www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله اول پلاس

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۲۹/خرداد/۱۴۰۵

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۲	۱	۱۲	۴۵ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۴	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۵۱	فصل ۱ تا ۵ صفحهٔ ۱ تا ۱۱۷
هندسه	۷	۱۳	۱۹		کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۸۶	کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۷۵	کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۹۶
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۶	۲۰	۲۵		کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۸۴	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۱	فصل ۶ و ۷ صفحهٔ ۱۱۸ تا ۱۷۰
مجموع	۲۵ سؤال			۴۵ دقیقه	–		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ علی شهرابی محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل‌زاده ـ سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی حمید گلزاری ـ حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: سید عباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ عطا صادقی ـ سعید قندچی سروش موئینی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب ـ سعید قندچی	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها،زمان پاسخگویی،نوع چینش گزینه‌ها،نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات،سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

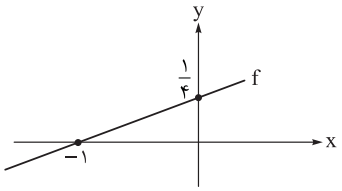
Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

۱- اگر برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x+\frac{x}{|x|}+۳}$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)-[a,b]$ باشد، تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{b^۲-x^۲}$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

۲- نمودار تابع خطی f در شکل زیر رسم شده است. اگر $g(x)=\frac{f^{-۱}(x)-۲x}{x+f(x)+۳}$ باشد، روی کدام بازه، نمودار تابع $g^{-۱}$ می‌تواند بالاتر از نمودار تابع $f^{-۱}$ باشد؟



۱) $(-\infty,۲]$
۲) $[۲,+\infty)$
۳) $[۱,+\infty)$
۴) $(-\infty,۱]$

۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\cos ۲x(۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x)=۱$ در بازهٔ $(-۳\pi,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

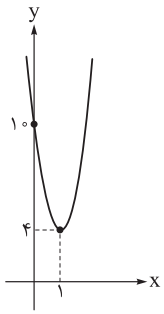
۴- حد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[۳]{\cos x}\sqrt[۴]{\cos x}}{۴-(\cos x+\sqrt{\cos x}+\sqrt[۳]{\cos x}+\sqrt[۴]{\cos x})}$ وقتی $x\to ۰$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۵- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a & ;\ x=۱ \\ \frac{۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}-\frac{b}{x^۴-۱} & ;\ x\neq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

۶- نمودار تابع درجه‌دوم $y=f'(x)$ در شکل زیر رسم شده است. آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۱,۳]$ کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۲۴
۴) ۲۸

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

۷- اگر $g(x)=x^{۳}$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x-۲|g^{-۱}(x)}{(x-۱)^{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۸- مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۳۰ و مجموع مربعات جملات اول و دوم ۱۱۶ است. اگر جملهٔ پنجم این دنباله بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -۱۰ ۳) ۴ ۴) -۴

۹- حاصل عبارت $\sqrt{۸-۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}+\sqrt{۸+۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲}$

۱۰- حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ای که جواب‌های آن از دو برابر جواب‌های معادلهٔ $x^{۳}-۳x+۱=۰$ یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۱۹ ۴) -۱۹

۱۱- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x}{x^{۲}-۴x+۱}+\frac{۲x}{(x-۱)^{۲}}=۱$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $\log_{۳}(۹^{x}+۲)=x+۳$ باشند، حاصل عبارت $\log_{(۳^{(\alpha+\beta)}+۱)}(۳^{\alpha}+۳^{\beta})$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۹}$

محل انجام محاسبات

۱۳- مثلثی به اضلاع $۲\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{۶}$ و ۶ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مثلث وجود دارد که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از خط‌های عمودمنصف بزرگ‌ترین ضلع و ارتفاع وارد بر این ضلع، برابر یک واحد باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۴- یک صفحه از وسط‌های سه یال دوبه‌دو متنافر در یک مکعب به طول ضلع ۲ عبور می‌کند. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد این صفحه با مکعب کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$

۱۵- در دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقینی به قاعدهٔ ۱۴ و محیط ۶۲ واحد، طول وتری که از وسط‌های دو ساق مثلث می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۱۶- نقطهٔ $B(-۶,-۸)$ را تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات (نقطهٔ O) و زاویهٔ ۱۲۰° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تصویر می‌کنیم تا نقطهٔ C به دست آید. سپس نقطهٔ C را تحت دوران به همان مرکز و زاویهٔ ۱۵۰° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تصویر می‌کنیم تا نقطهٔ A حاصل شود. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۵۰+۲۵\sqrt{۳}$ ۲) $۵۰+۵۰\sqrt{۳}$

۳) $۲۵+۲۵\sqrt{۳}$ ۴) $۷۵+۲۵\sqrt{۳}$

۱۷- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & x+۱ & -۳\\ ۱ & -۳ & x+۱\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه مقدار x کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) -۴

۱۸- یکی از دو دایرهٔ $C_۱: x^۲+y^۲+۴x-۵=۰$ و $C_۲: x^۲+y^۲+۲x+۴y+k=۰$ از مرکز دیگری می‌گذرد. وتر مشترک این دو دایره، خط‌المرکزین آن‌ها را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

۱۹- در مثلث ABC به رأس‌های $A=(۱,۲,-۱)$، $B=(۳,۱,۱)$ و $C=(-۵,-۱,۱)$، میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم. حاصل $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM}$ کدام است؟

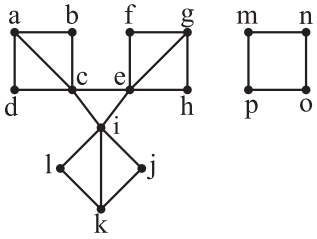
۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

۲۰- عدد ۴رقمی $\overline{۳a۲۵}=n$ و ۳رقمی $\overline{۷b۱}=m$ به صورتی هستند که $(m+n)^۲$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. زوج مرتب (a,b) چند حالت ممکن است داشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۱- تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال هفت‌عضوی گراف زیر، کدام است؟



۱) ۳۶
۲) ۷۲
۳) ۱۴۴
۴) ۱۵۰

۲۲- چند عدد طبیعی سه‌رقمی، زوج یا مکعب کامل یا مضرب ۳۷ هستند؟

۱) ۴۶۵ ۲) ۴۶۶ ۳) ۴۶۷ ۴) ۴۷۵

۲۳- اگر $A\cup B=U$ باشد، حاصل $[(A-B)\cup(B-A)]'\cup(B-A)$ کدام است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) A ۲) B ۳) $B\cap A$ ۴) $\varnothing$

۲۴- روی شش وجه یک تاس عددهای ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و روی شش وجه تاس دیگری عددهای ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ نوشته شده است. این دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و سپس به تعداد مجموع دو عدد روشده سکه پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی همهٔ سکه‌های پرتاب‌شده یکسان آمده‌اند؟

۱) $\frac{۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۲۵- میانگین دستهٔ A با ۴ دادهٔ مختلف برابر میانگین دستهٔ B با ۶ داده است. به طوری که تنها دادهٔ متفاوت دو دسته، داده‌های b و a هستند. اگر $۱۲\sigma_B^۲-۸\sigma_A^۲=۳۶$ باشد، قدرمطلق اختلاف a از $\bar{x}_A$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی **Kheilisabz_edit**@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله اول پلاس

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۲۹/خرداد/۱۴۰۵

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۲۰	۲۶	۴۵	۲۵ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۵۶	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۳۰	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۹
شیمی	۱۵	۴۶	۶۰	۱۵ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۳	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۳	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۲
مجموع	۳۵ سؤال			۴۰ دقیقه	–		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
فیزیک	طراحان: هادی حمزه‌پور ـ نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ سعید محبی ـ هادی نجفی	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	طراحان: عباس سرمایه ـ حسین شرانلو ـ محمد عظیمیان‌زواره ـ محمد قهرمانی‌نژاد محسن مجنونی کارشناسان علمی: محمدمهدی کریمیان ـ مرتضی نصیرزاده	عباس سرمایه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

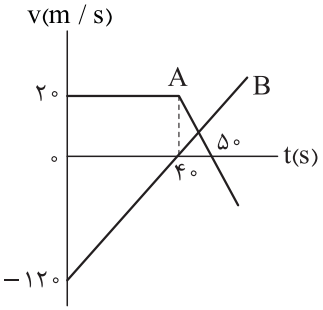
دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها،زمان پاسخگویی،نوع چینش گزینه‌ها،نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات،سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

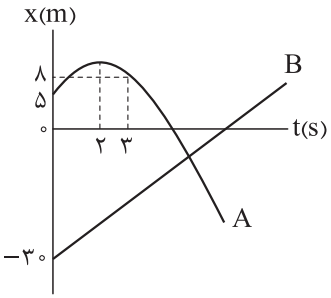
Telegram: @konkur_in

۲۶- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند و هر دو در مبدأ زمان از مبدأ مکان عبور می‌کنند، به شکل زیر است. از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، بیشینهٔ فاصلهٔ آن‌ها از هم چند متر است؟



۱) ۳۱۵۰
۲) ۳۲۰۰
۳) ۳۲۴۰
۴) ۳۲۸۸

۲۷- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. حرکت متحرک A با شتاب ثابت و حرکت متحرک B با سرعت ثابت است. در لحظه‌ای که جهت بردار مکان متحرک A تغییر می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۰ متر است. در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند، تندی متحرک A از تندی متحرک B چند متر بر ثانیه بیشتر است؟

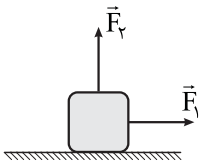


۱) ۷
۲) ۷/۵
۳) ۱۱
۴) ۱۵

۲۸- در شرایط خلأ، از ارتفاع ۱۲۰متری سطح زمین، گلولهٔ A رها می‌شود. بعد از ۲/۵ ثانیه، از ۵۰ متر پایین‌تر از نقطهٔ رهاشدن گلولهٔ A، گلولهٔ B رها می‌شود. در لحظه‌ای که فاصلهٔ این دو گلوله برای دومین بار برابر ۶/۲۵ متر می‌شود، فاصلهٔ گلولهٔ A از سطح زمین چند متر است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$)

۱) ۴۵
۲) ۵۸/۷۵
۳) ۶۱/۲۵
۴) ۷۵

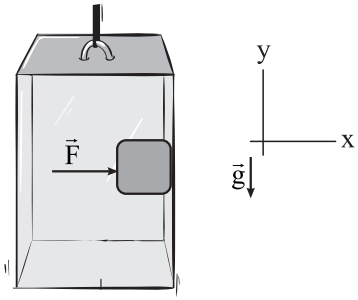
۲۹- در شکل زیر، جعبه‌ای به جرم ۲۰ kg روی سطح افقی ساکن است. به این جعبه نیروی افقی و ثابت $F_۱ = ۴۰\ N$ و نیروی عمودی و متغیر $F_۲ = ۱۰t$ وارد می‌شود. کدام مورد دربارهٔ جابه‌جایی جعبهٔ (d) در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰\ s$ تا $t_۲ = ۱۶\ s$ درست است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$، ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب ۰/۵ و ۰/۴ است و همهٔ مقادیر داده‌شده در سؤال و گزینه‌ها در SI هستند.)



۱) $۶ < d < ۱۸$
۲) $۰ < d < ۱۶$
۳) $۳/۲ < d < ۱۴$
۴) $۳/۲ < d < ۱۶$

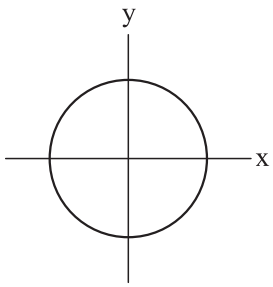
محل انجام محاسبات

۳۰- در شکل زیر، معادلهٔ سرعت ـ زمان آسانسور در SI به صورت $v = ۲t - ۸$ است. شخصی درون این آسانسور جسمی به جرم $۲\,kg$ را با نیروی افقی $F = ۳۲\,N$ به دیوارهٔ قائم آسانسور می‌فشارد. در لحظهٔ $t = ۲\,s$، بزرگی نیرویی که جسم به دیوارهٔ آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰\,N/kg$ و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و دیوار قائم به ترتیب ۰/۷۵ و ۰/۶ است.)



۱) ۴۰
۲) $۴\sqrt{۷۳}$
۳) $۱۶\sqrt{۵}$
۴) $۲۴\sqrt{۲}$

۳۱- در شکل زیر، دایره‌ای به شعاع $۴\,m$ در صفحهٔ y ـ x قرار دارد و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات است. جسمی به جرم $۲\,kg$ روی محیط این دایره با تندی ثابت در جهت پادساعتگرد در حال حرکت است. اگر در لحظهٔ $t_۱$، بردار نیروی مرکزگرای وارد بر این جسم در SI برابر $\vec{F} = \frac{\pi^۲}{۲}\vec{j}$ باشد، بردار شتاب متوسط این جسم در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲ = t_۱ + ۲\,s$ در SI کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}(-\vec{i} + \vec{j})$
۲) $\frac{\pi}{۲}(\vec{i} - \vec{j})$
۳) $\pi(-\vec{i} + \vec{j})$
۴) $\pi(\vec{i} - \vec{j})$

۳۲- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۱۸\cos(\omega t)$ است. اگر برای اولین بار، جابه‌جایی نوسانگر در دو ثانیهٔ سوم و دو ثانیهٔ چهارم برابر باشد، کمینهٔ مسافتی که این متحرک در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۸ ثانیه‌ای طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟ ($\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ و $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$)

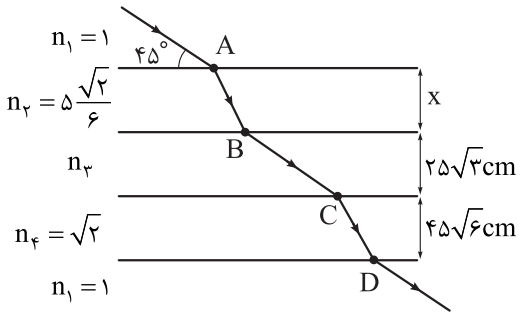
۱) ۳۰/۶
۲) ۱۸
۳) ۱۰/۸
۴) ۵/۴

۳۳- چشمهٔ صوتی روی محور x و در مبدأ مکان ساکن است و صوتی با بسامد معین تولید می‌کند. شنونده‌ای که با سرعت ثابت در جهت محور x در حال حرکت است، در مبدأ زمان از مبدأ مکان عبور می‌کند. در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۶\,s$، به ترتیب، تراز شدت صوتی که شنونده دریافت می‌کند، چند دسی‌بل است و بسامد صوت دریافتی شنونده، چگونه تغییر می‌کند؟ ($\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۵$)

۱) ۶ ـ کاهش می‌یابد.
۲) ۶ ـ تغییر نمی‌کند.
۳) ۱۰ ـ کاهش می‌یابد.
۴) ۱۰ ـ تغییر نمی‌کند.

محل انجام محاسبات

۳۴- در شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگی از هوا وارد محیط‌هایی با مرزهای موازی شده و پس از عبور از آن‌ها دوباره وارد هوا می‌شود. اگر مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا این پرتو از نقطهٔ C به نقطهٔ D برسد، ۱/۲ برابر مدت‌زمانی باشد که پرتو نور از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد، x چند سانتی‌متر است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$)



۱) $۵۴\sqrt{۲}$

۲) $۷۲\sqrt{۲}$

۳) ۹۰

۴) ۱۲۰

۳۵- در مدل اتمی بور برای هیدروژن، الکترونی در kاُمین حالت برانگیختهٔ خود قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، این الکترون می‌تواند فقط ۴ نوع فوتون در محدودهٔ فرابنفش تابش کند. برای گذار این الکترون به حالت برانگیخته $(k+۱)$اُم، بسامد فوتونی که باید جذب کند، تقریباً چند تراهرتز است؟ ($E_R = ۱۳/۶ eV$ و $h = ۴\times ۱۰^{-۱۵} eV.s$)

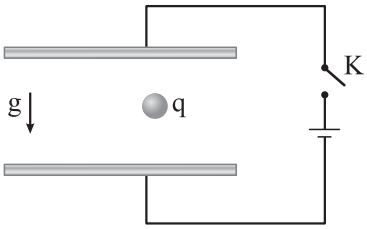
۱) ۴۱/۵

۲) ۷۶/۵

۳) ۷۶۵

۴) ۴۱۵

۳۶- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی q در فضای خلأ بین دو صفحهٔ باردار و افقی یک خازن، با سرعت ثابت، رو به بالا در حال حرکت است. با کدام تغییر، حرکت رو به بالای ذره، کندشونده می‌شود؟



۱) کاهش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K بسته است.

۲) افزایش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K بسته است.

۳) کاهش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K باز است.

۴) افزایش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K باز است.

۳۷- مقاومت الکتریکی یک سیم $۰/۵\ \Omega$ است. دو سر این سیم را به دو سر یک باتری با مقاومت درونی $۲\ \Omega$ وصل می‌کنیم. در این حالت توان الکتریکی مصرفی سیم برابر P است. سیم را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده و یکی از قسمت‌ها را از ابزاری عبور می‌دهیم تا طول آن به طور یکنواخت n برابر شود؛ سپس دو سر آن را به دو سر همان باتری وصل می‌کنیم. اگر در این حالت هم توان الکتریکی مصرفی سیم برابر با P باشد، n برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴

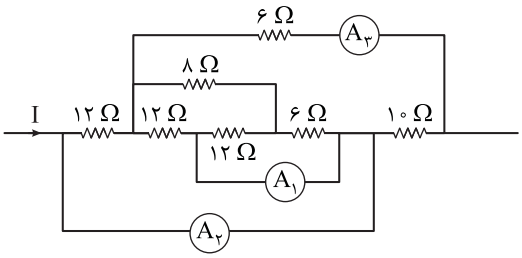
۲) ۸

۳) ۱۶

۴) ۶۴

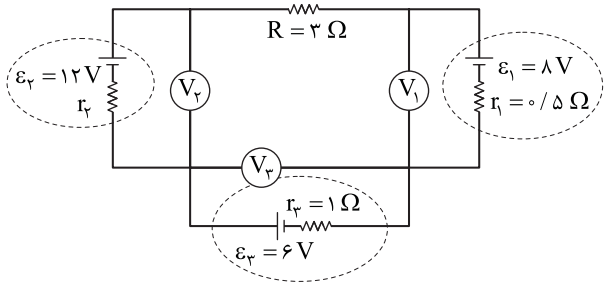
محل انجام محاسبات

۳۸- شکل زیر، قسمتی از یک مدار را نشان می‌دهد که در آن آمپرسنج آرمانی A_2 مقدار $7/5\,A$ را نشان می‌دهد. اختلاف مقدارهایی که دو آمپرسنج آرمانی A_1 و A_3 نشان می‌دهند، چند آمپر است؟



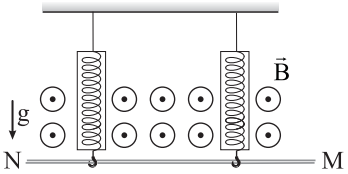
۱) ۱/۵
۲) ۴/۵
۳) ۰/۵
۴) ۲/۵

۳۹- در مدار شکل زیر، اگر مقداری که ولت‌سنج آرمانی V_2 نشان می‌دهد، $\frac{11}{9}$ برابر مقداری که ولت‌سنج آرمانی V_1 نشان می‌دهد، باشد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی V_3 نشان می‌دهد، چند ولت است؟



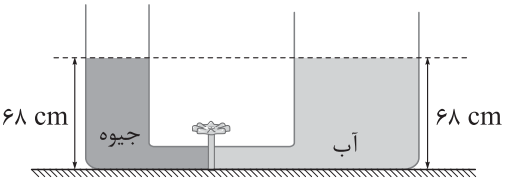
۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۸

۴۰- در شکل زیر، سیمی به طول $50\,cm$ توسط دو نیروسنج مشابه در میدان مغناطیسی یکنواخت و برون‌سوی $\vec{B}$، به طور افقی نگه داشته شده است. جریان الکتریکی عبوری از سیم $4\,A$ و جهت آن از M به N است. در این حالت هر یک از نیروسنج‌ها مقدار $0/2\,N$ را نشان می‌دهند. اگر جهت جریان عوض شده و اندازهٔ آن نصف شود، مقداری که هر یک از نیروسنج‌ها نشان می‌دهند، ۷۵ درصد افزایش می‌یابد. بزرگی میدان مغناطیسی B چند تسلا است؟



۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۳

۴۱- در شکل زیر قطر لولهٔ سمت راست، ۲ برابر قطر لولهٔ سمت چپ است. اگر شیر ارتباطی بین دو لوله باز شود، پس از ایجاد تعادل، سطح جیوه چند سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود؟ (چگالی آب $1\,g/cm^3$، چگالی جیوه $13/6\,g/cm^3$ و قطر مقطع لولهٔ افقی قابل چشم‌پوشی است.)



۱) ۴۱
۲) ۴۲
۳) ۵۰/۴
۴) ۵۱/۴

محل انجام محاسبات

۴۲- آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق آبی، از ارتفاع ۹۰متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۸۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، آب با آهنگ چند متر مکعب بر دقیقه روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۱۵۰ MW برسد؟ (چگالی آب $1000\,kg/m^3$ و $g = 10\,m/s^2$ است.)

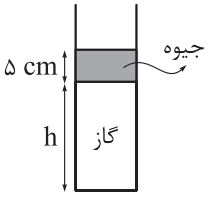
۱) $1/25\times10^4$ ۲) $1/25\times10^7$

۳) $2/5\times10^4$ ۴) $2/5\times10^7$

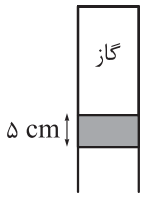
۴۳- در ظرفی استوانه‌ای که از فلزی با ضریب انبساط طولی α ساخته شده، مقداری مایع با ضریب انبساط حجمی β ریخته شده است. اگر با افزایش دمای مجموعهٔ ظرف و مایع، ارتفاع مایعِ درون ظرف تغییر نکند، $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۴- در شکل (۱)، مقداری گاز کامل درون یک لوله توسط مقداری جیوه حبس شده و طول ستون گاز برابر h است. اگر مطابق شکل (۲)، لوله را وارونه کنیم، طول ستون گاز ۲ cm افزایش می‌یابد. اگر فشار هوا ۹۵/۲ kPa باشد، h چند سانتی‌متر است؟ ($\rho_{جیوه} = 13/6\ g/cm^3$، $g = 10\,N/kg$ و دما را ثابت در نظر بگیرید.)



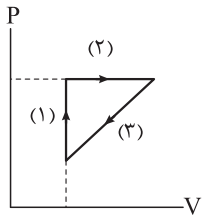
شکل (۱)



شکل (۲)

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۴۵- نمودار $V - P$ مقدار معینی گاز کامل در طی چرخه‌ای که یک ماشین گرمایی طی می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در فرایندهای (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب برابر با ۱۵۰ J، ۴۰۰ J و ۵۰۰ J باشد، بازده این ماشین گرمایی و کار انجام‌شده توسط آن در هر چرخه برحسب ژول، به ترتیب کدام است؟



۱) $\frac{1}{10}$، ۵۰ ۲) $\frac{1}{10}$، ۱۰۵۰

۳) $\frac{1}{11}$، ۵۰ ۴) $\frac{1}{11}$، ۱۰۵۰

محل انجام محاسبات

۴۶- کدام مطلب درست است؟

۱) مجموع ذرات زیراتمی در ایزوتوپ ناپایدار طبیعی هیدروژن برابر ۳ است.

۲) هر ستون جدول تناوبی شامل عنصرهایی با خواص شیمیایی یکسان است و گروه نامیده می‌شود.

۳) فراوان‌ترین ایزوتوپ‌های لیتیم و کلر به ترتیب سنگین‌ترین و سبک‌ترین ایزوتوپ آن‌ها است.

۴) اتم‌ها به طور باورنکردنی ریز هستند به طوری که نمی‌توان با هیچ دستگاهی جرم آن‌ها را به دست آورد.

۴۷- چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

- **اگر کاتیون M در زیرلایهٔ 3d خود دارای ۵ الکترون باشد، نسبت آنیون به کاتیون در اکسید آن، می‌تواند برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد.**
- **پایداری اوزون از اکسیژن کم‌تر بوده و نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در هر دو مولکول یکسان است.**
- **نسبت جرم مولی اوزون به جرم مولی متان، برابر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در کربن مونوکسید است.**
- **مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در چهار مولکول $CH_۲O$، HCN، $PF_۳$ و $SO_۳$، پنج برابر مجموع زیروندها در مس (I) سولفید است.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۸- در دما و فشار معین، یک مخزن با حجم ثابت حاوی گاز نیتروژن است. در دمای ثابت مقداری از این گاز خارج می‌شود و به جای آن گاز هلیم وارد می‌شود، به گونه‌ای که فشار ثابت بماند. اگر جرم کل گازها در پایان برابر ۱۸ گرم و درصد جرمی هلیم در مخلوط نهایی برابر ۲۵ باشد، جرم اولیهٔ گاز نیتروژن چند گرم بوده است؟ $(He = ۴, N = ۱۴ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۳/۵ ۲) ۱۵/۷۵ ۳) ۲۹/۲۵ ۴) ۴۵

۴۹- کدام مورد درست است؟

۱) در فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از فراوان‌ترین یون چنداتمی محلول در آب دریا با یون آلومینیم، در مجموع ۱۷ اتم وجود دارد.

۲) در ساختار لوویس تمام یون‌های چنداتمی دست‌کم یک جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

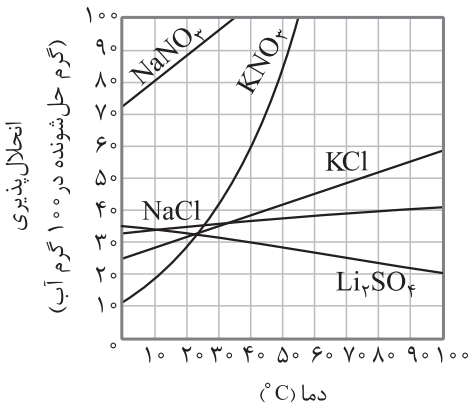
۳) اگر محلولی حاوی فراوان‌ترین یون موجود در آب دریا باشد، رنگ شعلهٔ نمک موجود در این محلول نمی‌تواند زردرنگ باشد.

۴) چگالی آب دریای مرده از چگالی آب دریای سرخ بیشتر است، زیرا در هر ۱۰۰ گرم از آب دریای مرده حدود ۲۷ گرم نمک خوراکی حل شده است.

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

۵۰- با توجه به نمودار زیر کدام موارد درست است؟



الف) چگالی محلول سیرشدهٔ نمک لیتیم سولفات، برخلاف سایر نمک‌های موجود در نمودار، با افزایش دما کاهش می‌یابد.

ب) با سردکردن ۷۵۰ گرم محلول سیرشدهٔ پتاسیم کلرید از دمای $75\ ^\circ C$ به دمای $45\ ^\circ C$، ۵۰ گرم از این نمک رسوب خواهد کرد.

پ) در دمای $30\ ^\circ C$، مجموع شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در محلول‌های سیرشدهٔ NaCl و KCl با جرم یکسان، با هم برابر است.

ت) درصد جرمی محلول سیرشدهٔ پتاسیم نیترات در دمای $49\ ^\circ C$ به تقریب برابر ۳۷/۵ می‌باشد.

ث) نمکی که انحلال‌پذیری آن در دمای $0\ ^\circ C$ از دو نمک دیگر بیشتر است، برای ذوب‌کردن یخ و برف در جاده‌ها استفاده می‌شود.

۱) الف، پ، ت ۲) ب، پ، ث ۳) الف، ب، ث ۴) الف، ب، پ، ث

۵۱- طبق واکنش موازنه‌شدهٔ $4A(s) + CO_2(g) \rightarrow 2A_2O(s) + C(s)$ اگر تعداد مول واکنش‌دهنده‌ها برابر با ضریب استوکیومتری آن‌ها باشد، اختلاف جرم فراورده‌ها ۱۷۶ گرم می‌شود. با توجه به این موضوع کدام مورد درست است؟ (A عنصر فلزی است و $Li = 7, Na = 23, K = 39, Ag = 108 : g.mol^{-1}$)

۱) اگر به جای A، فلز هم‌گروه و در دوره بالاتر از آن در جدول دوره‌ای استفاده شود، واکنش انجام نمی‌شود.

۲) واکنش‌پذیری عنصر A از چهارمین عنصر جدول دوره‌ای بیشتر است.

۳) در دوره‌ای که عنصر A قرار دارد، بیشترین اختلاف شعاع بین $_{13}Al$ و $_{14}Si$ است.

۴) در بین عنصرهای هم‌دورهٔ A، آخرین فلز واسطه، کم‌ترین تمایل را برای تبدیل‌شدن به کاتیون دارد.

۵۲- واکنش‌های زیر در دو ظرف جداگانه انجام می‌شوند. درصد خلوص $KMnO_4$ دو برابر درصد خلوص $FeCO_3$ بوده و بازده درصدی واکنش (II)، ۷۵ درصد بازده درصدی واکنش (I) است. اگر مول‌های برابری از اکسیژن و کربن مونوکسید در دو ظرف جداگانه تشکیل شده باشد، به ازای مصرف ۴۷/۴ گرم $KMnO_4$ ناخالص در واکنش (I)، چند گرم $FeCO_3$ ناخالص در واکنش (II) مصرف شده است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند و معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شوند.)

$(C = 12, O = 16, K = 39, Mn = 55, Fe = 56 : g.mol^{-1})$

(I) $KMnO_4(s) \xrightarrow{\Delta} K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$

(II) $FeCO_3(s) \xrightarrow{\Delta} Fe_2O_3(s) + CO_2(g) + CO(g)$

۱) ۹۲/۸ ۲) ۸۷/۰ ۳) ۹۶/۶ ۴) ۷۴/۲

محل انجام محاسبات

Telegram: @konkur_in

۵۳- در رابطه با آلکانی که جرم مولی آن ۸۷ / ۴٪ بیشتر از جرم مولی آلکین نظیر خود (با شمار اتم‌های کربن یکسان) می‌باشد، کدام موارد زیر درست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, Br = ۸۰ : g.mol^{-۱})$

الف) ۸۰٪ از ساختارهای ممکن برای آن شاخه‌دار هستند.

ب) حداقل اختلاف جرم مولی آن با آلکان‌هایی که در دمای $^{\circ}C$ ۲۲، گاز می‌باشند، ۲۸ گرم بر مول است.

پ) ۲ / ۰ مول از ترکیب آروماتیک هم‌کربن با این آلکان با ۴۸ گرم برم واکنش کامل می‌دهد.

ت) اختلاف جرم مولی آلکینی که از سوختن کامل ۰ / ۲۵ مول از آن ۱۳ / ۵ گرم آب تولید می‌شود، با این آلکان ۱۶ گرم بر مول است.

۱) الف و ب ۲) ب و پ ۳) پ و ت ۴) الف و ت

۵۴- کدام موارد درست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

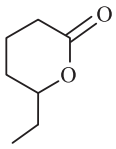
الف) اگر آنتالپی سوختن متان و اتان به ترتیب برابر ۸۹۰− و ۱۵۶۰− کیلوژول بر مول باشد، ارزش سوختی پروپان به تقریب ۵۰ / ۷ کیلوژول بر گرم است.

ب) در هیدروکربن‌ها برخلاف الکل‌ها با افزایش جرم مولی، آنتالپی سوختن افزایش می‌یابد.

پ) در کتونی سیرشده و بدون حلقه با ۳۱ پیوند کووالانسی، ارزش سوختی به تقریب ۰ / ۰۰۶ برابر مقدار آنتالپی سوختن است.

