتین (C_2H_2)
تهیه سنباده	سیلیسیم کربید (SiC)	ضدبید برای نگهداری فرش و لباس (در قدیم)	فتالن (C_{10}H_8)
سوخت	اتان (C_2H_6)	ساخت بدنه دوچرخه - پروانه کشتی‌های اقیانوس‌پیما	تیتانیم (Ti)
افشانه بی‌حس‌کننده موضعی	کلرواتان ($\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$)	نگهدارنده در صنایع غذایی	بنزوئیک اسید ($\text{C}_7\text{H}_6\text{O}_2$)
حلال چسب	اتیل استات ($\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$)	سبک: کیسه شفاف پلاستیکی سنگین: بطری کدر شیر - دبه آب لوله‌های اتصال آب	پلی‌اتن
ساخت بطری آب	پلی اتیلن ترفتالات (PET)	ساخت سرنگ	پلی‌پروپن
اکسنده در تبدیل پارازیلین به ترفتالیک اسید یا اتن به اتیلن گلیکول	پتاسیم پرمنگنات (KMnO_4)	تهیه فرش و پتو	پلی‌سیانو اتن
تبدیل PET به مواد مفید	متانول (CH_3OH)	ساخت کیسه خون	پلی‌وینیل کلرید
		تهیه ظروف یکبار مصرف	پلی‌استیرن

بررسی موارد:

الف) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، آرگون است، اما از هلیوم در کپسول غواصی استفاده می‌شود.

ب) از واکنش گاز اتن با هیدروژن کلرید، کلرو اتان به دست می‌آید که به عنوان افشانه بی‌حس‌کننده موضعی کاربرد دارد:



حلال چسب، استری به نام اتیل استات است.

پ) جامد حاصل از دو عنصر اول گروه ۱۴، همان سیلیسیم کربید (SiC) است که در تهیه سنباده به کار می‌رود.

ت) سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب، سلول الکترولیتی است که قطب منفی آن، همان کاتد است و در آن فلز منیزیم تولید می‌شود. این فلز در تهیه آلباژها و شربت معده کاربرد دارد:



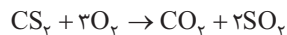
اگر هر میلی لیتر کربن دی سولفید (مایع)، $1/25$ گرم جرم داشته باشد، از سوختن چند میلی لیتر از آن مطابق واکنش زیر، $6/72$ لیتر گاز گوگرد دی اکسید در شرایط STP تولید می شود؟ ($C = 12, O = 16, S = 32 : g.mol^{-1}$)

گوگرد دی اکسید + کربن دی اکسید → گاز اکسیژن + کربن دی سولفید مایع

CS_2	O_2	CO_2	SO_2	$2/19$ (۱)
				$4/56$ (۲)
				$5/46$ (۳)
				$9/12$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



از حجم SO_2 شروع شده و با کسر تبدیل های مناسب، به حجم CS_2 می رسیم:

$$6/72 \text{ L } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol } SO_2}{22/4 \text{ L } SO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CS_2}{2 \text{ mol } SO_2} \times \frac{76 \text{ g } CS_2}{1 \text{ mol } CS_2} \times \frac{1 \text{ mL } CS_2}{1/25 \text{ g } CS_2} = 9/12 \text{ mL } CS_2$$

$$\frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1/25 \times x}{1 \times 76} = \frac{6/72}{2 \times 22/4} \Rightarrow x = \frac{76 \times 0/3}{1/25 \times 2} = \frac{76 \times 0/3}{2/5} = \frac{76 \times 0/3 \times 2}{5}$$

$$\times \frac{2}{2} \rightarrow x = \frac{76 \times 0/3 \times 2 \times 2}{10} = 9/12 \text{ mL } CS_2$$

په جور دیگه

اگر هر لیتر هگزان (مایع) $0/645$ گرم جرم داشته باشد، 40 لیتر از آن، شامل چند مول است و با چند مول اکسیژن به طور کامل می سوزد؟ (گزینه ها را از راست به چپ بخوانید. $H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

(سوال ۲۱۲ کنکور تهری ۱۴۰۱)

$2/85, 0/6$ (۲)	$1/56, 0/6$ (۱)
$2/85, 0/3$ (۴)	$1/56, 0/3$ (۳)

اگر انحلال پذیری نمک A در دمای 5°C برابر 20 و درصد جرمی محلول سیرشده این نمک در دمای 45°C برابر 50% باشد، کدام گزینه درست است؟ (رابطه انحلال پذیری و دما برای این نمک، خطی است).

(۱) معادله انحلال پذیری این نمک برحسب دما به صورت $S = 3\theta + 20$ است.

(۲) در دمای 30°C درصد جرمی محلول سیرشده این نمک در آب به تقریب برابر 70% است.

(۳) اگر 95 گرم محلول سیرشده این نمک از دمای 40°C تا 10°C سرد شود، 30 گرم نمک رسوب می‌کند.

(۴) انحلال پذیری این نمک همانند سولفات فلز قلیایی دوره دوم، در آب گرماگیر است.



پاسخ: گزینه ۲



اگر انحلال پذیری ماده‌ای در دمای معین برابر S باشد، درصد جرمی (a) محلول سیرشده آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a = \frac{S}{100+S} \times 100$$

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): ابتدا به کمک درصد جرمی محلول سیرشده در دمای 45°C ، انحلال پذیری نمک در این دما را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{S}{100+S} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{S}{100+S} \times 100 \Rightarrow S = 100$$

حالا به کمک دو نقطه، معادله انحلال پذیری نمک را به دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} (5, 20) & (45, 100) \\ \theta_1 & S_1 & \theta_2 & S_2 \end{matrix}$$

$$S - S_1 = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta - \theta_1) \Rightarrow S - 20 = \frac{100 - 20}{45 - 5} (\theta - 5) \Rightarrow$$

$$S = 2\theta + 10$$

گزینه (۲):

$$S = 2\theta + 10 \xrightarrow{\theta=30} S = 70$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{70}{100+70} \times 100 = 41/2$$

گزینه (۳): ابتدا باید انحلال پذیری نمک را در دماهای 40°C و 10°C به دست آوریم:

$$S = 2\theta + 10 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 40 \Rightarrow S_1 = 90 \Rightarrow \text{جرم محلول} = 100 + 90 = 190 \text{ g} \\ \theta = 10 \Rightarrow S_2 = 30 \Rightarrow \text{جرم محلول} = 100 + 30 = 130 \text{ g} \end{cases}$$

اگر 190 گرم محلول را از دمای 40°C تا 10°C سرد کنیم، $60 = 90 - 30$ گرم رسوب حاصل می‌شود؛ پس به ازای 95 گرم محلول $(\frac{190}{2} = 95)$ ، $30 = \frac{60}{2}$ گرم رسوب ایجاد خواهد شد.

گزینه (۴): نمودار انحلال پذیری نمک مورد نظر برحسب دما، صعودی است، یعنی انحلال آن، گرماگیر است، در حالی که نمودار انحلال پذیری سولفات فلز قلیایی دوره دوم (Li_2SO_4)، نزولی بوده و انحلال آن، گرماده می‌باشد.

اگر معادله انحلال پذیری یک نمک به صورت $S = -\theta/20 + 35$ باشد، چند مورد از مطالب زیر درباره این نمک درست است؟

(سوال ۲۱۹ کنکور تیرپی ۱۴۰۱)

- انحلال پذیری آن در دمای 60°C ، برابر 47 گرم در 100 گرم آب است.
 - محلول سیرشده آن در دمای 50°C ، یک محلول 20 درصد جرمی است.
 - روند انحلال پذیری آن نسبت به دما در آب، مشابه روند انحلال پذیری لیتیم سولفات است.
 - با سرد کردن 150 گرم محلول سیرشده آن از دمای 50°C به دمای 20°C ، 6 گرم نمک رسوب می کند.
- (۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک

گاز حاصل از تخمیر بی‌هوازی یک تن گلوکز با بازده ۹۰ درصد را از سوختن کامل چند کیلوگرم بنزن می‌توان به دست آورد؟ (H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol⁻¹)



۱۸۰ (۴)

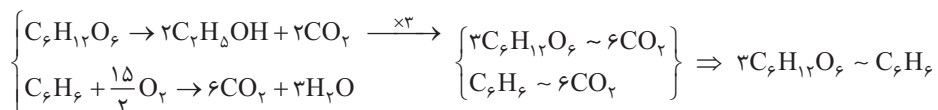
۱۴۵ (۳)

۱۳۰ (۲)

۱۱۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓
 تماماً می‌دونید که در این‌گونه سؤال‌ها، روش سریع‌تر این است که ضریب مادهٔ مشترک در واکنش‌ها را یکسان کرده و سپس، بین دو مادهٔ مورد نظر، تناسب برقرار کنیم:



$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1 \times 10^6 \times \frac{90}{100}}{3 \times \frac{180}{2}} = \frac{x}{1 \times 78} \Rightarrow x = \frac{78 \times 10^4}{6} \text{ g } C_6H_6 = 130 \text{ kg } C_6H_6$$

کدام موارد زیر درست است؟

الف) در ساختار آلکان‌ها، هر اتم کربن با ۴ پیوند اشتراکی به ۴ اتم هیدروژن متصل است.
ب) در آلکان‌های راست‌زنجیر، با افزایش جرم مولی، نقطه جوش افزایش، ولی تفاوت جرم مولی دو آلکان متوالی کاهش می‌یابد.