ت) برای ترکیبی با فرمول $C_۵H_{۱۲}O$ تعداد ایزومرهای الکلی، ۲ واحد بیشتر از تعداد ایزومرهای اتری است.

۱) الف، ب، پ ۲) الف، پ، ت ۳) پ، ت ۴) الف، ب

۵۵- از واکنش ترکیب A با ساختار  با مقدار کافی آب در شرایط مناسب، فراوردهٔ B تولید می‌شود. اگر سرعت تولید فراوردهٔ B، ۰ / ۲ مول بر ثانیه باشد، در مدت‌زمان ۲۰ ثانیه به ترتیب چند گرم ترکیب B تولید می‌شود و اگر بازده واکنش ۸۰ درصد باشد، چند گرم ترکیب A نیاز است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۶۴۰، ۵۸۴ ۲) ۵۷۰، ۵۲۸ ۳) ۶۴۰، ۵۲۸ ۴) ۵۷۰، ۵۸۴

۵۶- نمونه‌ای از روغن زیتونی دارای ناخالصی از نوع پالمیتیک اسید با فرمول $C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$ است. دو نمونهٔ یکسان از این روغن، یک بار در واکنش با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، ۰ / ۲۶ مول صابون جامد تولید کرده و بار دیگر مقدار ۳۸ / ۴ گرم برم را به طور کامل بی‌رنگ می‌کند. درصد مولی روغن زیتون در این نمونه کدام است؟ $(Br = ۸۰\ g.mol^{-۱})$

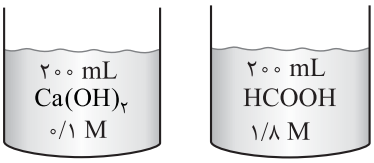
۱) ۲۰ ۲) ۴۰

۳) ۶۰ ۴) ۸۰

محل انجام محاسبات

۵۷- با توجه به اطلاعات دو ظرف زیر، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

$(K_a(HCOOH) = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴}, \log ۲ = ۰/۳, \log ۳ = ۰/۵)$



الف) اختلاف شمار یون‌ها در دو ظرف به تقریب برابر $۳/۱۸ \times ۱۰^{۲۳}$ می‌شود.

ب) اگر محتویات دو ظرف با یکدیگر مخلوط شوند، با فرض ثابت‌ماندن دما، pH محلول جدید کم‌تر از ۷ می‌شود.

پ) اگر ۶۰۰ میلی‌لیتر آب به محلول متانوئیک اسید اضافه شود، درجهٔ یونش آن برابر با ۲ خواهد شد.

ت) تفاوت pH دو محلول برابر ۱۱/۶ است.

۱) الف و ب ۲) الف و پ ۳) ب و ت ۴) پ و ت

۵۸- اگر تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در برقکافت کلسیم کلرید مذاب $\frac{۳}{۲}$ برابر تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند هال باشد، به ازای تولید ۱۰/۶۵ گرم گاز کلر در برقکافت کلسیم کلرید مذاب، حجم گاز تولیدشده در فرایند هال، در شرایط STP چند لیتر است؟ $(Cl = ۳۵/۵\ g.mol^{-۱})$

۱) ۱/۱۲ ۲) ۲/۲۴ ۳) ۳/۳۶ ۴) ۴/۴۸

۵۹- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) عدد اکسایش وانادیم در محلول آبی‌رنگ آن، با عدد اکسایش اتم گوگرد در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی یکسان است.

ب) در ترکیبات $Na_۴P_۲O_۸$ و $K_۲S_۲O_۸$ عدد اکسایش برخی از اتم‌های اکسیژن برابر ۱− است.

پ) مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در اسید چرب سازندهٔ روغن زیتون برابر ۳۲− است.

ت) عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در سیکلوآلکان‌ها برابر ۲− است.

۱) الف و ب ۲) الف و پ ۳) ب و پ ۴) پ و ت

۶۰- در دمای معین، تعادل گازی $K = ۰/۸$ و $۲NO(g) + O_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO_۲(g)$ در یک ظرف ۴لیتری برقرار است. اگر تعداد مول‌های فراورده برابر $\frac{۱}{۲}$ مول‌های هر یک از واکنش‌دهنده‌ها باشد و با کاهش دما (در حجم ثابت) شمار مول‌های فراورده، برابر مجموع شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها شود، ثابت تعادل جدید به طور تقریبی کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۷ ۳) ۳۵ ۴) ۷۰

محل انجام محاسبات

www.konkur.in

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله اول پلاس
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۹/خرداد/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ علی شهرابی ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ عطا صادقی ـ سعید قندچی ـ سروش موئینی
فیزیک	نوید شاهی ـ هادی حمزه‌پور
شیمی	عباس سرمایه ـ حسین شرانلو ـ محمد عظیمیان‌زواره ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ محسن مجنونی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	شقایق راهبریان حسین صنمی سهند محمدکریم‌نژاد
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	سید عباس حسینی	منصور زرکش‌اصفهانی ماهان فنی‌فر مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	آیدین طهماسقلی‌زاده سعید محبی امیر محمودی‌انزابی فاطمه نجفی محمدرضا یاری
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	سروش عبادی	محمدمهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	امیر بیات هادی عبادی آرمین عظیمی محمد نوروزی‌مال

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

www.konkur.in

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ علیرضا جعفری ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخائی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق‌نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

Telegram: @konkur_in

۱ اگر برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x+\frac{x}{|x|}+3}$ مجموعهٔ $[0,+\infty)-[a,b]$ باشد، تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{b^2-x^2}$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $[-2,0]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint $\frac{x}{|x|}$ توی xهای منفی می‌شه -1 و توی xهای مثبت می‌شه 1.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به کمک ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x}{|x|}=\begin{cases}-1 & ;x<0\\ 1 & ;x>0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2} & ;x<0\\ \sqrt{x+4} & ;x>0\end{cases}$$

گام دوم: حالا برد تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$-2\le x<0 \Rightarrow 0\le x+2<2 \Rightarrow 0\le\sqrt{x+2}<\sqrt{2}$$

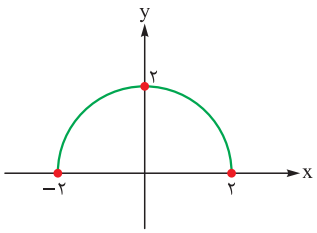
$$x>0 \Rightarrow x+4>4 \Rightarrow \sqrt{x+4}>2$$

بنابراین برد تابع f اجتماع دو بازهٔ $[0,\sqrt{2})$ و $(2,+\infty)$ است؛ در نتیجه داریم:

$$R_f=[0,+\infty)-[\sqrt{2},2]$$

گام سوم: این یعنی $a=\sqrt{2}$، $b=2$ و در نتیجه $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ است.

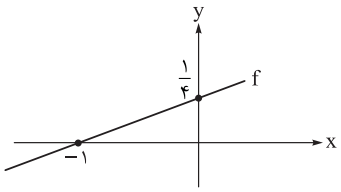
نمودار تابع g یک نیم‌دایره به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ مختصات است که روی بازهٔ $[-2,0]$ اکیداً صعودی است.



Telegram: @konkur_in

۲ نمودار تابع خطی f در شکل زیر رسم شده است. اگر $g(x)=\frac{f^{-1}(x)-2x}{x+f(x)+3}$ باشد، روی کدام بازه، نمودار تابع g^{-1} می‌تواند بالاتر از نمودار تابع f^{-1} باشد؟

$g^{-1}(x)>f^{-1}(x)$



۱) $(-\infty,2]$

۲) $[2,+\infty)$

۳) $[1,+\infty)$

۴) $(-\infty,1]$

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

- اگر $f(x)=mx+h$ باشد، $f^{-1}(x)=\frac{x-h}{m}$ است.
- اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ضابطهٔ تابع f که $f(x)=\frac{x+1}{4}$ است؛ بنابراین $f^{-1}(x)=4x-1$ است.

گام دوم: حالا ضابطهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{f^{-1}(x)-2x}{x+f(x)+3}=\frac{4x-1-2x}{x+\frac{x+1}{4}+3}=\frac{8x-4}{5x+13}$$

و طبق نکته داریم:

$$g^{-1}(x)=\frac{-13x-4}{5x-8}$$

گام سوم: حال باید نامعادلهٔ $g^{-1}(x)>f^{-1}(x)$ را حل کنیم:

$$\frac{-13x-4}{5x-8}>4x-1$$

$$\Rightarrow \frac{13x+4}{5x-8}+4x-1=\frac{20x^2-24x+12}{5x-8}<0 \xrightarrow{\div 4} \frac{5x^2-6x+3}{5x-8}<0$$

عبارت صورت، یعنی $5x^2-6x+3$ همواره مثبت است؛ بنابراین داریم:

$$5x-8<0 \Rightarrow x<\frac{8}{5}=1/6$$

در بین گزینه‌ها، فقط بازهٔ $(-\infty,1]$ زیرمجموعهٔ $(-\infty,1/6)$ است.

Telegram: @konkur_in

۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\cos ۲x(۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x)=۱$ در بازهٔ $[-۳\pi, ۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint $\sin^۲ ۲x$ رو برحسب $\cos ۲x$ بنویسین.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: به جای $\sin^۲ ۲x$ عبارت $۱-\cos^۲ ۲x$ را قرار می‌دهیم:

$$\cos ۲x(۱-\frac{۳}{۴}(۱-\cos^۲ ۲x))=۱ \Rightarrow \cos ۲x(\frac{۱+۳\cos^۲ ۲x}{۴})=۱$$

$$\Rightarrow ۳\cos^۳ ۲x+\cos ۲x-۴=۰$$

گام دوم: با تغییر متغیر $t=\cos ۲x$ به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۳t^۳+t-۴=۰$$

مجموع ضرایب صفر است، بنابراین $t=۱$ قطعاً جواب معادله است؛ با تقسیم عبارت $۳t^۳+t-۴$ بر $t-۱$ داریم:

$$(t-۱)\underbrace{(۳t^۲+۳t+۴)}_{\text{Δی این عبارت منفی است و ریشه ندارد.}}=۰ \Rightarrow t=۱$$

گام سوم: در نتیجه، معادلهٔ سادهٔ $\cos ۲x=۱$ را باید حل کنیم:

$$\cos ۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi \Rightarrow x=k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های بازهٔ $[-۳\pi, ۲\pi)$ برابر ۵ است: -۲π، $-\pi$، ۰، π و ۲π.

Telegram: @konkur_in

۴ حد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\sqrt[4]{\cos x}}{4-(\cos x+\sqrt{\cos x}+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[4]{\cos x})}$ وقتی $x\to 0$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint $\sqrt[12]{\cos x}$ رو متغیر جدید بگیر و بعدش از هوپیتال استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** واضح است که با حد $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم. $\sqrt[12]{\cos x}$ را متغیر t می‌گیریم و داریم:

$$\xrightarrow{t\to 1} \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^{12}\times t^{6}\times t^{4}\times t^{3}}{4-(t^{12}+t^{6}+t^{4}+t^{3})}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{25}-1}{t^{12}+t^{6}+t^{4}+t^{3}-4}$$

گام دوم: به کمک قضیهٔ هوپیتال، حد بالا را حساب می‌کنیم:

$$=\lim_{t\to 1}\frac{25t^{24}}{12t^{11}+6t^{5}+4t^{3}+3t^{2}}=\frac{25}{25}=1$$

یه جور دیگه وقتی $x\to 0$، $\cos x$ هم‌ارز $1-\frac{x^2}{2}$ و $\sqrt[n]{\cos x}$ هم‌ارز $1-\frac{x^2}{2n}$ است:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1-(1-\frac{x^2}{2})(1-\frac{x^2}{4})(1-\frac{x^2}{6})(1-\frac{x^2}{8})}{4-(1-\frac{x^2}{2}+1-\frac{x^2}{4}+1-\frac{x^2}{6}+1-\frac{x^2}{8})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8})x^2+\cdots}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8})x^2}\overset{\text{قضیهٔ کم‌توان}}{=\!=}1$$

Telegram: @konkur_in

۵ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a & ; x=1 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}-\frac{b}{x^4-1} & ; x\neq 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{15}{2}$ ۴) $\frac{15}{8}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تابع f باید در $x=1$ حد داشته باشد:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}-\frac{b}{x^4-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)(x+1)(x^2+1)-b}{x^4-1}$$

حد مخرج صفر است؛ بنابراین برای این‌که حاصل حد، عددی حقیقی شود، لازم است حد صورت نیز صفر شود:

$$\Rightarrow b=\lim_{x\to 1}(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)(x+1)(x^2+1)=16$$

گام دوم: حالا باید برای پیوستگی تابع f در $x=1$، a برابر حد تابع در $x=1$ باشد:

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)(x+1)(x^2+1)-16}{x^4-1}$$

x را $1+\varepsilon$ می‌گیریم؛ بنابراین $\varepsilon\to 0$ و با استفاده از هم‌ارزی‌های $\sqrt[n]{1+\varepsilon}\sim 1+\frac{1}{n}\varepsilon$ و $(1+\varepsilon)^n\sim 1+n\varepsilon$ داریم:

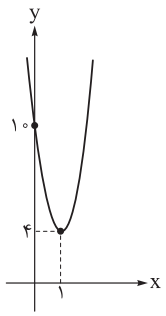
$$a=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\sqrt[4]{1+\varepsilon}+1)(\sqrt{1+\varepsilon}+1)(1+\varepsilon+1)((1+\varepsilon)^2+1)-16}{(1+\varepsilon)^4-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(2+\frac{1}{4}\varepsilon)(2+\frac{1}{2}\varepsilon)(2+\varepsilon)(2+2\varepsilon)-16}{1+4\varepsilon-1}$$

صورت و مخرج کسر بالا را بر ۱۶ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow a=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\frac{1}{8}\varepsilon)(1+\frac{1}{4}\varepsilon)(1+\frac{1}{2}\varepsilon)(1+\varepsilon)-1}{\frac{1}{4}\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1)\varepsilon+\cdots}{\frac{1}{4}\varepsilon}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{15}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{15}{2}$$

Telegram: @konkur_in

۶ نمودار تابع درجه‌دوم $y = f'(x)$ در شکل زیر رسم شده است. آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,3]$ کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۲۴
۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته اگر $f'(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ باشد، آن‌گاه $f(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c$ بوده است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f' را پیدا می‌کنیم. نقطهٔ $(1,4)$ رأس سهمی داده‌شده است:

$$f'(x) = a(x-1)^2 + 4 \xrightarrow{f'(0)=10} a = 6$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 12x + 10$$

گام دوم: مطابق نکتهٔ بالا، ضابطهٔ تابع f را می‌نویسیم:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10x + c$$

دقت کنید که c یک عدد حقیقی و ثابت است.

گام سوم: حالا خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{(30+c)-(6+c)}{2} = 12$$

Telegram: @konkur_in

۷ اگر $g(x)=x^{۳}$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x-۲|g^{-۱}(x)}{(x-۱)^{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ضابطهٔ وارون تابع g به صورت $g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$ است؛ بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{|x-۲|\sqrt[۳]{x}}{(x-۱)^{۲}}$$

گام دوم: به ازای $x\geq ۲$، $f(x)=\frac{(x-۲)\sqrt[۳]{x}}{(x-۱)^{۲}}$ است. حالا در این محدوده $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(\sqrt[۳]{x}+\frac{x-۲}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}})(x-۱)^{۲}-۲(x-۱)(x-۲)\sqrt[۳]{x}}{(x-۱)^{۴}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۴x-۲}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}(x-۱)-۲(x-۲)\sqrt[۳]{x}}{(x-۱)^{۳}}=\frac{(۴x-۲)(x-۱)-۶x(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}(x-۱)^{۳}}=\frac{-۲(x^{۲}-۳x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}(x-۱)^{۳}}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f' روی کل دامنه‌اش به صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۲(x^{۲}-۳x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}(x-۱)^{۳}} & ;\ x<۲\\ -\frac{۲(x^{۲}-۳x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}(x-۱)^{۳}} & ;\ x\geq ۲\end{cases}$$

گام دوم: $f'(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

در نتیجه $x_۱=\frac{۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$، $x_۲=۰$، $x_۳=۲$ و $x_۴=\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ طول‌های نقاط بحرانی نمودار تابع f هستند؛ در $x_۱$ و $x_۴$ مشتق برابر صفر است و در $x_۲$ و $x_۳$ مشتق تعریف نمی‌شود.

مجموع طول نقاط بحرانی تابع f برابر $\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}+۲+۰=۵$ است.

Telegram: @konkur_in

۸ **مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۳۰ و مجموع مربعات جملات اول و دوم ۱۱۶ است. اگر جملهٔ پنجم این دنباله بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، جملهٔ اول آن کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) −۱۰ ۳) ۴ ۴) −۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مجموع سه جملهٔ اول، سه برابر جملهٔ دوم است:

$$a_1+a_2+a_3=3a_2=30 \Rightarrow a_2=10$$

از طرفی، مجموع مربعات جملات اول و دوم برابر ۱۱۶ است:

$$a_1^2+a_2^2=116 \Rightarrow a_1^2+100=116 \Rightarrow a_1=\pm 4$$

گام دوم: اگر $a_1=-4$ باشد، $a_n=14n-18$ و اگر $a_1=4$ باشد، $a_n=6n-2$ است.

در حالت $a_1=-4$، $a_5=52$ و در حالت $a_1=4$، $a_5=28$ است. چون طبق فرض a_5 باید بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، $a_1=-4$ قابل قبول است.

Telegram: @konkur_in

۹ حاصل عبارت $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint عبارت رو به توان ۲ برسونین.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ و $8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ مزدوج یکدیگرند. آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}})=64-4(10+2\sqrt{5})=24-8\sqrt{5}=4(6-2\sqrt{5})$$

$6-2\sqrt{5}$ هم که مربع $\sqrt{5}-1$ است:

$$\Rightarrow (8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}})=4(\sqrt{5}-1)^2$$

گام دوم: عبارت $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ را x می‌نامیم. آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2=8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$$

$$=16+2\sqrt{4(\sqrt{5}-1)^2}=16+2(2(\sqrt{5}-1))=12+4\sqrt{5}=2(6+2\sqrt{5})=2(\sqrt{5}+1)^2$$

گام سوم: حالا باید از عبارت بالا ریشه بگیریم تا مقدار x به دست آید:

$$\xrightarrow{x>0} x=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)=\sqrt{10}+\sqrt{2}$$

Telegram: @konkur_in

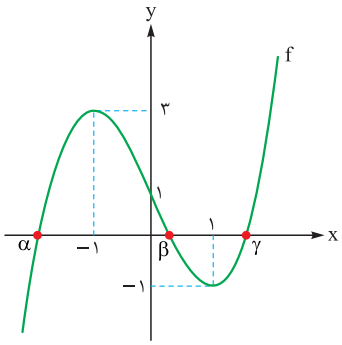
۱۰ حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ای که جواب‌های آن از دو برابر جواب‌های معادلهٔ $x^۳-۳x+۱=۰$ یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۱۹ ۴) -۱۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جواب‌های معادلهٔ $x^۳-۳x+۱=۰$ صفرهای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۳x+۱$ هستند. نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

x		-۱		۱	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+
$f(x)$	↗	۳	↘	-۱	↗

گام دوم: پس سه جواب α، β و γ جواب‌های معادلهٔ $x^۳-۳x+۱=۰$ هستند:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^۳-(\alpha+\beta+\gamma)x^۲+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=x^۳-۳x+۱=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=۰\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-۳\\ \alpha\beta\gamma=-۱\end{cases}$$

گام سوم: حال باید حاصل‌ضرب $۲\alpha+۱$، $۲\beta+۱$ و $۲\gamma+۱$ را به دست آوریم:

$$(۲\alpha+۱)(۲\beta+۱)(۲\gamma+۱)=۸\alpha\beta\gamma+۴(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+۲(\alpha+\beta+\gamma)+۱$$

$$=۸(-۱)+۴(-۳)+۲(۰)+۱=-۱۹$$

یه‌جور دیگه

بعد از گام اول می‌توانیم به جای هر x معادلهٔ $x^۳-۳x+۱=۰$، $\frac{X-۱}{۲}$ قرار دهیم:

$$\left(\frac{X-۱}{۲}\right)^۳-۳\left(\frac{X-۱}{۲}\right)+۱=۰$$

$$\frac{X^۳-۳X^۲+۳X-۱}{۸}-\frac{۳X-۳}{۲}+۱=۰ \Rightarrow X^۳-۳X^۲-۹X\underbrace{+۱۹}_{\text{قرینهٔ حاصل‌ضرب}}=۰$$

Telegram: @konkur_in

۱۱ حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x}{x^۲-۴x+۱}+\frac{۲x}{(x-۱)^۲}=۱$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دنبال $x+\frac{۱}{x}$ بگرد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{x}{x^۲-۴x+۱}+\frac{۲x}{x^۲-۲x+۱}=۱$$

در هر کسر، صورت و مخرج را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x-۴+\frac{۱}{x}}+\frac{۲}{x-۲+\frac{۱}{x}}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{x+\frac{۱}{x}-۴}+\frac{۲}{x+\frac{۱}{x}-۲}=۱$$

گام دوم: $x+\frac{۱}{x}$ را متغیر جدید c در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{c-۴}+\frac{۲}{c-۲}=۱ \Rightarrow \frac{۳c-۱۰}{c^۲-۶c+۸}=۱$$

$$\Rightarrow c^۲-۶c+۸=۳c-۱۰ \Rightarrow c^۲-۹c+۱۸=(c-۳)(c-۶)=۰ \Rightarrow c=۳ \text{ یا } ۶$$

گام سوم: حالا براساس مقادیر c، معادلات را برحسب x می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x+\frac{۱}{x}=۳ \Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow x_۱x_۲=۱ \\ x+\frac{۱}{x}=۶ \Rightarrow x^۲-۶x+۱=۰ \Rightarrow x_۳x_۴=۱ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب جواب‌ها $x_۱x_۲x_۳x_۴=۱$ است.

تیزبازی با تغییر متغیر $t=x+\frac{۱}{x}$، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۲-tx+۱=۰$ برابر ۱ است. پس جواب‌های معادله برحسب t، هر چه باشد حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر ۱ است.

Telegram: @konkur_in

۱۲ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $\log_{۳}(۹^{x}+۲)=x+۳$ باشند، حاصل عبارت $\log_{(۳^{(\alpha+\beta)}+۱)}(۳^{\alpha}+۳^{\beta})$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا داریم:

$$\log_{۳}(۹^{x}+۲)=x+۳ \Rightarrow ۹^{x}+۲=۳^{x+۳} \Rightarrow ۹^{x}-۲۷\times۳^{x}+۲=۰$$

$$\Rightarrow (۳^{x})^{۲}-۲۷(۳^{x})+۲=۰$$

معادله برحسب $t=۳^{x}$، درجه‌دوم است؛ بنابراین داریم:

$$t_{۱}+t_{۲}=۳^{\alpha}+۳^{\beta}=۲۷ \quad , \quad t_{۱}\times t_{۲}=۳^{\alpha}\times۳^{\beta}=۳^{\alpha+\beta}=۲$$

گام دوم: حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\log_{۳^{(\alpha+\beta)}+۱}(۳^{\alpha}+۳^{\beta})=\log_{۲+۱}۲۷=\log_{۳}۳^{۳}=۳$$

Telegram: @konkur_in

۱۳ **مثلثی به اضلاع $۲\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{۶}$ و ۶ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مثلث وجود دارد که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از خط‌های عمودمنصف بزرگ‌ترین ضلع و ارتفاع وارد بر این ضلع، برابر یک واحد باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۴

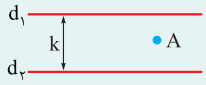
Hint

عمودمنصف نظیر یک ضلع مثلث و ارتفاع وارد بر آن ضلع، همواره موازی یکدیگرند.

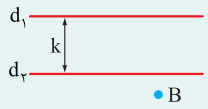
درس Box

فرض کنید دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی یکدیگر باشند و فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر برابر با k باشد.

۱) اگر A نقطه‌ای بین دو خط $d_۱$ و $d_۲$ یا واقع بر یکی از این دو خط باشد، آن‌گاه مجموع فواصل A از خطوط $d_۱$ و $d_۲$ دقیقاً برابر k است.

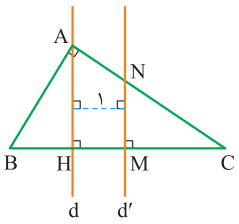


۲) اگر B نقطه‌ای خارج فاصلهٔ بین دو خط $d_۱$ و $d_۲$ یا واقع بر یکی از این دو خط باشد، آن‌گاه قدرمطلق تفاضل فواصل B از خطوط $d_۱$ و $d_۲$ دقیقاً برابر k است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اعداد $۲\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{۶}$ و ۶ در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند؛ یعنی $۶^۲ = (۲\sqrt{۶})^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲$، پس مثلث قائم‌الزاویه است. با فرض $AB = ۲\sqrt{۳}$، $AC = ۲\sqrt{۶}$ و $BC = ۶$، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ خواهد بود.



گام دوم: مطابق شکل d' عمودمنصف ضلع BC و d خط شامل ارتفاع AH (ارتفاع وارد بر ضلع BC) است و این دو خط موازی یکدیگرند. برای پیداکردن فاصلهٔ بین d و d' (طول پاره‌خط MH) از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC استفاده می‌کنیم.

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow (۲\sqrt{۳})^۲ = BH \times ۶$$

$$\Rightarrow BH = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

از طرفی M وسط ضلع BC است، پس داریم:

$$MH = BM - BH = ۳ - ۲ = ۱$$

گام سوم: فاصلهٔ دو خط موازی d و d' برابر ۱ است، پس طبق مورد دوم درس‌باکس هر نقطه‌ای که در سمت چپ خط d یا سمت راست خط d' و یا بر روی این دو خط قرار دارد، نقطه‌ای است که قدرمطلق تفاضل فواصل آن از دو خط d و d' برابر یک واحد است، بنابراین بی‌شمار نقطه روی پاره‌خط‌های AB، BH، CM و CN، جواب‌های مسئله هستند.

Telegram: @konkur_in

۱۴ یک صفحه از وسط‌های سه یال دوبه‌دو متنافر در یک مکعب به طول ضلع ۲ عبور می‌کند. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد این صفحه با مکعب کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

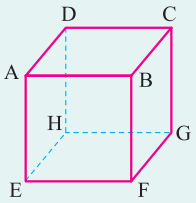
Hint

هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر تمام خطوط واقع در آن صفحه عمود است.

درس Box

۱) هر یال مکعب درون دو وجه مکعب قرار دارد، با دو وجه مکعب موازی است و دو وجه دیگر را قطع می‌کند (و بر این دو وجه عمود است).

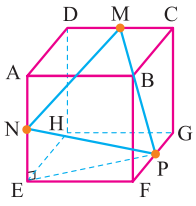
به عنوان مثال در شکل زیر یال AB درون وجه‌های ABCD و ABFE قرار دارد، با دو وجه CDHG و EFGH موازی است و با دو وجه BCGF و ADHE متقاطع است.



۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سه یال دوبه‌دو متنافر CD، AE و FG را در مکعب شکل زیر در نظر گرفته و وسط‌های این سه یال را به ترتیب M، N و P می‌نامیم. مطابق شکل سطح مقطع حاصل مثلث متساوی‌الاضلاع MNP است.



گام دوم: برای محاسبهٔ طول پاره‌خط NP (یکی از اضلاع مثلث)، ابتدا از P به E وصل می‌کنیم. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ PEF داریم:

$$PE^۲ = PF^۲ + EF^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ = ۵ \Rightarrow PE = \sqrt{۵}$$

از طرفی یال AE بر وجه EFGH و در نتیجه پاره‌خط PE عمود است، پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث NPE می‌توان نوشت:

$$NP^۲ = NE^۲ + PE^۲ = ۱^۲ + (\sqrt{۵})^۲ = ۶ \Rightarrow NP = \sqrt{۶}$$

گام سوم: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع MNP (سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه با مکعب) برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}NP^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۶ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

نکته

مساحت مثلثی که بر روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

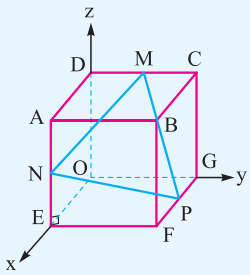
$$S = \frac{۱}{۲}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Telegram: @konkur_in

یه‌جور دیگه

مطابق شکل فرض کنید نقطهٔ O مبدأ مختصات و یال‌های OE، OG و OD به ترتیب بر محورهای x، y و z منطبق باشند.

طول هر ضلع مکعب برابر ۲ است، پس مختصات رأس‌های مثلث MNP به صورت زیر است:



$$M=(۰,۱,۲)\ ,\ N=(۲,۰,۱)\ ,\ P=(۱,۲,۰)$$

حال دو بردار $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MP}$ را تشکیل داده و ضرب خارجی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{MN}=(۲,-۱,-۱)\ ,\ \overrightarrow{MP}=(۱,۱,-۲)$$

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & -۱ & -۱\\ ۱ & ۱ & -۲\end{vmatrix}=۳\vec{i}+۳\vec{j}+۳\vec{k}$$

مساحت مثلث MNP برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲+۳^۲+۳^۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

Telegram: @konkur_in

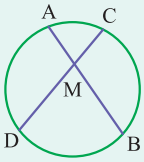
۱۵ در دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقینی به قاعدهٔ ۱۴ و محیط ۶۲ واحد، طول وتری که از وسط‌های دو ساق مثلث می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

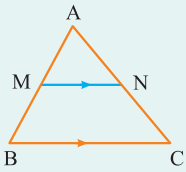
Hint روابط طولی وترهای متقاطع در دایره را، در نقاط تلاقی وتر دایره با ساق‌های مثلث بنویسید.

درس Box ۱) هرگاه دو وتر AB و CD در نقطهٔ M درون دایره متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



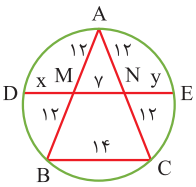
$$MA \times MB = MC \times MD$$

۲) هرگاه وسط‌های دو ضلع از مثلثی را به یکدیگر وصل کنیم، پاره‌خط حاصل موازی ضلع سوم مثلث و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ این ضلع است. به عبارت دیگر اگر در شکل زیر نقاط M و N وسط‌های اضلاع AB و AC باشند، آن‌گاه:



$$MN \parallel BC, MN = \frac{۱}{۲} BC$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** طبق فرض سؤال اندازهٔ ضلع BC برابر ۱۴ و محیط مثلث ABC برابر ۶۲ است. با توجه به برابری AB و AC داریم:



$$AB + AC + BC = ۶۲ \Rightarrow ۲AB + ۱۴ = ۶۲$$

$$\Rightarrow AB = AC = \frac{۶۲ - ۱۴}{۲} = ۲۴$$

گام دوم: نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AC قرار دارند، پس مطابق شکل داریم:

$$AM = MB = AN = NC = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

از طرفی پاره‌خط MN موازی و نصف ضلع BC است، پس $MN = \frac{۱۴}{۲} = ۷$.