اتین

پ) مولکول سبک‌ترین هیدروکربن سیرنشده، دارای ۵ پیوند اشتراکی است. پروپین

ت) در ساختار دومین عضو خانواده آلکان‌ها، تفاوت شمار پیوندهای C-H و C-C برابر ۵ است.

۲) ب - پ

۱) الف - ب

۴) الف - ت

۳) پ - ت

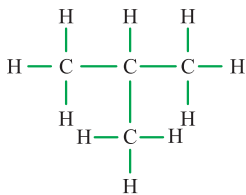
پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

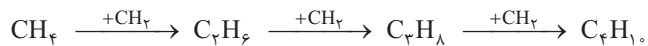
پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

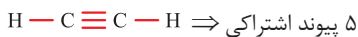
الف) در ساختار آلکان‌ها، هر اتم کربن با ۴ پیوند اشتراکی به ۴ اتم دیگر (کربن یا هیدروژن) متصل است، یعنی لزوماً هر اتم کربن به ۴ اتم هیدروژن متصل نیست:



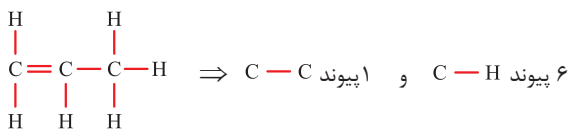
ب) با افزایش جرم مولی، نقطه جوش آلکان‌ها افزایش می‌یابد، اما تفاوت جرم مولی دو آلکان متوالی تغییر نمی‌کند. هر دو عضو متوالی از آلکان‌ها در یک گروه CH_2 با هم اختلاف دارند و تفاوت جرم مولی آن‌ها برابر ۱۴ است:



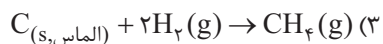
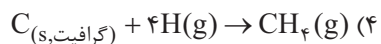
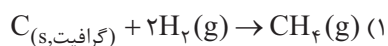
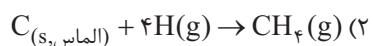
پ) سبک‌ترین هیدروکربن سیرنشده، اتین (C_2H_2) است:



ت) دومین عضو خانواده آلکان‌ها، پروپین (C_3H_6) است:



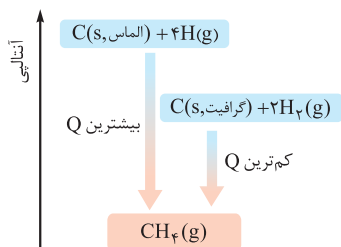
در شرایط یکسان، مقدار گرمای آزاد شده در اثر تشکیل یک مول متان در کدام واکنش زیر بیشتر است؟



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بیشترین مقدار گرمای مبادله شده مربوط به حالتی است که تفاوت سطح انرژی واکنش دهنده‌ها و فرآورده بیشتر باشد. می‌دانیم که الماس از گرافیت ناپایدارتر بوده و سطح انرژی بالاتری دارد، همچنین با توجه به تعریف آنتالپی پیوند، سطح انرژی $4\text{H}(\text{g})$ از $2\text{H}_2(\text{g})$ بالاتر است؛ در نتیجه بیشترین مقدار گرمای آزاد شده مربوط به واکنش (۲) است:



تفاوت جرم مولی اولین عضو خانواده اسیدهای آروماتیک با چهارمین عضو خانواده اسیدهای آلی زنجیره‌ای سیرشده،

۹۰



چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

۴۰ (۴)

۳۸ (۳)

۳۶ (۲)

۳۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اولین عضو خانواده اسیدهای آروماتیک، بنزوئیک اسید ($C_7H_6O_2$) است، از طرفی فرمول مولکولی چهارمین عضو خانواده

اسیدهای آلی زنجیره‌ای سیرشده ($C_n H_{2n} O_2$) به صورت $C_4 H_8 O_2$ است:

$$C_7 H_6 O_2 - C_4 H_8 O_2 = C_3 - H_2 = 36 - 2 = 34 \text{ g}$$

اگر گرمای سوختن ۱ مول اتان، ۲۶۱ کیلوژول بیشتر از گرمای سوختن ۱ مول اتین و ارزش سوختی هیدروژن، ۱۲۱ کیلوژول بر گرم باشد، ΔH واکنش $C_2H_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$ ، چند کیلوژول است؟ ($H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$)

$$\begin{array}{cccc} -۷۴۵ (۴) & +۲۲۳ (۳) & -۲۲۳ (۲) & -۱۹ (۱) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

به کمک آنتالپی سوختن واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها، می‌توان ΔH یک واکنش را حساب کرد:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده‌ها}]$$

ابتدا آنتالپی سوختن هیدروژن را حساب می‌کنیم:

$$\text{آنتالپی سوختن} \left[\frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی}} \right] = \text{آنتالپی سوختن } H_2 = -(121 \times 2) = -242 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

حالا رابطه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های سوختن را می‌نویسیم:



$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \Delta H_{\text{سوختن}}(C_2H_2) + 2\Delta H_{\text{سوختن}}(H_2) - \Delta H_{\text{سوختن}}(C_2H_6)$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \Delta H_{\text{سوختن}}(C_2H_2) - 261 \text{ kJ} \rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = -(-261) + 2(-242) = -223 \text{ kJ}$$

آنتالپی سوختن مواد، منفی است؛ بنابراین وقتی گفته می‌شود گرمای سوختن ۱ مول اتان، ۲۶۱ کیلوژول بیشتر از گرمای سوختن ۱ مول اتین است، یعنی آنتالپی سوختن اتان، به اندازه ۲۶۱ کیلوژول منفی‌تر از آنتالپی سوختن اتین است؛ مثلاً آنتالپی سوختن اتین، $-1300 \text{ kJ.mol}^{-1}$ و آنتالپی سوختن اتان، $-1561 \text{ kJ.mol}^{-1} = -1300 - 261$ است. اگر علامت منفی را برای ۲۶۱ قرار ندهیم (یعنی بنویسیم: $261 = (\Delta H(C_2H_6) - \Delta H(C_2H_2))$)، به اشتباه به گزینه ۴ می‌رسیم:

$$\Delta H = -261 - 2(-242) = -745 \text{ kJ}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

اگر سرعت متوسط مصرف جوش شیرین در واکنش زیر برابر $0.03 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، سرعت کاهش جرم مخلوط واکنش، چند گرم بر ثانیه است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



$$0.093 \text{ (۴)} \quad 0.031 \text{ (۳)} \quad 0.0155 \text{ (۲)} \quad 0.001 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل خروج گازهای CO_2 و H_2O از ظرف واکنش است؛ پس باید با استفاده از سرعت مصرف جوش شیرین، سرعت تولید گازها را حساب کنیم:

$$\bar{R}(\text{NaHCO}_3) = 0.03 \frac{\text{mol}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{1}{2000} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$



$$\bar{R}(\text{CO}_2) = \bar{R}(\text{H}_2\text{O}) = \frac{1}{2} \bar{R}(\text{NaHCO}_3) = \frac{1}{4000} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{R}(\text{CO}_2) = \frac{1}{4000} \frac{\text{mol}}{\text{s}} \times \frac{44 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 0.011 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{R}(\text{H}_2\text{O}) = \frac{1}{4000} \frac{\text{mol}}{\text{s}} \times \frac{18 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = \frac{9}{2000} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{سرعت کاهش جرم مخلوط: } \frac{11}{1000} + \frac{9}{2000} = \frac{31}{2000} = 0.0155 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

په چور دیگه

با توجه به سرعت مصرف NaHCO_3 ، در هر ثانیه، $\frac{1}{2000}$ مول از این ماده مصرف می‌شود. حالا تعداد مول مصرفی این ماده را به مجموع جرم گازهای تولیدشده تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}_{\text{NaHCO}_3} = \frac{\text{مجموع جرم}}{(\text{جرم مولی } A \times \text{ضریب } A) + (\text{جرم مولی } B \times \text{ضریب } B)}_{\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}} \Rightarrow \frac{1}{2000} = \frac{x}{(1 \times 44) + (1 \times 18)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{62}{4000} = 0.0155 \text{ g}$$

در هر ثانیه، $0.0155 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ گرم گاز تولید می‌شود؛ بنابراین سرعت کاهش جرم مخلوط برابر با $0.0155 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ است.