گام سوم: فرض کنید $MD = x$ و $NE = y$ باشد. طبق روابط طولی وترهای متقاطع درون دایره داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MA \times MB = MD \times ME \Rightarrow ۱۲ \times ۱۲ = x(۷ + y) \\ NA \times NC = ND \times NE \Rightarrow ۱۲ \times ۱۲ = y(۷ + x) \end{array}\right\} \Rightarrow ۷x + xy = ۷y + xy \Rightarrow x = y$$

گام چهارم: با توجه به تساوی $x = y$ می‌توان نوشت:

$$۱۲ \times ۱۲ = x(۷ + x) \Rightarrow x^۲ + ۷x - ۱۴۴ = ۰ \Rightarrow (x + ۱۶)(x - ۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱۶ \text{ غ ق ق} \\ x = ۹ \end{cases}$$

گام پنجم: طول وتر DE برابر است با:

$$DE = DM + MN + NE = ۹ + ۷ + ۹ = ۲۵$$

Telegram: @konkur_in

۱۶ نقطهٔ $B(-۶,-۸)$ را تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات (نقطهٔ O) و زاویهٔ ۱۲۰° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تصویر می‌کنیم تا نقطهٔ C به دست آید. سپس نقطهٔ C را تحت دوران به همان مرکز و زاویهٔ ۱۵۰° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تصویر می‌کنیم تا نقطهٔ A حاصل شود. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۵۰+۲۵\sqrt{۳}$
۲) $۵۰+۵۰\sqrt{۳}$
۳) $۲۵+۲۵\sqrt{۳}$
۴) $۷۵+۲۵\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

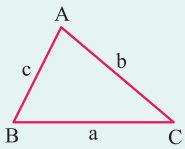
Hint

مثلث ABC را به سه مثلث OAB، OAC و OBC تقسیم کنید و مساحت هر کدام از این مثلث‌ها را به کمک رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث به دست آورید.

درس Box

۱) دوران تبدیلی طولپا است. به عبارت دیگر اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت دوران به مرکز O و زاویهٔ α باشد، آن‌گاه $OA'=OA$.

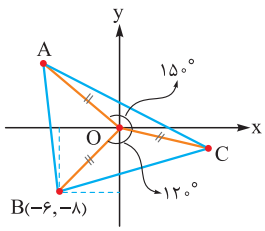
۲) مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



با توجه به اطلاعات داده‌شده داریم:

$$A\hat{O}B=۳۶۰^\circ-(۱۲۰^\circ+۱۵۰^\circ)=۹۰^\circ$$

گام دوم: طول پاره‌خط OB برابر است با:

$$OB=\sqrt{(-۶)^۲+(-۸)^۲}=۱۰$$

از طرفی دوران تبدیلی طولپا است. با توجه به این‌که نقطهٔ O (مبدأ مختصات) مرکز دوران است، می‌توان نوشت:

$$OA=OC=OB=۱۰$$

گام سوم: مثلث ABC به سه مثلث OAB، OAC و OBC تقسیم می‌شود، بنابراین داریم:

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}$$

$$=\frac{۱}{۲}OA\times OB\times\sin ۹۰^\circ+\frac{۱}{۲}OA\times OC\times\sin ۱۵۰^\circ+\frac{۱}{۲}OB\times OC\times\sin ۱۲۰^\circ$$

$$=(\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۰\times۱)+(\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۰\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$=۵۰+۲۵+۲۵\sqrt{۳}=۷۵+۲۵\sqrt{۳}$$

Telegram: @konkur_in

۱۷ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & x+۱ & -۳\\ ۱ & -۳ & x+۱\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه مقدار x کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint درایه‌های متناظر را در دو ماتریس AB و BA برابر یکدیگر قرار دهید.

درس Box

ماتریس‌های تعویض‌پذیر:

هرگاه ضرب دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، یعنی $AB=BA$، ماتریس‌های A و B را تعویض‌پذیر می‌گوییم.

در حالت‌های خاص زیر، دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه لزوماً تعویض‌پذیر هستند.

۱) هر ماتریس مربعی با ماتریس واحد (همانی) هم‌مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است.

$$AI=IA=A$$

۲) دو توان متفاوت از یک ماتریس مربعی تعویض‌پذیر هستند.

$$A^m\times A^n=A^n\times A^m=A^{m+n}$$

۳) دو ماتریس قطری هم‌مرتبه تعویض‌پذیر هستند.

نکته اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه اتحادهای جبری در مورد آن‌ها برقرار است. به عنوان مثال داریم:

$$(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

$$(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & x+۱ & -۳\\ ۱ & -۳ & x+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & x-۱ & x-۱\\ ۶ & ۲x-۶ & ۳x-۲\\ ۶ & ۳x-۲ & ۲x-۶\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & x+۱ & -۳\\ ۱ & -۳ & x+۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۶ & ۶\\ x-۱ & ۲x-۶ & ۳x-۲\\ x-۱ & ۳x-۲ & ۲x-۶\end{bmatrix}$$

گام دوم: دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر هستند، یعنی $AB=BA$. با توجه به برابری درایه‌های متناظر در دو ماتریس، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$x-۱=۶\Rightarrow x=۷$$

Telegram: @konkur_in

۱۸ یکی از دو دایرهٔ $C_1 : x^2+y^2+4x-5=0$ و $C_2 : x^2+y^2+2x+4y+k=0$ از مرکز دیگری می‌گذرد. وتر مشترک این دو دایره، خط‌المرکزین آن‌ها را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

مختصات مرکز هر دایره را در معادلهٔ دایرهٔ دیگر امتحان کنید.

درس Box

۱) مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره با معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ عبارت‌اند از:

مرکز: $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع: $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

۲) معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع از برابر قراردادن معادلات این دو دایره به دست می‌آید. به عنوان مثال اگر $C_1 : x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $C_2 : x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ دو دایرهٔ متقاطع باشند، آن‌گاه معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x^2+y^2+ax+by+c=x^2+y^2+a'x+b'y+c' \Rightarrow (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$$

۳) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ به معادلهٔ d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مراکز دو دایره را پیدا کرده و هر کدام را در معادلهٔ دایرهٔ دیگر قرار می‌دهیم:

دایرهٔ C_1: $O_1(-2,0)$

دایرهٔ C_2: $O_2(-1,-2)$

ابتدا مختصات O_2 را در معادلهٔ دایرهٔ C_1 قرار می‌دهیم:

$(-1)^2+(-2)^2+4(-1)-5=0$ رابطه برقرار نیست.

بنابراین با توجه به فرض سؤال قطعاً O_1 روی دایرهٔ C_2 قرار دارد و مختصات O_1 در معادلهٔ C_2 صدق می‌کند.

$$(-2)^2+0^2+2(-2)+4(0)+k=0 \Rightarrow k=0$$

گام دوم: حال معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را پیدا می‌کنیم. برای انجام این کار معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2+y^2+4x-5=x^2+y^2+2x+4y \Rightarrow 2x-4y-5=0$$

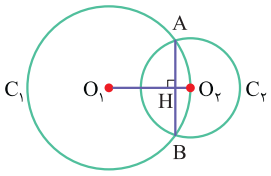
گام سوم: طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2=\sqrt{(-1+2)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$$

فاصلهٔ نقطهٔ O_1 را از وتر مشترک پیدا می‌کنیم:

$$O_1H=\frac{|2(-2)-4(0)-5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{9}{10}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow O_2H=O_1O_2-O_1H=\frac{1}{10}\sqrt{5}$$



گام چهارم: با توجه به نتایج گام سوم داریم:

$$\frac{O_2H}{O_1H}=\frac{\frac{1}{10}\sqrt{5}}{\frac{9}{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{9}$$

یعنی وتر مشترک دو دایره، خط‌المرکزین را به نسبت $\frac{1}{9}$ تقسیم می‌کند.

Telegram: @konkur_in

۱۹ در مثلث ABC به رأس‌های $A=(1,2,-1)$، $B=(3,1,1)$ و $C=(-5,-1,1)$، میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم. حاصل $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مختصات نقطهٔ D را با کمک قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی تعیین کنید.

درس Box

۱) اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند، آن‌گاه ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

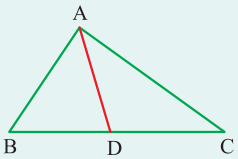
۲) اگر $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند، آن‌گاه مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ از طریق تفاضل مختصات ابتدا از مختصات انتهای بردار به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

۳) اگر $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ و M وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M به صورت زیر است:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

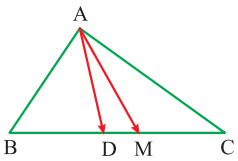
۴) اگر AD نیمساز زاویهٔ داخلی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی داریم:



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطهٔ M وسط ضلع BC قرار دارد، پس مختصات آن به صورت زیر است:



$$M=\frac{B+C}{2}=\left(\frac{3-5}{2},\frac{1-1}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(-1,0,1)$$

بنابراین بردار $\overrightarrow{AM}$ عبارت است از:

$$\overrightarrow{AM}=M-A=(-1-1,0-2,1+1)=(-2,-2,2)$$

گام دوم: طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و AC را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(1+1)^2}=3 \quad ,\quad AC=\sqrt{(-5-1)^2+(-1-2)^2+(1+1)^2}=7$$

بردارهای BD و DC هم‌جهت هستند، پس داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{7}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow 7(D-B)=3(C-D)\Rightarrow D=\frac{1}{10}(7B+3C)=(0/6,0/4,1)$$

Telegram: @konkur_in

بنابراین بردار $\overrightarrow{AD}$ برابر است با:

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (۰/۶, ۰/۴, ۱) - (۱, ۲, -۱) = (-۰/۴, -۱/۶, ۲)$$

گام سوم: به کمک نتایج به‌دست‌آمده از گام‌های اول و دوم، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AD}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM} = (-۰/۴, -۱/۶, ۲).(-۲, -۲, ۲) = ۰/۸ + ۳/۲ + ۴ = ۸$$

Telegram: @konkur_in

۲۰ عدد ۴رقمی $n=\overline{۳a۲۵}$ و ۳رقمی $m=\overline{۷b۱}$ به صورتی هستند که $(m+n)^۲$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. زوج مرتب (a,b) چند حالت ممکن است داشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint طبق قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۱۱، هم‌نهشت n و m رو قرار بده. دقت کن که $-۹\le a-b\le ۹$.

درس Box **بخش‌پذیری بر اعداد خاص:**

پیمانه	قاعده	توضیح فارسی
۳ یا ۹	$\overline{a_n a_{n-۱}...a_۰} \overset{۳\text{ یا }۹}{\equiv} a_۰+a_۱+\cdots+a_n$	هر عدد به پیمانهٔ ۳ یا ۹، هم‌نهشت مجموع ارقام خودش است.
۵ یا ۱۰ یا ۲	$\overline{a_n a_{n-۱}...a_۰} \overset{۲\text{ یا }۱۰\text{ یا }۵}{\equiv} a_۰$	هر عدد، هم‌نهشت رقم یکان خود به پیمانهٔ ۵ یا ۱۰ یا ۲ است.
۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰	$\overline{a_n a_{n-۱}...a_۰} \overset{۴\text{ یا }...}{\equiv} \overline{a_۱a_۰}$	هر عدد، هم‌نهشت دو رقم آخر (یکان و دهگان) خود به پیمانهٔ ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ است.
۱۱	$\overline{a_n a_{n-۱}...a_۰} \overset{۱۱}{\equiv} a_۰-a_۱+a_۲-a_۳+\cdots$	ارقام را از سمت راست یکی در میان $-$ و $+$ می‌گذاریم. هر عدد به پیمانهٔ ۱۱ هم‌نهشت آن است.
۸	$\overline{a_n a_{n-۱}...a_۰} \overset{۸}{\equiv} \overline{a_۲a_۱a_۰}$	هر عدد، هم‌نهشت سه رقم سمت راست به پیمانهٔ ۸ است.

نکته در کارکردن با اعداد nرقمی اگر a یا b اولین رقم سمت چپ عدد مورد نظر باشند آن‌گاه صفر نیز نمی‌توانند باشند. دقت کنید که a و b دو رقم از صفر تا ۹ هستند؛ یعنی $۱\le a\le ۹$ و $۰\le b\le ۹$، پس $۱\le a+b\le ۱۸$ و $-۹\le a-b\le ۹$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۱۱ داریم:

$$\begin{cases} n\equiv ۵-۲+a-۳\overset{۱۱}{\equiv}a \\ m\equiv ۱-b+۷\overset{۱۱}{\equiv}۸-b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m+n)^۲\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow (a+۸-b)^۲\overset{۱۱}{\equiv}۰ \xrightarrow{۸\overset{۱۱}{\equiv}-۳} (a-b-۳)^۲\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow a-b-۳\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

دقت کنید اگر $a-b-۳$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، توان دوم آن هم بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شود.

گام دوم: چون a و b دو رقم از صفر تا ۹ هستند، پس $-۹\le a-b\le ۹$.

گام سوم: برای این‌که $a-b-۳$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، حالت‌های زیر را داریم:

$$a-b=۳$$

a	b
۹	۶
۸	۵
۷	۴
۶	۳
۵	۲
۴	۱
۳	۰

Telegram: @konkur_in

یا

$a-b=-۸$

a	b
۱	۹
۰	۸

پس (a,b) ۹ حالت ممکن است داشته باشد.

یه‌جور دیگه

$n=۵+۲۰+۱۰۰a+۳۰۰۰$

$m=۱+۱۰b+۷۰۰$

$(m+n)^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow (۱۰b+۱۰۰a+۳۷۲۶)^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$

$(-b+a+۶-۲+۷-۳)^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$

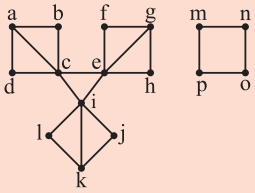
$a-b \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \Rightarrow a-b=۱۱k+۳$

یا

$a-b \overset{۱۱}{\equiv} -۸ \Rightarrow a-b=۱۱k-۸$

Telegram: @konkur_in

۲۱ تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال هفت‌عضوی گراف زیر، کدام است؟



۱) ۳۶

۲) ۷۲

۳) ۱۴۴

۴) ۱۵۰

مشاوره در سال‌های گذشته فقط یک سؤال از گراف در کنکور آمده است. بیشتر سؤال‌ها در سال‌های قبل، از درس اول گراف بوده است امسال به نظر می‌رسه نوبت احاطه‌گری باشه.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

تعداد مینیمال‌های ۲عضوی گراف سمت راست را در تعداد مینیمال‌های ۵عضوی گراف سمت چپ ضرب کن.

درس Box

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال: مجموعهٔ احاطه‌گری که هیچ رأسی از آن قابل حذف‌کردن نباشد (با حذف هر کدام از رأس‌ها دیگر احاطه‌گر نیست).

نکته

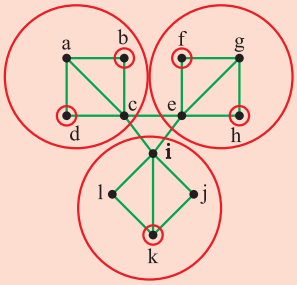
- هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، احاطه‌گر مینیمال هست ولی برعکس آن درست نیست.
- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با کم‌ترین تعداد عضو، همان احاطه‌گر مینیمم است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر مجموعهٔ ۲عضوی که از رأس‌های گراف زیر انتخاب کنیم مینیمال است، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}=۶$$

گام دوم: برای این‌که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در مجموع کل گراف ۷عضوی باشد باید مینیمال‌های ۵عضوی گراف زیر را شمارش کنیم. یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۵عضوی به صورت زیر است:



شبیه همین با کمی دقت متوجه می‌شویم که در دوتا از ۳ بخش (رأس‌های درون دایره) باید دو رأس غیرمجاور و در بخش دیگر کافی است یکی از رأس‌هایی که به بقیه وصل است را انتخاب کنیم.

گام سوم: تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۵عضوی گراف سمت چپ برابر است با:

انتخاب یکی از دو رأس مجاور

$$\binom{۳}{۱}\times ۲ = ۶$$

انتخاب یکی از بخش‌ها

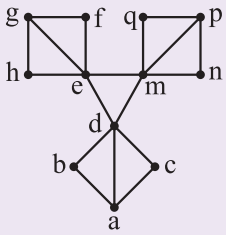
(در دو بخش دیگر نیز به ۱ حالت دو رأس غیرمجاور را برمی‌داریم.)

گام چهارم:

تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۷عضوی کل گراف $= ۶\times ۶ = ۳۶$

Telegram: @konkur_in

در گراف زیر، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال، کدام است؟ (سؤال ۱۵۴ کنکور ریاضی ۱۳۹۹ (خارج از کشور))



۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۲۴

۴) ۲۷

۲۲ چند عدد طبیعی سه‌رقمی، زوج یا مکعب کامل یا مضرب ۳۷ هستند؟

۱) ۴۶۵
۲) ۴۶۶
۳) ۴۶۷
۴) ۴۷۵

مشاوره چند سالی است که از اصل شمول سؤال در کنکور نیامده است. امسال بعید نیست که نوبت آن باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از اصل شمول ۳تایی استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در اعداد ۱۰۰ تا ۹۹۹، تعداد ۹۰۰ عدد داریم که نصف آن‌ها یعنی $n(A)=۴۵۰$ عدد زوج، تعداد $n(B)=۵$ عدد مکعب کامل ($۵^۳$ تا $۹^۳$) و به تعداد $n(C)=[\frac{۹۹۹}{۳۷}]-[\frac{۹۹}{۳۷}]=۲۵$ عدد مضرب ۳۷ داریم.

گام دوم: اشتراک‌های دوتایی را حساب کنیم:

$n(A\cap B)=n(\text{مکعب‌کامل و زوج})=۲$ $(۶^۳, ۸^۳)$

$n(A\cap C)=n(\text{مضرب ۳۷ و زوج})=[\frac{۹۹۹}{۷۴}]-[\frac{۹۹}{۷۴}]=۱۲$ (عدد زوج مضرب ۳۷ مضارب ۷۴ هستند.)

$n(B\cap C)=n(\text{مضرب ۳۷ و مکعب‌کامل})=۰$

گام سوم: اشتراک ۳تایی هم تهی است.

$n(A\cap B\cap C)=۰$

گام چهارم: طبق اصل شمول ۳مجموعه‌ای داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=۴۵۰+۵+۲۵-۲-۱۲-۰+۰=۴۶۶$$

Telegram: @konkur_in

۲۳ اگر $A \cup B = U$ باشد، حاصل $[(A-B) \cup (B-A)]' \cup (B-A)$ کدام است؟ (**U** مجموعهٔ مرجع است.)

۱) A

۲) B

۳) $B \cap A$

۴) $\varnothing$

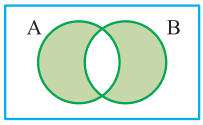
مشاوره از جبر مجموعه‌ها معمولاً یک سؤال این تیپی در کنکور می‌آید. حواستان باشد که با نمودار ون معمولاً این سؤال‌ها به راحتی حل می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از روش نمودار ون یا جبر مجموعه‌ها استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار ون داریم:

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

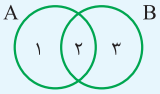


گام دوم:

$$[\underbrace{(A \cup B)}_{U} - (A \cap B)]' \cup (B-A) = [(A \cap B)']' \cup (B-A)$$

$$= (A \cap B) \cup (B-A) = B$$

یه جور دیگه یک شکل به صورت مقابل رسم کرده و نواحی را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$$[(A-B) \cup (B-A)]' \cup (B-A) = [\{۱\} \cup \{۳\}]' \cup \{۳\} = \{۲,۳\} = B$$

Telegram: @konkur_in

۲۴ **روی شش وجه یک تاس عددهای ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و روی شش وجه تاس دیگری عددهای ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ نوشته شده است. این دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و سپس به تعداد مجموع دو عدد روشده سکه پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی همهٔ سکه‌های پرتاب‌شده یکسان آمده‌اند؟**

۱) $\frac{۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint یک جدول ۶×۶ بکش و احتمال آن‌که در پرتاب دو تاس مجموع برابر ۲ یا ۳ یا ۴ باشه رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس را به صورت زیر در نظر می‌گیریم، و در هر حالت مجموع دو تاس را می‌نویسیم:

تاس اول / تاس دوم	۱	۱	۱	۱	۱	۲
۱	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۱	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۲	۳	۳	۳	۳	۳	۴
۲	۳	۳	۳	۳	۳	۴
۲	۳	۳	۳	۳	۳	۴
۲	۳	۳	۳	۳	۳	۴

$\Rightarrow P(\text{۲ مجموع}) = \frac{۱۰}{۳۶}$

$\Rightarrow P(\text{۳ مجموع}) = \frac{۲۲}{۳۶}$

$\Rightarrow P(\text{۴ مجموع}) = \frac{۴}{۳۶}$

گام دوم: در حالتی که مجموع برابر ۲ باشد دو سکه پرتاب می‌کنیم. با احتمال $\frac{۲}{۴}$ یا $\frac{۱}{۲}$ این دو سکه یکسان ظاهر می‌شود. در حالتی که مجموع برابر ۳ باشد ۳ سکه پرتاب می‌کنیم که با احتمال $\frac{۲}{۸}$ (حالت‌های (ر، ر، ر) و (پ، پ، پ) مطلوب هستند) هر ۳ سکه یکسان ظاهر می‌شوند (در حالت مجموع برابر ۴ هم شبیه همین):

گام سوم: طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\Rightarrow P(\text{همهٔ سکه‌ها یکسان}) = \frac{۱۰}{۳۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۲۲}{۳۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۳۶}\times\frac{۱}{۸}$$

$$= \frac{۴۰+۴۴+۴}{۳۶\times۸} = \frac{۸۸}{۳۶\times۸} = \frac{۱۱}{۳۶}$$

Telegram: @konkur_in

۲۵ میانگین دستهٔ A با ۴ دادهٔ مختلف برابر میانگین دستهٔ B با ۶ داده است. به طوری که تنها دادهٔ متفاوت دو دسته، داده‌های b و a هستند. اگر $12\sigma_B^2 - 8\sigma_A^2 = 36$ باشد، قدرمطلق اختلاف a از $\bar{x}_A$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint میانگین b و a همان میانگین دستهٔ اول است.

درس Box **شاخص‌های پراکندگی**

شاخص	فرمول	توضیح فارسی
واریانس	$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ یا $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$	هر داده را منهای میانگین کرده به توان ۲ می‌رسانیم، سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می‌کنیم. به زبان دیگر واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین‌هاست.
انحراف معیار	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$	جذر واریانس است.
ضریب تغییرات	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	$\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$

نکته اگر میانگین تعدادی داده برابر با $\bar{x}$ باشد و با اضافه‌کردن تعدادی دادهٔ جدید میانگین تغییری نکند، میانگین داده‌های جدید اضافه‌شده همان $\bar{x}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دو دسته را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \text{A دستهٔ: } x_1, x_2, x_3, x_4 \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{x} \\ \text{B دستهٔ: } x_1, x_2, x_3, x_4, a, b \end{cases}$$

گام دوم: میانگین دو گروه مساوی است، پس میانگین b و a باید برابر $\bar{x}$ باشد، یعنی $\frac{a+b}{2} = \bar{x}$ و داریم: $b = 2\bar{x} - a$.

گام سوم: واریانس دو دسته را حساب می‌کنیم:

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2}{4} = \frac{K}{4} \quad (K \text{ بگیریم})$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2}{6} = \frac{K + (a - \bar{x})^2 + (2\bar{x} - a - \bar{x})^2}{6} = \frac{K + 2(a - \bar{x})^2}{6}$$

گام چهارم:

$$12\sigma_B^2 - 8\sigma_A^2 = 2(K + 2(a - \bar{x})^2) - 2K = 4(a - \bar{x})^2 = 36$$

$$\Rightarrow (a - \bar{x})^2 = 9 \Rightarrow |a - \bar{x}| = 3$$

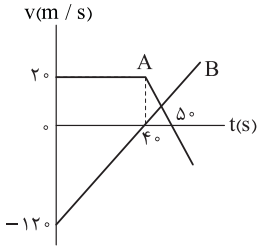
کنکور میانگین دستهٔ اول با ۴ دادهٔ مختلف برابر میانگین دستهٔ دوم با ۵ داده است. به طوری که تنها دادهٔ متفاوت دو دسته دادهٔ a است. اگر واریانس دستهٔ اول یک واحد بیشتر از دستهٔ دوم باشد، انحراف معیار دستهٔ اول کدام است؟

(سؤال ۲۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{5}$

Telegram: @konkur_in

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند و هر دو در مبدأ زمان از مبدأ مکان عبور می‌کنند، به شکل زیر است. از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، بیشینهٔ فاصلهٔ آن‌ها از هم چند متر است؟



۱) ۳۱۵۰
۲) ۳۲۰۰
۳) ۳۲۴۰
۴) ۳۲۸۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$:

در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

$\vec{v}_۲$ = سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m/s)

$\vec{v}_۱$ = سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m/s)

$\vec{a}_{av}$ = شتاب متوسط $(m/s^۲)$

- شتاب متوسط کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.
- در حرکت روی خط راست، برای سادگی، رابطهٔ شتاب متوسط را می‌توان به صورت زیر به کار برد:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

۲) مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازهٔ زمانی است. (مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، با علامت منفی در نظر می‌گیریم، زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند.)

۳) معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$v = at + v_۰$$

v = سرعت متحرک در لحظهٔ t (m/s)

$v_۰$ = سرعت اولیهٔ متحرک (m/s)

a = شتاب $(m/s^۲)$

t = زمان (s)

۴) رابطهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

$$\Delta x = \left(\frac{v_۰ + v}{۲}\right)\Delta t$$

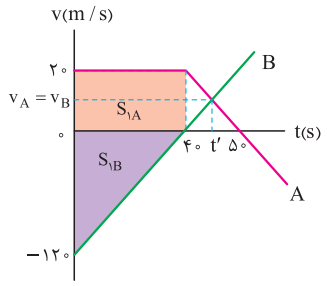
Δx = جابه‌جایی (m)

Δt = بازهٔ زمانی (s)

Telegram: @konkur_in

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با استفاده از مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، جابه‌جایی هر یک از دو متحرک A و B و در نتیجه، فاصلهٔ بین آن‌ها را در لحظهٔ $t = ۴۰\ s$ به دست می‌آوریم:



$$\Delta x_A = S_{۱A} = ۴۰\times ۲۰ = ۸۰۰\ m \xrightarrow{x_{۰A}=۰\ m} x_A = ۸۰۰\ m$$

$$\Delta x_B = S_{۱B} = \frac{۴۰\times(-۱۲۰)}{۲} = -۲۴۰۰\ m \xrightarrow{x_{۰B}=۰\ m} x_B = -۲۴۰۰\ m$$

بنابراین، فاصلهٔ دو متحرک A و B در لحظهٔ $t = ۴۰\ s$ از یکدیگر برابر است با:

$$\Delta x = x_A - x_B = ۸۰۰-(-۲۴۰۰) = ۳۲۰۰\ m$$

گام دوم: شتاب هر یک از دو متحرک A و B را پس از $t = ۴۰\ s$ حساب می‌کنیم:

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} = \frac{۰-۲۰}{۵۰-۴۰} = -۲\ m/s^۲$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} = \frac{۰-(-۱۲۰)}{۴۰-۰} = ۳\ m/s^۲$$

گام سوم: در لحظهٔ t' که سرعت‌های دو متحرک A و B یکسان می‌شوند، فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر بیشینه می‌شود. بر این اساس، معادله‌های دو متحرک را از لحظهٔ $t = ۴۰\ s$ تا لحظهٔ t' می‌نویسیم و آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم تا لحظهٔ t' به دست آید:

$$v_A = v_B \xrightarrow{v=at+v_۰} a_A(t'-۴۰)+v_{۰A} = a_B(t'-۴۰)+v_{۰B}$$

$$\Rightarrow\ -۲(t'-۴۰)+۲۰ = ۳(t'-۴۰)+۰\ \Rightarrow\ -۲t'+۸۰+۲۰ = ۳t'-۱۲۰\ \Rightarrow\ ۲۲۰ = ۵t'\ \Rightarrow\ t' = ۴۴\ s$$

گام چهارم: سرعت هر یک از دو متحرک A و B را در لحظهٔ $t' = ۴۴\ s$ پیدا می‌کنیم؛ سپس به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی هر یک از آن دو را در بازهٔ زمانی ۴۰ s تا ۴۴ s حساب می‌کنیم:

$$v_B = a_B(t'-۴۰)+v_{۰B} = ۳(۴۴-۴۰)+۰ = ۱۲\ m/s$$

$$\Rightarrow\ v_A = v_B = ۱۲\ m/s$$

$$\Delta x'_A = \left(\frac{v_{۰A}+v_A}{۲}\right)\Delta t' = \left(\frac{۲۰+۱۲}{۲}\right)(۴۴-۴۰) = ۱۶\times ۴ = ۶۴\ m$$

$$\Delta x'_B = \left(\frac{v_{۰B}+v_B}{۲}\right)\Delta t' = \left(\frac{۰+۱۲}{۲}\right)(۴۴-۴۰) = ۶\times ۴ = ۲۴\ m$$

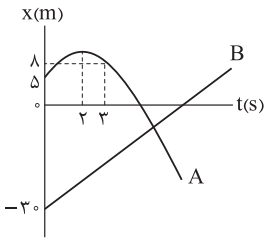
گام پنجم: اختلاف جابه‌جایی دو متحرک A و B را در بازهٔ زمانی ۴۰ s تا ۴۴ s محاسبه می‌کنیم و سپس فاصلهٔ آن‌ها را در لحظهٔ $t' = ۴۴s$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta x' = \Delta x'_A - \Delta x'_B = ۶۴-۲۴ = ۴۰\ m$$

$$\Delta x_{max} = \Delta x + \Delta x' = ۳۲۰۰+۴۰ = ۳۲۴۰\ m$$

Telegram: @konkur_in

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. حرکت متحرک A با شتاب ثابت و حرکت متحرک B با سرعت ثابت است. در لحظه‌ای که جهت بردار مکان متحرک A تغییر می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۰ متر است. در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند، تندی متحرک A از تندی متحرک B چند متر بر ثانیه بیشتر است؟



۱) ۷

۲) ۷/۵

۳) ۱۱

۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

بردار مکان: برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه، نام دارد.

هرگاه متحرک از مبدأ مکان $(x = 0)$ عبور کند، مکان متحرک (x) تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

x = مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

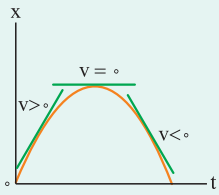
a = شتاب (m/s^2)

t = زمان (s)

v_0 = سرعت اولیه (m/s)

x_0 = مکان اولیه (m)

سرعت در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است.



نمودار مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

با توجه به این‌که معادلهٔ مکان در این نوع حرکت، درجه‌دوم می‌باشد، نمودار آن به صورت قسمتی از یک سهمی است و نقطهٔ شروع آن روی محور x، مکان اولیه (x_0) را نشان می‌دهد.

اگر گودی این سهمی رو به بالا باشد، شتاب مثبت است.

اگر گودی این سهمی رو به پایین باشد، شتاب منفی است.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت:

$$x = vt + x_0$$

x = مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0 = مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m)

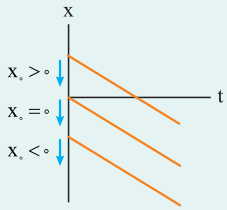
Telegram: @konkur_in

$v =$ سرعت متحرک (m/s)

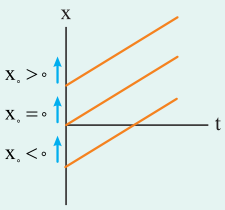
$t =$ زمان (s)

نمودار مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت:

با توجه به این‌که معادلهٔ مکان ـ زمان در این نوع حرکت، یک تابع درجه‌اول است، نمودار آن به صورت یک خط شیب‌دار بوده و شیب آن سرعت متحرک را نشان می‌دهد.