اگر جدول زیر مربوط به آبکافت متیل فورمات در ظرفی به حجم ۲ لیتر باشد، در بازه ۳۰ تا ۹۰ ثانیه، چند گرم الکل تولید شده است؟ (H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol⁻¹)

۰/۰۸	۰/۱۲	۰/۱۷	۰/۲۳	۰/۳۱	۰/۴۲	۰/۵۵	[استر]
۹۰	۷۵	۶۰	۴۵	۳۰	۱۵	۰	زمان (s)

۱۴/۷۲ (۴)

۱۳/۸ (۳)

۷/۳۶ (۲)

۶/۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

از آبکافت متیل فورمات، متانول و فورمیک اسید تولید می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فورمیک اسید + متانول → آب + متیل فورمات

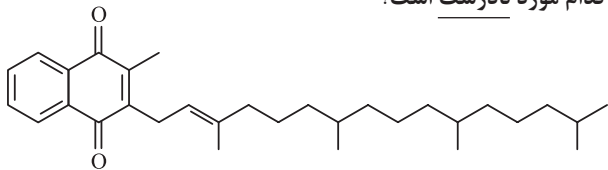
با توجه به جدول، در بازه ۳۰ تا ۹۰ ثانیه، غلظت استر از ۰/۳۱ به ۰/۰۸ مولار رسیده است:

$$\Delta n (\text{استر}) = (0.31 - 0.08) \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 2\text{L} = 0.46 \text{ mol}$$

به ازای مصرف هر مول استر، ۱ مول الکل تولید می‌شود؛ پس باید جرم ۰/۴۶ مول متانول را حساب کنیم:

$$0.46 \text{ mol CH}_3\text{OH} \times \frac{32 \text{ g CH}_3\text{OH}}{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}} = 14.72 \text{ g CH}_3\text{OH}$$

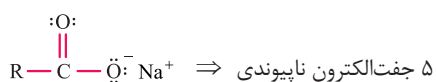
اگر شکل زیر مربوط به ویتامین کا (K) باشد، کدام مورد نادرست است؟



- (۱) شمار گروه‌های CH_3 در ساختار آن با شمار این گروه‌ها در ۴ - اتیل - ۲، ۲ - تری‌متیل هگزان برابر است.
 (۲) همانند ویتامین آ (A) در آب نامحلول است.
 (۳) در ساختار آن مانند ساختار پاک‌کننده‌های صابونی جامد، ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.
 (۴) مانند ۲- هپتانون، دارای گروه عاملی کربونیل است.

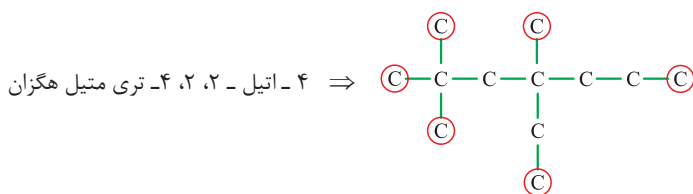
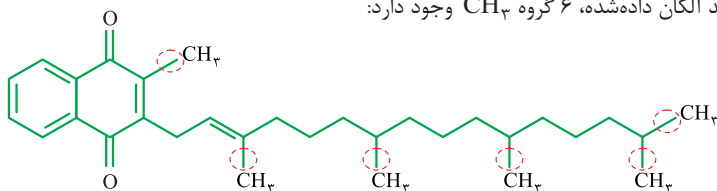
پاسخ: گزینه ۲

هر اتم اکسیژن در ساختار ویتامین کا دارای دو جفت‌الکترون ناپیوندی است، اما دقت کنید که در ساختار صابون‌های جامد، یکی از اتم‌های اکسیژن دارای ۳ جفت‌الکترون ناپیوندی می‌باشد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در ساختار ویتامین K مانند آلکان داده‌شده، ۶ گروه CH_3 وجود دارد:



گزینه (۲): در ویتامین‌های A، D و K، بخش ناقطبی بر قطبی غلبه دارد؛ به همین دلیل، این ویتامین‌ها در آب حل نمی‌شوند.

گزینه (۴): ۲ - هپتانون، یک کتون است و مانند ویتامین K، دارای گروه کربونیل (C) می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مورد ترکیب‌های A، B، X و D، کدام گزینه نادرست است؟

- A) $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_3\text{COO}^- \text{K}^+$
 B) $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3^- \text{Na}^+$
 X) $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{16}\text{COO}^- \text{NH}_4^+$
 D) $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{16}\text{COOH}$

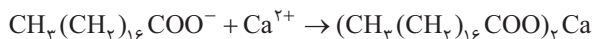
(۱) D از اجزای سازنده چربی است که مخلوط آن با آب و X، یک مخلوط ناهمگن پایدار است.
 (۲) بر اثر واکنش ترکیب X با کلسیم کلرید، رسوبی ایجاد می‌شود که نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها در فرمول آن برابر ۲۷/۷۵ است.
 (۳) A در دمای اتاق، مایع بوده و از آن می‌توان جهت شوینده صنعتی استفاده کرد.
 (۴) ترکیب B از مواد پتروشیمی در صنعت تولید می‌شود و افزودن یون فسفات به آن، باعث افزایش چشمگیری در قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت نخواهد شد.

پاسخ: گزینه ۳

زنجیر هیدروکربنی ترکیب A، کوتاه است و خاصیت پاک‌کنندگی مناسبی ندارد؛ بنابراین از آن نمی‌توان به عنوان شوینده صنعتی استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): D یک اسید چرب است و می‌تواند از اجزای سازنده چربی‌ها باشد. از طرفی X، یک پاک‌کننده صابونی است. مخلوط آب، چربی و صابون از نوع کلوئید است. کلوئیدها، مخلوط‌هایی ناهمگن اما پایدار هستند.
 گزینه (۲): یون کلسیم با بخش آنیونی صابون واکنش داده و رسوب تشکیل می‌شود:



$$\Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌ها}}{\text{شمار عنصرها}} = \frac{111}{4} = 27/75$$

گزینه (۴): ترکیب B یک پاک‌کننده غیرصابونی است و از مواد پتروشیمیایی در صنعت تهیه می‌شود. پاک‌کننده‌های غیرصابونی با یون‌های موجود در آب سخت، رسوب تشکیل نمی‌دهند و خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند؛ بنابراین افزودن نمک‌های فسفات به این پاک‌کننده‌ها، تأثیر خاصی بر قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها نخواهد داشت.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرایند یونش کدام اسید در آب، تعادلی نیست؟

اسید، قوی است.

(۲) هیدروسیانیک اسید

(۱) نیترو اسید

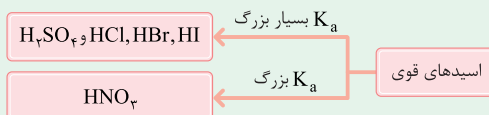
(۴) متانویک اسید

(۳) هیدروبرمیک اسید

پاسخ: گزینه ۳

هیدروبرمیک اسید (HBr) برخلاف بقیه اسیدهای داده شده، قوی است و یونش آن در آب، به طور کامل است.

اسیدهای قوی بر اثر حل شدن در آب، تقریباً به طور کامل یونیده می شوند، پس ثابت یونش اسیدهای قوی، عددی بسیار بزرگ و یا بزرگ است:



اسیدهای ضعیف در آب به طور جزئی یونیده می شوند و معادله یونش آنها در آب، تعادلی است. با توجه به مطالب صفحه های ۲۲ و ۲۳ کتاب درسی، ترتیب K_a و قدرت اسیدی چند اسید ضعیف به صورت زیر است:



یارتون باشه که در بین این ۶ اسید ضعیف، هیدروفلوئوریک اسید (HF)، قوی ترین و هیدروسیانیک اسید (HCN)، ضعیف ترین است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

اگر حجم ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۵ مولار هیدروکلریک اسید با افزودن آب مقطر دو برابر شود، pH محلول

- (۱) ۰/۵ واحد افزایش می یابد
 (۲) دو برابر می شود
 (۳) ۰/۳ واحد کاهش می یابد
 (۴) تغییری نمی کند

پاسخ: گزینه ۲



اگر با افزودن آب خالص به محلول یک اسید یا باز قوی، حجم آن را n برابر کنیم یا به عبارت دیگر، محلول را n مرتبه رقیق کنیم، pH آن به اندازه $\log n$ تغییر می کند:

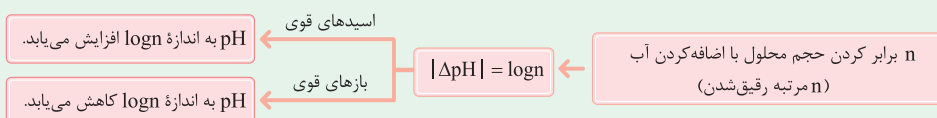
$$|\Delta \text{pH}| = \log n = \log \frac{V_2}{V_1}$$

n : تعداد مرتبه های رقیق شدن

V_1 : حجم اولیه محلول اسید یا باز (محلول غلیظ)

V_2 : حجم نهایی محلول اسید یا باز (محلول رقیق)

با رقیق کردن محلول های اسیدی و بازی، خاصیت اسیدی و بازی آن ها کم شده و pH آن ها به ترتیب افزایش و کاهش می یابد.