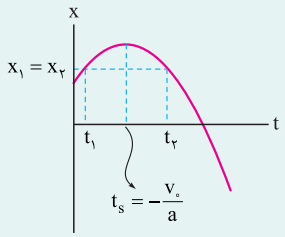


حرکت در سوی منفی یعنی $v < 0$ (شیب خط منفی)



حرکت در سوی مثبت یعنی $v > 0$ (شیب خط مثبت)

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، در زوج‌لحظه‌هایی که نسبت به زمان رأس سهمی $(t_s = -\frac{v_0}{a})$ تقارن دارند، متحرک دارای مکان‌های یکسان و تندی‌های برابر است. البته سرعت‌های متحرک در این دو لحظه، قرینهٔ یکدیگرند.



$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_s \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ v_1 = -v_2 \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار داده‌شده، در لحظهٔ $t = 2\,s$ شیب خط مماس بر نمودار متحرک A برابر صفر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=2s\,,\,v_A=0\,m/s} 0 = a_A \times 2 + v_{0A} \Rightarrow v_{0A} = -2a_A$$

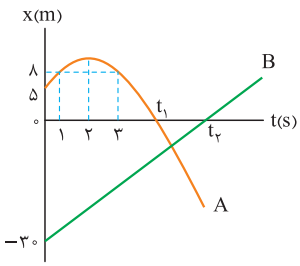
گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A را می‌نویسیم تا شتاب حرکت و سرعت اولیهٔ آن را به دست آوریم. با توجه به درس‌باکس، مکان متحرک A در لحظهٔ $t = 1\,s$ مانند مکان آن در لحظهٔ $t = 3\,s$ و برابر با $x = 8\,m$ است.

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} \xrightarrow[x_{0A}=5\,m]{t=1s\,,\,x_A=8\,m} 8 = \frac{1}{2}a_A + v_{0A} + 5 \xrightarrow{v_{0A}=-2a_A}$$

$$3 = \frac{1}{2}a_A - 2a_A \Rightarrow 3 = -\frac{3}{2}a_A \Rightarrow a_A = -2\,m/s^2$$

$$v_{0A} = -2a_A = -2(-2) \Rightarrow v_{0A} = 4\,m/s$$

گام سوم: در لحظهٔ t_1 جهت بردار مکان متحرک A تغییر می‌کند. این لحظه را مشخص می‌کنیم:



$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A}$$

$$\xrightarrow[v_{0A}=4\,m/s\,,\,x_{0A}=5\,m]{x_A=0\,m\,,\,t=t_1\,,\,a_A=-2\,m/s^2} 0 = \frac{1}{2}(-2)t_1^2 + 4t_1 + 5 \Rightarrow t_1^2 - 4t_1 - 5 = 0 \Rightarrow (t_1 - 5)(t_1 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 5\,s \quad \text{ق ق} \quad , \quad t_1 = -1\,s \quad \text{غ ق ق}$$

Telegram: @konkur_in

گام چهارم: در لحظهٔ t_1 فاصلهٔ دو متحرک از هم $10\,m$ است؛ بنابراین در این لحظه داریم:

$$x_A - x_B = 10\,m \xrightarrow[x_A=0\,m]{t=t_1=5\,s} 0 - x_B = 10\,m \Rightarrow x_B = -10\,m$$

معادلهٔ مکان متحرک B را می‌نویسیم و سرعت آن را به دست می‌آوریم:

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow[x_B=-10\,m\ ,\ x_{0B}=-30\,m]{t=t_1=5\,s} -10 = v_B \times 5 + (-30)$$

$$\Rightarrow 20 = 5v_B \Rightarrow v_B = 4\ m/s$$

گام پنجم: متحرک B در لحظهٔ t_2 از مبدأ مکان عبور می‌کند. این لحظه را به دست می‌آوریم:

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow[x_B=0\,m\ ,\ x_{0B}=-30\,m]{t=t_2\ ,\ v_B=4\,m/s} 0 = 4t_2 + (-30) \Rightarrow t_2 = 7/5\,s$$

گام ششم: تندی متحرک A را در لحظهٔ t_2 به دست آورده و اختلاف آن را با تندی متحرک B محاسبه می‌کنیم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow[v_{0A}=4\,m/s]{a_A=-2\,m/s^2\ ,\ t=t_2=7/5\,s} v_A = -2\times 7/5 + 4 = -11\,m/s \Rightarrow |v_A| = 11\,m/s$$

$$|v_A| - v_B = 11 - 4 = 7\ m/s$$

Telegram: @konkur_in

۲۸ در شرایط خلأ، از ارتفاع ۱۲۰متری سطح زمین، گلولهٔ A رها می‌شود. بعد از ۲/۵ ثانیه، از ۵۰ متر پایین‌تر از نقطهٔ رهاشدن گلولهٔ A، گلولهٔ B رها می‌شود. در لحظه‌ای که فاصلهٔ این دو گلوله برای دومین بار برابر ۶/۲۵ متر می‌شود، فاصلهٔ گلولهٔ A از سطح زمین چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

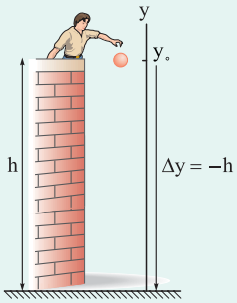
۱) ۴۵ ۲) ۵۸/۷۵ ۳) ۶۱/۲۵ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

سقوط آزاد:

نوعی حرکت روی محور قائم (y) است که در آن، جسم تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی، در نزدیکی زمین سقوط می‌کند و اثر مقاومت هوا بر آن ناچیز فرض می‌شود. (اصطلاحاً می‌گوییم در شرایط خلأ سقوط می‌کند.)



- هنگام سقوط آزاد، تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم، وزن آن است.
- وقتی می‌گوییم شرایط خلأ، یعنی هیچ ماده‌ای حتی هوا وجود ندارد.
- در واقع سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت است، پس کلیهٔ فرمول‌ها، نمودارها و نکات مطرح‌شده در مورد حرکت با شتاب ثابت روی محور x، به طور مشابه، در سقوط آزاد نیز به کار می‌روند؛ با این تفاوت که به جای x از y و به جای a از $-g$ استفاده می‌کنیم.

$(g = ۹/۸\ m/s^۲ \simeq ۱۰\ m/s^۲)$ در سطح زمین

علامت منفی به خاطر آن است که جهت گرانش، رو به پایین یعنی خلاف جهت محور y است.

$\uparrow +y \qquad \downarrow -g$

- در این‌جا سقوط آزاد اجسام را بدون سرعت اولیه بررسی می‌کنیم. $(v_۰ = ۰)\ ,\ (\Delta y = -h)$

معادلهٔ مکان ـ زمان: $y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰$

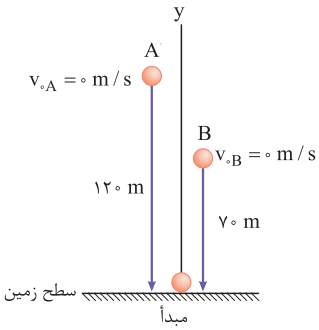
$y =$ مکان جسم (m)

$t =$ زمان (s)

$y_۰ =$ مکان اولیهٔ جسم (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون گلولهٔ A از محل بالاتری رها شده است، اولین بار که فاصلهٔ دو گلوله به ۶/۲۵ m می‌رسد، $y_A - y_B = ۶/۲۵\ m$ است، اما دومین بار که فاصلهٔ دو گلوله به ۶/۲۵ m می‌رسد، $y_B - y_A = ۶/۲۵\ m$ است.



گام دوم: بر این اساس، معادلهٔ مکان دو گلوله را می‌نویسیم و با استفاده از رابطهٔ $y_B - y_A = ۶/۲۵\ m$ لحظهٔ مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰$$

$$y_A = -\frac{۱}{۲}(۱۰)t^۲ + ۰ + ۱۲۰ \Rightarrow y_A = -۵t^۲ + ۱۲۰$$

$$y_B = -\frac{۱}{۲}(۱۰)(t - ۲/۵)^۲ + ۰ + ۷۰ \Rightarrow y_B = -۵(t - ۲/۵)^۲ + ۷۰$$

Telegram: @konkur_in

$$y_B - y_A = ۶/۲۵\,m \Rightarrow -۵(t^۲ - ۵t + ۶/۲۵) + ۷۰ - (-۵t^۲ + ۱۲۰) = ۶/۲۵$$

$$\Rightarrow \cancel{-۵t^۲} + ۲۵t - ۳۱/۲۵ + ۷۰ + \cancel{۵t^۲} - ۱۲۰ = ۶/۲۵$$

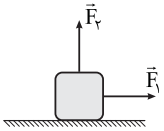
$$\Rightarrow ۲۵t = ۶/۲۵ + ۸۱/۲۵ \Rightarrow t = \frac{۸۷/۵}{۲۵} = ۳/۵\,s$$

گام سوم: مکان گلولهٔ A را در لحظهٔ $t = ۳/۵\,s$ نسبت به سطح زمین پیدا می‌کنیم:

$$y_A = -۵(۳/۵)^۲ + ۱۲۰ = -۶۱/۲۵ + ۱۲۰ = ۵۸/۷۵\,m$$

Telegram: @konkur_in

۲۹ در شکل زیر، جعبه‌ای به جرم $20\ kg$ روی سطح افقی ساکن است. به این جعبه نیروی افقی و ثابت $F_1 = 40\ N$ و نیروی عمودی و متغیر $F_2 = 10t$ وارد می‌شود. کدام مورد دربارهٔ جابه‌جایی جعبهٔ (d) در بازهٔ زمانی $t_1 = 0\ s$ تا $t_2 = 16\ s$ درست است؟ ($g = 10\ N/kg$، ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب $0/5$ و $0/4$ است و همهٔ مقادیر داده‌شده در سؤال و گزینه‌ها در SI هستند.)



۱) $6 < d < 18$
۲) $0 < d < 16$
۳) $3/2 < d < 14$
۴) $3/2 < d < 16$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$: نیرویی است که از طرف سطح تکیه‌گاه و عمود بر آن، بر جسمی که با سطح در تماس است، وارد می‌شود.

اگر جسم در راستای عمود بر سطح، شتابی نداشته باشد، در این راستا $\vec{F}_{net} = 0\ N$ است و از این رابطه $\vec{F}_N$ به دست می‌آید.

رابطهٔ قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{net} = ma \rightarrow (m/s^2)\ \text{شتاب}$$

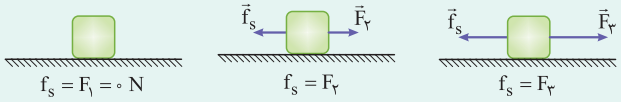
نیروی خالص (N) — جرم (kg)

انواع نیروی اصطکاک:

۱) نیروی اصطکاک ایستایی (f_s)

وقتی نیرویی بخواهد جسمی را روی سطحی به حرکت درآورد، ولی قادر به حرکت‌دادن آن نباشد، معلوم می‌شود نیروی دیگری هم‌اندازهٔ آن و در جهت مخالف، بر جسم اثر می‌کند که مانع حرکت می‌شود. این نیروی مخالف، همان f_s است و مقدارهای متفاوتی بین صفر تا یک مقدار بیشینه دارد.

نیروی f_s را می‌توان با توجه به توازن نیروها و قانون دوم نیوتون تعیین کرد. مثلاً در شکل زیر، داریم:



$f_s =$ اندازهٔ نیروی محرک ناکام

بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت $(f_{s,max})$ نامیده می‌شود و در واقع به اندازهٔ کم‌ترین نیروی محرکی است که می‌تواند حرکت جسم را آغاز کند.

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

$\mu_s =$ ضریب اصطکاک ایستایی

$F_N =$ اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

۲) نیروی اصطکاک جنبشی (f_k)

نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می‌کند.

$$f_k = \mu_k F_N$$

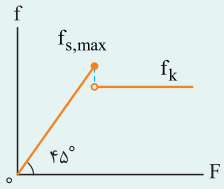
$\mu_k =$ ضریب اصطکاک جنبشی

$F_N =$ اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

معمولاً $\mu_k < \mu_s$ و $f_k < f_{s,max}$ است.

Telegram: @konkur_in

نمودار نیروی اصطکاک برحسب نیروی محرک:

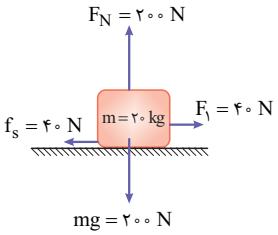


f = نیروی اصطکاک (N)

F = نیروی محرک (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروهای وارد بر جعبه را در لحظهٔ $t = ۰\,s$ رسم می‌کنیم. برای این منظور لازم است تا ابتدا نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را در لحظهٔ $t = ۰\,s$ به دست آوریم:



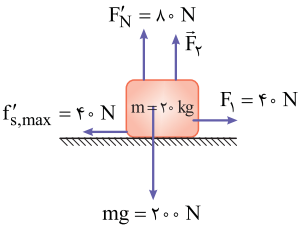
$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s = ۰/۵]{F_N = mg = ۲۰۰\,N} f_{s,max} = ۰/۵ \times ۲۰۰ = ۱۰۰\,N$$

$$F_۱ < f_{s,max} \Rightarrow \text{جسم ساکن می‌ماند.} \Rightarrow f_s = F_۱ = ۴۰\,N$$

گام دوم: برای آن‌که حرکت شروع شود، باید نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت به $۴۰\,N$ برسد.

$$f'_{s,max} = F_۱ = ۴۰\,N$$

$$f'_{s,max} = \mu_s F'_N \Rightarrow ۴۰ = ۰/۵ \times F'_N \Rightarrow F'_N = ۸۰\,N$$



$$F'_N + F_۲ - mg = ۰ \Rightarrow ۸۰ + F_۲ - ۲۰۰ = ۰ \Rightarrow F_۲ = ۱۲۰\,N$$

$$F_۲ = ۱۰t \Rightarrow ۱۲۰ = ۱۰t \Rightarrow t = ۱۲\,s$$

بنابراین تا لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ حرکت نداریم و جسم ساکن است.

گام سوم: نیروی اصطکاک، بلافاصله پس از شروع حرکت را به دست می‌آوریم:

$$f_k = \mu_k F'_N = ۰/۴ \times ۸۰ = ۳۲\,N$$

اگر نیروی اصطکاک f_k ثابت باشد، داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_۱ - f_k = ma \Rightarrow ۴۰ - ۳۲ = ۲۰a \Rightarrow a = ۰/۴\,m/s^۲$$

در این صورت جابه‌جایی d برابر است با:

$$d = \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۴(۱۶ - ۱۲)^۲ = ۰/۲ \times ۱۶ = ۳/۲\,m$$

اما به دلیل آن‌که در فاصلهٔ زمانی $۱۲\,s$ تا $۱۶\,s$ نیروی $F_۲$ در حال کاهش است؛ در نتیجه F_N کاهش یافته و نیروی اصطکاک نیز کم می‌شود؛ بنابراین شتاب حرکت بیشتر شده و جعبه جابه‌جایی بیشتر از $۳/۲\,m$ دارد. $(۳/۲\,m < d)$

گام چهارم: اگر پس از شروع حرکت، اصطکاک ناچیز بود، داشتیم:

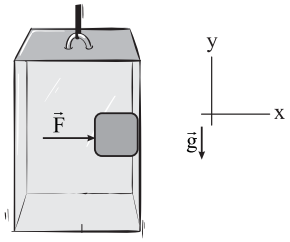
$$F_{net} = ma \Rightarrow F_۱ = ma \Rightarrow ۴۰ = ۲۰a \Rightarrow a = ۲\,m/s^۲$$

$$d = \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲(۱۶ - ۱۲)^۲ = ۱۶\,m$$

ولی به علت وجود اصطکاک، جابه‌جایی جعبه پس از شروع حرکت کم‌تر از $۱۶\,m$ است و می‌توان نوشت: $d < ۱۶\,m$

Telegram: @konkur_in

۳۰ در شکل زیر، معادلهٔ سرعت ـ زمان آسانسور در SI به صورت $v = ۲t - ۸$ است. شخصی درون این آسانسور جسمی به جرم $۲kg$ را با نیروی افقی $F = ۳۲N$ به دیوارهٔ قائم آسانسور می‌فشارد. در لحظهٔ $t = ۲s$، بزرگی نیرویی که جسم به دیوارهٔ آسانسور وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و دیوار قائم به ترتیب ۰/۷۵ و ۰/۶ است.)



۱) ۴۰

۲) $۴\sqrt{۷۳}$

۳) $۱۶\sqrt{۵}$

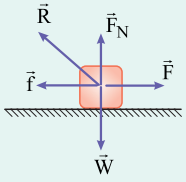
۴) $۲۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- اگر سرعت و شتاب متحرک هم‌جهت (هم‌علامت) باشند، $av > ۰$ بوده، اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد و می‌گوییم حرکت تندشونده است.
- اگر سرعت و شتاب متحرک غیرهم‌جهت (غیرهم‌علامت) باشند، $av < ۰$ بوده، اندازهٔ سرعت کاهش می‌یابد و می‌گوییم حرکت کندشونده است.

نیروی سطح:



از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ (نیروی عمودی سطح) و $\vec{f}$ (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برایند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم.

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f^۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جهت حرکت آسانسور و نوع حرکت آن را در لحظهٔ $t = ۲s$ مشخص می‌کنیم:

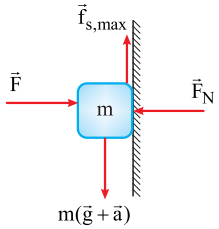
$$\vec{v} = (۲t - ۸)\vec{j} \xrightarrow{t=۲s} \vec{v} = (۲\times۲ - ۸)\vec{j} = (-۴ m/s)\vec{j}$$

بنابراین در لحظهٔ $t = ۲s$ آسانسور با سرعت $۴ m/s$ رو به پایین حرکت می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} v = at + v_۰ \\ v = ۲t - ۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = ۲ m/s^۲$$

$$\left.\begin{matrix} a = ۲ m/s^۲ \\ v = -۴ m/s \end{matrix}\right\} \Rightarrow av < ۰ \Rightarrow$$ حرکت آسانسور کندشونده و رو به پایین است.

گام دوم: نیروی اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوارهٔ قائم آسانسور را به دست می‌آوریم و آن را با وزن ظاهری جسم مقایسه می‌کنیم:



$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s = ۰/۷۵]{F_N = F = ۳۲ N} f_{s,max} = ۰/۷۵ \times ۳۲ \Rightarrow f_{s,max} = ۲۴ N$$

$$m(g + a) = ۲(۱۰ + ۲) = ۲۴ N$$

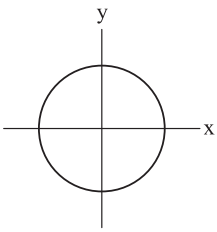
بنابراین $m(g + a) = f_{s,max} = ۲۴ N$ است و جسم روی دیوارهٔ قائم آسانسور در آستانهٔ حرکت می‌ماند.

Telegram: @konkur_in

گام سوم: طبق قانون سوم نیوتون، بزرگی نیرویی که جسم به دیوارهٔ آسانسور وارد می‌کند، با بزرگی نیرویی که دیوارهٔ آسانسور به جسم وارد می‌کند، یکسان است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} = \sqrt{۳۲^2 + ۲۴^2} = ۴۰\,N$$

۳۱ در شکل زیر، دایره‌ای به شعاع $۴\,m$ در صفحهٔ x ـ y قرار دارد و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات است. جسمی به جرم $۲\,kg$ روی محیط این دایره با تندی ثابت در جهت پادساعتگرد در حال حرکت است. اگر در لحظهٔ $t_۱$ بردار نیروی مرکزگرای وارد بر این جسم در SI برابر $\vec{F}=\frac{\pi^۲}{۲}\vec{j}$ باشد، بردار شتاب متوسط این جسم در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲=t_۱+۲s$ در SI کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}(-\vec{i}+\vec{j})$

۲) $\frac{\pi}{۲}(\vec{i}-\vec{j})$

۳) $\pi(-\vec{i}+\vec{j})$

۴) $\pi(\vec{i}-\vec{j})$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

شتاب مرکزگرا ($\vec{a}_c$):

در حرکت دایره‌ای یکنواخت با آن‌که اندازهٔ سرعت (تندی) ثابت است، اما جهت آن، که همواره بر مسیر حرکت دایره‌ای مماس است، تغییر می‌کند و حرکتی شتاب‌دار محسوب می‌شود.

دوره (T):

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت‌زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دورهٔ تناوب (دوره) می‌نامیم و یکای آن ثانیه است.

$$T=\frac{۲\pi r}{v} \qquad r=\text{شعاع مسیر }(m) \qquad v=\text{تندی ذره }(m/s)$$

نیروی مرکزگرا:

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک نیروی خالصِ رو به مرکز، سبب ایجاد شتاب مرکزگرا می‌شود. به این نیروی خالص که منجر به حرکت دایره‌ای می‌شود، نیروی مرکزگرا می‌گوییم.

با توجه به قانون دوم نیوتون، در حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌توان نوشت:

$$F_{net}=m\frac{v^۲}{r}$$

$m=$ جرم جسم متحرک (kg)

$F_{net}=$ بزرگی نیروی مرکزگرا (N)

$v=$ تندی ذره (m/s)

$r=$ شعاع مسیر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک رابطهٔ نیروی مرکزگرا، تندی حرکت جسم را به دست می‌آوریم:

$$F_{net}=m\frac{v^۲}{r} \xrightarrow[m=۲kg\,,\,r=۴m]{F_{net}=\frac{\pi^۲}{۲}N} \frac{\pi^۲}{۲}=۲\times\frac{v^۲}{۴} \Rightarrow v^۲=\pi^۲ \Rightarrow v=\pi\,m/s$$

گام دوم: با معلوم‌بودن تندی حرکت، دورهٔ حرکت را محاسبه می‌کنیم:

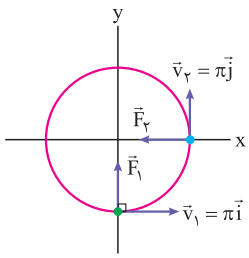
$$T=\frac{۲\pi r}{v} \xrightarrow[v=\pi\,m/s]{r=۴m} T=\frac{۲\pi\times۴}{\pi}=۸s$$

گام سوم: بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲=t_۱+۲s$ را برحسب دورهٔ حرکت می‌نویسیم:

$$\Delta t=t_۲-t_۱=۲s \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۴}$$

Telegram: @konkur_in

یعنی متحرک، $\frac{۱}{۴}$ از مسیر دایره‌ای را می‌پیماید.



گام چهارم: بردار شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{\pi\vec{j} - \pi\vec{i}}{t_۱ + ۲ - t_۱} = \frac{\pi}{۲}(-\vec{i} + \vec{j})(m/s^۲)$$

Telegram: @konkur_in

۳۱ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۱۸\cos(\omega t)$ است. اگر برای اولین بار، جابه‌جایی نوسانگر در دو ثانیهٔ سوم و دو ثانیهٔ چهارم برابر باشد، کمینهٔ مسافتی که این متحرک در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۸ ثانیه‌ای طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟ $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \text{ و } \sqrt{۳} \simeq ۱/۷)$

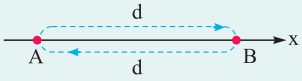
۱) ۳۰/۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۰/۸ ۴) ۵/۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

مقایسهٔ مسافت و جابه‌جایی:

مسافت یعنی طول مسیر پیموده‌شده توسط متحرک و یک کمیت نرده‌ای است؛ اما جابه‌جایی، برداری است که مکان شروع حرکت را به مکان پایانی آن وصل می‌کند.



به طور کلی داریم: اندازهٔ جابه‌جایی ≤ مسافت

تنها در صورتی که حرکت، بدون تغییر جهت باشد، اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت، برابر می‌شود.

مثلاً در شکل فوق وقتی متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته و دوباره به نقطهٔ A برگردد، جابه‌جایی آن صفر است، اما مسافت طی‌شده (l) برابر با $۲d$ است.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده:

$$x = A\cos\omega t$$

$x =$ مکان نوسانگر (m)

$A =$ دامنهٔ نوسان (m)

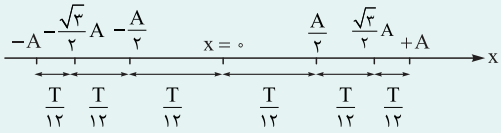
$\omega =$ بسامد زاویه‌ای (rad/s)

$t =$ زمان (s)

بیشترین فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل را دامنه می‌نامیم.

دورهٔ تناوب (T): مدت‌زمان یک چرخه را دورهٔ تناوب می‌گوییم و یکای آن ثانیه است.

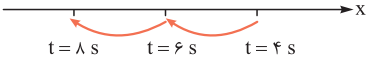
شکل مقابل؛ زمان‌های پرکاربرد و مکان‌های مربوط به آن‌ها را در حرکت هماهنگ ساده نشان می‌دهد:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جابه‌جایی نوسانگر در دو بازهٔ زمانی یکسان، برای اولین بار برابر شننده است؛ بنابراین اولاً در مجموع این دو بازهٔ زمانی، تغییر جهت نداریم و ثانیاً باید از مرکز نوسان هم عبور کرده باشیم؛ چون در ربع اول نوسان، در هیچ بازهٔ زمانی یکسانی جابه‌جایی‌ها نمی‌توانند برابر باشند.

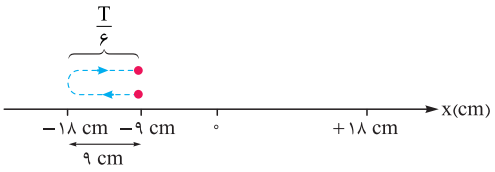
از طرفی با شرایط موجود، جابه‌جایی‌ها در دو ثانیهٔ سوم و دو ثانیهٔ چهارم باید به صورت متقارن در طرفین نقطهٔ تعادل (مرکز نوسان) باشند. با توجه به این‌که حرکت از مکان $x = A$ شروع شده است، ۲ ثانیهٔ سوم باید قبل از $x = ۰\ cm$ و ۲ ثانیهٔ چهارم باید بعد از $x = ۰\ cm$ باشد. پس در لحظهٔ $t = ۶\ s$ (انتهای دو ثانیهٔ سوم و ابتدای دو ثانیهٔ چهارم) متحرک برای اولین بار از مبدأ عبور کرده است. در نتیجه:



$$\frac{T}{۴} = ۶ \Rightarrow T = ۲۴\ s$$

Telegram: @konkur_in

گام دوم: کمینهٔ مسافتی که این متحرک در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۸ثانیه‌ای طی می‌کند، شامل دو چهار ثانیهٔ متوالی است که به صورت متقارن در رفت و برگشت به انتهای مسیر قرار دارند:



$$\Delta t = ۸\ s \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۳} \Rightarrow \frac{\Delta t}{۲} = \frac{T}{۶}$$

$$l_{min} = ۹ + ۹ = ۱۸\ cm$$

Telegram: @konkur_in

۳۳ چشمهٔ صوتی روی محور x و در مبدأ مکان ساکن است و صوتی با بسامد معین تولید می‌کند. شنونده‌ای که با سرعت ثابت در جهت محور x در حال حرکت است، در مبدأ زمان از مبدأ مکان عبور می‌کند. در بازهٔ زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 6s$، به ترتیب، تراز شدت صوتی که شنونده دریافت می‌کند، چند دسی‌بل است و بسامد صوت دریافتی شنونده، چگونه تغییر می‌کند؟ $(\log 2 = 0/3 \quad و \quad \log 3 = 0/5)$

۱) ۶ ـ کاهش می‌یابد.
۲) ۶ ـ تغییر نمی‌کند.
۳) ۱۰ ـ کاهش می‌یابد.
۴) ۱۰ ـ تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) رابطهٔ تراز شدت صوت برای مقایسهٔ دو حالت مختلف: $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$

I_1 = شدت صوت در حالت اول (W/m^2)

I_2 = شدت صوت در حالت دوم (W/m^2)

β_1 = تراز شدت صوت در حالت اول (dB)

β_2 = تراز شدت صوت در حالت دوم (dB)

۲) شدت صوت حاصل از یک چشمهٔ صوتی، با مربع فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوتی رابطهٔ وارون دارد: $\frac{I_2}{I_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2$

r_1 = فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت در حالت اول (m)

r_2 = فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت در حالت دوم (m)

۳) اثر **دوپلر**: اگر چشمهٔ صوتی و شنونده (ناظر) نسبت به هم حرکت داشته باشند، بسامد متفاوتی به گوش شنونده می‌رسد که **اثر دوپلر** نام دارد.

اگر شنونده (ناظر) و چشمهٔ صوتی نسبت به هم نزدیک شوند، $f' > f$ و اگر نسبت به هم دور شوند، $f' < f$ خواهد بود.

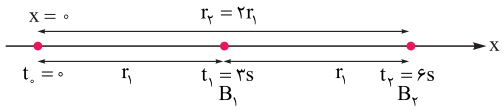
f = بسامد واقعی چشمهٔ صوتی

f' = بسامد ظاهری که به گوش شنونده می‌رسد.

اندازهٔ این تغییر بسامد، به سرعت‌های چشمهٔ صوتی و شنونده و سرعت انتشار صوت در محیط بستگی دارد، اما به فاصلهٔ شنونده تا چشمهٔ صوتی ربطی ندارد. این فاصله، روی شدت و بلندی صدای دریافتی توسط شنونده مؤثر است، نه بسامد آن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مکان متحرک را در دو لحظهٔ t_1 و t_2 روی محور x نشان می‌دهیم:



چون شنونده با سرعت ثابت در جهت محور x حرکت می‌کند، جابه‌جایی آن در ۳ ثانیهٔ اول حرکت و ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، یکسان است و داریم:

$r_2 = 2r_1$

گام دوم: نسبت شدت صوت دریافتی توسط شنونده را در دو لحظهٔ t_1 و t_2 به دست می‌آوریم و براساس آن تغییر تراز شدت صوت در این دو لحظه را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{I_2}{I_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2 \xrightarrow{r_2 = 2r_1} \frac{I_2}{I_1} = (\frac{r_1}{2r_1})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log (\frac{1}{4}) = 10(\log 1 - \log 4) = 10(-\log 2^2)$$

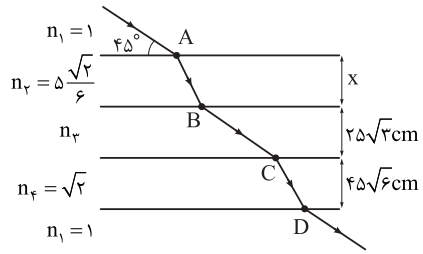
$$\Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = -10(2 \log 2) = -20(0/3) = -6\,dB$$

Telegram: @konkur_in

بنابراین تراز شدت صوت ۶ دسی‌بل تغییر می‌کند. (رد گزینه‌های (۳) و (۴))

گام سوم: بسامد دریافتی توسط شنونده، به فاصلهٔ او تا چشمهٔ صوتی بستگی ندارد؛ بلکه به سرعت شنونده نسبت به چشمهٔ صوتی بستگی دارد که در هر دو لحظهٔ t_1 و t_2 یکسان هستند و بسامد صوت دریافتی شنونده تغییر نمی‌کند.

۳۰ در شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگی از هوا وارد محیط‌هایی با مرزهای موازی شده و پس از عبور از آن‌ها دوباره وارد هوا می‌شود. اگر مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا این پرتو از نقطهٔ C به نقطهٔ D برسد، ۱/۲ برابر مدت‌زمانی باشد که پرتو نور از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد، x چند سانتی‌متر است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



۱) $54\sqrt{2}$

۲) $72\sqrt{2}$

۳) ۹۰

۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) قانون شکست اسنل برای شکست موج‌های نورانی:

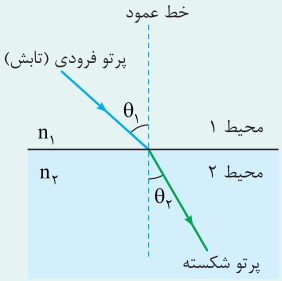
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

n_1 = ضریب شکست محیط اول

n_2 = ضریب شکست محیط دوم

θ_1 = زاویهٔ تابش

θ_2 = زاویهٔ شکست



۲) تندی نور، با ضریب شکست محیط، نسبت عکس دارد. یعنی هر چه محیط غلیظ‌تر باشد، ضریب شکست آن بزرگ‌تر بوده و تندی انتشار نور در آن کم‌تر است.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

v_1 = تندی نور در محیط اول (m/s)

v_2 = تندی نور در محیط دوم (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ اسنل در نقاط A و D، زاویهٔ شکست در نقطهٔ A و زاویهٔ تابش در نقطهٔ D را محاسبه می‌کنیم:

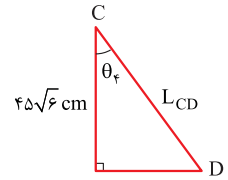
$$\text{A نقطهٔ: } n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \xrightarrow[n_2=\frac{5\sqrt{2}}{6}]{n_1=1,\ \sin\theta_1=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}} 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}\times\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \sin\theta_2 = 0/6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

$$\text{D نقطهٔ: } n_4 \sin\theta_4 = n_1 \sin\theta_1 \xrightarrow[n_1=1]{n_4=\sqrt{2},\ \theta_1=45^\circ} \sqrt{2}\sin\theta_4 = 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_4 = 30^\circ$$

گام دوم: با معلوم‌بودن ضخامت محیط (۴)، طول مسیر C تا D (L_{CD}) را به دست می‌آوریم:



$$\cos\theta_4 = \frac{45\sqrt{6}}{L_{CD}} \xrightarrow{\cos\theta_4=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{6}}{L_{CD}}$$

$$\Rightarrow L_{CD} = 90\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Telegram: @konkur_in

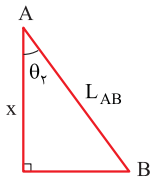
گام سوم: با استفاده از متن سؤال در مورد زمان عبور پرتوی نور از مسیرهای AB و CD می‌توان نوشت:

$$\Delta t_{CD} = ۱/۲\Delta t_{AB} \xrightarrow{v=\frac{L}{\Delta t}} \frac{L_{CD}}{v_{CD}} = ۱/۲ \times \frac{L_{AB}}{v_{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱/۲L_{AB}}{L_{CD}} = \frac{v_{AB}}{v_{CD}} \xrightarrow[L_{CD}=۹۰\sqrt{۲}\ cm]{\frac{v_{AB}}{v_{CD}}=\frac{n_۴}{n_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۵\sqrt{۲}}{۶}}} \frac{۱/۲L_{AB}}{۹۰\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\frac{۵\sqrt{۲}}{۶}} = \frac{۶}{۵}$$

$$\Rightarrow L_{AB} = ۹۰\sqrt{۲}\ cm$$

گام چهارم: با معلوم‌بودن زاویهٔ $\theta_۲$ و هم‌چنین طول مسیر A تا B (L_{AB})، مجهول x را پیدا می‌کنیم:



$$x = L_{AB}\cos\theta_۲ \xrightarrow[L_{AB}=۹۰\sqrt{۲}\ cm]{\theta_۲=۳۷^\circ\ ,\ \cos ۳۷^\circ=۰/۸} x = ۹۰\sqrt{۲} \times ۰/۸ \Rightarrow x = ۷۲\sqrt{۲}\ cm$$

Telegram: @konkur_in

۳۰ در مدل اتمی بور برای هیدروژن، الکترونی در kاُمین حالت برانگیختهٔ خود قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، این الکترون می‌تواند فقط ۴ نوع فوتون در محدودهٔ فرابنفش تابش کند. برای گذار این الکترون به حالت برانگیخته $(k+1)$اُم، بسامد فوتونی که باید جذب کند، تقریباً چند تراهرتز است؟ $(E_R = 13/6\,eV$ و $h = 4\times10^{-15}\,eV.s)$

۱) ۴۱/۵ ۲) ۷۶/۵ ۳) ۷۶۵ ۴) ۴۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

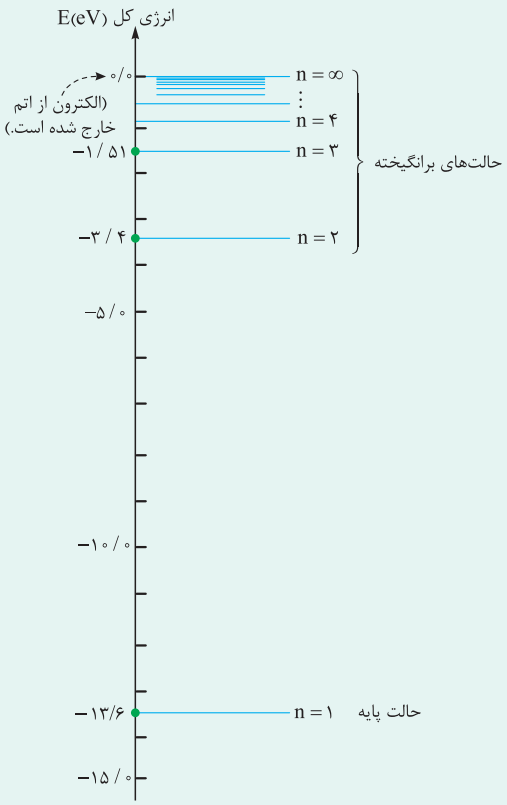
درس Box

رابطهٔ تراز‌های انرژی الکترون در اتم هیدروژن:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2}$$

E_n = انرژی الکترون در مدار nام اتم هیدروژن (eV)

E_R = انرژی یک ریدبرگ $(13/6\,eV)$



الکترون در یک اتم، نمی‌تواند هر مقدار انرژی را داشته باشد، بلکه مجاز است انرژی‌ای برابر با یکی از مقدارهایی که از رابطهٔ فوق به دست می‌آید، داشته باشد. هر یک از این مقدارهای مجاز را یک تراز انرژی می‌نامند.

بالاترین تراز انرژی، مربوط به $n = \infty$ است که انرژی آن صفر است. پایین‌ترین تراز انرژی، مربوط به $n = 1$ (حالت پایه) با انرژی $-13/6\,eV$ است.

ترازهای بالاتر از $n = 1$ حالت برانگیخته نامیده می‌شوند. مثلاً در اولین حالت برانگیخته، $n = 2$ و در دومین حالت برانگیخته، $n = 3$ و ... است.

الکترون می‌تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U، به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر E_L، یک فوتون تابش می‌شود. انرژی فوتون تابش‌شده برابر اختلاف انرژی بین دو حالت اولیه و نهایی است.

$$\Delta E = E_U - E_L = hf$$

hf = انرژی فوتون تابش‌شده (eV)

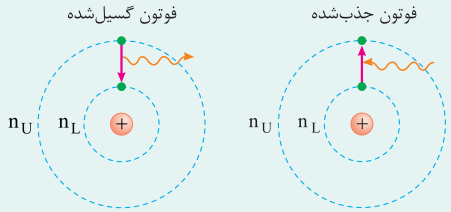
ΔE = اختلاف انرژی بین دو مدار (eV)

Telegram: @konkur_in

h = ثابت پلانک $= ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s$

f = بسامد (Hz)

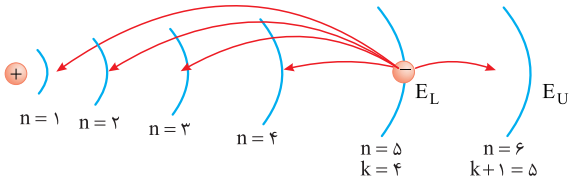
هم‌چنین برعکس، برای آن‌که الکترونی از تراز انرژی E_L به تراز انرژی E_U برود؛ یعنی از هسته دور شود، باید انرژی $E_U - E_L$ را جذب کند. الکترون این انرژی را با جذب فوتونی که درست همین مقدار انرژی را دارد، به دست می‌آورد.



مطابق رابطهٔ ریدبرگ، وقتی یک الکترون، تعداد محدودی فوتون را فقط در ناحیهٔ فرابنفش گسیل می‌کند، یعنی طیف لیمان $(n' = ۱)$ ایجاد می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در kامین حالت برانگیخته، الکترون در مدار $n = k + ۱$ است. از آن‌جا که الکترون فقط می‌تواند ۴ نوع فوتون در محدودهٔ فرابنفش گسیل کند، باید $n = ۵$ باشد؛ بنابراین حالت برانگیختهٔ $(k+۱)$ام مربوط به $n = ۶$ است.



$$E_n = -\frac{E_R}{n^۲} \xrightarrow[n_U=۶\,,\,n_L=۵]{E_R=۱۳/۶eV} E_U - E_L = -\frac{۱۳/۶}{۳۶} - (-\frac{۱۳/۶}{۲۵})$$

$$\Rightarrow \Delta E = ۱۳/۶(\frac{-۲۵+۳۶}{۹۰۰}) \simeq ۰/۱۶۶\ eV$$

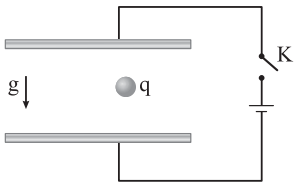
گام دوم: برای آن‌که الکترون از حالت برانگیختهٔ $k = ۴$ به حالت برانگیختهٔ $k+۱ = ۵$ برود، یعنی از مدار $n_L = ۵$ به مدار $n_U = ۶$ برود، باید فوتونی با بسامد f را جذب کند:

$$\Delta E = hf \xrightarrow[h=۴\times۱۰^{-۱۵}\,eV\cdot s]{\Delta E\simeq ۰/۱۶۶\ eV} f \simeq \frac{۰/۱۶۶}{۴\times۱۰^{-۱۵}} = ۰/۰۴۱۵\times۱۰^{۱۵}\,Hz$$

$$\Rightarrow f \simeq ۴۱/۵\times۱۰^{۱۲}\,Hz \Rightarrow f \simeq ۴۱/۵\ THz$$

Telegram: @konkur_in

۳۶ **در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی q در فضای خلأ بین دو صفحهٔ باردار و افقی یک خازن، با سرعت ثابت، رو به بالا در حال حرکت است. با کدام تغییر، حرکت رو به بالای ذره، کندشونده می‌شود؟**



۱) کاهش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K بسته است.

۲) افزایش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K بسته است.

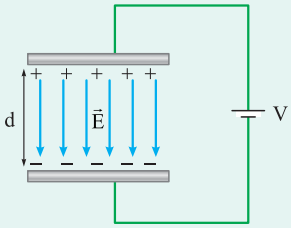
۳) کاهش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K باز است.

۴) افزایش فاصلهٔ دو صفحه، در حالتی که کلید K باز است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) رابطهٔ میدان الکتریکی یکنواخت:



$$E = \frac{V}{d}$$

E = اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت (V/m)

V = اختلاف پتانسیل میان دو صفحهٔ رسانا (V)

d = فاصلهٔ میان دو صفحهٔ رسانا (m)

۲) اگر ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q در میدان الکتریکی قائم $\vec{E}$ به صورت معلق در حال تعادل باشد و یا با سرعت ثابت حرکت کند، نیروی وزن آن با نیروی الکتریکی وارد بر آن، هم‌اندازه و در جهت مخالف‌اند.

$$F_E = mg \Rightarrow |q|E = mg$$

m = جرم (kg)

g = شتاب گرانش $= 10\,N/kg$

$|q|$ = اندازهٔ بار الکتریکی ذره (C)

E = اندازهٔ میدان الکتریکی (V/m)

۳) رابطهٔ ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختاری آن:

$$C = \kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}$$

C = ظرفیت خازن (F)

κ = ثابت دی‌الکتریک

$\varepsilon_{\circ}$ = ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $= 8/85\times10^{-12}\,F/m$

A = مساحت صفحه‌ها (m^2)

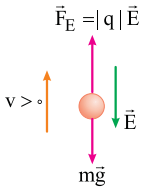
d = فاصلهٔ جدایی صفحه‌ها (m)

۴) تا زمانی که دو سر یک خازن پرشده، به دو سر یک مولد (باتری) وصل است، اختلاف پتانسیل دو سر آن (V) ثابت می‌ماند، اما اگر خازن پر شده و از مولد جدا شود، بار الکتریکی آن (Q) ثابت می‌ماند.

Telegram: @konkur_in

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در حالت اول که ذرهٔ دارای بار الکتریکی q در میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحهٔ خازن، با سرعت ثابت رو به بالا در حرکت است، داریم:



$$|q|E - mg = 0 \Rightarrow |q|E = mg$$

گام دوم: برای آن‌که حرکت رو به بالای ذره، کندشونده باشد، باید $F_E < mg$ شود؛ بنابراین باید F_E کاهش یابد، زیرا وزن ذره ثابت است.

از طرفی بار الکتریکی ذره نیز ثابت است؛ در نتیجه باید میدان الکتریکی کاهش یابد.

اگر کلید بسته باشد، یعنی دو سر خازن به دو سر مولد وصل باشد، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت می‌ماند، در این حالت باید فاصلهٔ دو صفحه افزایش یابد تا میدان الکتریکی کاهش پیدا کند. (درستی گزینهٔ (۲))

$$\downarrow E = \frac{V}{d\uparrow}$$

۳۰ مقاومت الکتریکی یک سیم $0/5\ \Omega$ است. دو سر این سیم را به دو سر یک باتری با مقاومت درونی $2\ \Omega$ وصل می‌کنیم. در این حالت توان الکتریکی مصرفی سیم برابر P است. سیم را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده و یکی از قسمت‌ها را از ابزاری عبور می‌دهیم تا طول آن به طور یکنواخت n برابر شود؛ سپس دو سر آن را به دو سر همان باتری وصل می‌کنیم. اگر در این حالت هم توان الکتریکی مصرفی سیم برابر با P باشد، n برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) مقاومت الکتریکی یک جسم در دمای ثابت:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R = مقاومت الکتریکی (Ω)

ρ = مقاومت ویژه $(\Omega . m)$

L = طول جسم (m)

A = مساحت سطح مقطع (m^2)

بنابراین برای مقایسهٔ دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2}$$

اگر یک سیم را از ابزاری عبوری دهیم و حجم آن ثابت بماند، داریم:

$$\frac{R_2}{R_1} = (\frac{L_2}{L_1})^2$$

۲) رابطهٔ مستقل از جریان در یک مدار تک‌حلقه:

$$V = \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} + r}$$

V = اختلاف پتانسیل دو سر مولد (V)

ε = نیروی محرکهٔ مولد (V)

R_{eq} = مقاومت معادل خارجی مدار (Ω)

r = مقاومت درونی مولد (Ω)

۳) توان الکتریکی مصرفی در یک مقاومت خارجی R:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

P = توان الکتریکی (W)

V = اختلاف پتانسیل (V)

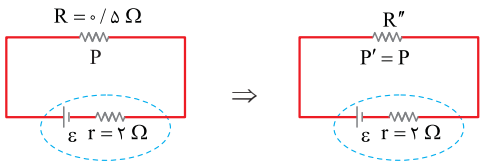
R = مقاومت الکتریکی (Ω)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقاومت الکتریکی سیم را پس از تغییرات ایجادشده در آن، به دست می‌آوریم:

R' = مقاومت سیم پس از چهار قسمت شدن

R'' = مقاومت یک قسمت از سیم، پس از عبور از ابزار



$$\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \Rightarrow \frac{R'}{0/5} = \frac{\frac{1}{4}L}{L} \Rightarrow R' = \frac{1}{8}\Omega$$

$$\frac{R''}{R'} = (\frac{L''}{L'})^2 \Rightarrow \frac{R''}{\frac{1}{8}} = n^2 \Rightarrow R'' = \frac{n^2}{8}$$

Telegram: @konkur_in

گام دوم: توان الکتریکی مصرفی سیم در دو حالت را برابر با هم قرار می‌دهیم:

$$P = P'' \Rightarrow \frac{V^2}{R} = \frac{V''^2}{R''} \xrightarrow{V=\frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq}+r}}$$

$$\frac{\varepsilon^2 R^2}{R(R+r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R''^2}{R''(R''+r)^2} \Rightarrow \frac{R}{(R+r)^2} = \frac{R''}{(R''+r)^2} \xrightarrow[R''=\frac{n^2}{8},\ r=2\Omega]{R=0/5\Omega}$$

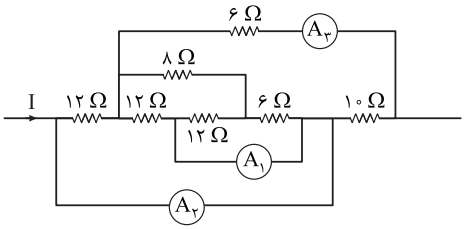
$$\frac{0/5}{(0/5+2)^2} = \frac{\frac{1}{8}n^2}{(\frac{1}{8}n^2+2)^2} \Rightarrow \frac{8}{100} = \frac{\frac{1}{8}n^2}{(\frac{1}{8}n^2+2)^2} \xrightarrow{\sqrt{\ }}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{n}{\frac{1}{8}n^2+2} \Rightarrow n^2+16=10n \Rightarrow n^2-10n+16=0$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-8)=0 \Rightarrow n=2 \text{ یا } n=8$$

Telegram: @konkur_in

۳۰ شکل زیر، قسمتی از یک مدار را نشان می‌دهد که در آن آمپرسنج آرمانی $A_۲$ مقدار $۷/۵\,A$ را نشان می‌دهد. اختلاف مقدارهایی که دو آمپرسنج آرمانی $A_۱$ و $A_۳$ نشان می‌دهند، چند آمپر است؟



۱) ۱/۵

۲) ۴/۵

۳) ۰/۵

۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

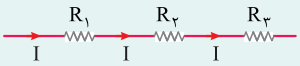
درس Box

۱) مقاومت الکتریکی آمپرسنج آرمانی، صفر فرض می‌شود؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی دو سر آن، یکسان است.

۲) برای آن‌که شکل واضح‌تری از یک مدار رسم کنیم، نقاطی را که با سیم رابط (مقاومت آن ناچیز فرض می‌شود) به یکدیگر متصل شده‌اند، با پتانسیل یکسان و با نام مشترک یک نقطه در نظر می‌گیریم. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی، دو سر مدار را مبنا قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری‌شده، جایگزین می‌کنیم.

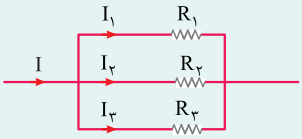
۳) مجموع جریان‌هایی که به هر نقطهٔ انشعاب (گره) وارد می‌شود، برابر مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطهٔ انشعاب خارج می‌شود.

۴) از مقاومت‌های متوالی $R_۱$ و $R_۲$ و ...، جریان الکتریکی یکسانی می‌گذرد و مقاومت معادل (R_{eq}) آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

۵) مقاومت‌های موازی $R_۱$ و $R_۲$ و ... اختلاف پتانسیل یکسانی دارند، اما جریان الکتریکی، به نسبت عکس مقاومت الکتریکی، از آن‌ها می‌گذرد. البته اگر این مقاومت‌های موازی، مشابه یکدیگر باشند، جریان الکتریکی به نسبت مساوی بین آن‌ها تقسیم می‌شود.



$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳}$$

$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳$$

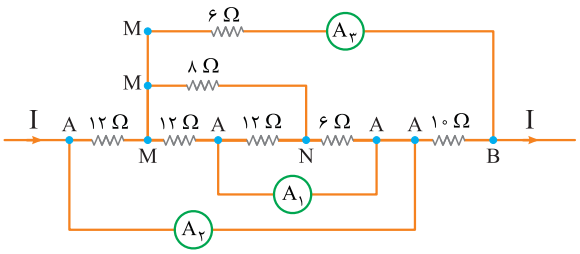
$$V = V_۱ = V_۲ = V_۳ \Rightarrow IR_{eq} = I_۱R_۱ = I_۲R_۲ = I_۳R_۳$$

برای دو مقاومت موازی $R_۱$ و $R_۲$ می‌توان مقاومت معادل (R_{eq}) را به صورت زیر به دست آورد:

$$R_{eq} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱ + R_۲}$$

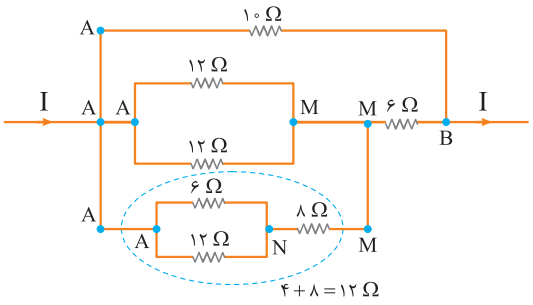
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نقاط هم‌پتانسیل روی مدار شکل داده‌شده را مشخص می‌کنیم و معادل آن را که تشخیص راحت‌تری داشته باشد، رسم می‌کنیم:

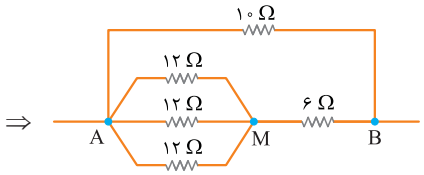


$\Rightarrow$

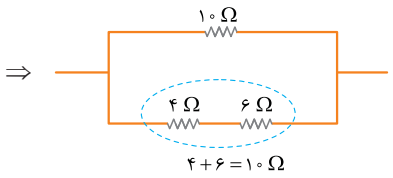
Telegram: @konkur_in



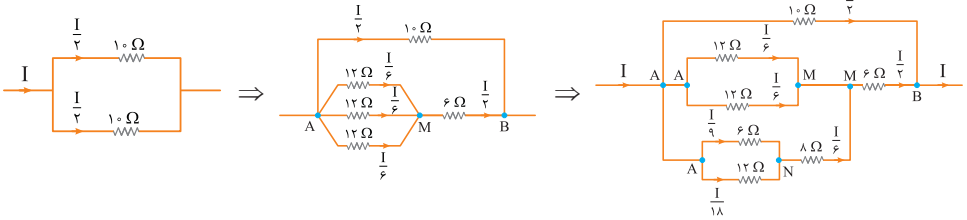
$$R_{AN}=\frac{۶\times۱۲}{۶+۱۲}=۴\,\Omega$$

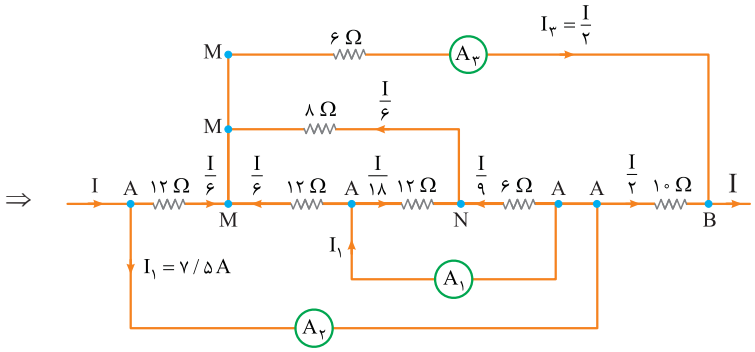


$$\frac{۱}{R_{AM}}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}\Rightarrow R_{AM}=۴\,\Omega$$



گام دوم: جریان الکتریکی هر شاخه را برحسب I مشخص می‌کنیم:





گام سوم: در گره A که جریان I به آن وارد شده است، به کمک رابطهٔ بین جریان‌ها داریم:

$$I_۱=I-\frac{I}{۶}\xrightarrow{I_۱=۷/۵\,A}۷/۵=\frac{۵I}{۶}\Rightarrow I=۹\,A$$

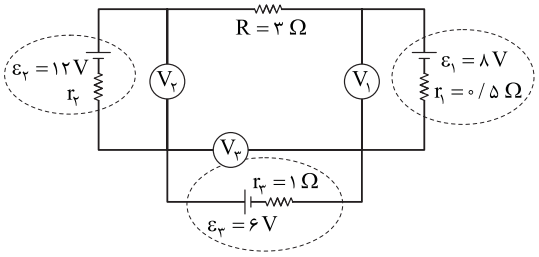
بنابراین عدد آمپرسنج $A_۳$ که جریان $\frac{I}{۲}$ را نشان می‌دهد، برابر با $I_۳=\frac{I}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵\,A$، و عدد آمپرسنج $A_۱$ برابر $I_۱=\frac{I}{۶}+\frac{I}{۱۸}=\frac{۲I}{۹}=\frac{۲\times۹}{۹}=۲\,A$ است؛ در نتیجه:

$$I_۳-I_۱=۴/۵-۲=۲/۵\,A$$

Telegram: @konkur_in

۳۰ در مدار شکل زیر، اگر مقداری که ولت‌سنج آرمانی $V_۲$ نشان می‌دهد، $\frac{۱۱}{۹}$ برابر مقداری که ولت‌سنج آرمانی $V_۱$ نشان می‌دهد، باشد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی $V_۳$ نشان می‌دهد، چند ولت است؟

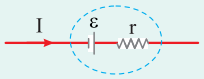
۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۸



پاسخ: گزینهٔ ۱

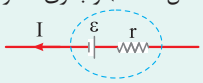
درس Box

۱) رابطهٔ اختلاف پتانسیل دو سر باتری مولد (شکل «الف») و باتری مصرف‌کننده (شکل «ب»):



$V = \varepsilon - Ir$

(الف)



$V = \varepsilon + Ir$

(ب)

باتری مولد به مدار انرژی می‌دهد و جریان الکتریکی از پایانهٔ مثبت آن وارد مدار می‌شود، اما باتری مصرف‌کننده، از مدار انرژی می‌گیرد و جریان الکتریکی، به پایانهٔ مثبت آن وارد می‌شود.

V = اختلاف پتانسیل دو سر باتری (V)

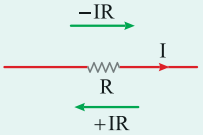
ε = نیروی محرکهٔ باتری (V)

I = جریان الکتریکی گذرنده از باتری (A)

r = مقاومت درونی باتری (Ω)

۲) قاعدهٔ حلقه یا قانون ولتاژها: در هر دورزدن کامل حلقه‌ای از مدار، جمع جبری اختلاف پتانسیل‌های اجزای مدار برابر صفر است.

۳) هرگاه در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ IR یا Ir کاهش می‌یابد. (افت پتانسیل رخ می‌دهد)، اما اگر در خلاف جهت جریان از آن‌ها بگذریم، پتانسیل به همان اندازه افزایش می‌یابد.

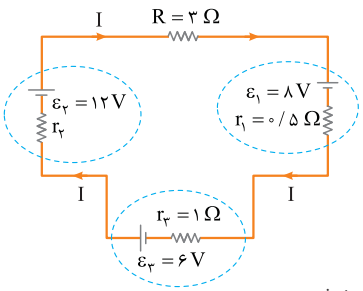


۴) بدون توجه به جهت جریان، هرگاه درون باتری از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت برویم، پتانسیل به اندازهٔ ε افزایش می‌یابد و اگر برعکس، از پایانهٔ مثبت به منفی برویم، پتانسیل به اندازهٔ ε کاهش می‌یابد.

۵) مقاومت الکتریکی یک ولت‌سنج آرمانی، بی‌نهایت فرض می‌شود و جریانی از آن عبور نمی‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باتری‌های (۲) و (۳) به عنوان مولد و باتری (۱) به عنوان مصرف‌کننده در مدار عمل می‌کنند، زیرا $\varepsilon_۱ < \varepsilon_۲ + \varepsilon_۳$ است؛ بر این اساس قاعدهٔ حلقه را در مدار شکل زیر به کار می‌بریم:



$$-RI - \varepsilon_۱ - Ir_۱ - Ir_۳ + \varepsilon_۳ - Ir_۲ + \varepsilon_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -۳I - ۸ - ۰/۵I - I + ۶ - Ir_۲ + ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -۴/۵I + ۱۰ = Ir_۲$$

گام دوم: نسبت اختلاف پتانسیل دو سر باتری‌های (۲) و (۱) معلوم است و می‌توان نوشت:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\varepsilon_۲ - Ir_۲}{\varepsilon_۱ + Ir_۱} \Rightarrow \frac{۱۱}{۹} = \frac{۱۲ - Ir_۲}{۸ + ۰/۵I} \xrightarrow{-۴/۵I + ۱۰ = Ir_۲} \frac{۱۱}{۹} = \frac{۱۲ - (-۴/۵I + ۱۰)}{۸ + ۰/۵I} \Rightarrow \frac{۱۱}{۹} = \frac{۲ + ۴/۵I}{۸ + ۰/۵I} \Rightarrow$$

$$۸۸ + ۵/۵I = ۱۸ + ۴۰/۵I \Rightarrow ۷۰ = ۳۵I \Rightarrow I = ۲\,A$$

Telegram: @konkur_in

گام سوم: باتری (۳) به عنوان مولد در مدار، عمل می‌کند و اختلاف پتانسیل دو سر آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V_۳ = \varepsilon_۳ - Ir_۳ \xrightarrow[r_۳=۱\Omega]{\varepsilon_۳=۶\,V\ ,\ I=۲A} V_۳ = ۶ - ۲\times ۱ = ۴\,V$$

Telegram: @konkur_in

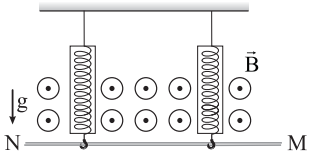
۴۰ در شکل زیر، سیمی به طول $50\,cm$ توسط دو نیروسنج مشابه در میدان مغناطیسی یکنواخت و برون‌سوی $\vec{B}$، به طور افقی نگه داشته شده است. جریان الکتریکی عبوری از سیم $4\,A$ و جهت آن از M به N است. در این حالت هر یک از نیروسنج‌ها مقدار $0/2\,N$ را نشان می‌دهند. اگر جهت جریان عوض شده و اندازهٔ آن نصف شود، مقداری که هر یک از نیروسنج‌ها نشان می‌دهند، ۷۵ درصد افزایش می‌یابد. بزرگی میدان مغناطیسی B چند تسلا است؟

۱) $0/1$

۲) $0/2$

۳) $0/25$

۴) $0/3$



پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست حامل جریان:

$$F = I\ell B\sin\theta$$

F = اندازهٔ نیرو (N)

I = جریان الکتریکی (A)

ℓ = طول قسمتی از سیم که داخل میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد (m)

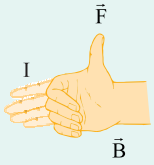
B = اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت (T)

θ = زاویهٔ بین امتداد سیم و میدان مغناطیسی

نیروی F بر راستای سیم و راستای میدان عمود است.

قاعدهٔ دست راست:

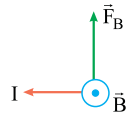
اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان بازشدهٔ ما در جهت جریان باشد ـ به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویهٔ کوچک‌تری که امتداد سیم با $\vec{B}$ می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان، خم کنیم در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد ـ انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر سیم خواهد بود.



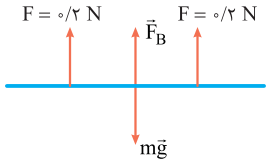
در رسم شکل‌های دوبعدی، از نماد ⊗ برای بردار درون‌سو (عمود بر صفحه و به طرف داخل) و از نماد ⊙ برای بردار برون‌سو (عمود بر صفحه و به طرف خارج) استفاده می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به قاعدهٔ دست راست و جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی داده‌شده، نیروی مغناطیسی F_B رو به بالا بر سیم وارد می‌شود.