با دو برابر شدن حجم محلول اسید قوی، pH محلول به اندازه $\log 2$ یعنی ۰/۳ واحد زیاد می شه! اما می بینید که این عبارت را در گزینه ها نداریم! پس بیایید pH اولیه و نهایی محلول را حساب کنیم:

$$\text{pH}_1 = -\log(\text{H}^+) = -\log 0.5 = -\log(5 \times 10^{-1}) = 1 - \log 5 = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$\text{pH}_2 = \text{pH}_1 + 0.3 = 0.6$$

pH محلول از ۰/۳ به ۰/۶ رسیده، یعنی دو برابر شده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام گزینه، جمله زیر را به نادرستی تکمیل می‌کند؟

«اگر در سلول گالوانی دارای نیم‌سلول‌های A و B، جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت تیغه A باشد، قطعاً می‌توان گفت.....»

(۱) A^{n+} نسبت به B^{m+} ، اکسندۀ قوی‌تری است

(۲) با گذشت زمان، از جرم الکتروود A کاسته و به جرم الکتروود B افزوده می‌شود

(۳) واکنش $A + B^{m+} \rightarrow$ به طور خودبه‌خودی انجام نمی‌شود

(۴) نیم‌واکنش اکسایش در نیم‌سلول B و نیم‌واکنش کاهش در نیم‌سلول A انجام می‌شود

پاسخ: گزینه ۲

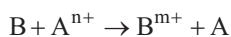
پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

در سلول‌های گالوانی

نیم‌سلول کاتد	نیم‌سلول آند
قطب مثبت است.	قطب منفی است.
در آن نیم‌واکنش کاهش صورت می‌گیرد.	در آن نیم‌واکنش اکسایش صورت می‌گیرد.
E° آن نسبت به E° آند، بزرگ‌تر است.	E° آن نسبت به E° کاتد، کوچک‌تر است.
با گذشت زمان، غلظت کاتیون‌های الکتروولیت کم می‌شود.	با گذشت زمان، غلظت کاتیون‌های الکتروولیت زیاد می‌شود.
به طور معمول جرم تیغه افزایش می‌یابد (چاق می‌شود).	به طور معمول جرم تیغه کاهش می‌یابد (لاغر می‌شود).
کاتیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می‌شوند.	آنیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می‌شوند.

در سلول‌های گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ پس در این‌جا، الکتروود A، کاتد و الکتروود B، آند است:

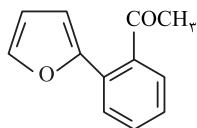


قدرت اکسندگی: $A^{n+} > B^{m+}$

قدرت کاهشندگی: $B > A$

بنابراین با گذشت زمان، از جرم الکتروود B کاسته و به جرم الکتروود A، افزوده می‌شود.

۱۰۱ اگر در ساختار زیر، شمار اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند را a و شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش صفر را b بنامیم، کدام رابطه درست است؟



$$a = b \quad (۱)$$

$$b = ۱/۵a \quad (۲)$$

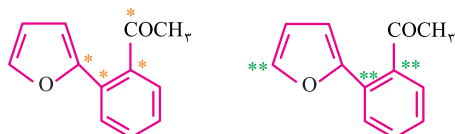
$$a = b + ۱ \quad (۳)$$

$$b = a + ۱ \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کربن‌های *دار به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند و کربن‌های **دار، دارای عدد اکسایش صفر هستند:



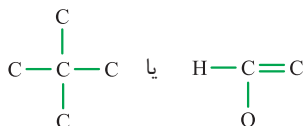
$$a = ۴$$

$$b = ۳$$

دقت کنید که علاوه بر اتم‌های کربنی که به ۴ اتم کربن دیگر متصل هستند، یک اتم کربن نیز وجود دارد که با پیوند دوگانه به یک اتم کربن و با پیوندهای یگانه، به یک اتم اکسیژن و یک اتم هیدروژن متصل است. در هر دوی این حالت‌ها، ۴ الکترون به اتم کربن نسبت داده می‌شود:

شمار الکترون‌های نسبت داده شده به اتم - شمار الکترون‌های ظرفیت اتم = عدد اکسایش اتم

$$* = ۴ - ۴ = ۰$$



با توجه به جدول زیر که مربوط به نقطه جوش پروپان، دی‌متیل اتر و اتانول است، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

ماده	نقطه جوش (°C)
A	۷۸
B	-۴۲
X	-۲۴

الف) دی‌متیل اتر برخلاف پروپان، در دمای اتاق به حالت مایع است.