بر این اساس نیروهای وارد بر سیم را نشان می‌دهیم و چون سیم در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم:

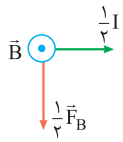


$$F_B + F + F - mg = 0 \Rightarrow F_B + 0/2 + 0/2 = mg$$

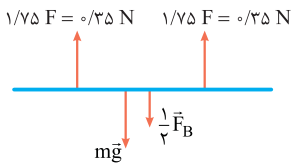
$$\Rightarrow F_B + 0/4 = mg$$

Telegram: @konkur_in

گام دوم: با توجه به این‌که جهت جریان و اندازهٔ آن تغییر کرده است، اندازه و جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم نیز تغییر می‌کند.



نیروهای وارد بر سیم در حالت دوم به صورت زیر درمی‌آیند:



$$۱/۷۵F + ۱/۷۵F - mg - \frac{۱}{۲}F_B = ۰$$

$$\Rightarrow ۰/۳۵ + ۰/۳۵ - mg - \frac{۱}{۲}F_B = ۰ \Rightarrow ۰/۷ - \frac{۱}{۲}F_B = mg$$

گام سوم: با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم داریم:

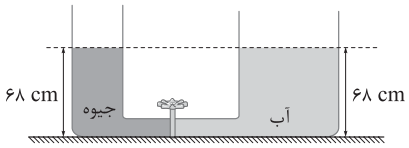
$$F_B + ۰/۴ = ۰/۷ - \frac{۱}{۲}F_B \Rightarrow \frac{۳}{۲}F_B = ۰/۳ \Rightarrow F_B = ۰/۲\,N$$

گام چهارم: بزرگی میدان مغناطیسی موجود را به دست می‌آوریم:

$$F_B = I\ell B\sin\theta \xrightarrow[\theta=۹۰^\circ \Rightarrow \sin\theta=۱]{F_B=۰/۲\,N\,,\ I=۴\,A\,,\ \ell=۵۰\,cm=۰/۵\,m} ۰/۲ = ۴\times ۰/۵ \times B \times ۱ \Rightarrow B = ۰/۱\,T$$

Telegram: @konkur_in

۴۰ در شکل زیر قطر لولهٔ سمت راست، ۲ برابر قطر لولهٔ سمت چپ است. اگر شیر ارتباطی بین دو لوله باز شود، پس از ایجاد تعادل، سطح جیوه چند سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود؟ (چگالی آب $1\,g/cm^3$، چگالی جیوه $13/6\,g/cm^3$ و قطر مقطع لولهٔ افقی قابل چشم‌پوشی است.)



۱) ۴۱

۲) ۴۲

۳) ۵۰/۴

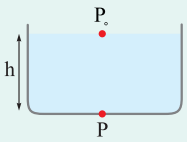
۴) ۵۱/۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در لوله‌های Uشکل یا ظروف مشابه، اگر یک سطح افقی فرضی را از طرفین لوله بگذرانیم، طوری که زیر آن سطح فقط یک نوع مایع به صورت پیوسته قرار گیرد، فشار مطلق در طرفین لوله، روی این سطح برابر است.

اگر فشار در سطح بالای مایع را با P_0 نشان دهیم، فشار مطلق در عمق h از سطح مایع، به صورت زیر به دست می‌آید:



$$P = P_0 + \rho gh$$

P = فشار مطلق یا فشار کل (Pa)

P_0 = فشار در سطح بالای مایع (Pa)

ρ = چگالی مایع (kg/m^3)

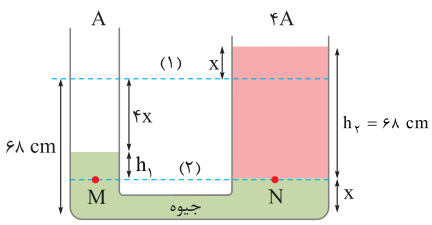
g = شتاب گرانش $\simeq 10\,N/kg$

h = عمق مایع (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چگالی جیوه بیشتر از چگالی آب است؛ بنابراین با توجه به یکسان‌بودن ارتفاع آن‌ها در حالت اول، فشار ناشی از جیوه در محل شیر ارتباطی بیشتر از فشار آب در آن محل است. در نتیجه اگر شیر ارتباطی باز شود، سطح جیوه در لولهٔ سمت چپ، به طرف پایین آمده و سطح آب در لولهٔ سمت راست به طرف بالا می‌رود.

سطح آزاد دو مایع در حالت اول را به عنوان سطح تراز (۱) در نظر می‌گیریم. اگر سطح آب به اندازهٔ x بالا رود، سطح جیوه به اندازهٔ $4x$ پایین می‌آید؛ زیرا حجم مایع جابه‌جاشده در دو طرف لوله، یکسان است.



گام دوم: فشار مطلق دو نقطهٔ M و N روی سطح تراز (۲)، برابر با هم هستند.

$$P_M = P_N \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\Rightarrow 13/6 h_1 = 1 \times 68 \Rightarrow h_1 = 5\,cm$$

$$h_1 = 68 - 4x - x \Rightarrow 5 = 68 - 5x \Rightarrow 5x = 63 \Rightarrow x = 12/6\,cm$$

سطح جیوه پس از ایجاد تعادل، به اندازهٔ $4x$ پایین می‌آید.

$$4x = 4 \times 12/6 = 50/4\,cm$$

Telegram: @konkur_in

۴۰ آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق‌آبی، از ارتفاع ۹۰متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۸۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، آب با آهنگ چند متر مکعب بر دقیقه روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۱۵۰ MW برسد؟ (چگالی آب $۱۰۰۰\,kg/m^۳$ و $g = ۱۰\,m/s^۲$ است.)

۱) $۱/۲۵\times۱۰^۴$

۲) $۱/۲۵\times۱۰^۷$

۳) $۲/۵\times۱۰^۴$

۴) $۲/۵\times۱۰^۷$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

توان: کار انجام‌شده در واحد زمان (آهنگ انجام کار) را توان متوسط می‌گوییم.

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

P_{av} = توان متوسط (W)

W = کار (J)

Δt = بازهٔ زمانی (s)

رابطهٔ بازده:

$$Ra = \frac{P_۲}{P_۱}\times۱۰۰$$

R_a = بازده برحسب درصد

$P_۲$ = توان مفید (خروجی) (W)

$P_۱$ = توان مصرفی (ورودی) (W)

رابطهٔ کار نیروی وزن:

$$W_{mg} = -mg\Delta h$$

W_{mg} = کار نیروی وزن (J)

m = جرم (kg)

g = شتاب گرانش زمین $\simeq ۱۰\,N/kg$

Δh = جابه‌جایی قائم (m)

بنابراین وقتی جسمی به اندازهٔ h در راستای قائم، رو به پایین حرکت کند، کار نیروی وزن آن برابر با mgh خواهد بود.

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -mg(-h) = mgh$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با معلوم‌بودن توان الکتریکی خروجی مولد و بازده آن، توان ورودی را به دست می‌آوریم:

$$Ra = \frac{P_۲}{P_۱}\times۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۱۵۰}{P_۱}\times۱۰۰ \Rightarrow P_۱ = ۱۸۷/۵\,MW$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ توان مفید (خروجی)، آهنگ شارش حجمی آب روی توربین را پیدا می‌کنیم:

$$P_۱ = \frac{W_{mg}}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} \xrightarrow{m=\rho V} P_۱ = \frac{\rho V g h}{\Delta t}$$

$$\frac{V}{\Delta t} = \frac{P_۱}{\rho g h} \xrightarrow[\rho=۱۰۰۰\,kg/m^۳,\ g=۱۰\,N/kg,\ h=۹۰\,m]{P_۱=۱۸۷/۵\,MW=۱۸۷/۵\times۱۰^۶\,W} \frac{V}{\Delta t} = \frac{۱۸۷/۵\times۱۰^۶}{۱۰۰۰\times۱۰\times۹۰}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{\Delta t} = \frac{۱۸۷۵}{۹}\,m^۳/s = \frac{۱۸۷۵}{۹}\,m^۳/s\times\frac{۶۰\,s}{۱\,min} = ۱/۲۵\times۱۰^۴\,m^۳/min$$

Telegram: @konkur_in

۴۰ در ظرفی استوانه‌ای که از فلزی با ضریب انبساط طولی α ساخته شده، مقداری مایع با ضریب انبساط حجمی β ریخته شده است. اگر با افزایش دمای مجموعهٔ ظرف و مایع، ارتفاع مایعِ درون ظرف تغییر نکند، $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

رابطهٔ انبساط حجمی:

$$\Delta V = \beta V_1 \Delta T$$

$\Delta V =$ تغییر حجم $(m^3) = V_2 - V_1$

$V_1 =$ حجم جسم در دمای $T_1 (m^3)$

$V_2 =$ حجم جسم در دمای $T_2 (m^3)$

$\beta =$ ضریب انبساط حجمی (K^{-1})

$\Delta T =$ تغییر دما $(K) = T_2 - T_1$

ضریب انبساط حجمی جامدها، با تقریب مناسبی سه برابر ضریب انبساط طولی آن‌هاست.

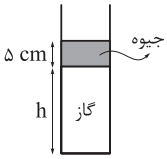
پاسخ خیلی تشریحی ✔

وقتی با افزایش دمای مجموعهٔ ظرف و مایع، ارتفاع مایع درون ظرف تغییر نکند، یعنی انبساط حجم مایع، با انبساط بخشی از ظرف که محتوی مایع است، یکسان هستند. تغییر دمای ظرف و مایع نیز با هم برابرند.

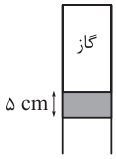
$$\Delta V_{\text{ظرف}} = \Delta V_{\text{مایع}} \Rightarrow V_1(3\alpha)\Delta T = V_1 \beta \Delta T \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

Telegram: @konkur_in

۴۴ در شکل (۱)، مقداری گاز کامل درون یک لوله توسط مقداری جیوه حبس شده و طول ستون گاز برابر h است. اگر مطابق شکل (۲)، لوله را وارونه کنیم، طول ستون گاز $2\,cm$ افزایش می‌یابد. اگر فشار هوا $95/2\,kPa$ باشد، h چند سانتی‌متر است؟ ($\rho_{جیوه} = 13/6\ g/cm^3$، $g = 10\,N/kg$ و دما را ثابت در نظر بگیرید.)



شکل (۱)



شکل (۲)

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

رابطهٔ قانون گازهای آرمانی (کامل):

$$PV = nRT$$

P = فشار مطلق (Pa)

V = حجم (m^3)

n = تعداد مول (mol)

R = ثابت جهانی گازها $(8/314\ \frac{J}{mol \cdot K})$

T = دما (K)

با توجه به رابطهٔ فوق، برای مقدار معینی از یک گاز آرمانی بین دو حالت مختلف، می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

اگر چگالی جیوه $13/6\ g/cm^3$ و $g = 10\,N/kg$ باشد، می‌توان با رابطهٔ $P_{(Pa)} = 1360 \times P_{(cmHg)}$ فشار برحسب پاسکال را به فشار برحسب سانتی‌متر جیوه یا برعکس تبدیل نمود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فشار هوای محیط را برحسب سانتی‌متر جیوه به دست می‌آوریم:

$$P_0 = 95/2\,kPa = 95200\,Pa = 95200\,Pa \times \frac{1\,cmHg}{1360\,Pa} = 70\,cmHg$$

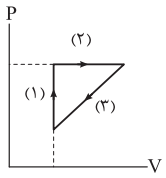
گام دوم: با توجه به ثابت‌بودن دما بین دو حالت موجود، می‌توان نوشت:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow P_1 A h_1 = P_2 A h_2 \xrightarrow[h_1 = h\,,\ h_2 = h+2cm]{P_0 = 70\,cmHg} (70+5)h = (70-5)(h+2)$$

$$\Rightarrow 75h = 65h + 130 \Rightarrow 10h = 130 \Rightarrow h = 13\,cm$$

Telegram: @konkur_in

۴ نمودار P ـ V مقدار معینی گاز کامل در طی چرخه‌ای که یک ماشین گرمایی طی می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در فرایندهای (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب برابر با $150\ J$، $400\ J$ و $500\ J$ باشد، بازده این ماشین گرمایی و کار انجام‌شده توسط آن در هر چرخه برحسب ژول، به ترتیب کدام است؟



۱) $\frac{1}{10}$، ۵۰

۲) $\frac{1}{10}$، ۱۰۵۰

۳) $\frac{1}{11}$، ۵۰

۴) $\frac{1}{11}$، ۱۰۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

چرخهٔ ترمودینامیکی:

وقتی دستگاه پس از طی چند فرایند به حالت اولیهٔ خود برمی‌گردد، به مجموعهٔ این فرایندها، چرخهٔ ترمودینامیکی گفته می‌شود.

اگر جهت چرخه، ساعتگرد باشد، $W < 0$ و اگر پادساعتگرد باشد، $W > 0$ است.

در یک چرخه، تغییر انرژی درونی صفر است. $(\Delta U = 0)$

قانون اول ترمودینامیک: در یک فرایند ایستاوار، تغییر انرژی درونی دستگاه، برابر است با مجموع کار انجام‌شده توسط محیط روی دستگاه (گاز) و گرمای داده‌شده به دستگاه (گاز).

$$\Delta U = Q + W$$

$$W' = -W$$

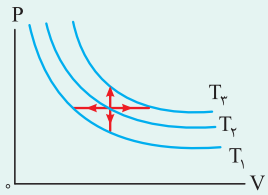
ΔU = تغییر انرژی درونی (J)

Q = گرمای داده‌شده به دستگاه (J)

W = کار انجام‌شده توسط محیط روی دستگاه (J)

W' = کار انجام‌شده توسط دستگاه روی محیط (J)

روی نمودار فشار برحسب حجم $(P$ ـ $V)$، هر چه به سمت بالا یا به سمت راست برویم، به دمای بالاتری می‌رسیم؛ یعنی گاز گرما دریافت کرده و $Q > 0$ است،



اما اگر به سمت پایین یا به سمت چپ برویم، به دمای پایین‌تری می‌رسیم؛ یعنی گاز گرما از دست داده و $Q < 0$ است.

روابط ماشین گرمایی:

$$Q_H = |Q_L| + |W|$$

Q_H = گرمایی که ماشین گرمایی از یک منبع با دمای بالا می‌گیرد. (J)

$|Q_L|$ = اندازهٔ گرمایی که ماشین گرمایی به یک منبع با دمای پایین می‌دهد. (J)

$|W|$ = اندازهٔ کاری که ماشین گرمایی روی محیط انجام می‌دهد. (J)

η = بازده

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

Telegram: @konkur_in

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: گرمای داده‌شده به گاز در یک چرخه را به دست می‌آوریم. در مراحل (۱) و (۲)، $Q>0$ است، اما در مرحلهٔ (۳)، $Q<0$ است:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 150 + 400 - 500 = 50\,J$$

گام دوم: با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، کار انجام‌شده توسط محیط روی گاز (W) و از آن‌جا کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی (W') را در هر چرخه به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[Q=50\,J]{\Delta U=0\,J} 0 = 50 + W \Rightarrow W = -50\,J$$

$$W' = -W \Rightarrow W' = 50\,J$$

گام سوم: گرمای دریافت‌شده توسط ماشین گرمایی از منبع با دمای بالا (Q_H) را حساب کرده و به کمک آن، بازده ماشین گرمایی را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_H = Q_1 + Q_2 = 150 + 400 = 550\,J$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{50}{550} = \frac{1}{11}$$

Telegram: @konkur_in

۴ کدام مطلب درست است؟

۱) مجموع ذرات زیراتمی در ایزوتوپ ناپایدار طبیعی هیدروژن برابر ۳ است.

۲) هر ستون جدول تناوبی شامل عنصرهایی با خواص شیمیایی یکسان است و گروه نامیده می‌شود.

۳) فراوان‌ترین ایزوتوپ‌های لیتیم و کلر به ترتیب سنگین‌ترین و سبک‌ترین ایزوتوپ آن‌ها است.

۴) اتم‌ها به طور باورنکردنی ریز هستند به طوری که نمی‌توان با هیچ دستگاهی جرم آن‌ها را به دست آورد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

عنصرهایی که ایزوتوپ‌های طبیعی‌شان در کتاب درسی معرفی شده است را در جدول زیر برایتان جمع‌آوری کرده‌ایم:

عنصر	شمار ایزوتوپ‌های طبیعی	نماد ایزوتوپ‌های طبیعی	ایزوتوپی با فراوانی بیشتر
منیزیم ($_{12}Mg$)	۳	$^{24}_{12}Mg$, $^{25}_{12}Mg$, $^{26}_{12}Mg$	$^{24}_{12}Mg$ (ایزوتوپ سبک‌تر)
لیتیم ($_{3}Li$)	۲	$^{6}_{3}Li$, $^{7}_{3}Li$	$^{7}_{3}Li$ (ایزوتوپ سنگین‌تر)
هیدروژن ($_{1}H$)	۳	$^{1}_{1}H$, $^{2}_{1}H$, $^{3}_{1}H$	$^{1}_{1}H$ (ایزوتوپ سبک‌تر)
کلر ($_{17}Cl$)	۲	$^{35}_{17}Cl$, $^{37}_{17}Cl$	$^{35}_{17}Cl$ (ایزوتوپ سبک‌تر)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

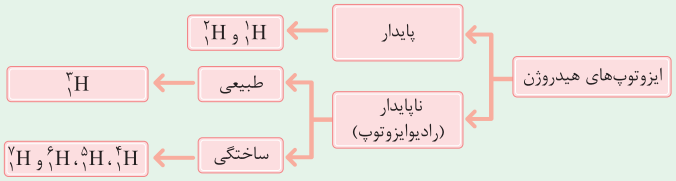
لیتیم دارای دو نوع ایزوتوپ $^{6}_{3}Li$ و $^{7}_{3}Li$ و کلر دارای دو نوع ایزوتوپ $^{35}_{17}Cl$ و $^{37}_{17}Cl$ در طبیعت هستند.

فراوان‌ترین ایزوتوپ لیتیم، $^{7}_{3}Li$ و فراوان‌ترین ایزوتوپ کلر، $^{35}_{17}Cl$ است که به ترتیب سنگین‌ترین و سبک‌ترین ایزوتوپ این دو عنصر محسوب می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): رادیوایزوتوپ (ایزوتوپ ناپایدار و پرتوزا) طبیعی عنصر هیدروژن، ایزوتوپ $^{3}_{1}H$ است. این ایزوتوپ دارای ۲ نوترون، ۱ پروتون و ۱ الکترون می‌باشد؛ بنابراین مجموع شمار ذره‌های زیراتمی در ایزوتوپ ناپایدار و طبیعی عنصر هیدروژن، برابر ۴ است.

نکته



گزینهٔ (۲): عنصرهایی که در یک گروه قرار دارند، خواص شیمیایی **مشابهی** (نه یکسان!) دارند!

گول نخوری ✘

نباید بگیم که عنصرهای هم‌گروه، خواص شیمیایی یکسانی دارند، زیرا خواص شیمیایی اتم‌های یک عنصر به عدد اتمی و شمار الکترون‌های آن‌ها بستگی دارد. عنصرهای هم‌گروه که عدد اتمی یکسانی ندارند! به عنوان نمونه، فلزهای گروه اول از این نظر که همگی با آب واکنش می‌دهند، مشابه هستند، اما چون عدد اتمی و در نتیجه واکنش‌پذیری آن‌ها یکسان نیست، شدت واکنش آن‌ها با آب، فرق *می‌کنه*!

گزینهٔ (۴): بد نیست بدانید که دانشمندان با استفاده از دستگاهی به نام **طیف‌سنجی جرمی**، جرم اتم‌ها را با دقت زیادی اندازه‌گیری می‌کنند، اما با هیچ دستگاهی نمی‌توان **شمار** آن‌ها را اندازه‌گیری کرد!

Telegram: @konkur_in

۴ چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

- اگر کاتیون M در زیرلایهٔ 3d خود دارای ۵ الکترون باشد، نسبت آنیون به کاتیون در اکسید آن، می‌تواند برابر $\frac{3}{2}$ باشد.
- پایداری اوزون از اکسیژن کم‌تر بوده و نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در هر دو مولکول یکسان است.
- نسبت جرم مولی اوزون به جرم مولی متان، برابر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در کربن مونوکسید است.
- مجموع شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در چهار مولکول CH_2O، HCN، PF_3 و SO_3، پنج برابر مجموع زیروندها در مس (I) سولفید است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: عنصر M می‌تواند فلز آهن (Fe) باشد، زیرا آرایش الکترونی کاتیون Fe^{3+} به زیرلایهٔ $3d^5$ ختم می‌شود:

$$_{26}Fe : [_{18}Ar]\,3d^6 4s^2 \Rightarrow {}_{26}Fe^{3+} : [_{18}Ar]\,3d^5$$

نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب یونی Fe_2O_3، برابر $\frac{3}{2}=1/5$ است.

عبارت دوم:

نکته مقایسهٔ ویژگی‌های مختلف اوزون (O_3) و اکسیژن (O_2) رو تو جدول زیر براتون پفت‌وپز کردیم:

آلوتروپ	O_2	O_3
ساختار لوویس	$\ddot{O}=\ddot{O}$	(خمیده یا Vشکل)
نقطهٔ جوش	$-183\ ^\circ C$ (کم‌تر)	$-112\ ^\circ C$ (بیشتر)
مایع‌شدن	سخت‌تر	آسان‌تر
رنگ در حالت مایع	آبی کم‌رنگ	آبی پررنگ
واکنش‌پذیری	کم‌تر	بیشتر (گندزدا)
پایداری	بیشتر	کم‌تر
قطبیت	ناقطبی	قطبی
انحلال‌پذیری در آب	کم‌تر	بیشتر

با توجه به این‌که واکنش‌پذیری اوزون از اکسیژن بیشتر است؛ بنابراین پایداری اوزون از اکسیژن کم‌تر می‌باشد. هم‌چنین نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در هر دو مولکول، برابر با ۲ است:

$$\ddot{O}=\ddot{O} \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{6}{3} = 2$$

عبارت سوم: نسبت جرم مولی اوزون (O_3) به متان (CH_4) برابر است با:

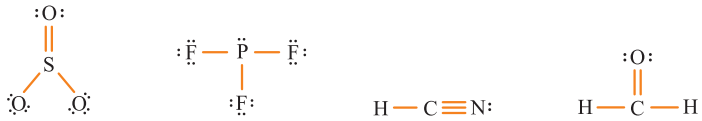
$$\frac{\text{جرم مولی } O_3}{\text{جرم مولی } CH_4} = \frac{3(16)}{12+4(1)} = \frac{3(16)}{16} = 3$$

Telegram: @konkur_in

هم‌چنین در ساختار کربن مونوکسید (CO) نیز سه پیوند اشتراکی (جفت‌الکترون پیوندی) وجود دارد؛ *ببینید که ندیده از دنیا نرین*:

$:C \equiv O:$

عبارت چهارم: ساختار لوویس مولکول‌های CH_2O، HCN، PF_3 و SO_3 به صورت زیر است:



(SO_3) (PF_3) (HCN) (CH_2O)

مشفصه که در ساختار لوویس این مولکول‌ها در مجموع ۱۵ پیوند اشتراکی وجود دارد. هم‌چنین مجموع زیروندها در مس (I) سولفید (Cu_2S) برابر ۳ است:

$$\frac{۱۵}{۳} = ۵$$

Telegram: @konkur_in

۴۸ در دما و فشار معین، یک مخزن با حجم ثابت حاوی گاز نیتروژن است. در دمای ثابت مقداری از این گاز خارج می‌شود و به جای آن گاز هلیم وارد می‌شود، به گونه‌ای که فشار ثابت بماند. اگر جرم کل گازها در پایان برابر ۱۸ گرم و درصد جرمی هلیم در مخلوط نهایی برابر ۲۵ باشد، جرم اولیهٔ گاز نیتروژن چند گرم بوده است؟ $(He = 4, N = 14 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۳/۵

۲) ۱۵/۷۵

۳) ۲۹/۲۵

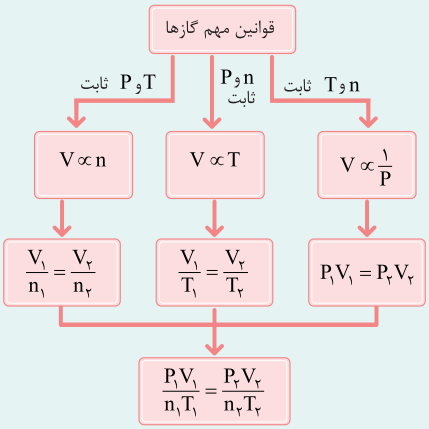
۴) ۴۵

مشاوره مفاهیم و مسائل مربوط به رفتار، ویژگی‌ها و خواص گازها، از مباحثی است که در دو سال اخیر *مورد توجه طراحای کنکور قرار گرفته!* در حالی که در سال‌های قبل‌تر، با استناد به این موضوع که به این مبحث در کتاب درسی، به طور مستقیم اشاره نشده است، *خیلی مورد توجه قرار نمی‌گرفت، پس بر شما واجبه که* درس‌باکس این تست را با حوصله مطالعه کنید، سپس سؤال را حل کرده و هم‌چنین پاسخ آن را نیز به خوبی تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

جمع‌بندی روابط کمی گازها:



در نهایت داریم:

$$\frac{P_1V_1}{n_1T_1} = \frac{P_2V_2}{n_2T_2}$$

- برای توصیف یک نمونه گاز، افزون بر مقدار، باید دما و فشار آن نیز مشخص باشد، به طوری که حجم گاز با مقدار و دمای آن رابطهٔ مستقیم و با فشار آن رابطهٔ معکوس دارد.
- در رابطه‌های بالا برای کمیت‌های یکسان، باید از یکاهای مشابهی استفاده کنیم؛ یعنی اگر مثلاً V_1 برحسب میلی‌لیتر باشد، V_2 نیز باید برحسب میلی‌لیتر در رابطه قرار گیرد. هم‌چنین حواستون باشه که در این رابطه‌ها، دما حتماً باید برحسب کلوین باشد.
- رابطه برای تبدیل دما برحسب درجهٔ سلسیوس به دما برحسب کلوین:

$$T = 273 + \theta$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که دما و حجم مخزن ثابت است و این‌که مقداری گاز نیتروژن (N_2) از نمونهٔ اولیه خارج شده و به جای آن گاز هلیم (He) وارد آن می‌شود، چون فشار ثابت باقی مانده است؛ بنابراین می‌توان گفت که شمار مول گازهای موجود در مخزن ثابت باقی می‌ماند:

$$\frac{P_1V_1}{n_1T_1} = \frac{P_2V_2}{n_2T_2} \Rightarrow n_1 = n_2$$

بنابراین شمار مول‌های گاز هلیمی که به مخزن افزوده می‌شود، برابر با شمار مول‌های گاز نیتروژنی است که از مخزن خارج شده است. حالا با توجه به جرم کل گازها در پایان فرایند و درصد جرمی هلیم در مخلوط نهایی، جرم و شمار مول‌های گاز هلیم (He) را در این مخلوط به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی گاز هلیم } (He) = \frac{\text{جرم گاز } He}{\text{جرم مخلوط نهایی}} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{\text{جرم گاز } He}{18} \times 100 \Rightarrow \text{جرم گاز } He = 18 \times \frac{25}{100} = 4/5\ g$$

Telegram: @konkur_in

$\Rightarrow$ شمار مول‌های He افزوده‌شده به مخلوط: $۴/۵\ g\ He \times \frac{۱\ mol\ He}{۴\ g\ He} = ۱\frac{۱}{۸}$ یا $۱/۱۲۵\ mol\ He$

پس نتیجه می‌گیریم که! جرم گاز نیتروژن باقی‌مانده در مخزن، برابر $۱۳/۵ = ۴/۵ - ۱۸$ گرم است. همان‌طور که گفتیم، شمار مول‌های گاز نیتروژن $(N_۲)$ خارج‌شده از مخزن نیز برابر با ۱/۱۲۵ مول می‌باشد که جرم آن برابر است با:

$$۱/۱۲۵\ mol\ N_۲ \times \frac{۲۸\ g\ N_۲}{۱\ mol\ N_۲} = ۲۸ + (\frac{\frac{۷}{۲}}{۸}) = ۲۸ + ۳/۵ = ۳۱/۵\ g$$

بنابراین جرم اولیهٔ گاز نیتروژن موجود در مخزن، برابر $۴۵ = ۱۳/۵ + ۳۱/۵$ گرم بوده است.

کنکور

در دما و فشار معین، بالونی دارای گاز کربن مونوکسید است. اگر مقداری از آن را خارج کرده و به جای آن، گاز آرگون وارد شود به طوری که حجم ثابت بماند، مجموع جرم گازهای درون بالون، برابر ۶۲۰ گرم و درصد جرمی آرگون، برابر ۳۰ می‌شود. مقدار اولیهٔ گاز کربن مونوکسید، برابر چند گرم بوده است؟ $(C = ۱۲, O = ۱۶, Ar = ۴۰ : g.mol^{-۱})$

(سؤال ۷۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۶۶۰/۴ ۲) ۶۴۴/۲ ۳) ۵۸۰/۴ ۴) ۵۶۴/۲

Telegram: @konkur_in

۴ کدام مورد درست است؟

۱) در فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از فراوان‌ترین یون چندتایی محلول در آب دریا با یون آلومینیم، در مجموع ۱۷ اتم وجود دارد.

۲) در ساختار لوویس تمام یون‌های چندتایی دست‌کم یک جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۳) اگر محلولی حاوی فراوان‌ترین یون موجود در آب دریا باشد، رنگ شعلهٔ نمک موجود در این محلول نمی‌تواند زردرنگ باشد.

۴) چگالی آب دریای مرده از چگالی آب دریای سرخ بیشتر است، زیرا در هر ۱۰۰ گرم از آب دریای مرده حدود ۲۷ گرم نمک خوراکی حل شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به جدول زیر که مقدار یون‌های حل‌شده در آب دریا را نشان می‌دهد، مشخص است که فراوان‌ترین یون چندتایی آب دریا، یون **سولفات** (SO_4^{2-}) می‌باشد:

نام یون	کلرید	سدیم	سولفات	منیزیم	کلسیم	پتاسیم	کربنات	برمید
نماد یون	Cl^-	Na^+	SO_4^{2-}	Mg^{2+}	Ca^{2+}	K^+	CO_3^{2-}	Br^-
میلی‌گرم یون در یک کیلوگرم آب دریا	۱۹۰۰۰	۱۰۵۰۰	۲۶۵۵	۱۳۵۰	۴۰۰	۳۸۰	۱۴۰	۶۵

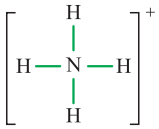
حالا فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از یون‌های آلومینیم (Al^{3+}) و سولفات (SO_4^{2-})، را تعیین می‌کنیم:

$$Al^{3+}SO_4^{2-} \Rightarrow Al_2(SO_4)_3$$

در هر واحد از ترکیب یونی آلومینیم سولفات، ۱۷ اتم وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): یون آمونیوم (NH_4^+) در ساختار خود، فاقد جفت‌الکترون ناپیوندی است:



گزینهٔ (۳): فراوان‌ترین یون موجود در آب دریا، یون **کلرید** (Cl^-) است. اگر محلول مورد نظر حاوی سدیم کلرید ($NaCl$) باشد، رنگ شعلهٔ نمک موجود در آن (همانند رنگ شعلهٔ فلز سدیم)، **زردرنگ** خواهد بود.

نکته رنگ شعلهٔ چند فلز و نمک‌های *مربوط به اونو که باید بلد باشین، تو جدول زیر براتون آوردیم:*

	فلز مس (Cu) و نمک‌های آن	فلز سدیم (Na) و نمک‌های آن	فلز لیتیم (Li) و نمک‌های آن
رنگ شعله	سبز	زرد	سرخ

اینم بهتره بدونید که رنگ شعلهٔ فلزهای پتاسیم (K)، آهن (Fe) و منیزیم (Mg) به ترتیب بنفش، نارنجی و سفید است. در ضمن گوگرد که خودش نافلزی زردرنگ است، به رنگ آبی می‌سوزد.

گزینهٔ (۴): *هواستون باشه که* در هر ۱۰۰ گرم از آب دریای مرده، حدود ۲۷ گرم از **انواع نمک‌ها** وجود دارد؛ نه فقط نمک خوراکی!

Telegram: @konkur_in

با توجه به نمودار زیر کدام موارد درست است؟

الف) چگالی محلول سیرشدهٔ نمک لیتیم سولفات، برخلاف سایر نمک‌های موجود در نمودار، با افزایش دما کاهش می‌یابد.

ب) با سردکردن ۷۵۰ گرم محلول سیرشدهٔ پتاسیم کلرید از دمای $75\ ^\circ C$ به دمای $45\ ^\circ C$، ۵۰ گرم از این نمک رسوب خواهد کرد.

پ) در دمای $30\ ^\circ C$، مجموع شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در محلول‌های سیرشدهٔ NaCl و KCl با جرم یکسان، با هم برابر است.

ت) درصد جرمی محلول سیرشدهٔ پتاسیم نیترات در دمای $49\ ^\circ C$ به تقریب برابر ۳۷/۵ می‌باشد.

ث) نمکی که انحلال‌پذیری آن در دمای $0\ ^\circ C$ از دو نمک دیگر بیشتر است، برای ذوب‌کردن یخ و برف در جاده‌ها استفاده می‌شود.

۱) الف، پ، ت
۲) ب، پ، ث
۳) الف، ب، ث
۴) الف، ب، پ، ث

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف»، «ب» و «ث» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نمودار انحلال‌پذیری نمک لیتیم سولفات (Li_2SO_4) برخلاف سایر نمک‌های موجود در نمودار، برحسب دما به صورت **نزولی** است؛ با افزایش دما، انحلال‌پذیری آن کاهش می‌یابد، درصد جرمی نمک در محلول کاهش یافته و چگالی محلول سیرشدهٔ نمک Li_2SO_4 برخلاف سایر نمک‌ها کاهش می‌یابد.

ب) انحلال‌پذیری نمک پتاسیم کلرید (KCl) در دمای $75\ ^\circ C$ و $45\ ^\circ C$، به ترتیب برابر با ۵۰ و ۴۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است؛ در نتیجه اگر ۱۵۰ گرم محلول سیرشدهٔ این نمک را از دمای $75\ ^\circ C$ به دمای $45\ ^\circ C$ برسانیم، $50-40=10$ گرم نمک KCl رسوب می‌کند؛ بنابراین مقدار رسوب KCl حاصل در اثر سردکردن ۷۵۰ گرم محلول سیرشدهٔ این نمک از دمای $75\ ^\circ C$ به دمای $45\ ^\circ C$ برابر است با:

$$\text{رسوب KCl} = \frac{\text{رسوب KCl}}{\text{محلول سیرشده}} \times \text{محلول سیرشده} = \frac{10\ g}{150\ g} \times 750\ g = 50\ g$$

پ) در دمای $30\ ^\circ C$، انحلال‌پذیری نمک‌های سدیم کلرید ($NaCl$) و پتاسیم کلرید (KCl)، با هم برابر است؛ بنابراین اگر دو محلول سیرشده از آن‌ها با جرم یکسان در دمای $30\ ^\circ C$ داشته باشیم، *جرم نمک‌هاشون با هم برابر خواهد بود!* با توجه به این‌که جرم مولی نمک KCl از $NaCl$ بیشتر است، می‌توان گفت که در جرم‌های یکسان از این دو نمک، شمار مول‌های $NaCl$ بیشتر از KCl می‌باشد و *چون هر دو این نمک‌ها تو هر مولشون، یک کاتیون و یک آنیون (در مجموع ۲ مول یون) دارن*؛ بنابراین مجموع شمار یون‌ها (کاتیون‌ها و آنیون‌ها) در محلول سیرشدهٔ نمک $NaCl$ نسبت به نمک KCl، بیشتر خواهد بود.

ت)

نکته

اگر انحلال‌پذیری یک ماده در دمای معین، برابر با S گرم باشد، یعنی اگر S گرم ماده در ۱۰۰ گرم آب حل شود، $(S+100)$ گرم محلول سیرشده حاصل می‌شود؛ بنابراین برای محاسبهٔ درصد جرمی یک محلول سیرشده می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\text{درصد جرمی محلول سیرشده (a)} = \frac{S}{S+100} \times 100$$

انحلال‌پذیری نمک پتاسیم نیترات (KNO_3) در دمای $49\ ^\circ C$، *تقریباً* برابر با ۸۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است؛ بنابراین درصد جرمی محلول سیرشدهٔ این نمک در دمای $49\ ^\circ C$ برابر است با:

$$a = \frac{S}{S+100} \times 100 = \frac{80}{180} \times 100 = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}$$

Telegram: @konkur_in

تیزبازی

اگر مخرج کسری ۹ و صورت آن کوچک‌تر از ۹ باشد، جواب آن برابر است با:

$$\frac{a}{9} = 0/\overline{a} \Rightarrow \frac{4}{9} = 0/4444... \Rightarrow 0/\overline{4} \times 100 = 44/4$$

ث) در دمای $0\ ^\circ C$، انحلال‌پذیری **نمک سدیم کلرید (NaCl)** از دو نمک پتاسیم نیترات (KNO_3) و پتاسیم کلرید (KCl)، بیشتر و از دو نمک لیتیم سولفات (Li_2SO_4) و سدیم نیترات ($NaNO_3$) کم‌تر است. یکی از کاربردهای NaCl، **ذوب‌کردن یخ در جاده‌ها** می‌باشد.

Telegram: @konkur_in

۵۱ **طبق واکنش موازنه‌شدهٔ $4A(s)+CO_2(g)\rightarrow 2A_2O(s)+C(s)$ اگر تعداد مول واکنش‌دهنده‌ها برابر با ضریب استوکیومتری آن‌ها باشد، اختلاف جرم فراورده‌ها ۱۷۶ گرم می‌شود. با توجه به این موضوع کدام مورد درست است؟ (A عنصر فلزی است و $Li=7, Na=23, K=39, Ag=108 : g.mol^{-1}$)**

۱) اگر به جای A، فلز هم‌گروه و در دورهٔ بالاتر از آن در جدول دوره‌ای استفاده شود، واکنش انجام نمی‌شود.

۲) واکنش‌پذیری عنصر A از چهارمین عنصر جدول دوره‌ای بیشتر است.

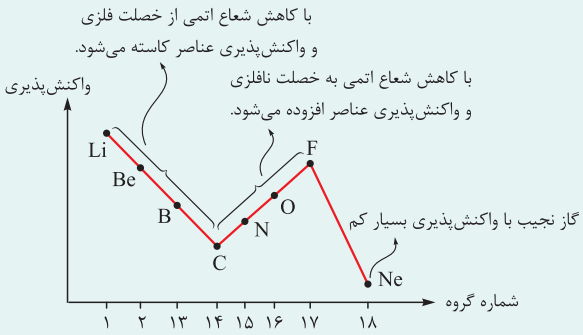
۳) در دوره‌ای که عنصر A قرار دارد، بیشترین اختلاف شعاع بین $_{13}Al$ و $_{14}Si$ است.

۴) در بین عنصرهای هم‌دورهٔ A، آخرین فلز واسطه، کم‌ترین تمایل را برای تبدیل‌شدن به کاتیون دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نمودار زیر که مربوط به روند کلی واکنش‌پذیری عنصرهای دورهٔ دوم جدول دوره‌ای است را ببینید.



واکنش‌پذیری: $Li \simeq F > Be \simeq O > B \simeq N > C > Ne$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش داده‌شده به صورت زیر است:

$$4A(s)+CO_2(g)\rightarrow 2A_2O(s)+C(s)$$

با توجه به این‌که اگر تعداد مول مواد شرکت‌کننده در این واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها باشد، اختلاف جرم فراورده‌ها برابر با ۱۷۶ گرم می‌شود، می‌توانیم جرم مولی عنصر A (M_A) را محاسبه کرده *و با توجه به جرم‌های مولی داده‌شده این عنصر رو شناسایی کنیم*:

$$(\text{جرم ۲ مول } A_2O)-(\text{جرم ۱ مول } C)=176 \Rightarrow 2(2M_A+16)-1(12)=176 \Rightarrow 2(2M_A+16)=188$$

$$\Rightarrow 2M_A+16=94 \Rightarrow 2M_A=78 \Rightarrow M_A=39\ g.mol^{-1} \Rightarrow$$ M همان عنصر پتاسیم $(_{19}K)$ است.

در یک گروه از جدول دوره‌ای و از بالا به پایین، با افزایش شعاع اتمی، خصلت فلزی و واکنش‌پذیری عنصرهای فلزی، افزایش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان گفت که واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی آن‌ها، افزایش می‌یابد:

واکنش‌پذیری: $Li < Na < K < Rb < Cs$

پس چشم‌بسته بگین که واکنش‌پذیری K نسبت به Li *خیلی بیشتره!*

چهارمین عنصر جدول دوره‌ای، بریلیم $(_4Be)$ است که با توجه به درس‌باکس بالا، واکنش‌پذیری کم‌تری نسبت به لیتیم (Li) دارد؛ در نتیجه باز هم *چشم‌بسته بگین* که واکنش‌پذیری پتاسیم (K) نسبت به چهارمین عنصر جدول دوره‌ای (بریلیم (Be)) نیز بیشتر می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *با توجه به نمودار موجود تو درس‌باکس بالا مشخصه که* عنصر C، واکنش‌پذیری کم‌تری نسبت به Li دارد و چون واکنش‌پذیری Li کم‌تر از Na می‌باشد؛ بنابراین می‌توان گفت که واکنش‌پذیری Na از C نیز بیشتر بوده و واکنش مورد نظر در حضور Na *(و حتی* Li *هم!)* **انجام‌پذیر** است؛ ببینید:

$$4Na(s)+CO_2(g)\rightarrow 2Na_2O(s)+C(s)$$

Telegram: @konkur_in

گزینهٔ (۳): دقت کنید که پتاسیم ($_{19}K$) در دورهٔ **چهارم** جدول تناوبی قرار دارد، در حالی که آلومینیم ($_{13}Al$) و سیلیسیم ($_{14}Si$)، بیشترین اختلاف شعاع اتمی عنصرهای متوالی را در دورهٔ **سوم** جدول دارند.

گزینهٔ (۴): *نه والا!* آخرین فلز واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی، فلز روی ($_{30}Zn$) است، *اما همگی می‌دونین که* خاصیت فلزی و واکنش‌پذیری (تمایل برای تبدیل‌شدن به کاتیون) این فلز به عنوان مثال از فلزهایی مانند آهن ($_{26}Fe$) و مس ($_{29}Cu$) *تو این دوره، بیشتره و حداقل می‌دونیم که روی بنده‌خدا رتبهٔ آخر رو از نظر تمایل برای تبدیل‌شدن به کاتیون نداره!*

Telegram: @konkur_in

۵۱ واکنش‌های زیر در دو ظرف جداگانه انجام می‌شوند. درصد خلوص $KMnO_4$ دو برابر درصد خلوص $FeCO_3$ بوده و بازده درصدی واکنش (II)، ۷۵ درصد بازده درصدی واکنش (I) است. اگر مول‌های برابری از اکسیژن و کربن مونوکسید در دو ظرف جداگانه تشکیل شده باشد، به ازای مصرف ۴۷/۴ گرم $KMnO_4$ ناخالص در واکنش (I)، چند گرم $FeCO_3$ ناخالص در واکنش (II) مصرف شده است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند و معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شوند.)

$(C = 12, O = 16, K = 39, Mn = 55, Fe = 56 : g.mol^{-1})$

$$(I)\ KMnO_4(s) \xrightarrow{\Delta} K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$$

$$(II)\ FeCO_3(s) \xrightarrow{\Delta} Fe_2O_3(s) + CO_2(g) + CO(g)$$

۱) ۹۲/۸ ۲) ۸۷/۰ ۳) ۹۶/۶ ۴) ۷۴/۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های انجام‌شده به صورت زیر است:

$$I)\ 2KMnO_4(s) \rightarrow K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$$

$$II)\ 2FeCO_3(s) \rightarrow Fe_2O_3(s) + CO_2(g) + CO(g)$$

با توجه به یکسان‌بودن شمار مول‌های گازهای اکسیژن (O_2) و کربن مونوکسید (CO) تولیدشده در دو واکنش، می‌توانیم به طور مستقیم بین $KMnO_4$ و $FeCO_3$ *(البته با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد تو واکنش‌ها)* تناسب برقرار کنیم.

$$\left.\begin{matrix} 2KMnO_4 \sim 1O_2 \\ 2FeCO_3 \sim 1CO \end{matrix}\right\} \Rightarrow KMnO_4 \sim FeCO_3$$

اگر درصد خلوص $KMnO_4$ و بازده درصدی واکنش (I) را به ترتیب با P_1 و R_1 نشان دهیم، درصد خلوص $FeCO_3$ و بازده درصدی واکنش (II) به ترتیب $0/5P_1$ و $0/75R_1$ خواهند بود؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{جرم}\times\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{KMnO_4}} = \frac{\text{جرم}\times\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{FeCO_3}} \Rightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{47/4}}\times\frac{P_1}{100}\times\frac{R_1}{100}}{1\times\overset{10}{\cancel{158}}} = \frac{x\times\frac{0/5P_1}{100}\times\frac{0/75R_1}{100}}{1\times116}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\times116}{10\times0/5\times0/75} = 92/8\ g\ FeCO_3 \text{ ناخالص}$$

کنکور با توجه به واکنش‌های داده‌شده، اگر درصد خلوص $KMnO_4$، ۲ برابر درصد خلوص $FeCO_3$ و بازده درصدی واکنش (II)، ۱/۲ برابر بازده درصدی واکنش (I) و مول‌های برابر از گازهای O_2 و CO_2، در دو ظرف جداگانه تشکیل شده باشد، به ازای استفاده از ۶۳/۲ گرم $KMnO_4$ ناخالص در واکنش (I)، چند گرم $FeCO_3$ ناخالص در واکنش (II) استفاده شده است؟ (ناخالصی در واکنش شرکت نمی‌کند و معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

(سؤال ۸۷ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

$(C = 12, O = 16, K = 39, Mn = 55, Fe = 56 : g.mol^{-1})$

$$I)\ KMnO_4(s) \xrightarrow{\Delta} K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$$

$$II)\ FeCO_3(s) \xrightarrow{\Delta} Fe_3O_4(s) + CO_2(g) + CO(g)$$

۱) ۵۸ ۲) ۸۷ ۳) ۲۹ ۴) ۱۶

۵ در رابطه با آلکانی که جرم مولی آن ۴/۸۷٪ بیشتر از جرم مولی آلکین نظیر خود (با شمار اتم‌های کربن یکسان) می‌باشد، کدام موارد زیر درست است؟ $(H=1, C=12, Br=80 : g.mol^{-1})$

الف) ۸۰٪ از ساختارهای ممکن برای آن شاخه‌دار هستند.

ب) حداقل اختلاف جرم مولی آن با آلکان‌هایی که در دمای $22^{\circ}C$، گاز می‌باشند، ۲۸ گرم بر مول است.

پ) ۰/۲ مول از ترکیب آروماتیک هم‌کربن با این آلکان با ۴۸ گرم برم واکنش کامل می‌دهد.

ت) اختلاف جرم مولی آلکینی که از سوختن کامل ۰/۲۵ مول از آن ۱۳/۵ گرم آب تولید می‌شود، با این آلکان ۱۶ گرم بر مول است.

۱) الف و ب ۲) ب و پ ۳) پ و ت ۴) الف و ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

با توجه به این‌که جرم مولی آلکان مورد نظر، ۴/۸۷٪ بیشتر از جرم مولی آلکین هم‌کربن خود است، می‌توانیم این آلکان را شناسایی کنیم:

$$\text{جرم مولی آلکان با فرمول } C_nH_{2n+2} = 12n + (2n+2)(1) = 14n + 2$$

$$\text{جرم مولی آلکین با فرمول } C_nH_{2n-2} = 12n + (2n-2)(1) = 14n - 2$$

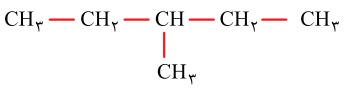
$$\Rightarrow \text{جرم مولی آلکان} = \text{جرم مولی آلکین} + (\frac{4/87}{100} \times \text{جرم مولی آلکین}) \Rightarrow 14n+2 = (14n-2) + (\frac{4/87}{100} \times (14n-2))$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{4/87}{100} \times (14n-2) \Rightarrow 14n \simeq 84 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow$$ فرمول مولکولی آلکان مورد نظر: C_6H_{14}

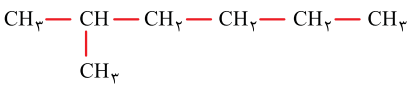
بالا بیایید به ترتیب عبارت‌ها را بررسی کنیم:

الف) آلکانی با فرمول مولکولی C_6H_{14}، ۵ ایزومر با ساختارهای زیر دارد که در میان آن‌ها، تنها هگزان راست‌زنجیر بوده و چهار ایزومر دیگر ($\frac{4}{5} \times 100 = 80\%$ ایزومرها) شاخه‌دار هستند؛ ببینید:

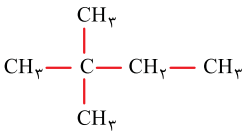
هگزان (راست‌زنجیر)



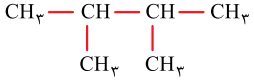
۳ ـ متیل پنتان



۲ ـ متیل پنتان



۲، ۲ ـ دی‌متیل بوتان

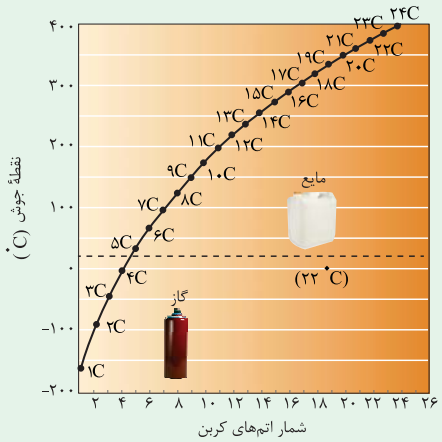


۲، ۳ ـ دی‌متیل بوتان

Telegram: @konkur_in

ب)

نکته با توجه به نمودار زیر، نقطهٔ جوش چهار آلکان راست‌زنجیر نخست، یعنی متان (CH_4)، اتان (C_2H_6)، پروپان (C_3H_8) و بوتان (C_4H_{10})، کم‌تر از صفر درجهٔ سلسیوس است.

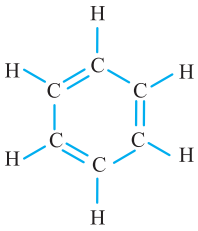


از آن‌جا که هر ترکیبی در دمای بالاتر از دمای جوش خود به حالت گاز است، پس این چهار هیدروکربن در دمای $22\ ^\circ C$ *گاز تشریف دارند!*

حداقل اختلاف جرم مولی C_6H_{14} با آلکان‌هایی که در دمای $22\ ^\circ C$ به حالت گاز می‌باشند ($CH_4, C_2H_6, C_3H_8, C_4H_{10}$)، برابر با اختلاف جرم مولی C_6H_{14} و C_4H_{10} است:

$$\text{جرم مولی } C_6H_{14} - \text{جرم مولی } C_4H_{10} = \text{جرم مولی } C_2H_4 = 2(12) + 4(1) = 28\ g.mol^{-1}$$

پ) ترکیب آروماتیک هم‌کربن با C_6H_{14}، همان بنزن (C_6H_6) به عنوان سرگروه ترکیب‌های آروماتیک و با ساختار زیر است:



از نظر علمی که خارج از دانش شما و کتاب درسی هم هست، بنزن با این‌که پیوند دوگانهٔ $C=C$ در ساختار خود دارد و سیرنشده نیز محسوب می‌شود، اما با برم (Br_2)، *واکنش نمی‌ده که نمی‌ده! خب دلش نمی‌خواد، زورکی نیست که!* اما حتی با فرض این‌که واکنش نیز بدهد، با توجه به این‌که هر مول از این ترکیب، دارای ۳ مول پیوند دوگانهٔ $C=C$ در ساختار خود است، می‌تواند با ۳ مول برم (Br_2) واکنش دهد؛ بنابراین داریم:

$$0/2\ mol\ C_6H_6 \times \frac{3\ mol\ Br_2}{1\ mol\ C_6H_6} \times \frac{160\ g\ Br_2}{1\ mol\ Br_2} = 96\ g\ Br_2$$

پس حتی اگه بنزن بخواد با برم واکنش بده هم، ۰/۲ مول بنزن با ۹۶ گرم (نه ۴۸ گرم!) برم به طور کامل واکنش می‌دهد.

ت)

نکته **معادلهٔ واکنش سوختن کامل**

آلکان‌ها: $C_nH_{2n+2} + \frac{3n+1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n+1)H_2O$

آلکن‌ها: $C_nH_{2n} + \frac{3n}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n)H_2O$

آلکین‌ها: $C_nH_{2n-2} + \frac{3n-1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n-1)H_2O$

Telegram: @konkur_in

با توجه به معادلهٔ واکنش سوختن کامل آلکین‌ها، آلکین مورد نظر را شناسایی می‌کنیم:

$$C_nH_{2n-2} + \frac{3n-1}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + (n-1)H_2O$$

$$\Rightarrow 0/25\ mol\ C_nH_{2n-2} \times \frac{(n-1)\ mol\ H_2O}{1\ mol\ C_nH_{2n-2}} \times \frac{18\ g\ H_2O}{1\ mol\ H_2O} = 13/5\ g\ H_2O$$

$$\Rightarrow n-1=3 \Rightarrow n=4 \Rightarrow \text{آلکین مورد نظر: } C_4H_6$$

اختلاف جرم مولی C_6H_{14} و C_4H_6 برابر است با:

$$\text{جرم مولی } C_6H_{14} - \text{جرم مولی } C_4H_6 = \text{جرم مولی } C_2H_8 = 2(12)+8(1) = 32\ g.mol^{-1}$$

Telegram: @konkur_in

۵۴ کدام موارد درست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

الف) اگر آنتالپی سوختن متان و اتان به ترتیب برابر ۸۹۰− و ۱۵۶۰− کیلوژول بر مول باشد، ارزش سوختی پروپان به تقریب ۵۰/۷ کیلوژول بر گرم است.

ب) در هیدروکربن‌ها برخلاف الکل‌ها با افزایش جرم مولی، آنتالپی سوختن افزایش می‌یابد.

پ) در کتونی سیرشده و بدون حلقه با ۳۱ پیوند کووالانسی، ارزش سوختی به تقریب ۰/۰۰۶ برابر مقدار آنتالپی سوختن است.

ت) برای ترکیبی با فرمول $C_۵H_{۱۲}O$ تعداد ایزومرهای الکلی، ۲ واحد بیشتر از تعداد ایزومرهای اتری است.

۱) الف، ب، پ ۲) الف، پ، ت ۳) پ، ت ۴) الف، ب

مشاوره تست‌های از نوع «کدام موارد» (الف، ب، پ و...) جدیداً خیلی مد شده!

بهترین راه برای حل این مدل تست‌ها حذف گزینه است.

مثلاً در این تست بررسی عبارت «ت» زمان‌بر است، ولی با حذف گزینه می‌شه بدون بررسی عبارت «ت» به گزینهٔ درست رسید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هر دو عضو متوالی از خانوادهٔ آلکان‌ها در یک گروه $CH_۲$ با هم اختلاف دارند؛ بنابراین می‌توان گفت که تفاوت آنتالپی سوختن دو عضو متوالی از این خانواده تقریباً ثابت است؛ در نتیجه اختلاف آنتالپی سوختن متان و اتان با اختلاف آنتالپی سوختن اتان و پروپان تقریباً برابر است:

آنتالپی سوختن متان − آنتالپی سوختن اتان = آنتالپی سوختن اتان − آنتالپی سوختن پروپان

$$\text{آنتالپی سوختن پروپان} = -۲۲۳۰\ kJ.mol^{-۱} \Rightarrow \text{آنتالپی سوختن پروپان} - (-۱۵۶۰) = (-۱۵۶۰) - (-۸۹۰)$$

حال می‌توانیم ارزش سوختی پروپان را با توجه به آنتالپی سوختن و جرم مولی آن به دست آوریم:

$$\text{جرم مولی پروپان } (C_۳H_۸) = ۳(۱۲) + ۸(۱) = ۴۴\ g.mol^{-۱}$$

$$\text{ارزش سوختی پروپان} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}} = \frac{۲۲۳۰}{۴۴} \simeq ۵۰/۷\ kJ.g^{-۱}$$

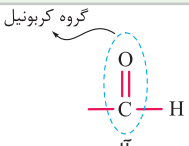
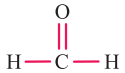
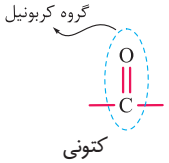
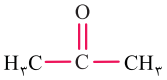
ب) به طور کلی هر چه مقدار (جرم) یک هیدروکربن بیشتر باشد، مقدار گرمای حاصل از سوختن آن بیشتر است. به عنوان مثال برای مقایسهٔ گرمای حاصل از سوختن ۱ مول از آلکان‌ها، آلکن‌ها وآلکین‌ها، باید جرم مولی آن‌ها را مقایسه کنیم؛ هر کدام که جرم مولی بیشتری داشته باشد، گرمای حاصل از سوختن آن نیز بیشتر است:

مقایسهٔ گرمای سوختن مولی چند هیدروکربن (قدرمطلق آنتالپی سوختن): $\underset{(۱۶\ g.mol^{-۱})}{CH_۴} < \underset{(۳۰\ g.mol^{-۱})}{C_۲H_۶} < \underset{(۴۴\ g.mol^{-۱})}{C_۳H_۸} < \underset{(۵۸\ g.mol^{-۱})}{C_۴H_{۱۰}}$

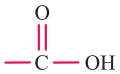
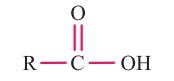
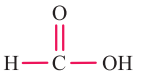
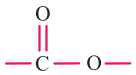
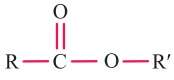
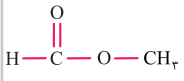
در الکل‌ها نیز همانند هیدروکربن‌ها، هر چه شمار اتم‌های کربن بیشتر باشد، جرم مولی الکل بیشتر و در نتیجه قدرمطلق آنتالپی سوختن آن بزرگ‌تر است. به عنوان مثال، آنتالپی سوختن اتانول $(C_۲H_۵OH)$ از متانول $(CH_۳OH)$ بیشتر است.

پ)

نکته ساختار و برخی ویژگی‌های گروه‌های عاملی اکسیژن‌دار معرفی‌شده در کتاب درسی را در جدول زیر برایتان جمع‌آوری کرده‌ایم:

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی	فرمول کلی	ساده‌ترین عضو خانواده	فرمول مولکولی با گروه(های) هیدروکربنی سیرشده
آلدهیدها	گروه کربونیل  آلدهیدی	R زنجیرهٔ هیدروکربنی یا هیدروژن	 متانال (فرمالدهید)	آلدهید و کتون تک‌عاملی سیرشده با تعداد کربن یکسان ایزومرند. $C_nH_{۲n}O$
کتون‌ها	گروه کربونیل  کتونی	R و R′ زنجیرهٔ هیدروکربنی	 پروپانون (استون)	

Telegram: @konkur_in

الکل‌ها	— OH هیدروکسیل	R — OH R زنجیرهٔ هیدروکربنی	CH_3OH متانول	الکل و اتر تک‌عاملی سیرشده با تعداد کربن یکسان ایزومرند. $C_nH_{2n+2}O$
اترها	—O— اتری	R — O — R′ R و R′ زنجیرهٔ هیدروکربنی	$H_3C-O-CH_3$ دی متیل اتر	
کربوکسیلیک اسیدها	 کربوکسیل	 R زنجیرهٔ هیدروکربنی یا هیدروژن	 متانوئیک اسید (فورمیک اسید)	استر و کربوکسیلیک اسید تک‌عاملی و سیرشده با تعداد کربن یکسان ایزومرند. $C_nH_{2n}O_2$
استرها	 استری	 R′ زنجیرهٔ هیدروکربنی و R هیدروژن یا زنجیرهٔ هیدروکربنی	 متیل متانوات (متیل فورمات)	

بنابراین فرمول مولکولی کتون‌های سیرشده و زنجیری (بدون حلقه)، به صورت $C_nH_{2n}O$ است. حال با توجه به شمار پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار کتون مورد نظر، آن را شناسایی می‌کنیم:

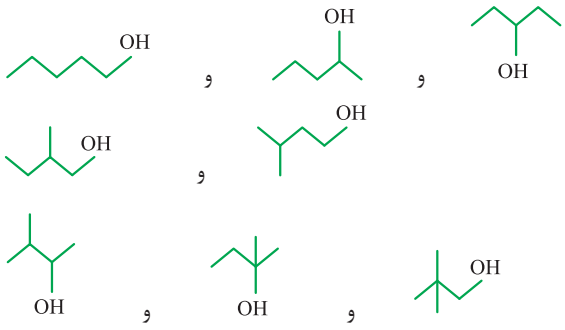
$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی } C_nH_{2n}O = \frac{(\text{تعداد اتم C}\times 4)+(\text{تعداد اتم H}\times 1)+(\text{تعداد اتم O}\times 2)}{2} = \frac{(4n)+(2n)+(2)}{2} = 3n+1$$

$$\Rightarrow 3n+1=31 \Rightarrow 3n=30 \Rightarrow n=10 \Rightarrow \text{کتون مورد نظر: } C_{10}H_{20}O$$

نسبت ارزش سوختی به مقدار آنتالپی سوختن را در این کتون به دست می‌آوریم:

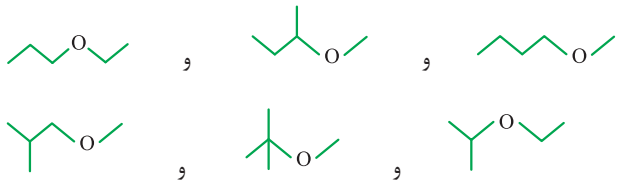
$$\text{ارزش سوختی} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{\text{ارزش سوختی}}{|\text{آنتالپی سوختن}|} = \frac{1}{\text{جرم مولی}} = \frac{1}{10(12)+20(1)+1(16)} = \frac{1}{156} \simeq 0/006$$

ت) ایزومرهای الکلی (دارای گروه عاملی هیدروکسیل (— OH)) ترکیبی با فرمول مولکولی $C_5H_{12}O$ به صورت زیر است:



⇐ هشت ایزومر الکلی

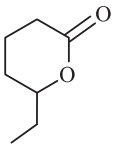
ایزومرهای اتری (دارای گروه عاملی اتری (—O—)) ترکیبی با فرمول مولکولی $C_5H_{12}O$ به صورت زیر است:



⇐ شش ایزومر اتری

بنابراین تعداد ایزومرهای الکلی این ترکیب، دو واحد بیشتر از تعداد ایزومرهای اتری آن است.