ب) ماده A همان اتانول است و برخلاف دو ماده دیگر، در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

پ) مواد A و X، ایزومر یکدیگرند و مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در آن‌ها برابر است.

ت) در اثر سوختن کامل هر مول B، ۷ مول فراورده تولید می‌شود.

(۱) پ و ت

(۲) الف و ب

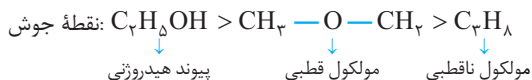
(۳) الف و پ

(۴) ب و ت

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



پس A، B و X به ترتیب اتانول، پروپان و دی‌متیل اتر هستند.

بررسی عبارت‌ها:

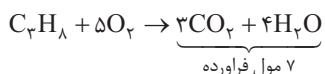
الف) نقطه جوش دی‌متیل اتر و پروپان، منفی (پایین‌تر از دمای اتاق) است؛ بنابراین هر دو در دمای اتاق به حالت گازند.

ب) همان اتانول است اما دی‌متیل اتر نیز مانند اتانول، قطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

پ) A و X، همان اتانول و دی‌متیل اتر هستند. فرمول مولکولی این دو ترکیب، $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$ است؛ پس ایزومر یکدیگر هستند و

مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در آن‌ها برابر است.

ت) B همان پروپان است:



۱۰۳ اگر حجم سامانه در حال تعادل $2\text{NO}_2(\text{g}) \rightleftharpoons \text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$ در دمای ثابت، دو برابر شود،

- (۱) به دلیل ثابت بودن دما، نه تعادل جابه‌جا می‌شود و نه مقدار ثابت تعادل تغییر می‌کند
- (۲) به دلیل کم شدن غلظت مواد، مقدار ثابت تعادل تغییر می‌کند و تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود
- (۳) تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود، اما مقدار ثابت تعادل تغییر نمی‌کند
- (۴) غلظت‌های تعادلی مواد و مقدار ثابت تعادل، کاهش می‌یابد

پاسخ: گزینه ۳

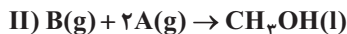
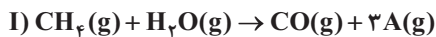
تنها عاملی که می‌تواند مقدار ثابت تعادل یک واکنش را تغییر دهد، دما است.



با توجه به ثابت بودن دما، مقدار ثابت تعادل تغییر نمی‌کند؛ بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) پُر! از طرفی به دلیل افزایش حجم (کاهش فشار)، تعادل به سمت تولید تعداد مول‌های گازی بیشتر یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌شود؛ پس گزینه (۱) هم پُر!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$) **۱۰۵**

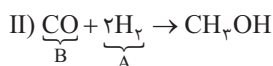
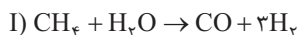


- (۱) گاز A یکی از فراورده‌های واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب است.
- (۲) درصد جرمی کربن در ماده‌آلی موجود در واکنش (II)، دو برابر آن در ماده‌آلی واکنش (I) است.
- (۳) تغییر عدد اکسایش اتم کربن در واکنش (I)، برابر ۲ بوده و متان در آن نقش کاهنده دارد.
- (۴) میل ترکیبی گاز B با اکسیژن هوا، بیش از ۲۰۰ برابر هموگلوبین خون بوده و این گاز بسیار سمی است.

پاسخ: گزینه ۱

معادله کامل شده واکنش‌ها به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



A، همان گاز هیدروژن است که در واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب نیز به دست می‌آید:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): مواد آلی موجود در واکنش‌های (I) و (II) به ترتیب CH_4 و CH_3OH هستند. جرم مولی این دو ماده به ترتیب ۱۶ و ۳۲ گرم بر مول است. از اون‌جایی که هر دو دارای یک اتم کربن هستند، می‌توان گفت درصد جرمی کربن در متانول، نصف متان است:

$$CH_4 \text{ در } C = \frac{1 \times 12}{16} \times 100$$

$$CH_3OH \text{ در } C = \frac{1 \times 12}{32} \times 100$$

گزینه (۳): عدد اکسایش اتم کربن در واکنش (I) از -۴ در CH_4 به +۲ در CO می‌رسد، یعنی ۶ واحد تغییر می‌کند.

گزینه (۴): برعکس گفته! میل ترکیبی B (کربن مونوکسید) با هموگلوبین خون، بیش از ۲۰۰ برابر میل ترکیبی اکسیژن با هموگلوبین خون است.