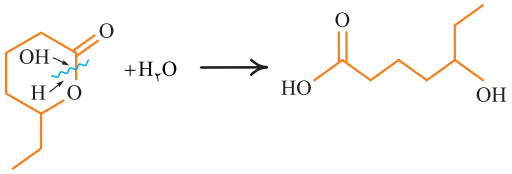
Telegram: @konkur_in

۵۵ از واکنش ترکیب **A** با ساختار  با مقدار کافی آب در شرایط مناسب، فراوردهٔ **B** تولید می‌شود. اگر سرعت تولید فراوردهٔ **B**، ۰/۲ مول بر ثانیه باشد، در مدت‌زمان ۲۰ ثانیه به ترتیب چند گرم ترکیب **B** تولید می‌شود و اگر بازده واکنش ۸۰ درصد باشد، چند گرم ترکیب **A** نیاز است؟ $(H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۸۴، ۶۴۰
۲) ۵۲۸، ۵۷۰
۳) ۵۲۸، ۶۴۰
۴) ۵۸۴، ۵۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ترکیب A دارای یک گروه عاملی استری در ساختار خود است؛ در نتیجه با مخلوط آب و اسید، مطابق معادلهٔ زیر واکنش می‌دهد:



$(C_7H_{12}O_2)$ $(C_7H_{14}O_3)$

با توجه به سرعت تولید فراوردهٔ B، شمار مول و جرم این ماده که در مدت‌زمان ۲۰ ثانیه تولید می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}(B) = \frac{\Delta n(B)}{\Delta t} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{\Delta n(B)}{۲۰} \Rightarrow \Delta n(B) = ۴ \text{ mol}$$

$$\text{جرم مولی فراوردهٔ B } (C_7H_{14}O_3) = ۷(۱۲) + ۱۴(۱) + ۳(۱۶) = ۱۴۶ \text{ g.mol}^{-۱}$$

$$\Rightarrow \text{g } C_7H_{14}O_3 = ۴ \text{ mol} \times \frac{۱۴۶ \text{ g}}{۱ \text{ mol}} = ۵۸۴ \text{ g}$$

در نهایت با توجه به شمار مول‌های فراوردهٔ تولیدی و هم‌چنین بازده واکنش، جرم مصرفی ترکیب A را محاسبه می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{جرم مولی ترکیب A } (C_7H_{12}O_2) = ۷(۱۲) + ۱۲(۱) + ۲(۱۶) = ۱۲۸ \text{ g.mol}^{-۱}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۴}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{مقدار نظری فراوردهٔ B} = ۵ \text{ mol}$$

$$\Rightarrow ۵ \text{ mol B فراوردهٔ} \times \frac{۱ \text{ mol A}}{۱ \text{mol B}} \times \frac{۱۲۸ \text{ g A } (C_7H_{12}O_2)}{۱ \text{ mol A } (C_7H_{12}O_2)} = ۶۴۰ \text{ g A } (C_7H_{12}O_2)$$

یه‌جور دیگه ✔ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰} \times \text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{ترکیب A}}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{\text{فراوردهٔ B}}} \Rightarrow \frac{x \times \frac{۸۰}{۱۰۰}}{۱ \times ۱۲۸} = \frac{۴}{۱} \Rightarrow x = \frac{۴ \times ۱۲۸ \times \frac{۱۰}{۱۰۰}}{\frac{۸۰}{۸}} = ۶۴۰ \text{ g A ترکیب}$$

Telegram: @konkur_in

۵۶ نمونه‌ای از روغن زیتونی دارای ناخالصی از نوع پالمیتیک اسید با فرمول $C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$ است. دو نمونهٔ یکسان از این روغن، یک بار در واکنش با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، ۰/۲۶ مول صابون جامد تولید کرده و بار دیگر مقدار ۳۸/۴ گرم برم را به طور کامل بی‌رنگ می‌کند. درصد مولی روغن زیتون در این نمونه کدام است؟ $(Br = ۸۰\ g.mol^{-1})$

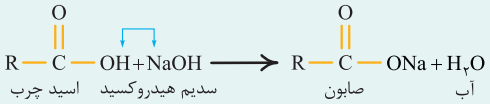
۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

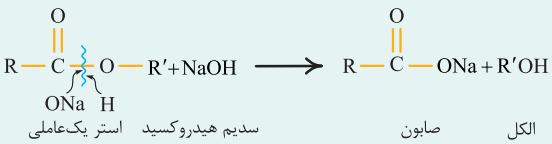
معادلهٔ واکنش‌های مربوط به تولید صابون به صورت زیر است:

۱) ۱ مول اسید چرب + ۱ مول سدیم هیدروکسید (باز) ← ۱ مول صابون + ۱ مول آب



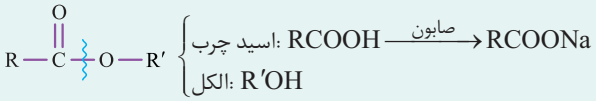
در این واکنش، کاتیون سدیم با هیدروژن گروه عاملی کربوکسیل اسید چرب جابه‌جا شده و ضمن تولید صابون، آب هم تولید می‌شود.

۲) ۱ مول الکل یک‌عاملی + ۱ مول سدیم هیدروکسید ← ۱ مول صابون + ۱ مول استر یک‌عاملی



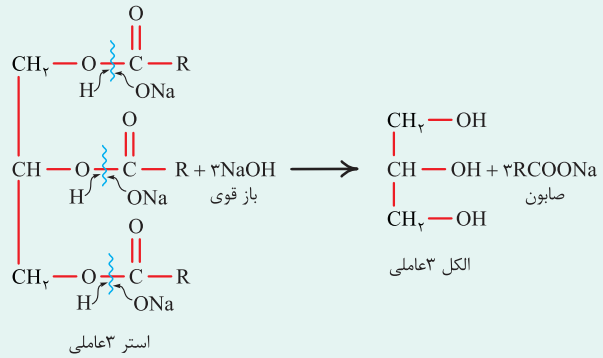
همان‌طور که در معادلهٔ بالا می‌بینید، برای کامل‌کردن معادلهٔ واکنش بین استر و سدیم هیدروکسید باید پیوند بین O و $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-$ را شکسته و به گروه $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-ONa$، O و به اتم H اضافه کنیم. به این ترتیب، صابون و الکل به دست می‌آیند. *یه پور دیگه هم می‌شد گفت!*

اگر یک استر با سدیم هیدروکسید واکنش دهد، استر به نمک سدیم اسید چرب آن (صابون) و الکل سازندهٔ خود تبدیل می‌شود.



۳) ۱ مول الکل سه‌عاملی + ۳ مول سدیم هیدروکسید ← ۳ مول صابون + ۱ مول استر سه‌عاملی

$$C_۳H_۵(RCOO)_۳ + ۳NaOH \rightarrow ۳RCOONa + C_۳H_۵(OH)_۳$$



در این حالت نیز کافی است که ابتدا اسید(های) چرب سازندهٔ استر را به دست آورده و سپس فرمول اسید چرب را به فرمول صابون تبدیل کنیم. فراوردهٔ دیگر واکنش نیز الکل سازندهٔ استر است.

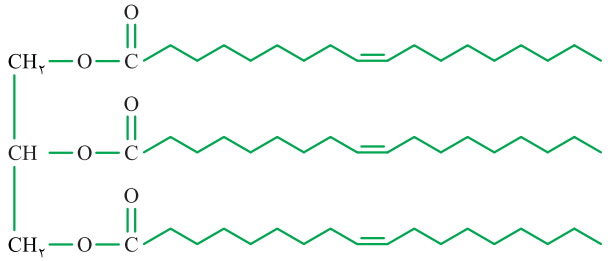
توجه فراوردهٔ جانبی واکنش اسید چرب و سدیم هیدروکسید، **آب** است، در حالی که فراوردهٔ جانبی واکنش استرها با سدیم هیدروکسید، **الکل سازندهٔ استر** می‌باشد.

Telegram: @konkur_in

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر R در فرمول عمومی اسیدهای چرب $(RCOOH)$، زنجیر آلکیل (C_mH_{2m+1}) باشد یا به عبارت دیگر، اسید چرب سیرشده باشد، فرمول کلی آن‌ها را می‌توان به صورت $C_mH_{2m+1}COOH$ یا $C_nH_{2n}O_2$ در نظر گرفت؛ بنابراین می‌توان گفت که پالمیتیک اسید، یک اسید چرب سیرشده (با زنجیر هیدروکربنی آلکیلی) است و با برم (Br_2) واکنش نمی‌دهد.

ساختار روغن زیتون به صورت زیر است:



این ماده در ساختار خود سه پیوند دوگانهٔ $C=C$ داشته و هر مول از آن با سه مول برم (Br_2) واکنش می‌دهد.

گام اول: با توجه به این‌که پالمیتیک اسید برخلاف روغن زیتون با برم واکنش نمی‌دهد، شمار مول‌های روغن زیتون را با توجه به مقدار برم (Br_2) مصرفی محاسبه می‌کنیم:

$$\text{روغن زیتون } ?\,\text{mol} = 38/4\,\text{g } Br_2 \times \frac{1\,\text{mol } Br_2}{160\,\text{g } Br_2} \times \frac{1\,\text{mol روغن زیتون}}{3\,\text{mol } Br_2} = 0/08\,\text{mol}$$

گام دوم: روغن زیتون یک استر سه‌عاملی است و هر مول از آن با ۳ مول سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ واکنش داده و ۳ مول صابون و یک مول الکل سه‌عاملی تولید می‌کند؛ بنابراین با استفاده از شمار مول‌های روغن زیتون، شمار مول‌های صابون حاصل از واکنش روغن زیتون با سدیم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

۱ مول الکل سه‌عاملی + ۳ مول صابون ← ۳ مول سدیم هیدروکسید (باز قوی) + ۱ مول استر سه‌عاملی

$$\text{صابون } ?\,\text{mol} = 0/08\,\text{mol روغن زیتون} \times \frac{3\,\text{mol صابون}}{1\,\text{mol روغن زیتون}} = 0/24\,\text{mol}$$

بنابراین شمار مول‌های صابون حاصل از واکنش پالمیتیک اسید با سدیم هیدروکسید، برابر با $0/26 - 0/24 = 0/02$ مول است.

گام سوم: پالمیتیک اسید یک اسید چرب است و هر مول از آن با یک مول سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ واکنش داده و یک مول صابون و یک مول آب تولید می‌کند؛ بنابراین با استفاده از شمار مول‌های صابون حاصل از واکنش پالمیتیک اسید با سدیم هیدروکسید، شمار مول‌های پالمیتیک اسید را به دست می‌آوریم:

۱ مول آب + ۱ مول صابون ← ۱ مول سدیم هیدروکسید (باز قوی) + ۱ مول اسید چرب

$$\text{پالمیتیک اسید } ?\,\text{mol} = 0/02\,\text{mol صابون} \times \frac{1\,\text{mol پالمیتیک اسید}}{1\,\text{mol صابون}} = 0/02\,\text{mol}$$

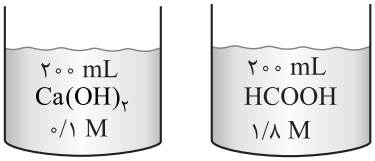
گام چهارم: درصد مولی روغن زیتون در مخلوط اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد مولی روغن زیتون} = \frac{\text{مول روغن زیتون}}{(\text{مول صابون} + \text{مول روغن زیتون})} \times 100 = \frac{0/08}{0/08 + 0/02} \times 100 = \%80$$

Telegram: @konkur_in

۵ با توجه به اطلاعات دو ظرف زیر، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

$(K_a(HCOOH)=۱/۸\times۱۰^{-۴}, \log۲=۰/۳, \log۳=۰/۵)$



الف) اختلاف شمار یون‌ها در دو ظرف به تقریب برابر $۳/۱۸\times۱۰^{۲۳}$ می‌شود.

ب) اگر محتویات دو ظرف با یکدیگر مخلوط شوند، با فرض ثابت‌ماندن دما، pH محلول جدید کم‌تر از ۷ می‌شود.

پ) اگر ۶۰۰ میلی‌لیتر آب به محلول متانوئیک اسید اضافه شود، درجهٔ یونش آن برابر با ۲ خواهد شد.

ت) تفاوت pH دو محلول برابر ۱۱/۶ است.

۱) الف و ب ۲) الف و پ ۳) ب و ت ۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) مجموع شمار یون‌ها در محلول $Ca(OH)_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

محلول $Ca(OH)_۲$:

- مجموع غلظت مولی یون‌ها $=[Ca^{۲+}]+[OH^-]$
- $[Ca(OH)_۲]=[Ca^{۲+}]=\frac{[OH^-]}{۲}$ ⟶ مجموع غلظت مولی یون‌ها $=۳[Ca(OH)_۲]=۰/۳\ mol.L^{-۱}$
- مجموع شمار مول یون‌ها $=$ مجموع غلظت مولی یون‌ها $\times$ حجم محلول $=۰/۳\ mol.L^{-۱}\times۰/۲L=۰/۰۶\ mol$

محلول $HCOOH$:

- $K_a=\frac{[H^+]^۲}{M} \Rightarrow [H^+]=\sqrt{K_a.M}=\sqrt{۱/۸\times۱۰^{-۴}\times۱/۸}=۱/۸\times۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$
- مجموع غلظت مولی یون‌ها $=[H^+]+[HCOO^-]$
- $[H^+]=[HCOO^-]$ ⟶ مجموع غلظت مولی یون‌ها $=۲[H^+]=۳/۶\times۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$
- مجموع شمار مول یون‌ها $=$ مجموع غلظت مولی یون‌ها $\times$ حجم محلول
- $=۳/۶\times۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}\times۰/۲\ L=۰/۰۰۷۲\ mol$

اختلاف شمار مول یون‌ها در دو محلول $=۰/۰۶-۰/۰۰۷۲=۰/۰۵۲۸\ mol$

$\Rightarrow$ اختلاف شمار یون‌ها در دو محلول $=۰/۰۵۲۸\ mol\times\frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}{۱\ mol}\simeq ۳/۱۸\times۱۰^{۲۲}$

ب) در صورت مخلوط‌شدن دو محلول، واکنش زیر انجام می‌شود:

$$Ca(OH)_۲+۲HCOOH\rightarrow Ca(HCOO)_۲+۲H_۲O$$

در نتیجه به ازای مصرف هر مول $Ca(OH)_۲$ در این واکنش، ۲ مول $HCOOH$ مصرف می‌شود، حال با توجه به این‌که در محلول اولیهٔ $Ca(OH)_۲$، $۰/۱\times۰/۲=۰/۰۲$ مول و در محلول اولیهٔ $HCOOH$، $۱/۸\times۰/۲=۰/۳۶$ مول $HCOOH$ وجود دارد، می‌توان گفت که:

مول باقی‌ماندهٔ اسید $=$ مول اولیه $-$ مول مصرفی $=۰/۳۲\ mol$

(مول اولیه: $۰/۳۶$، مول مصرفی: $۲\times۰/۰۲$)

بنابراین محلول در نهایت اسیدی بوده و pH نهایی کم‌تر از ۷ خواهد بود.

Telegram: @konkur_in

پ) با ۴ برابر شدن حجم محلول، غلظت مولی آن $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود. با توجه به این‌که K_a اسید کوچک است، می‌توانیم از رابطهٔ تقریبی $K_a = M\alpha^۲$ استفاده کنیم:

$$K_a = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{\alpha_۲}{\alpha_۱} = \sqrt{\frac{M_۱}{M_۲}} = \sqrt{\frac{۴}{۱}} = ۲ \Rightarrow \alpha_۲ = ۲\alpha_۱$$

بنابراین درجهٔ یونش ۲ برابر می شود نه برابر با ۲!

ت)

$$\text{محلول } Ca(OH)_۲ \begin{cases} [OH^-] = ۰/۲\,mol.L^{-۱} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}} [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۲} = ۵\times۱۰^{-۱۴}\,mol.L^{-۱} \\ pH = -\log[H^+] = -\log(۵\times۱۰^{-۱۴}) = ۱۴ - \log ۵ = ۱۳/۳ \end{cases}$$

$$\text{محلول } HCOOH: [H^+] = ۱/۸\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱} \Rightarrow pH = -\log[H^+]$$
$$= -\log(۱۸\times۱۰^{-۳}) = ۳ - \log ۱۸ = ۳ - \underbrace{(\log ۲ + ۲\log ۳)}_{۱/۳} = ۱/۷$$

بنابراین تفاوت pH دو محلول برابر با $۱۳/۳ - ۱/۷ = ۱۱/۶$ است.

Telegram: @konkur_in

۵۸ **اگر تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در برقکافت کلسیم کلرید مذاب $\frac{۳}{۲}$ برابر تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند هال باشد، به ازای تولید ۱۰/۶۵ گرم گاز کلر در برقکافت کلسیم کلرید مذاب، حجم گاز تولیدشده در فرایند هال، در شرایط STP چند لیتر است؟ $(Cl = ۳۵/۵\ g.mol^{-۱})$**

۱) ۱/۱۲ ۲) ۲/۲۴ ۳) ۳/۳۶ ۴) ۴/۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا معادلهٔ واکنش‌های برقکافت کلسیم کلرید $(CaCl_۲)$ مذاب و فرایند هال را نوشته و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آن‌ها را محاسبه کن، سپس شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند برقکافت کلسیم کلرید مذاب، به ازای تولید ۱۰/۶۵ گرم گاز کلر $(Cl_۲)$ را *مساب کتاب کن!* در نهایت حجم گاز کربن دی‌اکسید $(CO_۲)$ تولیدشده در فرایند هال در شرایط STP را به ازای تبادل $\frac{۲}{۳}$ شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند برقکافت کلسیم کلرید مذاب *رو بحساب*.

نکته برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله‌شده در یک واکنش اکسایش ـ کاهش می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

تغییر عدد اکسایش اتم در اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌های کاهش‌یافته در اکسنده = شمار الکترون‌های مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده

تغییر عدد اکسایش اتم در کاهنده × ضریب کاهنده × شمار اتم‌های اکسایش‌یافته در کاهنده =

توجه برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله‌شده، هم می‌توانیم از کاهنده و هم از اکسنده استفاده کنیم. *جواب نهایی هیچ فرقی نمی‌کنه!*

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش‌های برقکافت کلسیم کلرید $(CaCl_۲)$ مذاب و فرایند هال را نوشته و شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$Al_۲O_۳ + ۳C \longrightarrow ۴Al + ۳CO_۲$$

(۰ → +۴)

شمار الکترون‌های مبادله‌شده = ۱ × ۳ × ۴ = ۱۲

(ضریب C: ۳؛ تغییر عدد اکسایش C: ۴؛ شمار اتم‌های C: ۱)

$$CaCl_۲ \longrightarrow Ca + Cl_۲$$

(+۲ → ۰)

شمار الکترون‌های مبادله‌شده = ۱ × ۲ = ۲

(تغییر عدد اکسایش Ca: ۲؛ شمار اتم‌های Ca: ۱)

گام دوم: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند برقکافت کلسیم کلرید مذاب، به ازای تولید ۱۰/۶۵ گرم گاز کلر $(Cl_۲)$ را حساب می‌کنیم:

روش کسر تناسب:

$$۱۰/۶۵\ g\ Cl_۲ \times \frac{۱\ mol\ Cl_۲}{۷۱\ g\ Cl_۲} \times \frac{۲\ mol\ e^-}{۱\ mol\ Cl_۲} = ۰/۳\ mol\ e^-$$

یه‌جور دیگه *و حالا با استفاده از روش کسر تبدیل:*

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cl_۲}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{۱۰/۶۵}{۱ \times ۷۱} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۰/۳\ mol\ e^-$$

گام سوم: حجم گاز کربن دی‌اکسید $(CO_۲)$ تولیدشده در فرایند هال در شرایط STP به ازای تبادل $\frac{۲}{۳} \times ۰/۳ = ۰/۲$ مول الکترون را به دست می‌آوریم:

$$۰/۲\ mol\ e^- \times \frac{۳\ mol\ CO_۲}{۱۲\ mol\ e^-} \times \frac{۲۲/۴\ L\ CO_۲}{۱\ mol\ CO_۲} = ۱/۱۲\ L\ CO_۲$$

یه‌جور دیگه *بازم با استفاده از روش کسر تبدیل:*

$$\frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{ضریب} \times ۲۲/۴}_{CO_۲}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{۳ \times ۲۲/۴} = \frac{۰/۲}{۱۲} \Rightarrow x = ۱/۱۲\ L\ CO_۲$$

کنکور

اگر در دو آزمایش متفاوت، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایند هال، دو برابر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در برقکافت سدیم کلرید مذاب باشد، به ازای تشکیل ۱۴/۲ گرم گاز کلر در برقکافت سدیم کلرید مذاب، چند لیتر گاز در فرایند هال (در شرایط STP) تشکیل می‌شود؟ $(Cl = 35/5\ g.mol^{-1})$ *(سؤال ۱۰۴ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۱/۱۲ ۲) ۲/۲۴ ۳) ۴/۴۸ ۴) ۸/۹۶

۵ کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) عدد اکسایش وانادیم در محلول آبی‌رنگ آن، با عدد اکسایش اتم گوگرد در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی یکسان است.

ب) در ترکیبات $Na_4P_2O_8$ و $K_2S_2O_8$ عدد اکسایش برخی از اتم‌های اکسیژن برابر ۱− است.

پ) مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در اسید چرب سازندهٔ روغن زیتون برابر ۳۲− است.

ت) عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در سیکلوآلکان‌ها برابر ۲− است.

۱) الف و ب ۲) الف و پ ۳) ب و پ ۴) پ و ت

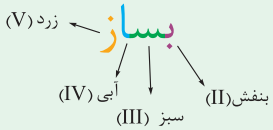
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

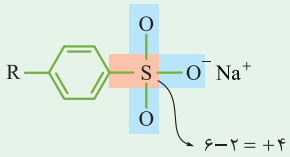
بررسی عبارت‌ها:

الف)

نکته اگر حرف اول رنگ‌های مربوط به محلول‌های وانادیم از عدد اکسایش (II) تا (V) را کنار هم بگذاریم، رمز زیر به دست می‌آید که *برای حفظ کردن بهمون کمک می‌کنه!*



بنابراین عدد اکسایش وانادیم در محلول آبی‌رنگ آن، برابر ۴+ است، همچنین عدد اکسایش اتم گوگرد (S) در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز برابر با ۴+ می‌باشد؛ ببینید:



ب) اگر در ترکیبات $Na_4P_2O_8$ و $K_2S_2O_8$، عدد اکسایش همهٔ اتم‌های اکسیژن را ۲− در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$Na_4P_2O_8 \begin{cases} P_2O_8^{4-} : 2P + 8(-2) = -4 \Rightarrow P = +6 \\ Na^+ \Rightarrow Na = +1 \end{cases}$$

$$K_2S_2O_8 \begin{cases} S_2O_8^{2-} : 2S + 8(-2) = -2 \Rightarrow S = +7 \\ K^+ \Rightarrow K = +1 \end{cases}$$

در حالی که می‌دانیم حداکثر عدد اکسایش عنصرهای P و S به ترتیب برابر با ۵+ و ۶+ می‌باشد؛ پس اعداد به‌دست‌آمده طبق محاسبات بالا، از حداکثر عدد اکسایش این عنصرها بیشتر است که این مورد نشان می‌دهد که عدد اکسایش تعدادی از اتم‌های اکسیژن در این ترکیب‌ها، ۱− می‌باشد.

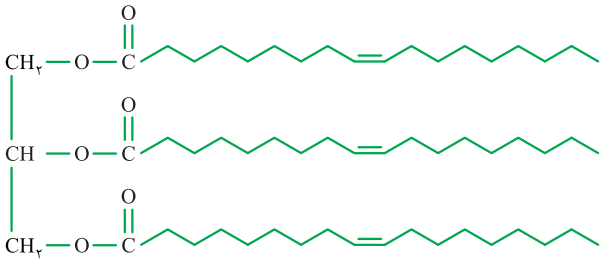
نکته برای عنصرهای گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین عدد اکسایش، از رابطهٔ « ۱۸− شمارهٔ گروه» به دست آمده و بالاترین عدد اکسایش، برابر با عدد یکان شمارهٔ گروه این عنصرهاست؛ ببینید:

شمارهٔ گروه	۱۴(C, Si, ...)	۱۵(N, P, ...)	۱۶(S, ...)	۱۷(Cl, ...)
پایین‌ترین عدد اکسایش	۱۴−۱۸ = −۴	۱۵−۱۸ = −۳	۱۶−۱۸ = −۲	۱۷−۱۸ = −۱
بالاترین عدد اکسایش	+۴	+۵	+۶	+۷

Telegram: @konkur_in

پ)

نکته *روغن زیتون رو بهتر بشناسیم:*

روغن زیتون	
فرمول مولکولی و جرم مولی	$C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶\,(۸۸۴\ g.mol^{-۱})$
حالت فیزیکی در دمای اتاق	مایع
واکنش‌پذیری شیمیایی	بالا (دارای ۳ پیوند $C=C$)
اسید چرب سازنده	$C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$
الکل سازنده	$C_۳H_۸O_۳$
ساختار شیمیایی	

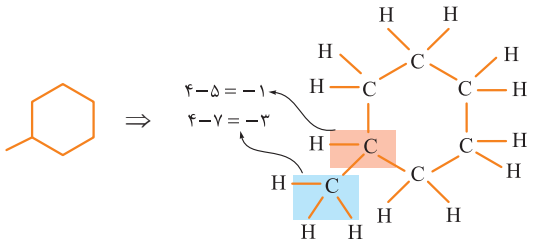
فرمول مولکولی اسیدهای چرب سازندهٔ روغن زیتون به صورت زیر است:

$$\text{فرمول اسید چرب روغن زیتون} = \frac{C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶ - C_۳H_۲}{۳} = \frac{C_{۵۴}H_{۱۰۲}O_۶}{۳} = C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$$

بنابراین مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در این ترکیب برابر است با:

$$C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲ : X + ۳۴(+۱) + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow X = -۳۰$$

ت) *نه والا!* مثلاً عدد اکسایش اتم‌های کربن مشخص‌شده در سیکلوآلکان شاخه‌دار زیر *رو ببینین که* ۲− *نیستش!*



در واقع، کربن‌ها در سیکلوآلکان‌های شاخه‌دار، می‌توانند عدد اکسایش‌های متفاوتی داشته باشند.

Telegram: @konkur_in

در دمای معین، تعادل گازی $K = ۰/۸$ و $۲NO(g) + O_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO_۲(g)$ در یک ظرف ۴لیتری برقرار است. اگر تعداد مول‌های فراورده برابر $\frac{۱}{۲}$ مول‌های هر یک از واکنش‌دهنده‌ها باشد و با کاهش دما (در حجم ثابت) شمار مول‌های فراورده، برابر مجموع شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها شود، ثابت تعادل جدید به طور تقریبی کدام است؟

۱) ۳/۵

۲) ۷

۳) ۳۵

۴) ۷۰

مشاوره *این شما و این پای ثابت سؤالای کنکور!* مسائل ثابت تعادل (K) و عوامل مؤثر بر تعادل (اصل لوشاتلیه)، همواره مورد توجه طراحان کنکور بوده‌اند *و اتفاقاً در کنکور ۱۴۰۴ تلاش کرده‌اند* با سطح بالاتری از سؤالات، شما را غافلگیر کنند. خلاصه این‌که از این مبحث سعی کنید *مسابی* مسئله حل کنید و در حل همهٔ این تست‌ها *مواستون* به حجم ظرف و جای‌گذاری غلظت‌های تعادلی نیز باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به این‌که شمار مول‌های فراورده، نصف شمار مول‌های هر یک از واکنش‌دهنده‌ها و حجم ظرف ثابت و برابر با ۴ لیتر است، می‌توان گفت که غلظت مولی فراورده نیز نصف غلظت مولی هر یک از واکنش‌دهنده‌ها است. حال غلظت مولی فراورده را برابر با x و غلظت مولی هر یک از واکنش‌دهنده‌ها را برابر با $۲x$ در نظر گرفته و با توجه به مقدار ثابت تعادل (K)، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$K = \frac{[NO_۲]^۲}{[NO]^۲[O_۲]} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{x^۲}{(۲x)^۲ \times (۲x)} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۱}{۸x} \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۶۴} = \frac{۵}{۳۲}\ mol.L^{-۱}$$

نکته

بررسی کلی عوامل مؤثر بر تعادل:

عامل			عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت		افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده	تغییر نمی‌کند.
		کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)		افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر	تغییر نمی‌کند.
		کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر	تغییر نمی‌کند.
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.

با توجه به این‌که در تعادل گازی $۲NO(g) + O_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO_۲(g)$، شمار مول‌های گازی در سمت راست (سمت فراورده) کم‌تر است؛ بنابراین این تعادل گازی در جهت رفت، یک تعادل گرماده بوده و علامت Q باید در سمت راست معادله قرار گیرد:

$$۲NO(g) + O_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO_۲(g) + Q$$

Telegram: @konkur_in

یه‌جور دیگه

هم‌چنین با توجه به این‌که با کاهش دما، ثابت تعادل (K) *(با یه نیم‌نگاه به گزینه‌ها!)* افزایش یافته است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش دما، این تعادل در جهت تولید گرما پیش رفته و چون ثابت تعادل افزایش یافته است؛ پس تعادل در جهت **رفت** پیش رفته و در نتیجه این تعادل گازی در جهت رفت، **گرماده** است.

بنابراین با توجه به این‌که این تعادل گرماده (در جهت رفت)، با کاهش دما در جهت تولید گرما (جهت رفت) پیش می‌رود، می‌توان گفت که:

$$2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$$

غلظت پیش از جابه‌جایی تعادل	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$
تغییر غلظت	$-2y$	$-y$	$+2y$
غلظت‌ها در تعادل جدید	$\frac{5}{16}-2y$	$\frac{5}{16}-y$	$\frac{5}{32}+2y$

باز هم با توجه به این‌که حجم ظرف ثابت بوده و پس از کاهش دما و برقراری مجدد تعادل، شمار مول‌های فراورده، برابر با مجموع شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها است، می‌توان نتیجه گرفت که غلظت مولی فراورده نیز برابر با مجموع غلظت مولی واکنش‌دهنده‌ها می‌باشد:

$$(\frac{5}{16}-2y)+(\frac{5}{16}-y)=(\frac{5}{32}+2y) \Rightarrow 5y=5(\frac{1}{8}-\frac{1}{32}) \Rightarrow y=\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{3}{32}\ mol.L^{-1}$$

در نتیجه غلظت تعادلی مواد شرکت‌کننده در این واکنش پس از کاهش دما و برقراری مجدد تعادل به صورت جدول زیر است:

$$2NO(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$$

غلظت تعادلی جدید مواد پس از کاهش دما	$\frac{4}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{11}{32}$

بنابراین ثابت تعادل جدیدمون برابره با:

$$K=\frac{[NO_2]^2}{[NO]^2[O_2]}=\frac{(\frac{11}{32})^2}{(\frac{4}{32})^2\times(\frac{7}{32})}=\frac{121\times 32^{2}}{16\times 7}=\frac{242}{7}\simeq 35\ L.mol^{-1}$$

کنکور

در دمای معین، تعادل گازی: $K=0/5$ ، $2NO+O_2 \rightleftharpoons 2NO_2$ ، در ظرف ۵لیتری برقرار و شمار مول‌های فراورده، برابر شمار مول‌های هر یک از واکنش‌دهنده‌ها است. اگر با کاهش دما، شمار مول‌های فراورده، برابر مجموع شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها شود. ثابت تعادل جدید، به تقریب، کدام است؟ *(سؤال ۱۰۹ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۳/۴۰ ۲) ۲/۵۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۱/۷۰